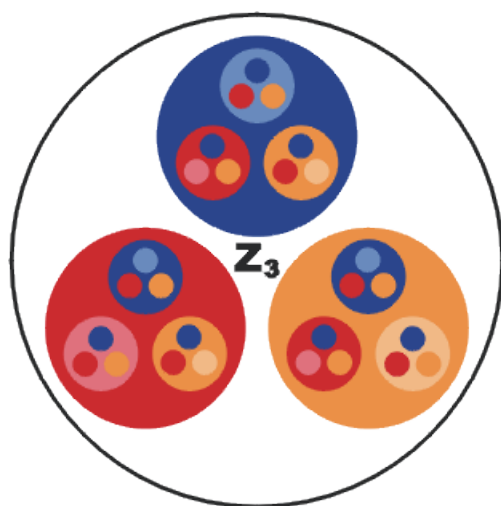


חבורות פרו־סופיות

מצאת טעות? הודע לי עוד היום וזכה לקרדיט ותהילת עולם!



תוכן עניינים

4	מבוא	1
4	1.1 מנהלות	
4	1.2 תורת גלואה של הרחבות אינסופיות	
6	2 גבול הפוך	2
10	2.1 דוגמאות	
11	3 תכונות של חבורות פרו-סופיות	3
13	4 סדרים של חבורות פרו-סופיות	4
13	4.1 מספר על-טבעיים	
14	4.2 חבורות p -סילו	
16	4.3 חבורות פרו-ציקליות	
17	4.4 חבורות פרו-סופיות חופשיות	
19	5 קוהומולוגיה של חבורות פרו-סופיות	5
20	5.1 קוהומולוגיה בממדים נמוכים	
21	5.1.1 חבורות הקוהומולוגיה השנייה	
23	5.1.2 קוהומולוגיה בממדים גבוהים יותר	
24	6 עצי פרו- p	6
26	6.1 מודולים פרו-סופיים	
27	6.2 הומולוגיה של גרף פרו-סופי	

מרצה: פרופ' צליל סלע

מסכם: עומר שכטר

ניתן בסמסטר אביב ה'תשע"ה באוניברסיטה העברית בירושלים
הסיכום לא סופי ומעודכן לל"ג בעומר ה'תשע"ה (07.05.2015)
אשמח מאוד לקבל תיקוני טעויות קלות כחמורות

1 מבוא

הקורס הזה עוסק בחבורות פרו־סופיות (או פרו־ p). הדברים שנרצה להגיע אליהם, לפחות לדעת המרצה, זו הבעייתיות הבאה. חבורות פרו־סופיות, אם מסתכלים מהכיוון של חבורות דיסקרטיות, הוא להבין את כל ההעתקות מחבורה G לחבורות סופיות. בחבורות דיסקרטיות, אחת הפעולות הבסיסיות שניתן לבצע על חבורות היא – אם יש לנו שתי חבורות A, B ויש איזושהי חבורה שלישית $C \hookrightarrow A$ וגם $C \hookrightarrow B$ ניתן להסתכל על המכפלה הממוזגת $A *_C B$. המכפלה הממוזגת בקטגוריה הפרו־סופית הרבה יותר מסובכת או לא מתאימה לקטגוריה. למכפלה הזו יש הרבה תכונות – $A, B, C \hookrightarrow A *_C B$, או שניתן לתאר בצורה קומבינטורית את כל האיברים במכפלה הממוזגת, או שניתן לתאר את האיברים בצורה נורמלית סטנדרטית.

כשעוברים לקטגוריה הפרו־סופית, בנקודת המבט הזאת דברים מסתבכים. אם $C \hookrightarrow A$ וגם $C \hookrightarrow B$ ואנחנו רוצים לבחון את כל ההעתקות לחבורות סופיות. כל העתקה מ־ A לחבורה סופית משרה העתקה ב־ C , אבל לא בהכרח להפך. זה גם לא בהכרח מתואם (קומפטיבילי) עם B . אם נרצה להסתכל על אוסף העתקות בין A לחבורות סופיות, B לחבורות סופיות, לא בטוח שניתן לדבר על $A *_C B$ לתוך חבורות סופיות. המכפלה הממוזגת הורסת את המבנה וזו בעיה. אנו ננסה ללמוד את הדברים האלה.

1.1 מנהלות

יש שני ספרי קורס (העותקים מהספרייה נמצאים אצל פרופ' סלע):

1. L. Ribes, Introduction to profinite groups & Galois cohomology. אלו רשימות שלו משנת 60־ה.

2. L. Ribes & P. Zalesskii, Profinite groups. הוא יותר אנציקלופדי ונמצא במרשתת.

תהיה ככל הנראה עבודה בסוף הקורס.

1.2 תורת גלואה של הרחבות אינסופיות

המוטיבציה הבסיסית ללמוד חבורות פרו־סופיות באה מתורת גלואה של הרחבות אינסופיות. במקרה של הרחבות סופיות, אם k שדה ו־ L הרחבה סופית ונורמלית (גלואה) של k . אזי $Gal(L/k)$ היא חבורת גלואה המתאימה, ויש התאמה חז"ע בין שדות ביניים $k \subset \hat{L} \subset L$ לבין תתי־חבורות ב־ $Gal(L/k)$ המקבעות את איברי $\hat{L}$. זהו המשפט היסודי של תורת גלואה. בנוסף, המשפט טוען כי אם $\hat{L}$ היא הרחבה נורמלית של k , אזי התתי־חבורה המתאימה היא תתי־חבורה נורמלית.

יהא k שדה בסיס ו־ $k \subset N$ הרחבה אינסופית נורמלית (תזכורת: אם לפולינום ב־ $k[x]$ יש שורש ב־ N , אזי כל השורשים ב־ N). נסתכל על חבורת גלואה של ההרחבה $Gal(N/k)$ ועל שדות הביניים של N המכילים את k . לכל $H \leq Gal(N/k)$ אזי יש העתקה ל־ $N^H \subset Fix(H) \subset N$. השאלה הבסיסית פה היא האם אנחנו רוצים להכליל את המשפט היסודי של תורת גלואה למקרים אינסופיים – מה התמונה של שתי ההעתקות האלה? אילו תתי־חבורות של חבורת גלואה יתקבלו כתמונה של שדות ביניים. נסמן

$$\varphi : L \rightarrow Gal(N/L)$$

$$\psi : H \rightarrow Fix(H)$$

כאשר המקור של φ הוא שדות ביניים והמקור של ψ הוא תתי־חבורות של חבורת גלואה.

טענה 1: $\psi \circ \varphi(L) = L$ כאשר L שדה־ביניים.

הוכחה: $\varphi(L) = Gal(N/L)$. לכן, ברור ש־ $L \subseteq Fix(\varphi(L))$, ובסימונים שלנו $L \subseteq \psi \circ \varphi(L)$. N היא הרחבה נורמלית של k ולכן היא הרחבה נורמלית של L , ואז אם $x \notin N \setminus L$, אזי קיים $\sigma \in Aut(N/k)$ המקבע את L ו־ $\sigma(x) \neq x$. לכן $x \notin Fix(\varphi(L))$. מכאן $Fix(\varphi(L)) = L$. ■

מסקנה 2: φ חז"ע ו־ ψ על.

הערה 3: באופן כללי, ההעתקה ψ איננה חז"ע וההעתקה φ איננה על. כלומר, ניתן למצוא תתי־חבורות שונות בתוך $Gal(N/k)$ עם אותו שדה־שבת.

כדי לתקן את המעוות, נרצה להגדיר טופולוגיה על החבורת-גלואה, כך שפעולות הכפל וההופכי תישארנה רציפות, זה מה שהיפוך אותו בעצם לחבורה פרו־סופית. כדי להגדיר טופולוגיה יש להגדיר מיהן הקבוצות הפתוחות. כדי להגדיר את הקבוצות הפתוחות נגדיר בסיס לקבוצות הפתוחות.

טופולוגיית קרול
הגדרה 4: עבור חבורת-גלואה $Gal(N/k)$, טופולוגיית קרול שלה, תהיה טופולוגיה הנוצרת מהבסיס המקומי ליחידה $S = \{Gal(N/L) \mid L \text{ is a finite normal extension of } k\}$.

הערה 5: במקרה הדיסקרטי (אם ההרחבה סופית) לא שינינו כלום. כלומר, נקבל את אותה חבורה.

הערה 6: בטופולוגיה הזו, איברים קרובים $\sigma, \tau \in Gal(N/k)$, נתבונן ב- $\sigma^{-1}\tau$. $\sigma Gal(N/L) = \tau Gal(N/L)$ גורר ש- $\sigma^{-1}\tau \in Gal(N/L)$ וזה אם ורק אם $\sigma|_L = \tau|_L$. קרי, שני איברים יהיו קרובים אם פעולתם זהה על שדה מספיק גדול.

משפט 7: $Gal(N/k)$ עם הטופולוגיה הנ"ל מקיימת:

1. האוסדורף (T_2) .

2. קומפקטיות.

3. בלתי-קשירה לחלוטין.

הוכחה: ראשית נרצה להוכיח שהמרחב הוא האוסדורף, ופירושו שניתן להפריד כל שני איברים באמצעות קבוצות פתוחות זרות. $N = \bigcup_{L:k \text{ is finite}} L$. וזה גורר ש- $Gal(N/L) = \{1\}$ אם $L:k$ is finite and normal. אם $\sigma \neq \tau$ אז $\sigma^{-1}\tau \neq 1$ ואז $\sigma^{-1}\tau \notin Gal(N/L)$ וזהו קבוצה פתוחה בטופולוגיה. לכן $\sigma Gal(N/L) \cap \tau Gal(N/L) = \emptyset$ ולכן המרחב הוא האוסדורף. כדי להוכיח קומפקטיות, נגדיר הומומורפיזם

$$h : G \rightarrow \prod_{L \text{ is finite normal extension}} Gal(N/L)$$

כך שההעתקה היא צמצום של הפעולה רכיב-רכיב. כל אחד מהאיברים במכפלה דיסקרטי ולכן קומפקטי, ולכן מטיכונוף גם המכפלה קומפקטי. נראה כי h רציפה, חז"ע ושהיא הומומורפיזם בין G לבין $h(G)$ שהיא תתי-קבוצה סגורה, ולכן קומפקטית. ראשית, h חז"ע, כי קיים L כך שאם $\sigma \neq 1$ כך ש- $\sigma|_L \neq id$ ולכן באחת הקואורדינטות נקבל פעולה שאינה טריוויאלית (כי אם איבר היה פועל טריוויאלית בכל רכיב הוא היה ב- $\{1\} \cap Gal(N/L)$). ההעתקה רציפה כי:

$$G \xrightarrow{h} \prod_L Gal(L/k) \xrightarrow{P_k} Gal(L/k)$$

ומהתכונה האונברסלית של מכפלה נקבל כי h רציפה אם לכל רכיב L $P_L \circ h$ רציפה, אבל ישירות מההגדרה $(P_L \circ h)^{-1}(\{1\}) = Gal(N/L) -$ ולכן היא רציפה.

למה 8: $h(G)$ סגורה. הוכחה: בתוך המרחב $Y = \prod Gal(L/k)$ ממקודם. נגדיר תתי-קבוצות סגורות - אלו אותם איברים שהקואורדינטות L_2 מתאימה לקואורדינטה L_1 ונסמן M_{L_2, L_1} (קרי, שהאיבר בקואורדינטה L_2 יהיו קומפטיביליים עם האיברים בקואורדינטה L_1). ברור שאיברים שמגיעים מ- G יקיימו זאת.

$$h(Gal(N/k)) \subseteq \bigcap_{L_1 \subseteq L_2 \text{ finite Galois extensions}} M_{L_2, L_1}$$

ולכן $h(Gal(N/k))$ מוכלת בתוך קבוצה סגורה. אם

$$y_0 \in \bigcap_{L_1 \subseteq L_2 \text{ finite Galois extensions}} M_{L_2, L_1}$$

אזי קיים $\sigma \in G$ כך ש- $h(\sigma) = y_0$ על ידי בנייה קואורדינטה קואורדינטה, נניח על ידי הלמה של צורן. ■

הוכחה: נמשיך בהוכחה. כעת, לפי משפט, העתקה רציפה מהאוסדורף לקומפקטית שהיא חח"ע היא הומיאומורפיזם.

נוכיח כעת שהמרחב הוא בלתי-קשיר לחלוטין. תהא $H \subseteq G = \text{Gal}(N/k)$ קבוצה קשירה המכילה את $\{1\}$. נרצה להראות שהיא רק $\{1\}$. נניח בשלילה $2 \leq |H|$, אזי קיימת הרחבה סופית נורמלית שעבורה $2 \leq |P_L \circ h(H)|$, אזי ניתן למצוא שתי קבוצות פתוחות O_1, O_2 זרות כך ש- $h(H) \cap O_1 \neq \emptyset$ וגם $h(H) \cap O_2 \neq \emptyset$. ■

טענה 9: $k \subseteq N$ הרחבה נורמלית. התת-חבורות הפתוחות של $\text{Gal}(N/k)$ הן בדיוק מהצורה $\text{Gal}(N/\bar{L})$ כאשר $\bar{L}$ הרחבה סופית (לא בהכרח נורמלית) של k . התת-חבורות הסגורות הן חיתוכים של תת-חבורות פתוחות.

משפט 10 (המשפט היסודי של תורת-גלואה האינסופית): תהא $k \subseteq N$ הרחבת גלואה. נגדיר $F(N) = \{L | k \subseteq L \subseteq N, \text{ is a field}\}$ ו- $CG = \{H | H \leq \text{Gal}(N/k), \text{ is a close subgroup}\}$. נגדיר העתקות

$$\varphi : F(N) \rightarrow CG$$

$$\varphi(L) \rightarrow \{\sigma \in \text{Gal}(N/k) | \sigma|_L = id_L\}$$

$$\psi CG \rightarrow F(N)$$

$$\psi(H) \rightarrow \text{Fix}(H)$$

אזי $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = id$. בנוסף, אם L היא הרחבה נורמלית אם ורק אם $\varphi(L) \triangleleft \text{Gal}(N/k)$ ומתקיים

$$\text{Gal}(L/k) = \text{Gal}(N/k) / \text{Gal}(N/L)$$

חבורה סופית פרו- חבורה תיקרא פרו-סופית אם היא חבורה טופולוגית שהיא האוסדורף, קומפקטית ובלתי-קשירה לחלוטין.

עובדה 12: כל חבורת גלואה כמו שהגדרנו היא כזו, מסתבר שזה גם נכון בכיוון ההפוך – כל חבורה פרו-סופית היא חבורת גלואה של איזשהו שדה.

השערה 13: שאלה פתוחה גדולה היא האם כל חבורה סופית היא חבורת-גלואה של הרחבה כלשהי של $\mathbb{Q}$, זוהי השערת גלואה ההפוכה. לא על זה מדובר כאן, אנחנו מדברים על שדה כלשהו.

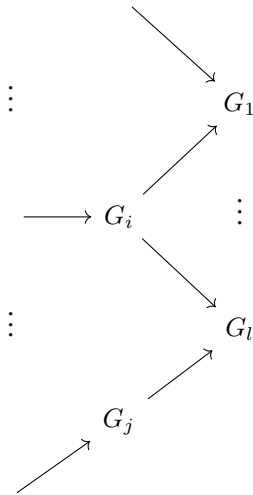
דרך אחרת ליצור חבורות פרו-סופיות היא על ידי גבול-הפוך של דיאגרמה של חבורות. כאשר יש לנו משפחה של חבורות המסומנות על ידי קבוצה מכוונת I והעתקות קומפטיביליות ביחס לכיוון של I .

2 גבול הפוך

נסתכל על גבולות פרויקטיבים של חבורות סופיות. יהיו לנו $\{G_i\}_{i \in I}$ כאשר I קבוצה מכוונת

קבוצה מכוונת הגדרה 14: קבוצה תיקרא מכוונת אם מוגדר עליה סדר חלקי $\leq$, ומקיימת: לכל שני אינדקסים i, j קיים אינדקס שלישי k כך ש- $i \leq k \wedge j \leq k$.

יהיו לנו אוסף של מורפיזמים קומפטיביליים השומרים על הכיוון. המערכת תיראה בערך כך:

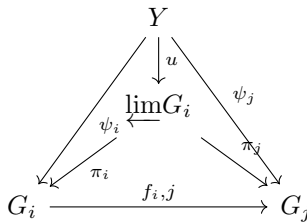


נסמן את הגבול ההפוך על ידי

גבול הפוך

$$G = \varprojlim G_i$$

והוא יופיין על ידי התכונה האוניברסלית הבאה. $(G_i, f_{i,j})$ מערכת הפוכה של חבורות ו- π_i הטלות המקיימות $\pi_i = f_{i,j} \circ \pi_j$ לכל (Y, ψ_i) כאשר $\psi_i : Y \rightarrow G_i$ עם $\psi_i = f_{i,j} \circ \psi_j$ קיים מורפיזם יחיד $u : Y \rightarrow G$ הגורם לדיאגרמה הבאה להתחלף:



נרצה להוכיח את המשפט הבא:

משפט 15: חבורה פרו-סופית היא גבול פרויקטיבי של חבורות סופיות.

הערה 16: המשפט הזה יאפשר לנו להשתמש בכלים של חבורות סופיות כדי לעבוד עם חבורות פרו-סופיות. לדוג', משפט המיון של חבורות פשוטות.

לצורך המשפט נוכיח מספר למות.

למה 17: X מרחב קומפקטי האוסדורף, $x \in X$. יהיו $\{U_q, q \in Q\}$ אוסף הסביבות הקומפקטיות והפתוחות המכילות את x . נסתכל על $A = \bigcap_{q \in Q} U_q$ קשירה.

מסקנה 18: אם G בלתי-קשירה לחלוטין, אזי $\bigcap U_q = x$. כי היחידונים הם הקבוצות הקשירות היחידות.

הערה 19: G חבורה קומפקטית ו- $H \leq G$ תת-חבורה פתוחה, אזי היות שאוסף המחלקות השמאליות שלה הוא סופי, וכל מחלקה שמאלית היא פתוחה, ולכן המשלים הוא איחוד סופי של פתוחות. לכן H סגורה. מכאן, כל פתוחה סגורה, ולכן קומפקטית.

הוכחה: (של הלמה): נניח כי A איננה קשירה. אזי $A = U \cup V$ כאשר הן קבוצות סגורות (כי הן פתוחות, ולכן סגורות). נזכר במשפט מטופולוגיה הקובע שמרחב האוסדורף קומפקטי הוא נורמלי, ולכן ניתן להפריד כל זוג קבוצות סגורות על ידי קבוצות פתוחות - $U \subseteq \hat{U}, V \subseteq \hat{V}, \hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$ וגם $\hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$ כעת, $A \subseteq \hat{U} \cup \hat{V}$ ולכן

$$A \cap (X \setminus (\hat{U} \cup \hat{V})) = \emptyset$$

ומכאן $X \setminus (\hat{U} \cup \hat{V})$ קומפקטי. לכן מהגדרת A

$$\left(\bigcap_{q \in Q} U_q \right) \cap (X \setminus (\hat{U} \cup \hat{V})) = \emptyset$$

ומספיק לקחת פה כיסוי סופי, שכן זו קבוצה קומפקטית. נסמן $\tilde{Q}$ להיות התת-קבוצה הסופית המתאימה של Q . נגדיר

$$B = \bigcap_{q \in \tilde{Q}} U_q$$

וקיבלנו ש- B קומפקטית ופתוחה כחיתוך סופי של פתוחות קומפקטיות. לכן

$$B \subseteq \hat{U} \cup \hat{V}$$

ונקבל

$$B = (B \cap \hat{U}) \cup (B \cap \hat{V})$$

זה איחוד של פתוחות קומפקטיות. $x \in B$ ולכן $x \in \hat{U}$ או $x \in \hat{V}$ אבל לא לשניהם כי הן זרות (בה"כ $x \in \hat{U}$). נטען כי $A \subseteq B \cap \hat{U} \subseteq \hat{U}$. $A \subseteq B$ קומפקטית ופתוחה, $A \subseteq B$. אם $\hat{U}$ קומפקטית אזי $A \subseteq B \cap \hat{U}$ (שכן A החיתוך של כל הקבוצות הקומפקטיות הפתוחות המכילות את x). נשים לב כי $B \cap \hat{U}$ פתוחה, אבל בנוסף $B \cap \hat{U} = B \cap \hat{V}^c$ ולכן קומפקטית (כי $\hat{V}^c$ קומפקטית), ולכן פתוחה קומפקטית. כעת, היות ש- $A \subseteq \hat{U}$ ומכאן $A \cap \hat{V} = \emptyset$ ולכן $V = \emptyset$. ■

למה 20: G קומפקטית, האוסדורף ובלתי-קשירה לחלוטין. כל סביבת יחידה $1 \in U$ מכילה תת-חבורה נורמלית פתוחה וסגורה מאינדקס סופי ב- G .

הוכחה: (של הלמה): U_q פתוחה וקומפקטית, והוכחנו ש- $\bigcap_{q \in Q} U_q = \{1\}$. תהי $1 \in U$ סביבת יחידה (קבוצה פתוחה המכילה את היחידה), ובתוכה אנחנו רוצים למצוא תת-חבורה נורמלית מאינדקס סופי. נסתכל על

$$(G \setminus U) \cap \left(\bigcap_{q \in Q} U_q \right) = \emptyset$$

מאותו שיקול כמו קודם, ניתן להחליף את החיתוך האינסופי בחיתוך סופי, שכן $G \setminus U$ קומפקטית. $D = \bigcap_{q \in \tilde{Q}} U_q$ קיבלנו קומפקטית ופתוחה.

$$(G \setminus U) \cap D = \emptyset$$

לכן קיימת סביבת יחידה V כך ש-

$$D \cdot V \cap (G \setminus U) = \emptyset$$

(ההוכחה מושארת כתרגיל). מצאנו סביבת יחידה V ולכן $V \cdot D \subseteq D$, סביבת יחידה ולכן

$$V \cap V^{-1} := \hat{V}$$

סביבה סימטרית של יחידה. נקבל ש-

$$\hat{V} \cdot D \subseteq D \implies (\hat{V})^n \cdot D \subseteq D$$

נגדיר $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\hat{V})^n$ ונקבל $K \cdot D \subseteq D$ וגם $K \subseteq D \subseteq U$. זוהי קבוצה פתוחה כאיחוד של פתוחות. תתיחבורה פתוחה צריכה להיות מאינדקס סופי.

$$N = \bigcap_{g \in \text{finite}} gKg^{-1} \subseteq U$$

■ תתיחבורה נורמלית.

קצת נוכיח את המשפט. הוכחה: (של המשפט): יהי גבול פרויקטיבי של דיאגרמה של חבורות סופיות. לגבול ההפוך יש שיכון טבעי בתוך המכפלה הישרה.

$$\varprojlim G_j \hookrightarrow \prod_{i \in I} G_i$$

המכפלה הישרה היא קומפקטית מטיכונוף, ובלתי־קשיר לחלוטין והאוסדורף. התמונה של הגבול ההפוך בתוך זה היא תתי־קבוצה קומפקטית (תרגיל) והוא יורש את התכונות הקודמות – הוא בלתי־קשיר לחלוטין והאוסדורף. בכיוון השני, תהא G קומפקטית, האוסדורף ובלתי־קשירה לחלוטין. נגדיר

$$S = \{U \mid U \text{ open normal nbhd of } 1\}$$

והוכחנו קודם שזה תמיד קיים. נגדיר $\varphi_U : G \rightarrow G/U$ סופית. נרצה להפוך את זה לדיאגרמה פרויקטיבית. עבור $U, V \in S$ המקיימות $U \subseteq V$, אזי קיימת העתקה $h_{u,v} : G/U \rightarrow G/V$. בהגדרת $\{G/U\}_{u \in S}$ ו־ $\{h_{u,v}\}_{u,v \in S}$ יצרנו דיאגרמה פרויקטיבית של חבורות סופיות. ה־ h קומפטיביליים ישירות מההגדרה.

טענה 21: $G \cong \varprojlim G/U$. הוכחה: יש לנו הומומורפיזם $\nu : G \rightarrow \prod_{U \in S} G/U$. $\nu(G) \subseteq \nu(\varprojlim G/U)$.

1. חח"ע. עבור $g \in G$, $g \neq 1$. האוסדורף, ולכן קיימת סביבת יחידה V כך ש־ $g \notin V$ ומכאן קיימת סביבת יחידה נורמלית פתוחה שמוכלת בתוך $U - V$ כך ש־ $g \notin U$. לכן

$$G \rightarrow \prod G/U \xrightarrow{P} G/U$$

ולכן $P_U \circ \nu(g) \neq 1$ ולכן חח"ע.

2. רציפות: כדי להראות שההעתקה למרחב מכפלה רציפה צריך להראות שההעתקה לכל אח מהמרכיבים רציפה. לכן נסתכל על $(P_U \circ \nu)^{-1}(\{1\}) = U$ וזו פתוחה. המקור של יחידון היא קבוצה פתוחה ולכן $P_U \circ \nu$ רציפה ולכן ν רציפה.

3. על: נוכיח למה

למה 22: תהי H חבורה המועתקת לדיאגרמה ל שכל ההומומורפיזמים $H \rightarrow G_U$ הם על. אזי $\varphi : H \rightarrow \varprojlim G/U$ תמונת ההומומורפיזם צפוף בגבול ההפוך.

הוכחה: תהי $V \subseteq \prod G/U$ פתוחה. ונניח כי $V \cap \varprojlim G/U \neq \emptyset$. נרצה להוכיח כי $V \cap \varphi(H) \neq \emptyset$. H . נזכר כי הבסיס של סביבות הפתוחות במרחב־מכפלה הוא הקבוצות הגליליות, ולכן ניתן להניח ש־ V קבוצת בסיס ולכן V מהצורה של

$$V = \prod_{I \notin \{i_1, \dots, i_l\}} G/U_i \times \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_l\}} V_i$$

כאשר $V_i \subseteq G/U_i$ קבוצה פתוחה. הגבול ההפוך חותך את הקבוצה הזו, ולכן יש נקודה בגבול ההפוך שנמצא בכל אחת מהקבוצות הפתוחות המתאימות. היות שמדובר בקבוצה מכוונת, מהגדרה קיים איזשהו

G_{i_0} כך שיש מורפיזמים ממנו אל כל ה- G_i עבור $i \in \{i_1, \dots, i_l\}$. מכאן קיים $x_{i_0} \in G_{i_0}$ ומתקיים שקיימים $x_{i_1} \in G_{i_1}, x_{i_2} \in G_{i_2}$ וכו' כך ש- x_{i_0} מעתק אליהם. אבל H הוא על כל G/U ולכן קיים $h \in H$ כך ש- $\varphi(h) \in V$ ולכן $P_{i_0} \circ \varphi(h) = x_{i_0}$.

הוכחה: כעת, היות ש- G קומפקטית, התמונה שלה קומפקטית וצפופה, ולכן זה כל הגבול ההפוך. הוכחנו שהיא חח"ע, על ורציפה, פתוחה ולכן הומיאומורפיזם.

2.1 דוגמאות

הגדרה 23: חבורה תיקרא מובחנת סופית (Residually finite) אם לכל $g \neq 1$ יש תת-חבורה מאינדקס סופי שאינה מכילה את האיבר הזה. באופן שקול, חיתוך כל התת-חבורות הנורמליות שלה הוא היחידה. חבורה מובחנת סופית

0. בחבורות דיסקרטיות, אם נקח את Γ להיות חבורה נ"ס (פחות חשוב) ומובחנת סופית (יותר חשוב), אז נוכל לבנות דיאגרמה פרויקטיבית שמתאימה לחבורה הזו, על ידי כל האפימורפיזמים מ- Γ לחבורות סופיות שונות

$$\{h : \Gamma \rightarrow \text{Fin}\}$$

וכך נקבל דיאגרמה שלמה על ידי כל התמונות הסופיות של Γ . הגבול ההפוך ייקרא ההשלמה הפרו-סופית של Γ והיא תסומן $\hat{\Gamma} = \varprojlim \Gamma_i$. נשים לב שהדרישה למובחנות-סופית חשובה, אחרת לא נוכל להבדיל באיברים הנמצאים ב- $\ker h$ בהשלמה הפרו-סופית. השלמה פרו-סופית

1. חבורת גלואה של הרחבה אלגברית נורמלית. נימקנו כבר מדוע זהו גבול הפוך של דיאגרמה של הרחבות סופיות.

2. חבורת Prueffer, שהיא ההשלמה הפרו-סופית של $\mathbb{Z}$ המוגדרת $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ כאשר ההעתקות הן $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{m|n} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

3. שדה מספרים - $[K : \mathbb{Q}] < \infty$ ונסמן את חוג השלמים האלגבריים בו ב- $\mathcal{O}$ (קרי, פתרון לפולינום מתוקן בשלמים). נגדיר את $\{\mathcal{O}/I \mid I \text{ is ideal in } \mathcal{O}\}$. כעת אפשר להסתכל על $\varprojlim \mathcal{O}/I$ כחבורה חיבורית.

4. $\mathbb{F}_p$ כאשר p ראשוני. נסתכל על $\hat{\mathbb{F}}_p$ הסגור האלגברי שלו. נסתכל על חבורת גלואה שלו - $\text{Gal}(\hat{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$. אבל אמרנו שאנחנו מסתכלים רק על הרחבות סופיות כמו בסעיף 1, והיות שאם $[K : \mathbb{F}_p] = m$ בהכרח $K = \mathbb{F}_{p^m}$ שכן קיים רק שדה אחד כזה והוא שדה הפיצול של הפולינום $x^{p^m} - x$ וחבורת-גלואה היא ציקלית מסדר m שהיוצר שלה הוא אוטומורפיזם פרובניוס $\varphi(x) = x^p$. לכן חבורת גלואה תהיה חבורת פרופר, כמו בסעיף 2.

5. החבורה החיבורית של השלמים ה- p -אדים. שלם p -אדי ניתן להצגה $\sum_{m \geq 0} a_m p^m$ כאשר $0 \leq a_m \leq p-1$. אוסף השלמים ה- p -אדים מסומן $\mathbb{Z}_p$. אפשר להגדיר העתקה $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$ שבה אנחנו שוכחים מאיבר הזנב בטור. זוהי דיאגרמה אזי ניתן להסתכל על הגבול ההפוך $\varprojlim \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$. זאת חבורה פרו-סופית. כל איבר לא טריוויאלי יעתק החל ממקום מסוים לאיבר לא טריוויאלי לאיזשהו $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$ ולכן זו העתקה חח"ע. היא גם על. ולמעשה היא הומיאומורפיזם (לא נוכיח). החבורה החיבורית של השלמים ה- p -אדים היא ההשלמה הפרו-סופית של החבורות האלה.

הערה 24: ניתן להגדיר את ה- p -אדים גם בצורה אחרת, על ידי הגדרת הנורמה ה- p -אדית, ונראה שמתקבל גבול הפוך של החבורות הפרויקטיביות האלה. לגישה זו מומלץ לקרוא את הספר של J. P. Serre על תורת-המספרים.

6. החבורה הכפלית של השלמים ה- p -אדים ההפיכים. האיברים ההפיכים הם איברים מהצורה $U = \{1 + p \cdot \mathbb{Z}_p\}$, ונסמן $U_l = \{1 + p^l \cdot \mathbb{Z}_p\}$. כעת נוכל להסתכל על $\varprojlim \mathbb{Z}_p^*/U_l$ ונקבל את החבורה הכפלית של השלמים ה- p -אדים.

7. נקח איזשהו עץ עם שורש (קדקוד מסויים שנבחר שייקרא ה-"שורש"), ונדאג שהוא סופי-מקומית (הדרגה של כל קדקוד סופית). נסמן את העץ Tr ונסתכל על $G = Aut(Tr)$, זוהי תמיד חבורה פרו-סופית (לא בהכרח חילופית). אם $\sigma \in G$ נוכל להסתכל על הצמצום של σ לפעולה על הקומה הראשונה של העץ. הצמצום הזה מוכל בחבורה הסימטרית מדרגה m שהיא דרגת השורש. נקבל דיאגרמה פרויקטיבית של חבורות סופיות. הגבול ההפוך הזה יהיה בדיוק G .

3 תכונות של חבורות פרו-סופיות

טענה 25:

1. G פרו-סופית, $H \leq G$ סגורה, אזי H פרו-סופית.
2. $H \leq G$ נורמלית וסגורה אזי G/H פרו-סופית.
3. אם $\{G_i\}$ פרו-סופית לכל i , אזי $\prod G_i$ גם פרו-סופית.

הוכחה:

1. G קומפקטית ו- H סגורה ולכן H קומפקטית. G האוסדורף גורר H האוסדורף. G בלתי-קשירה לחלוטין ולכן H בלתי-קשירה לחלוטין. לכן H פרו-סופית מהגדרה.
2. G קומפקטית גורר G/H קומפקטית. לצורך האוסדורף יהיו $g_1 H \neq g_2 H$ אזי צריך להראות שתי קבוצות פתוחות $V_1, V_2 \subseteq G$ כך ש- $g_1 \in V_1, g_2 \in V_2$ ו- $V_1 H \cap V_2 H = \emptyset$. בחבורה טופולוגית H סגורה ו- $g_2^{-1} g_1 H \neq H$ אזי קיימת סביבת יחידה V כך ש- $H \cap g_2^{-1} g_1 H = \emptyset$, ההמשך מושאר כתרגיל.
3. קומפקטיות מקבלים מטיכונוף. מכפלה של בלתי-קשירים לחלוטין היא בלתי-קשירה לחלוטין, ובאופן דומה עבור האוסדורף.

■

מסקנה 26: (מטענה 3) אם $\{G_i, \varphi_{i,j}\}$ מערכת פרויקטיבית של חבורות פרו-סופיות אזי $\varprojlim G_i$ אף הוא פרו-סופי. זאת שכן $\varprojlim G_i \hookrightarrow \prod G_i$ והגבול ההפוך קומפקטי במכפלה.

טענה 27: $K \subseteq H \subseteq G$ חבורות פרו-סופיות. אזי קיימת העתקה (כמרחבי מנה):

$$\eta : G/H \rightarrow G/K$$

רציפה, וקיימת העתקה טבעית בכיוון ההפוך

$$\pi : G/K \rightarrow G/H$$

$$\pi \circ \eta = id|_{G/H}$$

הוכחה:

- מקרה פרטי: נוכיח קודם למקרה $[H : K] < \infty$. שכן יש לנו מבנה פרו-סופי, אם נדע את זה לאינדקס סופי, אזי ההוכחה הכללית תהיה עם הלמה של צורן. K קומפקטית ב- H ומאינדקס סופי, K קומפקטית ופתוחה. קיימת תת-חבורה נורמלית ופתוחה $U \leq G$ (ומאינדקס סופי, כי היא נורמלית ופתוחה) כך ש- $H \cap U \leq K$, כי יש מספר סופי של מחלקות שמאליות מחוץ ל- K ונקח את החיתוך שלהם יהיה בתוך K . לכן קיימים $\{x_1, \dots, x_n\}$ נציגי המחלקות של UH ב- G . נקבל

$$G/H = \bigcup_{i=1}^n x_i UH/H$$

נראה כי ההעתקה π ניתנת לפירוק להעתקה:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\pi_i} & \\ x_i^{UK/K} & & x_i^{UH/H} \\ & \xleftarrow{\pi_i^{-1}} & \end{array}$$

ועל:

- חח"ע: בהינתן i , נראה שאין שני קוסטים שעוברים לאותו קוסט - $x_i u_1 K, x_i u_2 K$ שעוברים ל- $x_i u_j H$, ומכאן נובע כי $x_i u_1 H = x_i u_2 H$. מכאן נקבל ש- $H = u_2^{-1} u_1 H$ ולכן $u_2^{-1} u_1 \in H$, אבל מצד שני $u_2^{-1} u_1 \in U$ ולכן $U \leq K$.
- על: טריוויאלי.
- רציפות: ישר מההגדרה, אלו מרחבי-מנה. מושאר כתרגיל.

- מקרה כללי: $K \subseteq T \subseteq H \subseteq G$ עם $[H : T] < \infty$. אם קיימת $\hat{T}$ כך ש- $K \subseteq \hat{T} \subseteq T \subseteq H \subseteq G$ ונניח ובנינו העתקות

$$\begin{array}{ccc} G/H & \xrightarrow{\eta_T} & G/T \\ & \searrow \eta_{\hat{T}} & \downarrow \tau \\ & & G/\hat{T} \end{array}$$

נגדיר סדר $(T, \eta_T) < (\hat{T}, \eta_{\hat{T}})$ על פי הדיאגרמה. נגדיר שרשרת $(T_\alpha, \eta_{T_\alpha})$ סדורה היטב. $T = \bigcap T_\alpha$. (כאשר כל T_α פרו-סופיות) ולכן T פרו-סופית. רוצים למצוא העתקה רציפה $G/H \rightarrow G/T$. קיימת העתקה טבעית

$$\forall_\alpha \nu_\alpha : G/H \rightarrow G/T_\alpha$$

נסתכל על $\varprojlim G/T_\alpha$, הוא בדיוק G/T . על ידי העתקה רציפה ועל. צריך לבדוק חח"ע, אם $xT = yT$ אזי לכל α $xT_\alpha = yT_\alpha$ ולכן $y^{-1}x \in T_\alpha$ ולכן $y^{-1}x \in T$. כדי לסיים את ההוכחה יש להשתמש בלמה של צורן, ולשם כך צריך להראות שלכל שרשרת יש חסם מלעיל.

■

פרופ' סלע: "אני לא חושב שאני אמשיך את ההוכחה והפרטים של המשפט הזה"

פנקטור מדויק הגדרה 28: פנקטור ייקרא מדויק אם הוא שומר על דיוק של סדרות מדויקות.

נסמן דיאגרמה פרויקטיבית של חבורות פרו-סופיות $\{G_i, \psi_{i,j}\}$ כאשר $\psi_{i,j} : G_i \twoheadrightarrow G_j$ אזי ניתן לעבור מהדיאגרמה אל $G = \varprojlim G_i$ וזהו פנקטור.

טענה 29: הפנקטור הנ"ל הוא פנקטור מדויק. פירושו, בהינתן

$$1 \rightarrow \{H_i, \varphi_{i,j}\} \xrightarrow{\sim} \{G_i, \psi_{i,j}\} \twoheadrightarrow \{K_i, \kappa_{i,j}\} \rightarrow 1$$

כאשר $K_i = G_i/H_i$ נקבל, לאחר הפעלת הפנקטור את הסדרה

$$1 \rightarrow H = \varprojlim H_i \rightarrow G = \varprojlim G_i \rightarrow K = \varprojlim K_i \rightarrow 1$$

והיא מדויקת.

הוכחה: לכל i , $f_i : H_i \rightarrow G_i$ חח"ע ו- $s_i : G_i \rightarrow K_i$ על. ניתן להגדיר באופן טבעי העתקות $f : H \rightarrow G$ ו- $s : G \rightarrow K$. הטבעיות של ההעתקות נובעת מכך שהגבול ההפוך משוכן בתוך המכפלה הישרה של H_i, G_i, K_i ונוכל לבחור את ההעתקות המתאימות מהתאימות.

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{f} & G & \xrightarrow{s} & K \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_i H_i & \hookrightarrow & \prod_i G_i & \twoheadrightarrow & \prod_i K_i \end{array}$$

למה 30: s היא העתקה על.

הוכחה: יהי $k \in K$, אזי $k = (x_i)_{i \in I}$ כאיבר בתוך המכפלה הישרה המקיים תנאי תאימות. צריך להראות כי קיים $g \in G$ כך ש- $s(g) = k$. נתבונן בקבוצת האיברים ב- G כך שהקואורדינטה ה- i של $s(g)$ היא x_i . הקבוצה הזו היא קבוצה קומפקטית ב- G (ולמעשה היא סגורה ופתוחה). נסמן ב- X_i את קבוצת האיברים ב- G המעתיקים לאיבר ב- K שהקואורדינטה שלהם ה- i היא x_i (קרי, התמונה שלהם) היא x_i . כאמור X_i קומפקטית ולא ריקה. נסתכל על $\bigcap_i X_i$ וזהו חיתוך של קבוצות קומפקטיות, וחיתוך של כל מספר סופי של כאלה אינו ריק (שכן קיים אינדקס שגדול מכל האינדקסים של הקבוצות הסופיות, והוא לא ריק), ולכן מתכונת החיתוך הסופי לקבוצות קומפקטיות החיתוך כולו אינו ריק. לכן יש איבר ב- K שנמצא בחיתוך הזה, ותמונתו תהיה k . ■

4 סדרים של חבורות פרו-סופיות

4.1 מספר על-טבעיים

כל מספר טבעי ניתן להציג כמכפלה סופית של ראשוניים בחזקות סופיות. $n = p_1^{n(p_1)} \cdot \dots \cdot p_m^{n(p_m)}$. הגדרה 31: מספר על-טבעי הוא מכפלה אינסופית של ראשוניים עם חזקות שיכולות להיות אינסוף - $\prod_p p^{\alpha_p}$ כאשר $0 \leq \alpha_p \leq \infty$. מספר על-טבעי

הגדרה 32: תהי $\{n_i = \prod_p p^{n_i(p)}\}_{i \in I}$ סדרה של מספרים על-טבעיים, אזי:

1. מכפלה של על-טבעיים: $\prod_i n_i = \prod_p p^{\sum_i n_i(p)}$.

2. מחלק משותף מקסימלי: $\gcd\{n_i\} = \prod_p p^{\min(n_i(p))}$.

3. גורם משותף גדול ביותר: $\text{lcm}\{n_i\} = \prod_p p^{\max(n_i(p))}$.

הגדרה 33: הצטננות פרו-סופית, $H \leq G$ תת-חבורה סגורה, אזי $\{[G/U : H/U] \mid U \text{ is an open \& normal subgroup}\}$ הוא מספר על-טבעי. $[G : 1]$ (הסדר של G) יוגדר להיות $[G : 1]$.

תרגיל 34: $[G : H] = \text{lcm}\{[G : U] \mid U \text{ is open and contains } H\}$.

דוגמה 35: 1. $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$. מתקיים $|\mathbb{Z}_p| = p^\infty$.

2. ההשלמה הפרו-סופית של השלמים - $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n \mathbb{Z}$. מתקיים $|\hat{\mathbb{Z}}| = \prod_p p^\infty$ ממשפט השאריות הסיני.

משפט 36: 1. $K \leq H \leq G$ פרו-סופיות, אזי $[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$.

2. $\{H_i\}_{i \in I}$ תת-חבורות סגורות של G ו- $H = \bigcap_{i \in I} H_i$ אזי $[G : H] = \text{lcm}\{[G : H_i]\}$.

3. $\{G_i, \varphi_{i,j}\}$ דיאגרמה פרויקטיבית של חבורות פרו-סופיות, ו- $G = \varprojlim G_i$ אזי $|G| = \text{lcm}\{|G_i|\}$.

4. $G = \prod G_i$ כאשר G_i פרו-סופיות, אזי $|G| = \prod |G_i|$.

5. H תת-חברה סגורה, $[G : H] \in \mathbb{N}$ אזי H תת-חבורה מאינדקס סופי ב- G .

הוכחה:

1. נסתכל על $\{U \mid U \text{ is an open \& normal subgroup in } H\}$ ו- $\{H \cap U \mid U \text{ is an open \& normal subgroup in } G\}$. מהגדרה השני הוא בסיס לפתוחות ונורמליות ב- H .

$$[H : K] = \text{lcm}\{[H/H \cap U : K(H \cap U)/H \cap U]\} = \text{lcm}\{[H/U : KU/U]\}$$

$$[G : K] = \text{lcm}\{[G/U : KU/U]\}$$

לכל U פתוחה נורמלית מתקיים

$$[G/U : KU/U] = [G/U : H/U] \cdot [HU/U : KU/U]$$

כי זה נכון בחבורות סופיות. נקבע p ראשוני. אם $p^\infty \mid [G : K]$ אזי p^∞ חייב לחלק את $[G : H]$ או $[H : K]$. אם $p^\infty \nmid [G : K]$ אזי $p^{n_1} \mid [G : K]$ וגם $p^{n_2} \mid [G : H]$ וגם $p^{n_3} \mid [H : K]$ ונוכל לקחת את $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ החבורות המתאימות, וזוהי חבורה פתוחה ונורמלית ומיד מקבלים ש- $n_1 = n_2 + n_3$ שכן כבר בשלב הסופי רואים את זה.

2. מושאר כתרגיל.

3. מושאר כתרגיל.

4. בסיס לסביבות יחידה ב- G_i ניתן לבחור: $\prod_{i \in I_0} G_i \times U_{i_1} \times \dots \times U_{i_l}$ כאשר $I_0 = \{i_1, \dots, i_l\}$ קבוצה סופית. כעת, כדי להראות שהסדר של G הוא מכפלה של הסדר של ה- G_i , מושאר כתרגיל לקורא.

5. $[G : H] = \text{lcm}_U \{ [G : U] \mid U \text{ is open and contains } H \}$, אבל אם הסדר הזה הוא מספר סופי, אז כל חבורה פתוחה שמכילה את H האינדקס שלה חסום על ידי הסדר הזה, $U_1 \geq H$ ו- $U_2 \geq H$ אזי $U_1 \cap U_2 \geq H$ לכן קיימת חבורה פתוחה מינימלית U_0 שמכילה את H ו- $[G : U_0] = [G : H]$ ונטען שזוהי בדיוק H . אם קיים $\hat{u} \in U_0 \setminus H$ אזי קיימת תת-חבורה מאינדקס סופי, V , כך ש- $\hat{u} \notin V$ ו- $H \subseteq V$ ונתבונן ב- $V \cap U_0$ וזוהי תת-חבורה פתוחה מאינדקס גדול מהאינדקס של U_0 .

■

4.2 חבורות p -סילו

חבורת פרו- p הגדרה 37: חבורת פרו- p היא גבול הפוך של חבורות p .

הגדרה 38: תהי G חבורה פרו-סופית. $P < G$ תיקרא חבורת p -סילו של G אם P חבורת פרו- p ו- $p \nmid [G : P]$. משפט 39 (סילו): G פרו-סופית ו- p ראשוני כלשהו.

1. קיימת חבורת p -סילו של G .

2. כל שתי תת-חבורות p -סילו צמודות.

3. כל חבורת פרו- p ב- G מוכלת בחבורת p -סילו.

4. אם $h : G_1 \rightarrow G_2$ רציפה ועל, P תת-חבורת p -סילו של G_1 אזי $h(P)$ היא תת-חבורת p -סילו של G_2 .

5. $|G| = \prod_p |G_p|$

הוכחה:

1. נקח $U < G$ פתוחה ונורמלית. G/U היא חבורה סופית (מהגדרת פתוחה) ובתוך חבורה סופית יש בהכרח תת-חבורת p -סילו, ממשפטי סילו על חבורות סופיות. לכן, לכל תת-חבורה פתוחה ונורמלית U ניתן להתאים $P_s(U) = \{p\text{-sylow subgroups in } G/U\}$. אם $U_1 < U_2$ פתוחות נורמליות אזי קיימת העתקה $h_{U_1, U_2} : G/U_1 \rightarrow G/U_2$ והיא משרה העתקה $P \mapsto h(P)$ של תת-חבורות p -סילו לתת-חבורות p -סילו. לכן $P_s(U_1) \rightarrow P_s(U_2)$ וקיבלנו מערכת פרוייקטיבית של קבוצות. נסתכל על

$$T \in \varprojlim_{U < G \text{ is open \& normal}} P(U) \neq \emptyset$$

ונחשוב עליו כעל איבר במכפלה $\prod_U P(U)$. כעת

$$U \xrightarrow{T} H_U \xrightarrow{p\text{-sylow}} G/U$$

ונגדיר $H = \varprojlim H_U$ חבורת פרו- p . אבל $H < G = \varprojlim G_U$ ומתקיים

$$[G : H] = \text{lcm}_U (G/U : H_U/U)$$

לכל U מתקיים כי $|HU|$ זר ל- p .

2. H_1, H_2 תת-חבורות p -סילו של G . תהי U פתוחה ונורמלית ונתבונן ב- G/U חבורה סופית. נשים לב ש- $H_1U/U, H_2U/U < G/U$ ושתי הן חבורות p -סילו שכן הן זרות ל- G/U בסדר. היות שאנחנו במקרה הסופי, אנחנו יודעים שהן צמודות ב- G/U . כעת נחפש איבר שיצמיד אותם בכל G . נבנה דיאגרמה שהגבול ההפוך שלה לא ריק ואיבר בגבול ההפוך ייתן לנו דרך להצמיד. נגדיר לכל U פתוחה ונורמלית את קבוצת האיברים המצמידים את התת-חבורות בו:

$$C(U) = \{c \in G/U \mid c^{H_1U/U} c^{-1} = H_2U/U\}$$

עבור $U_1 < U_2$ וישנה העתקה $G/U_1 \twoheadrightarrow G/U_2$ שמשררה העתקה $H_1U_1/U_1 \twoheadrightarrow H_1U_2/U_2$ עבור $i \in \{1, 2\}$ כעת כמו קודם נקבל

$$v \in \varprojlim C(U) \neq \emptyset$$

והוא מצמיד את החבורות.

3. $H \leq G$ פרו- p . U נורמלית ופתוחה, $HU/U < G/U$ חבורת p ולכן מוכלת בחבורת p -סילו שכן אנחנו במקרה הסופי. נגדיר את אוסף החבורות p -סילו המכילות את HU/U :

$$PS_H(U) = \{p\text{-syllow subgroups in } G/U \text{ containing } HU/U\}$$

כעת נבחר

$$T \in \varprojlim PS_H(U) \neq \emptyset$$

וכמו קודם סיימנו.

4. עבור $h: G_1 \rightarrow G_2$ על ורציפה. $P < G_1$ תת-חבורת p -סילו. תהא $U < G_2$ נורמלית ופתוחה. מתקיים כי $h^{-1}(U)$ נורמלית ופתוחה שכן ההעתקה רציפה וההעתקה שלנו תשרה

$$Ph^{-1}(U)/h^{-1}(U) < G/h^{-1}(U) \twoheadrightarrow G_2/U$$

ובמקרה הסופי תמונה של חבורת p -סילו היא, תחת העתקה על ורציפה, חבורת p -סילו משיקולי סדר. וההמשך כמו קודם מושאר כתרגיל.

5. הוכחנו כי $|G_p| \cdot [G'' : G_p] = |G|$ כאשר G_p היא חבורת p -סילו.

■

טענה 40: G פרו-סופית אבלית אזי $G = \prod_p G_p$ כאשר G_p הן התת-חבורות p -סילו.

הוכחה: תהא $U < G$ תת-חבורה פתוחה ונורמלית. אזי מתקיים

$$G/U = \prod_p H_p$$

כאשר H_p הן התת-חבורות p -סילו של G/U . לכן

$$G = \varprojlim G/U = \varprojlim \prod_p H_p = \prod_p \varprojlim H_p = \prod_p G_p$$

■

ממשפט המבנה לחבורות אבליות נוצרות סופית.

הערה 41: אפשר להכליל את ההוכחה גם לחבורות נילפוטנטיות.

4.3 חבורות פרו-ציקליות

טענה 42: יהי p ראשוני ו- $0 \leq n \leq \infty$ אזי קיימת חבורה פרו-ציקלית יחידה מסדר p^n .

הוכחה: נתבונן במקרה $n = \infty$. נניח ש- G היא חבורה פרו-ציקלית ו- $|G| = p^\infty$. מההגדרה $|G| = \text{lcm } |G/U|$ כאשר U פתוחה ונורמלית. נני כי קיימות שתי חבורות פתוחות ונורמליות $U, \hat{U}$ מאינדקס p^m אזי $G/U \cap \hat{U}$ חבורה ציקלית מסדר $p^{m'}$. ישנה העתקה מ- $G/U \cap \hat{U}$ ל- G/U וגם ל- $G/\hat{U}$ והסדר של שתיהן הוא p^m . אבל לחבורה ציקלית מסדר $p^{m'}$ יש מנה יחידה מסדר p^m ולכן $U = \hat{U}$ ומכאן $G = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$. ■

טענה 43: לכל $0 \leq n \leq \infty$ קיימת תת-חבורה סגורה יחידה של $\mathbb{Z}_p$ מאינדקס p^n . אם $n = \infty$ אזי התת-חבורה היא החבורה הטריויאלית. אם $n < \infty$ התת-חבורה איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_p$.

הוכחה: נסתכל על $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$. מההגדרה הזו מתקיים

$$\mathbb{Z}_p > R_1 > R_2 > \dots$$

כאשר $[\mathbb{Z}_p : R_i] = p^i$. נסמן ב- H תת-חבורה סגורה מאינדקס p^n . נרצה להראות שזה אחד מה- R_i או החבורה הטריויאלית. אזי $p^n = \text{lcm } \{|U| : U \text{ is open \& normal}\}$. עבור $n = \infty$ ו- $H < G$ סגורה ו- $[G : H] = p^\infty$ אזי

$$[G : H] = \text{lcm}_U [G/U : HU/U]$$

ולכל m קיימת U כך ש

$$[G/U : HU/U] > p^m$$

וזה אומר שלכל אינדקס i קיים אינדקס j כך ש- $HU_j \subseteq U_i$. לכל i $H \subseteq R_i$ וזה גורר ש-

$$H \subseteq \bigcap_i R_i = \{1\}$$

■

מסקנה 44: כל חבורה פרו-ציקלית מסדר p^n מופיעה ביחידות כמנה של $\mathbb{Z}_p$.

$$\mathbb{Z}_p/H \cong \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$$

משפט 45: 1. לכל מספר על טבעי $\prod_p p^{n(p)}$ קיימת חבורה יחידה פרו-ציקלית מסדר זה.

2. לכל מספר על טבעי $\alpha = \prod_p p^{n(p)}$ קיימת תת-חבורה יחידה H של $\hat{\mathbb{Z}}$ כך ש- $|\mathbb{Z}/H| = \alpha$.

הוכחה:

1. G פרו ציקלית, בפרט אבלית, $G = \prod_p G_p$ לכל p תהי G_p החבורה הפרו-ציקלית היחידה מסדר $p^{n(p)}$ ונגדיר את G להיות המכפלה - $G = \prod_p G_p$. הוכחנו שאם יש חבורה כזו אז הפירוק הוא בדיוק כזו, ואנחנו יודעים שיש חבורה יחידה מהסדר הזה. ■

4.4 חבורות פרו-סופיות חופשיות

ניזכר בתכונה האוניברסלית. כאשר A קבוצה, אז החבורה החופשית על $A - F$ היא החבורה שעבורה לכל חבורה G הדיאגרמה מתחלפת.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_0} & F \\ & \searrow h & \downarrow \exists \hat{h} \\ & & G \end{array}$$

במקרה הפרו-סופי F, G בדיאגרמה תהייה חבורות פרו-סופיות. אם A היא קבוצה סופית אזי הדיאגרמה הקודמת מספיקה. אחרת, נדרוש את קומוטטיביות הדיאגרמה לכל ההעתקות הקבוצתיות $i: A \rightarrow G$ המקיימות את התנאי הבא:

לכל $U \leq G$ פתוחה ומכילה את היחידה, $i(a) \in U$ כמעט לכל i (קרן, לכל a פרט אולי למספר סופי של איברים).

נתבונן בתת-משפחה של חבורות סופיות שסגורה לתת-חבורה, למנות ולסכומים ישרים סופיים.

הגדרה 46: חבורה F פרו- C (כאשר C היא משפחה שכוז של חבורות סופיות שסגורה לתת-חבורה, למנות ולסכומים ישרים סופיים) תיקרא חופשית אם קיימת קבוצה A עם התכונות הבאות:

1. $i: A \hookrightarrow F$, המתכנס ל-1. כלומר לכל סביבת יחידה $U \subseteq F$ קיימים לכל היותר מספר סופי של איברים A עבורם $i(a) \notin U$.

2. אם G חבורה פרו- C וקיימת העתקה $j: A \rightarrow G$ המתכנסת ל-1 באותו מובן, אזי קיימת הרחבה רציפה יחידה

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & F \\ & \searrow j & \downarrow \exists \hat{h} \\ & & G \end{array}$$

הערה 47: לכל התחום הזה יש קשר עם תורת גלואה. אם k שדה ו- $\chi(k) = 0$ (המציין אפס) אזי $\text{Gal}(\overline{k(t)} : k(t))$ היא חבורה פרו-סופית חופשית.

הגדרה 48: חבורה F תיקרא residually- C , אם שלכל $H \in C$, אזי לכל $f \in F$ ששונה מ-1 קיים $\eta: F \twoheadrightarrow H$ וגם $\eta(F) \neq 1$.

טענה 49: אם $A \hookrightarrow F$, ונניח ש- F היא residually- C . אזי נוכל להסתכל על החבורה הדיסקרטית הנוצרת על ידי הקבוצה A , אזי מתקיים שגם $F_A \hookrightarrow F$. מתקיים כי $\overline{F_A} = F$. נאמר ש- A יוצרת טופולוגיה את F .

טענה 50: לכל קבוצה A קיימת חבורה חופשית פרו- C עם קבוצת יוצרים טופולוגית A .

הוכחה: ראינו שמ- A ניתן לעבור ל- F_A . נתבונן בכל התת-חבורות הנורמליות של F_A המכילות כמעט את כל איברי $A - N$. אם נבחר N_1, N_2 ונקח את $N_1 \cap N_2$, אזי היא מכילה גם כן כמעט את כל איברי A ומתקיים

$$F/N_1 \cap N_2 \hookrightarrow F/N_1 \times F/N_2 \in C$$

ולכן גם המנה של החיתוך היא ב- C . נגדיר $F = \varprojlim_{\alpha \in I} F/N_\alpha$ וזוהי ההשלמה הפרו- C של החבורה. נוכיח עתה כי

F חופשית פרו- C . תהא $U \subseteq F$ סביבת-יחידה אזי U מכילה את כל איברי A פרט אולי למספר סופי. בה"כ ניתן להניח כי U נורמלית פתוחה. קיימת תת-חבורה N כנ"ל כך ש- $N \leq U$. N מכילה כמעט את כל איברי A ולכן כך גם U . כעת, לתנאי השני:

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & F_A \hookrightarrow F \\ & \searrow i_0 & \downarrow h_0 \\ & & G \end{array}$$

תהי U תת-חבורה נורמלית פתוחה ב- G , נשים לב שמתקיים $U \hookrightarrow G/U \in C$ ולכן $N \leq h_0^{-1}(U)$ ולכן $F_A/h_0^{-1}(U) \hookrightarrow G/U \in C$ מתקיים: נורמלית שהיא סביבה יחידה. מתקיים:

$$\begin{array}{ccc} F_A/N & \longrightarrow & G/U \\ \uparrow & & \\ F & \longrightarrow & G/U \end{array}$$

■

$$F \rightarrow \varprojlim G/U = G \text{ ולכן}$$

הערה 51: חבורה חופשית פרו־ C על קבוצת יוצרים A יחידה עד כדי איזומורפיזם.

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad 1.$$

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \quad 2.$$

(א) $B \subseteq A$ קבוצות. נוכל להסתכל על $F_B(C) \hookrightarrow F_A(C)$ כאשר מדובר בשיכון טבעי. π

$$\begin{array}{ccc} F_B(C) & \xleftarrow[\pi_i]{} & F_A(C) \\ \uparrow & \curvearrowright & \uparrow \\ B & & A \end{array}$$

עם $a \in B$ מקיים $\pi(a) = a$ ו- $a \notin B$ מקיים $\pi(a) = b$. נקבל את הסדרה המדויקת:

$$1 \rightarrow K \rightarrow F_A(C) \xrightarrow{\pi} F_B(C) \rightarrow 1$$

עם $\langle\langle A \setminus B \rangle\rangle$ המוכל ב- K כתת־חבורה נורמלית וסגורה.

טענה 53: $K = \langle\langle A \setminus B \rangle\rangle$ התת־חבורה הנורמלית הסגורה המינימלית המכילה את $A \setminus B$.

הוכחה: $F_{A \setminus B}(C) \leq K$. תהא N_α תת־חבורה נורמלית סגורה המכילה את $F_{A \setminus B}(C)$ ונתבונן ב- $N = \bigcap_\alpha N_\alpha$. נשים לב ש- N היא התת־חבורה אחת מהתת־חבורות האלה היא K , שכן היא מקיימת את התנאי, ולכן $N \leq K$. מה אנו יכולים לומר על $K \cdot F_B(C)$ ועל $N \cdot F_B(C)$? ראשית, $F_{A \setminus B}(C)$ את המכילה את $F_{A \setminus B}(C)$. מתקיים $N \cdot F_B(C) \subseteq K \cdot F_B(C)$ ובנוסף $F_{A \setminus B}(C) \subseteq N \cdot F_B(C)$, בפרט $F_{A \setminus B}(C) \subseteq N \cdot F_B(C)$. אבל גם $A \setminus B \subseteq N$ מכאן, $F_A \subseteq N \cdot F_B(C)$. לכן גם $F_A(C) = \overline{F_A} \subseteq N \cdot F_B(C)$ וסיימנו. ■

משפט 54: G חבורה פרו־ C נוצרת־סופית (טופולוגית). $F : G \twoheadrightarrow G$ על ורציפה, אזי f היא איזומורפיזם.

הערה 55: אם H חבורה דיסקרטית ויש לנו העתקה $\varphi : H \rightarrow H$, נשאלת השאלה עבור אילו חבורות H ניתן להסיק כי φ חז"ע. חבורה H שמאפשרת להסיק זאת נקראת חבורה בעלת תכונת הופף. הופף עצמו הראה שחבורת משטח (קרי, חבורה יסודית של משטח) היא בעלת תכונת הופף. דוגמה לחבורה ללא התכונה הזו היא חבורת baumslag-solitar שהיא החבורה $\langle x, y | xy^2x^{-1} = y^3 \rangle$.

הוכחה: נתבונן בתת־חבורות הנורמליות הפתוחות $U \leq G$ כך ש- $|G/U| = n$, ויש מספר סופי של כאלה, זאת שכן בהינתן $B \leq G$ סופית כזו, ו- $B \leq G \rightarrow \text{finite}$ אזי ההעתקה נקבעת על ידי שליחת היוצרים של B , ולכן יש מספר סופי של אפשרויות, ולכן יש מספר סופי של הומומורפיזמים של G לתת־חבורות מסדר n , והגרעינים שלהם הם בדיוק ה- U . נסמן אותן $\{U_1, \dots, U_l\}$. $f^{-1}(U_i)$ תת־חבורה פתוחה ונורמלית מאינדקס n . מה אפשר לומר על הגרעין של ההעתקה הזו? יהי $K = \ker f$, אזי כל אחת מהתת־חבורות U_i היא מקור של תת־חבורה $V \leq f^{-1}(G)$ ומתקיים $V_i = f^{-1}(U_i)$, ולכן $K \leq U_i$ לכל i . לכן $K \leq \bigcap U_i$. חיתוך של כל סביבות היחידה הוא היחידה, ולכן $K = \{1\}$. ■

משפט 56 (מלצב): כל חבורה נוצרת סופית מובחנת סופית היא הופף.

5 קוהומולוגיה של חבורות פרו-סופיות

A חבורה אבלית G -מודול, כאשר G פרו-סופית. $G \times A \rightarrow A$ רציפה, כאשר A עם הטופולוגיה הדיסקרטית. טענה 57: הטענות הבאות שקולות:

1. $G \times A \rightarrow A$ רציפה
2. לכל $a \in A$ המייצב של a שהוא $\{\sigma \in G \mid \sigma(a) = a\}$ חבורה פתוחה ב- G .
3. לכל $U \subseteq G$ פתוחה, תהי $A^U = \{a \in A \mid \forall u \in U u(a) = a\}$ אזי

$$A = \bigcup_{U \subseteq G} A^U$$

הוכחה:

1. $(1) \iff (2)$. $\eta : G \times A \rightarrow A$ רציפה, אזי $\eta^{-1}(a)$ פתוחה ב- $G \times A$. $G \times \{a\}$ פתוחה. לכן

$$\eta^{-1}(a) \cap (G \times \{a\}) = \{\sigma \in G \mid \sigma(a) = a\} \times \{a\}$$

פתוחה.

2. $(1) \iff (2)$ $S_a = \{\sigma \in G \mid \sigma(a) = a\}$ פתוחה ב- G . אזי $S_{a,b} = \{\sigma \in G \mid \sigma(a) = b\}$ פתוחה. יהי $b \in A$ ונתבונן ב- $\eta^{-1}(b)$, נקבל כי

$$\eta^{-1}(b) = \bigcup_{a \in A} S_{a,b} \times \{a\}$$

פתוחה.

3. השאר מושאר כתרגיל.

■

דוגמה 58: 1. A חבורה אבלית. G פועלת טריוויאלית על A - $\forall \sigma \in G \forall a \in A \sigma(a) = a$.

2. N הרחבת גלואה של k . $G = \text{Gal}(N/k)$ חבורת גלואה של ההרחבה. פועלת על איברי ההרחבה. N חבורה חיבורית N^* חבורה כפלית שמכילה את חבורת שורשי היחידה ב- N . אם ישנה עוד הרחבת גלואה L המקיימת $k \subseteq N \subseteq L$ ובכך N, N^* הם $\text{Gal}(N/k)$ מודול, אבל גם $\text{Gal}(L/k)$ מודול.

3. A, B הם G -מודולים ונסתכל על $\varphi : A \rightarrow B$ הומומורפיזם של G -מודולים, ובפרט הומומורפיזם של חבורות. יתקיים

$$\forall \sigma \in G \forall a \in A \varphi(\sigma(a)) = \sigma(\varphi(a))$$

קוהומולוגיה, לפחות במקור, זה אובייקט טופולוגי. אפשר לחשוב על זה בצורה טופולוגית, אבל אפשר להגדיר קוהומולוגיה של חבורות בצורה פורמלית, אלגברית, וההגדרות שקולות. הצורה שבה נגדיר קוהומולוגיה של חבורות פרו-סופיות תהיה פורמלית, תוך כדי שאנחנו מתחשבים בטופולוגיה הפרו-סופית. לצורך זאת אנו צריכים להגדיר קומפלקסי-שרשראות, ולצורך זה צריך להגדיר ציקלוסים. תהא G חבורה פרו-סופית ו- A G -מודול - $A \in \text{Mod}(G)$. נסתכל על G^q - המכפלה של G עם עצמה q פעמים, ויש פה טופולוגיית מכפלה טבעית.

הגדרה 59: קו-ציקלוסים יוגדרו על ידי

קו-ציקלוס

$$C^q(G, A) = \{x : G^{q+1} \rightarrow A \mid x \text{ is continuous} \wedge \forall \sigma \in G \sigma x(\sigma_0, \dots, \sigma_q) = x(\sigma \sigma_0, \dots, \sigma \sigma_q)\}$$

הערה 60: $C^q(G, A)$ מהווה חבורה אבלית, כי עבור שתי העתקות כאלה x_1, x_2 אזי גם החיבור שלהם יקיים את התנאי הזה.

אופרטור קו-הגדרה 61: אופרטור קו-שפה יוגדר בכיוון ההופכי מהכיוון ההומולוגי: שפה

$$\partial_{q+1} : C^q(G, A) \rightarrow C^{q+1}(G, A)$$

ומתקיים $\partial_{q+2} \circ \partial_{q+1} = 0$, כעת, נרצה שיתקיים עבור הציקלוסים:

$$(\partial_{q+1}x)(\sigma_0, \dots, \sigma_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i x(\sigma_0, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_{q+1})$$

נקבל ש- $\partial_{q+1}x$ רציף, וההתחלפות של x עם σ מהתנאי גם מתקיימת, ולכן $\partial_{q+1} \in C^{q+1}$.

$$C^0 \xrightarrow{\partial_1} C^1 \xrightarrow{\partial_2} C^2 \xrightarrow{\partial_3} C^3 \xrightarrow{\partial_4} \dots$$

ומתקיים כאמור $\partial_{q+2} \circ \partial_{q+1} = 0$ ומתקיים $\text{Im } \partial_{q+1} \subseteq \ker \partial_{q+2}$ ונסמן:

$$Z^q(G, A) = \ker \partial_{q+1}$$

$$B^q(G, A) = \text{Im } \partial_q$$

$$H^q(G, A) = Z^q/B^q$$

וזהו הקוהומולוגיה.

ישנה דרך שקולה להגדרה. ניתן להגדיר באמצעות קומפלקסי שרשראות אחרים.

$$\overline{C^q} = \{x : G^q \rightarrow A \mid x \text{ is continuous} \wedge\}$$

ונגדיר את אופרטורי השפה:

$$(\partial_{q+1}x)(\sigma_1, \dots, \sigma_{q+1}) = \sigma_1 x(\sigma_2, \dots, \sigma_{q+1}) + \sum_{i=1}^q (-1)^i x(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{q+1}) + (-1)^{q+1} x(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$$

ההיגיון בסכום הזה קשור בדרך ההגדרה הקודמת, ונראה שיש איזומורפיזם. נגדיר את הקוהומולוגיה על ידי

$$H^q = Z^q/B^q = \ker \partial_{q+1} / \text{Im } \partial_q$$

ונכתוב את האיזומורפיזם.

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\psi_q} & \overline{C^q(G, A)} \\ C^q(G, A) & & \\ & \xrightarrow{\varphi_q} & \end{array}$$

$$(\varphi_q x)(\sigma_1, \dots, \sigma_q) = x(1, \sigma_1, \sigma_1 \sigma_2, \dots, \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_q)$$

$$(\psi_q y)(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_q) = y(\sigma_0^{-1} \sigma_1, \sigma_1^{-1} \sigma_2, \dots, \sigma_{q-1}^{-1} \sigma_q)$$

5.1 קוהומולוגיה בממדים נמוכים

נראה מה אפשר להגיד על הקוהומולוגיה מממד 0 - $H^0(G, A)$. $C^0 \xrightarrow{\partial_1} C^1$. נשים לב ש- $\text{Im } \partial_0 = \{0\}$ שכן אין שום דבר הבא משמאל, ולכן $H^0(G, A) = \ker \partial_1$. אבל לכל $x : G \rightarrow A$ מתקיים $x(\tau\sigma) = \tau x(\sigma)$.

$$\partial_1 x = 0 \iff (\partial_1 x)(\sigma_1, \sigma_2) = x(\sigma_1) - x(\sigma_2) = 0$$

לכן לכל $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ מתקיים $x(\sigma_1) = x(\sigma_2)$ ולכן ההעתקה הזו קבועה, אבל צריכה לקיים את תנאי האיזומורפיזם תחת כל איבר ב- G , וזה A^G או $\text{Fix}(G)$.

נעבור לקוהומולוגיה מממד 1. $H^1 = \overline{H^1} = \overline{Z^1}/\overline{B^1}$.

$$\begin{aligned}\overline{Z^1} &= \ker \overline{\partial_2} \\ &= \{x : G \rightarrow A \mid x \text{ is continuous} \wedge \overline{\partial_2} x = 0\}\end{aligned}$$

נבדוק מה אומר התנאי:

$$0 = (\overline{\partial_2} x)(\sigma, \tau)$$

וזה שקול ל:

$$\forall \sigma, \tau \in G \quad x(\sigma\tau) = \sigma x(\tau) + x(\sigma)$$

בנוסף

$$\overline{B^1} = \{x : G \rightarrow A \mid x = \partial_1 a\}$$

כאשר a היא העתקה קבועה ולכן

$$x(\sigma) = \sigma(a) - a$$

5.1.1 חבורות הקוהומולוגיה השנייה

$$\overline{H^2}(G, A) = \overline{Z_2}/\overline{B_2}$$

$$\begin{aligned}\overline{Z_2} &= \{x : G \times G \rightarrow A \mid \overline{\partial_3}(x) = 0\} \\ &= \{x : G \times G \rightarrow A \mid \sigma_1 x(\sigma_2, \sigma_3) + x(\sigma_1, \sigma_2 \sigma_3) = x(\sigma_1 \sigma_2, \sigma_3) + x(\sigma_1, \sigma_2)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{B_2} &= (\text{Im } \overline{\partial_1}) \\ &= \{(\overline{\partial_1}(y)) \mid y \in \overline{C_1}\} \\ &= \{x : G \times G \rightarrow A \mid x(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 y(\sigma_2) - y(\sigma_1 \sigma_2) + y(\sigma_1)\}\end{aligned}$$

ישנו קשר בין מיון הרחבות לבין חבורות הקוהומולוגיה השנייה. נסתכל על הסדרה הקצרה המדויקת

$$1 \rightarrow A \rightarrow \hat{G} \rightarrow G \rightarrow 1$$

כאשר A חבורה אבלית ו־ G פועלת על A , ולכן גם A היא למעשה G -מודול – לכל $g \in G$ נסתכל על $u(g) \in \hat{G}$ עם פעולה $g : a \rightarrow u(g) a u(g)^{-1}$. השאלה שנשאל את עצמנו היא השאלה הבאה – היה ויש לנו איזשהו G -מודול A (כאשר במקרה שלנו A חבורה סופית ו־ G חבורה פרו־סופית) ואנחנו רוצים להבין, מהן כל האפשרויות להרחבה של G כך שהפעולה שנקבל היא הפעולה שאיתה התחלנו. כדי למיין הרחבות עלינו להגדיר איזשהו יחס שקילות עליהן, וזאת נעשה.

בהינתן שתי סדרות ושתי הרחבות:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \hat{G}_1 & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \hat{G}_2 & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \end{array}$$

כאשר ההעתקות מלמעלה למטה הן הומיאומורפיזם רציפים. הוכחנו כבר שבחבורות פרו־סופיות העתקה רציפה ועל היא חח"ע.

משפט 62: בהינתן G פרו-סופית ו- A סופית אבלית. $\varepsilon(G, A)$ – אוסף מחלקות הקונגוראנציה של G ו- G -מודול A . $H^2(G, A)$ – חבורות הקוהומולוגיה השנייה. אזי קיימת התאמה חז"ע ועל (טבעית) $\varepsilon(G, A) \cong H^2(G, A)$.

הוכחה: נתאים לכל הרחבה מחלקת קוהומולוגיה. החבורה הטריבויאלית היא חבורה פרו-סופית באופן טריבויאלית, גם A ולכן $A < \hat{G}$ ו- $1 < A$. הוכחנו בעבר שעבור $K < H < G$ קיים חתך רציף $G/H \rightarrow G/K$. לכן, במקרה שלנו קיים חתך רציף:

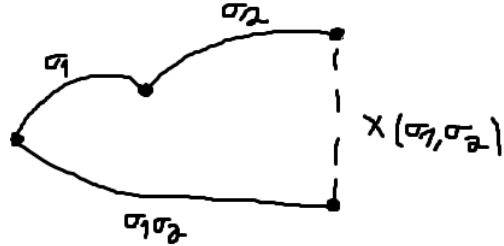
$$u : G = \hat{G}/A \rightarrow \hat{G}$$

החתך הוא בדרך-כלל לא הומומורפיזם. לכל $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ ולכן מתקיים

$$u(\sigma_1) u(\sigma_2) A = u(\sigma_1 \sigma_2) A$$

ופירושו – הם שייכים לאותו קוסט. לכן נגדיר איבר שיגדיר לנו את ההבדל:

$$u(\sigma_1) u(\sigma_2) = x(\sigma_1, \sigma_2) u(\sigma_1 \sigma_2)$$



כאשר $x : G \times G \rightarrow A$ העתקה רציפה.

טענה 63: מתקיים $(\partial_3 x)(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$

הוכחה: נשתמש באסוציאטיביות של החבורה כדי להוכיח כי $(u(\sigma_1) u(\sigma_2)) u(\sigma_3) = u(\sigma_1) (u(\sigma_2) u(\sigma_3))$. נתחיל מאגף ימין.

$$\begin{aligned} u(\sigma_1) (u(\sigma_2) u(\sigma_3)) &= u(\sigma_1) (x(\sigma_2, \sigma_3) u(\sigma_2 \sigma_3)) \\ &= u(\sigma_1) x(\sigma_2, \sigma_3) u(\sigma_1)^{-1} \sigma(\sigma_1) u(\sigma_2 \sigma_3) \\ &= \sigma_1 x(\sigma_2, \sigma_3) (u(\sigma_1) u(\sigma_2 \sigma_3)) \\ &= \sigma_1 (x(\sigma_2, \sigma_3)) x(\sigma_1, \sigma_2 \sigma_3) u(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \end{aligned}$$

ונמשיך באגף שמאל:

$$\begin{aligned} (u(\sigma_1) u(\sigma_2)) u(\sigma_3) &= x(\sigma_1, \sigma_2) u(\sigma_1 \sigma_2) u(\sigma_3) \\ &= x(\sigma_1, \sigma_2) x(\sigma_1 \sigma_2, \sigma_3) u(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \end{aligned}$$

הגורם האחרון בכל אחד מהביטויים האחרונים מצטמצם $(u(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3))$. נכתוב עכשיו את הפעולה של החבורה עם חיבור, בשל האבליות, ונקבל כי

$$x(\sigma_1, \sigma_2) + x(\sigma_1 \sigma_2, \sigma_3) - \sigma_1(x(\sigma_2, \sigma_3)) - x(\sigma_1, \sigma_2 \sigma_3) = 0 \iff (\partial_3 x)(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

■

וסיימנו.

הראינו עכשיו ש- x הוא קו-ציקלוס, ולכן $[x(\sigma_1, \sigma_2)] \in H^2(G, A)$.

טענה 64: מה שהוכחנו הוא בלתי תלוי בבחירת החתך.

הוכחה: אם נבחר חתך אחר, $u_1 : G \rightarrow \hat{G}$, אז מה שזה אומר, הוא ש- $u(\sigma) = y(\sigma) + u_1(\sigma)$ כאשר $y(\sigma) \in A$. u_1 מותאם $x(\sigma_1, \sigma_2)$ ול- u_1 מותאם $x_1(\sigma_1, \sigma_2)$, אז כדי להוכיח את הטענה צריך להוכיח כי $x(\sigma_1, \sigma_2) - x_1(\sigma_1, \sigma_2) \in \overline{B_2}(G, A)$ (תמונה של קו-שרשרת חד-ממדית ותמונה שלה על ידי אופרטור

השפה). אפשר להראות שההפרש ביניהם הוא $(\partial y)(\sigma_1, \sigma_2)$. מקוצר זמן לא נעשה חשבון זה, והוא אינו קשה. מושאר כתרגיל לקורא. ■

הגדרנו העתקה מוגדרת היטב מ- $\varepsilon(G, A)$ ל- $H^2(G, A)$. בהינתן $x : G \times G \rightarrow A$ רציף ו- $\partial_3 x = 0$, אנחנו רוצים לבנות הרחבה. ניתן להניח שלכל $\sigma \in G$ מתקיים

$$x(1, \sigma) = x(\sigma, 1) = 0$$

נבנה את $\hat{G}$, נרצה לבנות חבורה שהיא הרחבה, ולא סתם לבנות את החבורה הזו, אלא לבנות הרחבה כך שאם נחשב את הקו-ציקלוס כמו שעשינו קודם נקבל את $\hat{G}$ שלנו. היות שיש פה תתי-חבורה נורמלית שהיא A וחבורה G , אז כל איבר ניתן לייצוג על ידי A, G , לכן צריך לבנות פעולה על אוסף הזוגות ואת זאת נעשה עתה.

$$(a_1, \sigma_1)(a_2, \sigma_2) = (a_1 + \sigma_1 a_2 + x(\sigma_1, \sigma_2), \sigma_1 \sigma_2)$$

תחת פעולה זו אוסף הזוגות הוא חבורה, $\hat{G}$. טופולוגייה המכפלה $A \times G$ משרה טופולוגיה על $\hat{G}$ (שמזדהה עם הטופולוגיה הפרו-סופית על $\hat{G}$).

טענה 65: מחלקת הקונגוראנציה של ההרחבה תלויה רק במחלקת הקוהומולוגיה של x .

הוכחה: $f : G \rightarrow A$, $x + \partial f$, $(a, \sigma) \rightarrow (a = f(\sigma), \sigma)$. הוכחה מושארת כתרגיל לקורא. ■
אנחנו הוכחנו כי $\psi_1 : \hat{G} \rightarrow [x] \in H^2$ וגם $\psi_2 : [x] \rightarrow \hat{G}_{[x]}$. אנחנו צריכים להוכיח שההעתקות מחלפות, קרי $\psi_1 \psi_2([x]) = [x]$ וגם $\psi_2 \psi_1(\hat{G}) = \hat{G}$. זה נובע ישירות מהבנייה שעשינו עד כה. ■

5.1.2 קוהומולוגיה בממדים גבוהים יותר

נסתכל על $H^q(G, A)$, כאשר $q > 2$, A הוא G -מודול ו- G חבורה פרו-סופית. נניח כי קיימות העתקות

$$g : G \rightarrow \hat{G}$$

רציפה ו

$$f : \hat{A} \rightarrow A$$

הגדרה 66: נאמר כי הזוג (g, f) הוא מתאים אם לכל $\sigma \in G$ ו- $\hat{a} \in \hat{A}$ מתקיים

$$\sigma(f(\hat{a})) = f(g(\sigma)(\hat{a}))$$

זוג מתאים

דוגמה 67: $K \subseteq L \subseteq N$ הרחבות גלואה, אז ניתן להסתכל על $(Gal(N/K), N^*)$ ועל $(Gal(L/K), L^*)$ וקיימות העתקות

$$g : Gal(N/K) \rightarrow Gal(L/K)$$

$$f : L^* \rightarrow N^*$$

אזי לכל $\sigma \in Gal(N/K)$ אזי

$$\sigma(f(\hat{a})) = f(g(\sigma)(\hat{a}))$$

באופן טבעי.

זוג העתקות (g, f) משרה העתקה על קושרשראות $\overline{C^q}(\hat{G}, \hat{A}) \rightarrow \overline{C^q}(G, A)$ לכל $x \in \overline{C^q}(\hat{G}, \hat{A})$, ולכל $\sigma_i \in G$ מתקיים:

$$(g, f)(x)(\sigma_1, \dots, \sigma_q) = f(x(g(\sigma_1), \dots, g(\sigma_q)))$$

ולכן (g, d) מגדיר הגם העתקה של קומפלקסי שרשראות המתחלפת עם אופרטורי השפה:

$$(g, f) : \overline{H^q}(\hat{G}, \hat{A}) \rightarrow \overline{H^q}(G, A)$$

6 עצי פרור- p

בפרק זה עזבנו את ספרי הקורס ועברנו להרצות על פי המאמר Luis Ribes & Pavel Zalesskii, *Pro- p Trees and Applications* בקובץ *New Horizons in pro- p Groups* מסדרת Mathematics. קישור מופיע באתר שלי.

הגדרה 68: גרף הוא קבוצה Γ עם תת-קבוצה $V(\Gamma) \subseteq \Gamma$ שתהיה קבוצת הצמתים. ופונקציות $d_0, d_1 : \Gamma \rightarrow$ גרף $V(\Gamma)$ כך ש- $d_i|_{V(\Gamma)} = Id$. הקשתות יהיו $E(\Gamma) = \Gamma - V(\Gamma)$ קשתות, כאשר $e^1 = ee \in E(\Gamma)$, וגם יהיה לנו e^{-1} מתקיים

$$d_0(e^{-1}) = d_1(e)$$

$$d_1(e^{-1}) = d_0(e)$$

$$E^{-1} = \{e^{-1} : e \in E\}$$

הגדרה 69: חבורה G פועלת על הגרף Γ אם G פועלת על הקבוצה Γ ומתקיים $gd_i = d_i g$. נגדיר גם את פעולת החבורה על קשתות בכיוון ההפוך - $(ge)^{-1} = ge^{-1}$.

הגדרה 70: עבור $v, w \in V(\Gamma)$, נגדיר $P_{v,w}$ הוא מסלול מ- v ל- w המקיים

$$P_{v,w} = e_1^{\varepsilon_1}, e_2^{\varepsilon_2}, \dots, e_n^{\varepsilon_n}$$

כאשר $d_1(e_1^{\varepsilon_1}) = v, d_0(e_n^{\varepsilon_n}) = w, d_1(e_n^{\varepsilon_n}) = w, d_0(e_1^{\varepsilon_1}) = v, \varepsilon_i = \pm 1$ וגם $d_1(e_i^{\varepsilon_i}) = d_0(e_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}})$. נאמר שהמסלול מצומצם אם $e_i^{\varepsilon_i} \neq e_{i+1}^{-\varepsilon_{i+1}}$ לכל i . אם מתקיים שוויון, ניתן למחוק את שני האיברים מהמסלול, ובכך נקבל מסלול שקול אלמנטרית. שני מסלולים ייקראו שקולים אם ניתן להגיע מאחד לשני על ידי סדרה סופית של שקילויות אלמנטריות. כל אחת ממחלקות השקילויות האלה מכילה מסלול מצומצם אחד ויחיד.

הגדרה 71: עבור גרף Γ , נסמן ב- $\Pi(\Gamma, v)$ כאשר $v \in V(\Gamma)$ את כל הלולאות ב- Γ שמתחילות ומסתיימות ב- v . ניתן להגדיר כפל על ידי שרשור של מסלולים. פעולת הכפל הזו משרה פעולת כפל אחרת על הקבוצה $\Pi_1(\Gamma, v)$, ותחת הפעולה הזו הקבוצה היא חבורה (כמו במקרה של החבורה היסודית). לחבורה הזו נקרא החבורה היסודית של Γ ב- v .

תרגיל 72: אם Γ קשיר, אז לכל שני צמתים $v, w \in V(\Gamma)$ מתקיים כי $\Pi_1(\Gamma, v) \cong \Pi_1(\Gamma, w)$. במקרה כזה, נסמן פשוט $\Pi_1(\Gamma)$.

עובדה 73: מהלמה של צורן אנחנו יודעים שכל גרף מכיל תת-עץ מקסימלי,

טענה 74: אם Γ גרף קשיר אזי

1. $\Pi_1(\Gamma)$ חבורה חופשית.

2. אם Δ תתיגרף קשיר של Γ אזי $\Pi_1(\Delta)$ הוא גורם חופשי של $\Pi_1(\Gamma)$.

גורם חופשי הגדרה 75: תתיחבורה היא גורם חופשי של חבורה אחרת אם ניתן להציג את החבורה הגדולה כמכפלה חופשית, ואחד האיברים במכפלה הוא הגורם החופשי.

הוכחה: אנחנו יודעים שקיים עץ מקסימלי ל- Γ . עבור $v \in V(\Gamma)$, $x \in E(\Gamma) - E(T)$, c_x - נלך קודם במסלול היחיד מ- v ל- $d_0(x)$ ב- T , אז נלך אל x , ואז נלך אל המסלול היחיד ב- T מ- $d_1(x)$ ל- v . נסמן $X = \{c_x : x \in E(\Gamma) - E(T)\}$. $\Pi_1(\Gamma)$ היא החבורה החופשית על הקבוצה X . $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ מורפיזם אם היא פונקציה ו- $\alpha d_i = d_i \alpha$, $i = 0, 1$. גרף Γ - גרף Δ - תתיקבוצה של Γ , נסתכל על $q : \Gamma \rightarrow \Gamma/\Delta$ ונגדיר את $V(\Gamma/\Delta) = q(V(\Gamma))$ ונגדיר את פונקציית הצלע $d_i(q(m)) = q(d_i(m))$ ואפשר לראות ש- q הוא מורפיזם של גרפים. אם $v \in V(\Gamma)$ ויש איזשהו מורפיזם $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ אז נגדיר את קבוצת ההתחלות $\text{Start}(v) = d_0^{-1}(v)$. אז נאמר ש- α הוא איזומורפיזם מקומי אם הוא משרה העתקה חח"ע ועל

$$\text{Start}_\Gamma(v) \rightarrow \text{Start}_{\alpha(\Gamma)}(\alpha(v))$$

אם F חבורה חופשית על X , נסתכל על גרף קילי $\Gamma = \Gamma(F, X)$ מוגדר על ידי $V(\Gamma) = F$ (הקדקודים הם האיברים בחבורה) ו- $E(\Gamma) = (f, x)$ כאשר $f \in F$ ו- $x \in X$ ונגדיר את היחסים עליהם על ידי

$$d_0(f, x) = f$$

$$d_1(f, x) = fx$$

החבורה הזו פועלת בצורה טבעית על הגרף-קילי שלה. והגרף מנה $F \backslash \Gamma$ (הערת סימון: זה כמו Γ/F רק שהפעולה היא משמאל). הוא גרף עם קדקוד אחד ו- $|X|$ קשתות. אם $H \leq F$ תתיחבורה, נוכל להסתכל על המורפיזם הטבעי $\sigma : \Gamma \rightarrow H \backslash \Gamma$, נוכל לראות זהו אפימורפיזם וגם איזומורפיזם מקומי.

למה 76: אם $H \leq F = \mathbb{F}(X)$ (החבורה החופשית על קבוצה X) אזי קיים איזומורפיזם $P_H : H \rightarrow H \backslash \Gamma(F, X)$. הוכחה: נקח $h \in H$ נסמן ב- $P_{1,h}$ את המסלול המצומצם היחיד מ- 1 ל- h . נגדיר את $P_H(h) = \sigma(P_{1,h})$. ההעתקה הזו היא אפימורפיזם מהגדרה, והיא חח"ע מכך ש- σ איזומורפיזם מקומי ולכן מעביר מסלולים מצומצמים למסלולים מצומצמים, לכן חח"ע ולכן איזומורפיזם. ■

מסקנה 77: אם $H \leq K \leq \mathbb{F}(X)$ ו- $\Gamma = \Gamma(\mathbb{F}(X), X)$ הדיאגרמה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(H \backslash \Gamma) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \Pi(K \backslash \Gamma) \\ \downarrow P_H & & \downarrow P_K \\ H & \xrightarrow{i} & K \end{array}$$

כאשר $\tilde{\tau}$ מושרה על ידי האפימורפיזם הטבעי של הגרפים $\tau : H \backslash \Gamma \rightarrow K \backslash \Gamma$, בפרט $\tilde{\tau}$ חח"ע. ■

גרף פרו-סופי הגדרה 78: Γ ייקרא גרף פרו-סופי אם Γ כקבוצה היא מרחב פרו-סופי, $V(\Gamma)$ קבוצה סגורה ו- d_i רציפות. אם $E(\Gamma)$ מספיק להגדיר את d_i כרציפים על E . אם Γ' ו- Γ הם גרפים פרו-סופיים, אז $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ ייקרא מורפיזם של גרפים פרו-סופיים אם הוא מורפיזם של גרפים ורציף.

טענה 79: אם Γ הוא גרף פרו-סופי, אזי הוא גבול הפוך של גרפי-מנה סופיים.

הוכחה: $\Gamma = \varprojlim K_\lambda$ כמרחב פרו-סופי עם הטלות φ_λ . נגדיר פונקציה

$$\psi_\lambda : \Gamma \rightarrow K_\lambda \times K_\lambda \times K_\lambda$$

על ידי זה שאנחנו מגדירים

$$\psi_\lambda(m) = (\varphi_\lambda(m), \varphi_\lambda(d_0(m)), \varphi_\lambda(d_1(m)))$$

נבנה מבנה של גרף על ידי

$$\Gamma_\lambda = \text{Im} \psi_\lambda$$

נגדיר

$$V(\Gamma_\lambda) = \psi_\lambda(V(\Gamma))$$

$$d_i(\psi_\lambda(m)) = \psi_\lambda(d_i(m))$$

נראה שזו הגדרה שמוגדרת היטב. אם $m, m' \in \Gamma$ כך ש- $\psi_\lambda(m) = \psi_\lambda(m')$ אזי $\psi_\lambda(d_i(m)) = \psi_\lambda(d_i(m'))$.
אזי $\Gamma_\lambda = \text{Im}(\psi_\lambda)$, $d_i : \Gamma_\lambda \rightarrow V(\Gamma_\lambda)$. ישנה העתקה $\psi_\lambda : \Gamma \rightarrow \Gamma_\lambda$ ומתקיים ישירות מההגדרה $\Gamma = \varprojlim \Gamma_\lambda$. ■

הגדרה 80: גרף Γ פרו-סופי הוא קשיר אם כל גרף מנה סופי שלו הוא קשיר.

גרף קשיר

טענה 81: 1. כל גרף מנה של גרף פרו-סופי קשיר הוא קשיר.

2. אם $\Gamma = \varprojlim \Gamma_\lambda$ ו- Γ_λ קשירים, אז Γ קשיר.

הוכחה:

1. טריוויאלי.

2. אם Δ גרף-מנה סופי של Γ והוא קשיר, אבל Δ הוא גרף-מנה של אחד מה- Γ_λ ולכן קשיר. ■

6.1 מודולים פרו-סופיים

הגדרה 82: $X = \varprojlim X_j$ מרחב פרו-סופי. נסמן לכל X_j ב- $[\mathbb{F}_p X_j]$ את המרחב הוקטורי מעל $\mathbb{F}_p$ עם בסיס X_j .
נסמן $[\mathbb{F}_p(X)] = \varprojlim [\mathbb{F}_p X_j] - \text{ה-}\mathbb{F}_p\text{-מודול הפרו-סופי החופשי מעל } X$.

ה- $\mathbb{F}_p$ -מודול
הפרו-סופי
החופשי

התכונה האוניברסלית של מודולים חופשיים 83 (התכונה האוניברסלית של מודולים חופשיים): אם $\varphi : X \rightarrow M$ היא פונקציה רציפה, כאשר M הוא $\mathbb{F}_p$ -מודול פרו-סופי, אז אפשר להרחיב את φ בצורה יחידה למורפיזם $\bar{\varphi} : [\mathbb{F}_p X] \rightarrow M$.

למה 84: יהיו Y, Z תת-מרחבים סגורים של המרחב הפרו-סופי המנוקדה $(X, *)$, כך ש- $X \in Y \setminus Z$ אז:

1. ההומורפיזמים הטבעיים $[\mathbb{F}_p Z] \rightarrow \overline{[Z]}$ ו- $[\mathbb{F}_p(Y, *)] \rightarrow \overline{[Y]}$ הם איזומורפיזמים.
2. קיימים איזומורפיזמים טבעיים $[\mathbb{F}_p(X/Z, *)] \rightarrow [\mathbb{F}_p(X, *)]/[\mathbb{F}_p Z]$ (ואותו הדבר עבור Y).
3. השוויון $(Y, *) = \bigcap (Y_i, *)$, כאשר Y_i סגורים ב- Y גורר שיתקיים $[\mathbb{F}_p(Y, *)] = \bigcap [\mathbb{F}_p(Y_i, *)]$.
4. כל הטענות הקודמות נכונות גם למקרה הלא מנוקד.

6.2 הומומורפיזם של גרף פרו-סופי

עץ

הגדרה 85: גרף Γ ייקרא עץ אם הוא קשיר (במובן הגרפי, לא הטופולוגי) והוא "בלי לולאות".

בעיה 86: איך נגדיר את היותו של הגרף כ-"ללא לולאות" במובן הפרו-סופי?

נסתכל על הסדרה הבאה

$$0 \rightarrow \bigoplus_{E(\Gamma)} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{V(\Gamma)} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

כאשר $\varepsilon(v) = 1$ ההעתקה הקבועה, ו- $\delta(e) = d_1(e) - d_0(e)$. נשים לב שמתקיים כי $\varepsilon \circ \delta = 0$. היות שיש לנו סדרה כזו, נוכל לדבר על חבורות הומומורפיזם. $H_0 = \mathbb{Z}^{n-1}$ ונקבל כי $H_0 = \ker \varepsilon / \text{Im } \delta$. n הוא מספר רכיבי הקשירות של הגרף. $H_1 = \ker \delta$ הוא האבליזציה של החבורה היסודית. כעת נוכל להגיד כי גרף הוא "בלי לולאות" אם $H_1 = 0$.

הערה 87: באותה מידה ניתן להחליף את $\mathbb{Z}$ ב- $\mathbb{F}_p$.

הגדרה 88: נסמן ב- $(E^*(\Gamma), *)$ את מרחב-המנה $\Gamma/V(\Gamma)$, כאשר הנקודה המיוחדת במרחב המנוקד היא התמונה של $V(\Gamma)$ ההופכת לנקודה אחת. המרחב המתקבל הוא פרו-סופי, כמנה של מרחב פרו-סופי בתת-מרחב סגור.

כעת נגדיר את שרשרת הקומפלקסים המתאימים $C(\Gamma, \mathbb{F}_p)$:

$$0 \rightarrow [[\mathbb{F}_p(E^*(\Gamma), *)]] \xrightarrow{\delta} [[\mathbb{F}_p(V(\Gamma))]] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{F}_p \rightarrow 0$$

כאשר ההעתקה ε היא הקבועה כמו קודם ו- δ גם כן מוגדרת כמו קודם, רק כאשר $\delta(*) = 0$ (הנקודה המיוחדת הולכת לאפס).

הגדרה 89: בהינתן מורפיזם של גרפים $\alpha: \Gamma \rightarrow \Delta$, המורפיזם שולח קדקודים לקדקודים ולכן משרה העתקה $\alpha_V: V(\Gamma) \rightarrow V(\Delta)$ והעתקה $\alpha_{E^*}: [[\mathbb{F}_p(E^*(\Gamma), *)]] \rightarrow [[\mathbb{F}_p(E^*(\Delta), *)]]$ והשלשה של המורפיזם $(\alpha_{E^*}, \alpha_V, Id_{\mathbb{F}_p})$ נותן לנו דיאגרמה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & [[\mathbb{F}_p(E^*(\Gamma), *)]] & \xrightarrow{\delta_\Gamma} & [[\mathbb{F}_p(V(\Gamma))]] & \xrightarrow{\varepsilon_\Gamma} & \mathbb{F}_p \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_{E^*} & & \downarrow \alpha_V & & \downarrow Id \\ 0 & \longrightarrow & [[\mathbb{F}_p(E^*(\Delta), *)]] & \xrightarrow{\delta_\Delta} & [[\mathbb{F}_p(V(\Delta))]] & \xrightarrow{\varepsilon_\Delta} & \mathbb{F}_p \longrightarrow 0 \end{array}$$

ולכן נסמן את השלשה הזו ב- α , הוא הומומורפיזם של שרשראות-קומפלקסים. נסמן ב- $\alpha_i^*: H_i(\Gamma, \mathbb{F}_p) \rightarrow H_i(\Delta, \mathbb{F}_p)$ את ההומומורפיזם המושרה של הומומורפיזם.

למה 90: 1. $C(\Gamma, \mathbb{F}_p) = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} C(\Gamma_\lambda, \mathbb{F}_p)$

2. עבור $i \in \{0, 1\}$ $H_i(\Gamma, \mathbb{F}_p) = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} H_i(\Gamma_\lambda, \mathbb{F}_p)$

3. גרף פרו-סופי הוא קשיר אם ורק אם $H_0(\Gamma, \mathbb{F}_p) \neq 0$.

הוכחה:

1. מושאר כתרגיל לקורא.

2. מתקיים

$$\begin{aligned} H_0(\Gamma, \mathbb{F}_p) &= \ker \varepsilon_\Gamma / \text{Im } \delta_\Gamma \\ &= \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} \ker \varepsilon_{\Gamma_\lambda} / \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} \text{Im } \delta_{\Gamma_\lambda} \\ &= \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} \ker \varepsilon_{\Gamma_\lambda} / \text{Im } \delta_{\Gamma_\lambda} \\ &= \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} H_0(\Gamma_\lambda, \mathbb{F}_p) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} [[\mathbb{F}_p(V(\Gamma))]] & \xrightarrow{\epsilon_\Gamma} & \mathbb{F}_p \\ \downarrow \alpha_{\tilde{V}} & & \downarrow Id \\ [[\mathbb{F}_p(V(\Gamma_\lambda))]] & \xrightarrow{\epsilon_{\Gamma_\lambda}} & \mathbb{F}_p \end{array}$$

הוכחה:

$$0 \rightarrow [[\mathbb{F}_p(E^*(T), *)]] \xrightarrow{\delta_T} [[\mathbb{F}_p(V(T))]] \xrightarrow{\varepsilon_T} \mathbb{F}_p \rightarrow 0$$
$$\begin{aligned} \ker \varepsilon_{\Delta} &= [[\mathbb{F}_p(V(\Delta))]] \cap \ker \varepsilon_T \\ &= \left[\left[\mathbb{F}_p \left(\bigcap_{i \in I} V(\Delta_i) \right) \right] \right] \cap \ker \varepsilon_T \\ \text{previous lemma} &= \bigcap_{i \in I} ([[\mathbb{F}_p(V(\Delta_i))]] \cap \ker \varepsilon_T) \\ &= \bigcap_{i \in I} \ker \varepsilon_{\Delta_i} \end{aligned}$$

כעת נחשב את התמונה

$$\begin{aligned} \text{Im} \delta_\Delta &= \delta_T ([\mathbb{F}_p(E^*(\Delta), *)]) \\ &\stackrel{\text{previous lemma}}{=} \delta_T \left(\bigcap_{i \in I} [\mathbb{F}_p(E^*(\Delta_i), *)] \right) \\ &\stackrel{\delta_T \text{ is injective}}{=} \bigcap_{i \in I} \delta_T ([\mathbb{F}_p(E^*(\Delta_i), *)]) \\ &= \bigcap_{i \in I} \text{Im} \delta_{\Delta_i} \end{aligned}$$

אבל Δ_i קשירים ולכן קיבלנו שוויון.

מסקנה 95: T עץ פרו- p ותהי $W \subseteq T$ תת-קבוצה. אזי קיים תת-עץ פרו- p מינימלי $[W]$ המכיל את W (הוא חיתוך כל תת-העצים הפרו- p המכילים את W).

הגדרה 96: T עץ פרו- p ויהי $v, w \in T$ שני קדקודים. הגיאודז המזכיר את v ו- w הוא $[v, w] = \{v, w\}$.

גיאודז

התכונה האוניברסלית של מודולים חופשיים 97: T עץ פרו- p ויהי Δ, Δ' תת-עצים של T כך ש- $\Delta \cap \Delta' \neq \emptyset$ ו- $x' \in \Delta', x \in \Delta$ אזי $[x, x'] \cap \Delta \cap \Delta' \neq \emptyset$.

הוכחה: כיוון ש- $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$, הגרף $\Delta \cup \Delta'$ הוא גרף קשיר. היות ש- T הוא עץ פרו- p , נובע מלמה קודמת ש- $\Delta \cup \Delta'$ הוא עץ פרו- p שמכיל את $\{x, x'\}$ ולכן $[x, x'] \subseteq \Delta \cup \Delta'$ ולכן מפילוג לוגי נקבל

$$[x, x'] = [x', x] \cap (\Delta \cup \Delta') = (\Delta \cap [x, x']) \cup (\Delta' \cap [x, x'])$$

נקרא לחיתוך הראשון p ולחיתוך השני p' , ונניח בשלילה שמתקיים שהחיתוך ביניהם ריק. אזי על ידי כיווץ p, p' לשתי נקודות, נקבל גר מנה סופי של $[x, x']$ שאינו קשיר, בסתירה לקשירות של הגיאודז.

התכונה האוניברסלית של מודולים חופשיים 98: Γ גרף פרו-סופי ויהי $T \subseteq \Gamma$ תת-עץ פרו- p . נסמן $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma/T$ את האפימורפיזם הקנוני. אזי

$$\alpha_1^* : H_1(\Gamma, \mathbb{F}_p) \rightarrow H_1(\Gamma/T, \mathbb{F}_p)$$

הוא אפימורפיזם. בפרט, אם Γ הוא עץ פרו- p אזי גם Γ/T .

הוכחה: נסמן ב- $\beta : T \rightarrow \Gamma/T$ את העתקה השיכון, ונקבל את הדיאגרמה הבאה:

*****להוסיף תמונה*****

מה אנחנו יכולים להגיד על הדיאגרמה? את מה שהוסף בסגול:

*****תמונה נוספת*****

בנוסף, מלמה קודמת אנחנו יודעים שהעמודה השמאלית מדויקת. דבר נוסף הוא $\ker \tilde{\alpha}_v = \text{Im} \beta_V \cap \ker \varepsilon_\Gamma = \ker \varepsilon_T$.

*****תמונה שלישית*****

נרצה להראות כי $\ker(G \rightarrow H) = \ker(G/K \rightarrow H/K)$ אבל

$$\begin{aligned} \ker(G/K \rightarrow H/K) &= \ker(G \rightarrow H) \cdot K/K \\ &= \ker(G \rightarrow H) / K \cap \ker(G \rightarrow H) = \ker \delta_T / \text{Im} \beta_{E^*} \cap \ker \delta_\Gamma \\ &= \end{aligned}$$

עולה השאלה, עד כמה זה תלוי בבחירת p ?

מסקנה 105: אם G פועלת על T ו- $v \neq w \in V(T)$ אז $E([v, w]) \neq \emptyset$ וגם לכל צלע $e \in E([v, w])$ מתקיים כי $G_v \cap G_w \leq G_e$.

הוכחה: נסמן $K = G_v \cap G_w$. נסתכל על $[v, w]^K$ שהוא עץ פרו- p שמכיל את v, w ולכן $[v, w]^K = [v, w]$, ולכן כל צלע תיוצב על ידי K . ■

התכונה האוניברסלית של מודולים חופשיים 106: G חבורת p הפועלת על T , אזי קיימת נקודת שבת - $v \in V(T)$ כך ש- $G_v = G$. באינדוקציה על $|G| = p^n$. עבור $n = 1$ היא לא חופשית לכל פעולה של G על T לא חופשית, ובפרט קיים $v \in T$ כך ש- $G_v \neq \{1\}$ ולכן $G_v = G$. עבור $|G| = p^n$ נניח נכונות עבור כל $k < n$, ולכן

$$T^G = (T^H)^{G/H} \neq \emptyset$$

ולכן $G_v = G$.

מסקנה 107: אם $D \subseteq T$ עץ פרו- p שהוא G -אינווריאנטי, לכל $v \in V(T)$ קיים $w \in D$ כך ש- $G_v \subseteq G_w$.

הגדרה 108: נגיד ש- D הוא G -אינווריאנטי אם לכל $g \in G$ מתקיים $gD \subseteq D$.

G -
אינווריאנטי

הוכחה: לכל $u \in G_v$ פתוחה ונורמלית, $U_v = U$ ולכן $U \setminus D$ עץ פרו- p עם הפעולה של G/U . מהטענה הקודמת:

$$(U \setminus T)^{G/U} \neq \emptyset$$

ולכן

$$D^{G_v} = \varprojlim (U \setminus T)^{G/U} \neq \emptyset$$

ולכן $D^{G_v} \neq \emptyset$. ■

התכונה האוניברסלית של מודולים חופשיים 109: G פועלת על T ותהא $D_1, D_2 \subseteq T$, נסתכל על $T/D_1, D_2$, אם $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ אז זה עץ פרו- p . $v_1 = [D_1], v_2 = [D_2]$. D_1 ו- D_2 הם G -אינווריאנטים ולכן $T/D_1, D_2 = T'$ יורשת פעולה של G ו- $v_1, v_2 \in (T')^G \neq \emptyset$. נסתכל על $[v_1, v_2]$, הוא מוכל ב- $(T')^G$ ולכן קיימת צלע $e \in E[v_1, v_2]$, התמונה ההפוכה שלה $e \in T$ בוודאי מקיימת $G_e = G$.

התכונה האוניברסלית של מודולים חופשיים 110: G פועלת על T , אחד מהבאים מתקיים:

1. T^G מכילה צלע.

2. ב- T יש תת-עץ פרו- p G -אינווריאנטי שמוכל בכל עץ פרו- p G -אינווריאנטי אחר.

הוכחה: נניח ש-1 לא מתקיים. נסמן ב- Ω את אוסף התת-עצים פרו- p G -אינווריאנטים של T . אזי $D_1, D_2 \in \Omega$ אזי $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. לכן לכל $D_1, \dots, D_n \in \Omega$ מתקיים $D_1 \cap \dots \cap D_n \neq \emptyset$. נסתכל על $D \in \Omega$ על $\bigcap_{D \in \Omega} D \neq \emptyset$ ומתכונת החיתוך הסופי זה קורה. ■

הגדרה 111: G פועלת על T . נאמר שהפעולה אי-פריקה אם ל- T אין תת-עץ פרו- p G -אינווריאנטי לא טריוויאלי.

נאמר שהפעולה נאמנה אם $\ker(G \rightarrow \text{Aut}(T)) = \{1\}$.

פעולה
נאמנה

משפט 112: G פועלת על T בצורה אי-פריקה, ו- $N \trianglelefteq G$ (סגורה) ו- $N \subseteq G_x$ אזי N פועלת טריוויאלית על T .

הוכחה: נסתכל על $T^n \neq \emptyset$, זה עץ פרו- p G -אינווריאנטי, לכן $T^N = T$. ■

התכונה האוניברסלית של מודולים חופשיים 113: G פועלת על T בצורה אי-פריקה ונאמנה, ו- $N \triangleleft G$ אז N פועלת על T בצורה אי-פריקה.

למה 114: G פועלת על T נאמנה ואי־פריקה, ו- $A \triangleleft G$ אבלית וסגורה ולא טריוויאלית. אז:

$$1. A \cong \mathbb{Z}_p.$$

$$2. C_G(A) = \{g \in G \mid ga = ag\} \text{ חופשית.}$$

$$3. H \leq G \text{ כך ש-} H \text{ פועלת על } T \text{ בצורה פריקה, אזי } C_G(A) \cap H = \{1\}.$$

$$4. H \leq G \text{ ו-} |H| = p^n \text{ אז בהכרח } H \cong C_2 \text{ (החבורה הציקלית בת שני איברים) ו-} \overline{\langle A, H \rangle} = A \rtimes H.$$

$$5. \text{ אם } B \leq G \text{ נוצרת על ידי כל האיברים מסדר 2, אזי } B = C_B(A) \times \{1, b\}.$$

הוכחה:

$$1. \text{ ***** זה בעצם 3 ***** נניח בשלילה שקיים } a \in A \text{ ו-} h \in H \text{ שאינם היחידה כך ש-} ah = ha. \text{ לכן } \langle a \rangle \triangleleft A \triangleleft G \text{ פועלת באופן אי־פריק על } T. \text{ לכן } \overline{\langle h, a \rangle} \text{ פועלת באופן אי־פריק על } T, \text{ אבל } \langle h \rangle \triangleleft \langle h, a \rangle \text{ פועלת באופן אי־פריק על } T \text{ ולכן גם } H.$$

$$2. \text{ ניקח } g \in C_G(A), g \neq 1 \text{ אז } \langle g \rangle \cap C_G(A) \neq \{1\} \text{ ולכן } \langle g \rangle \text{ פועלת אי־פריק על } T. \text{ ולכן } xv \neq v \text{ לכל } v \in T \text{ כלומר}$$

$$(C_G(A))_v = \{1\}$$

$$\text{ואז } C_G(A) \text{ פועלת חופשית על } T.$$

$$3. \text{ ***** זה בעצם 1 ***** } A \subseteq C_G(A) \text{ ולכן } A \text{ פועלת חופשית על } T \text{ ולכן } A \text{ חופשית ולכן } A \cong \mathbb{Z}_p.$$

$$4. \text{ אם } H \text{ סופית אזי לפי 3 } \varphi \text{ חח"ע. אבל } \mathbb{Z}_p \cong A \triangleleft G, \varphi: H \rightarrow \text{Aut}(A).$$

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$$

$$\text{ולכן } A \text{ פועלת על ידי כפל בשורשי יחידה. לכן } H \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times. \text{ אנו יודעים כי שורשי היחידה ב-} \mathbb{Z}_p \text{ הם בדיוק:}$$

$$\begin{cases} C_2 & p = 2 \\ \{1\} & p \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{לכן } H = C_2 \text{ ונסמן } H = \{1, \tau\} \text{ ומתקיים } \tau a \tau = a^{-1}.$$

$$5. \text{ מושאר כרגיל לקורא.}$$

■

משפט 115: G פועלת חופשית על T נאמנה ואי־פריקה. G לא טריוויאלית, אחד מהבאים מתקיים:

$$1. \text{ ב-} G \text{ יש תת־חבורה לא אבלית חופשית הפועלת חופשית על } T.$$

$$2. G = \mathbb{Z}_p.$$

$$3. G = \mathbb{Z}_2 \times C_2.$$

משפט 116: G פועלת על T . אחד מהבאים מתקיים:

$$1. \text{ קיים } v \in V(T) \text{ שהוא נקודת שבת - } G_v = G.$$

$$2. \text{ קיימת תת־חבורה } P \leq G \text{ סגורה, לא אבלית כך ש-} P \cap G_v = \emptyset \text{ לכל } v \in T.$$

$$3. \text{ קיימת } e \in E(T) \text{ כך ש-} G_e \triangleleft G/G_e \text{ היא או } \mathbb{Z}_p \text{ או } \mathbb{Z}_2 \times C_2.$$

הוכחה:

יהיה $D \subseteq T$ תת־עץ G ־אינווריאנטי מינימלי ו־ N הגרעין $\ker(G \rightarrow \text{Aut}(T))$. G/N פועלת על D נאמנה ואי־פריקה ולכן אחד מהבאים קורה:

$$1. \quad G/N = \{1\}.$$

$$2. \quad G/N \text{ מכילה תת־חבורה לא אבלית הופעלת חופשי על } D.$$

$$3. \quad G/N \cong \mathbb{Z}_p.$$

$$4. \quad G/N \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes C_2.$$

■

נתחיל בהוכחה.

$$1. \quad G \text{ פועלת טריוויאלית על } D \text{ אז יש נקודות שבת.}$$

$$2. \quad H \subseteq G/N \text{ פועלת חופשית על } D \text{ ולכן } H \text{ חופשית. ונסמן } P = \text{Im}(s), \text{ כאשר } s: H \rightarrow G \text{ פועלת חפשית על } D \text{ ולכן } P \text{ חופשית. יהי } v \in V(T) \text{ אז קיים } w \in V(D) \text{ כך ש- } G_v \leq G_w. \text{ פועלת חופשית על } D \text{ ולכן } P \cap G_w = \{1\} \text{ ובפרט } G_v \cap P = \{1\}.$$

$$3. \quad G/N \cong \mathbb{Z}_p, \text{ ולכן } (G/N)_e = \{1\} \text{ לכל } e \in E(D). \text{ לכן } G_e = N, \text{ אם } E(D) \neq \emptyset \text{ סיימנו, ואם } E(D) = \emptyset \text{ אז אנו במקרה } 4.$$