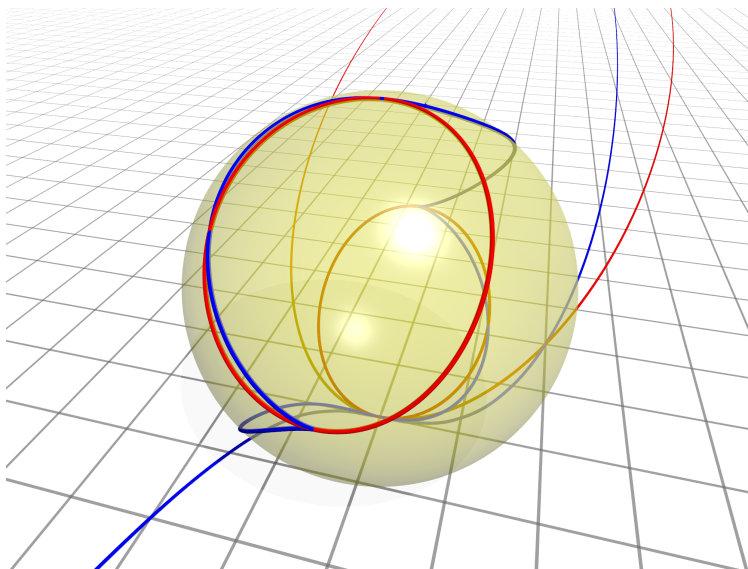


מושגי יסוד בגיאומטריה אלגברית 1



מרצה: פרופ' יעקב ורשבסקי
מסכם: עומר שכטר — omer.shechterSHTRUDELmail.huji.ac.il
ניתן בסמסטר אביב ה'תשע"ו באוניברסיטה העברית בירושלים
אשמח לקבל תיקונים והערות, קטנים כגדולים
גרסה 20190322

תוכן עניינים

5	I מבוא	
5	1 נהלים	
5	2 ספרי הקורס	
5	3 דוגמה היסטורית	
6	II הרצאות	
6	4 יריעות	
6	4.1 יריעות אפיניות	
9	4.2 יריעות פרויקטיביות	
12	4.3 פונקציות רגולריות ומורפיזמים	
18	4.4 מבוא לתורת קטגוריות	
19	4.5 חזרה לפונקציות רגולריות ומורפיזמים	
21	4.6 מכפלות	
23	4.7 העתקות רציונליות	
26	4.8 יריעות לא סינגולריות	
29	4.9 מדוע נקודות רגולריות "טובות"?	
29	4.10 חיתוך במרחב פרויקטיבי	
30	5 סכמות	
30	5.1 אלומות	
35	5.2 הגדרות קטגוריות	
35	5.3 אלומות על מרחבים שונים	
36	5.4 סכמות	
42	5.5 סכמות פרויקטיביות	
43	5.6 תכונות ראשונות של סכמות	
44	5.7 תכונות של מורפיזמים של סכמות	
46	5.8 מכפלות מסוייבות	
49	5.9 העתקות פרידות ונאותות	
57	5.10 אלומות של מודולים	
58	5.11 אלומות קוואזי-קוהרנטיות על סכמות	
69	5.12 מורפיזם ל- $\mathbb{P}^n$ ואלומות מלאות	
72	III תרגולים	
72	6 תרגול ראשון	
72	6.1 מרחבים טופולוגיים נתריים	
73	6.2 משפט האפסים של הילברט	
75	7 תרגול שני	
75	7.1 הערות על משפט האפסים	
76	7.2 תורת המימד	
79	8 תרגול שלישי	
79	8.1 משפט האידיאל הראשי של קרול	

81	החרוט מעל יריעה פרויקטיבית	8.2	
82	הטלה מנקודה	8.3	
82	תרגול רביעי	9	
82	הטלה מנקודה	9.1	
82	שיכון ה-duple	9.2	
84	שימוש לשיכון	9.3	
84	תרגול חמישי	10	
84	Blow-up בנקודה	10.1	
85	דוגמאות	10.2	
87	tacnode	10.3	
88	cups	10.4	
88	סיכום	10.5	
88	תרגול שישי	11	
88	אלומות	11.1	
89	תרגול שביעי	12	
89	פונקטורים צמודים	12.1	
91	דוגמאות של סכמות	12.2	
92	הדבקות	12.3	
92	תרגול שמיני	13	
92	הדבקות	13.1	
94	סכמות מצומצמות	13.2	
95	תרגול תשיעי	14	
95	מורפיזם אפיני	14.1	
96	שיכונים למיניהם	14.2	
97	יריעות וסכמות	14.3	
98	תרגול עשירי	15	
98	שיכונים סגורים	15.1	
99	נורמליזציה	15.2	
101	תכונות גיאומטריות של יריעות	15.3	
102	תרגול אחד-עשר	16	
102	הערות לתרגיל הקודם	16.1	
103	הלמה של Chow	16.2	
105	עקומים מעל שדה סגור-אלגברית	16.3	
105	תרגול שניים-עשר	17	
105	Spec יחסי	17.1	
106	אגדים וקטוריים	17.2	

חלק I

מבוא

1 נהלים

הקורס הזה הוא מושגי יסוד מצד אחד, אך יש לו שוני גדול משאר מושגי היסוד. החדשות הטובות הם שאין מבחן. אבל אין ארוחות חינם, וכל הציון יהיו שיעורי הבית, והם יהיו הרבה. זה אומר שבמהלך הסמסטר תהיה יותר עבודה, אבל אם מחשבים נכון (כולל שבוע ללמוד למבחן). צריכים להגיש את כל התרגילים, אך אם משהו רוצה הארכה ניתן לשלוח דוא"ל לפרופ' ורשבסקי (אך לא לעשות את זה כל שבוע, לטובתנו). בקורס הזה אין נכשלים, אפשר לא לקבל ציון. התרגילים יתפרסמו במודל.

2 ספרי הקורס

המטרה היא לכסות את החלק הראשון של הרשטורן, שכולם מתלוננים שהוא גרוע (במידה מסוימת בצדק), אך הוא מתמקד בנושאים החשובים והוא קצר. ישנו ספר טוב של ראוי ואקיל שמסביר את הנושא מעולה אך הוא מאוד ארוך. ישנו גם ספר טוב של קמפף. החיסרון של קמפף הוא שלא תמיד רואים מה קורה שם בשל האלמנטריות:

- Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52 1st Edition, Springer-Verlag New York, 1977.
- Ravi Vakil, *MATH 216: Foundations of Algebraic Geometry*, <http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGjun1113public.pdf>
- George R. Kempf, *Algebraic Varieties*, London Mathematical Society Lecture Note Series 1st Edition, Cambridge University Press, 1993.

3 דוגמה היסטורית

גיאומטריה אלגברית היא ענף בין אלגברה לגיאומטריה. נניח שאנחנו רוצים לפתור משוואה.

דוגמה 1: נרצה למצוא פתרון של $x^2 + y^2 = z^2$ עבור $x, y, z \in \mathbb{Z}$. פתרון אלגברי מוכר, אך איך נשתמש בגיאומטריה? ניתן לחלק ב- z^2 ונקבל $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$ ואת זה ניתן להמיר למשוואה $x, t \in \mathbb{Q}$ מהצורה $x^2 + y^2 = 1$. זה מעגל. נעביר ישר בין הנקודות $(1, 0)$, (x, y) על המעגל, וזה ישר עם שיפוע $\frac{y}{x-1} = t \in \mathbb{Q}$. נציב ונקבל שהמשוואה היא $x^2 + (t(x-1))^2 = 1$ ומקבלים משוואה ריבועית. פתרונותיה הם $(1, 0)$ ו- $\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{-2t}{t^2+1}\right)$.

הרעיון הוא שבעוד שיש לנו משוואה, ניתן לעבור למבנה גיאומטרי ולהבין את אוסף הפתרונות בעזרתו.

יש כמה דרכים ללמד גיאומטריה אלגברית. עד ללפני חמש שנים לימדו קורס די אלמנטרי. מתחילים בלי להניח כלום ומסיימים כמעט בלי ללמוד כלום, מצד שני יש סטודנטים שרוצים להמשיך בתחומים שדורשים גיאומטריה אלגברית. הקושי בתחום הוא להסביר מה האובייקטים. בדוגמה הקודמת האובייקט, המעגל, היה פשוט ומובן גם לתלמידים בתיכון.

חלק II

הרצאות

4 יריעות

הערה 2: עד שייאמר אחרת, k יהיה שדה סגור אלגברית.

4.1 יריעות אפיניות

$\mathbb{A}^n$ **הגדרה 3:** מרחב אפיני n -ממדי $\mathbb{A}^n = A_k^n$ הוא k^n (כקבוצה).

A_n **הגדרה 4:** יהי $k[A^n] = A_n$ הוא $k[x_1, \dots, x_n]$ (כקבוצה).

נשים לב שיש הומומורפיזם טבעי $A_n \rightarrow \text{Fun}(\mathbb{A}^n, k)$ על ידי $f \mapsto (\bar{a} \mapsto f(\bar{a}))$. נרצה לראות את הקשר בין שני המושגים שהגדרנו.

$Z(T)$ **הגדרה 5:** לכל $f \in A_n$ נגדיר $Z(f) = \{\bar{a} \in \mathbb{A}^n \mid f(\bar{a}) = 0\}$. לכל $T \subseteq A_n$ נגדיר $Z(T) = \{\bar{a} \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in T, f(\bar{a}) = 0\}$.

תרגיל 6: יהיה $I = (T)$ אידיאל הנוצר על ידי T , אזי $Z(T) = Z(I)$.

עובדה 7: חוג נתון, ופירושו שכל אידיאל הוא נוצר סופית. לכן, לכל אידיאל $I \subseteq A_n$, מתקיים כי $I = (f_1, \dots, f_n)$ ולכן $Z(I) = Z(f_1, \dots, f_n)$.

למה 8: 1. $Z(T_1) \cup Z(T_2) = Z(T_1 \cdot T_2)$ כאשר $T_1 \cdot T_2 = \{f \cdot g \mid f \in T_1, g \in T_2\}$.

$$2. Z(\bigcup T_\alpha) = \bigcap Z(T_\alpha).$$

$$3. Z(\{0\}) = \mathbb{A}^n.$$

$$4. Z(\{1\}) = \emptyset.$$

הוכחה:

1. אם $\bar{a} \notin Z(T_1), Z(T_2)$, אזי קיימים $f \in T_1, g \in T_2$ כך ש- $f(\bar{a}) \neq 0, g(\bar{a}) \neq 0$ ולכן $(f \cdot g)(\bar{a}) \neq 0$ ולכן $\bar{a} \notin Z(T_1 \cdot T_2)$. בכיוון השני, טריוויאלי ש- $Z(T_1) \subseteq Z(T_1 \cdot T_2)$, ובלי הגבלת הכלליות סיימנו.

2. ברור.

3. ברור.

4. ברור.

הגדרה 9: טופולוגיית זריצקי על $\mathbb{A}^n$ היא הטופולוגיה בה הקבוצות הסגורות הן בדיוק $Z(T)$.

הערה 10: לפי למה 8, זו טופולוגיה.

דוגמה 11: נסתכל על $n = 1$. כל אידיאל $I \subseteq k[x]$ הוא ראשי $I = (f)$ ולכן קבוצות סגורות הן $Z(f)$ ולכן אוסף אפסים של פולינום. הקבוצות הפתוחות הן המשלימות של כל הקבוצות הסופיות, ולכן קיבלנו את הטופולוגיה הקו-סופית.

הערה 12: מבחינת הטופולוגיה, זו טופולוגיה לא כ"כ עשירה. זו הסיבה שאנחנו מסתכלים לא רק על הזווית הטופולוגית, אלא נתקדם בעוד כיוונים.

הגדרה 13: מרחב-טופולוגי X ייקרא **פריק** אם קיימות $X_1, X_2 \subsetneq X$ סגורות כך ש- $X = X_1 \cup X_2$.

דוגמה 14: נסתכל על $Z(xy)$ (שני הצירים). נשים לב ש- $Z(xy) = Z(x) \cup Z(y)$.

הגדרה 15: מרחב-טופולוגי X ייקרא **אי-פריק** אם הוא לא פריק, ופירושו, לכל $X_1, X_2 \subsetneq X$ סגורות, מתקיים $X_1 \cup X_2 \neq X$.

דוגמה 16: $\mathbb{A}^1$ אי-פריק.

הוכחה: זו קבוצה אינסופית (כי k סגור-אלגברית), וכל קבוצה סופית היא סגורה, ואיחוד של סופיות הוא סופי. ■

למה 17: עבור מרחב-טופולוגי X התנאים הבאים שקולים:

1. X אי-פריק.

2. אם $\emptyset \neq Y \subseteq X$ פתוחה אזי Y צפופה.

3. אם $\emptyset \neq Y_1, Y_2 \subseteq X$ פתוחות אזי $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$.

הוכחה: נשים לב ש- $(3) \iff (1)$, שכן (3) אומר בדיוק ש- $X \setminus Y_1, X \setminus Y_2$ סגורות, אזי האיחוד שלהן, שהוא $X \setminus (Y_1 \cap Y_2) \neq X$. בנוסף, $(2) \iff (3)$ כי $Z \subseteq X$ צפופה אם ורק אם $Z \cap U \neq \emptyset$ לכל $U \subseteq X$ לא ריקה, לפי משפט מטופולוגיה. ■

דוגמה 18: אם X אי-פריק ו- $\emptyset \neq Y$ פתוחה, אזי Y פתוחה ו- Y גם אי-פריקה. זאת מתנאי (2) בלמה 17, למשל.

הגדרה 19: קבוצה סגורה ב- $\mathbb{A}^n$ עם הטופולוגיה המושרית, תיקרא **יריעה אפינית**.

הערה 20: בדרך כלל מניחים ש- X אי-פריק. אחרת זה נקרא בספר "קדם-יריעה". פרופ' ורשבסקי לא אוהב "קדם-יריעה", אז לא נשתמש בזה.

הגדרה 21: קבוצה פתוחה של יריעה אפינית תיקרא **יריעה קוואזי-אפינית**.

תרגיל 22: יריעה קוואזי-אפינית היא $X \subseteq \mathbb{A}^n$ סגורה מקומית.

הגדרה 23: לכל קבוצה $Y \subseteq \mathbb{A}^n$, נגדיר $I(Y) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid \forall \bar{a} \in Y, f(\bar{a}) = 0\}$ $I(Y)$

תרגיל 24: $I(Y) \triangleleft k(\mathbb{A}^n)$ אידיאל.

למה 25: 1. אם $T_1 \subseteq T_2 \subseteq k(\mathbb{A}^n)$ אזי $Z(T_2) \subseteq Z(T_1)$.

2. אם $Y_1 \subseteq T_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ אזי $I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$.

3. לכל $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ מתקיים $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

4. לכל $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ מתקיים $\bar{Y} = Z(I(Y))$ (הסגור של הקבוצה).

5. לכל $\alpha \triangleleft A_n$ אידיאל מתקיים $\sqrt{\alpha} = I(Z(\alpha))$ – רדיקל של אידיאל, שהוא $\{f \in A_n \mid \exists n \in \mathbb{N}, f^n \in \alpha\}$.

הוכחה:

1. ברור.

2. ברור.

3. ברור.

4. ברור ש- $Y \subseteq Z(I(Y))$ (כי אם $\bar{a} \in Y$ ו- $f \in I(Y)$ אזי $f(\bar{a}) = 0$). $Z(I(Y))$ סגורה ולכן $\bar{Y} \subseteq Z(I(Y))$. למה יש שוויון? תהי $W \subseteq \mathbb{A}^n$ סגורה כך ש- $Y \subseteq W$. מסגירות $W = Z(\alpha)$ ולכן $Y \subseteq Z(\alpha)$ ולכן $\alpha \subseteq I(Z(\alpha)) \subseteq I(Y)$. לכן, $Z(I(Y)) \subseteq Z(\alpha) = W$ ובפרט $Z(I(Y)) \subseteq \bar{Y}$.

5. כדי להוכיח את הכיוון הקל נעזר בהערה הבאה:

הערה 26: לכל $I(Y) \triangleleft A, Y \subseteq \mathbb{A}^n$ שכן אנחנו בשדה ואין מחלקי-אפס, ולכן אם $f^n \in I(Y)$ אז $f^m(\bar{a}) = 0$ ולכן $f(\bar{a}) = 0$ ולכן $f \in I(Y)$.

כעת, $\alpha \subseteq I(Z(\alpha))$ קל, לכן $\sqrt{\alpha} \subseteq I(Z(\alpha))$ לפי ההערה. בכיוון השני, משפט האפסים של הילברט (זו החשיבות של k סגור אלגברית).

■

מסקנה 27: 1. ההעסקות I, Z משרות העתקה חד-חד-ערכית ועל בין קבוצות סגורות ב- $\mathbb{A}^n$ לבין אידיאלים רדיקליים ב- A_n .

2. Y אי-פריק אם ורק אם $I(Y)$ ראשוני.

הוכחה:

1. מסקנה של (4) ו-(5) של למה 25.

2. יהי $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ אי-פריק, $f, g \in A_n$ כך ש- $fg \in I(Y)$ ומכאן

$$Y \subseteq Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$$

ומאי-פריקות $Y \subseteq Z(f)$ או $Y \subseteq Z(g)$. את השאר הקורא מוזמן להשלים. בכיוון ההפוך, עבור $p \triangleleft A$ ראשוני, נרצה להוכיח ש- $Z(p)$ אי-פריק. נניח ש- $Z(p) = Y_1 \cup Y_2$, אבל $p = I(Z(p))$ (כי p ראשוני ולכן רדיקלי). אבל $I(Z(p)) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$ ומהגדרת החיתוך מתקיים כי $I(Y_1) \cdot I(Y_2) \subseteq I(Y_1) \cap I(Y_2)$ ולכן $I(Y_1) \subseteq p$ או $I(Y_2) \subseteq p$. מזה נובע $Z(p) \subseteq Y_1$ או $Z(p) \subseteq Y_2$ וסיימנו.

■

הגדרה 28: תהי $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ קבוצה סגורה, נגדיר $k[Y] = k[\mathbb{A}^n]/I(Y)$ $k[Y]$

טענה 29: יש שיכון טבעי $k[Y] \hookrightarrow \text{Func}(Y, K)$

הוכחה: תהי $i_Y : k[\mathbb{A}^n] \rightarrow \text{Func}(Y, K)$, על ידי $i_Y(f) = f|_Y$. אזי $I(Y) = \ker i_Y$ לכן מושרה שיכון. ■

טענה 30: $k[Y]$ אלגברה נוצרת-סופית ללא נילפוטנטים.

דוגמה 31: 1. $\mathbb{A}^n$ אי-פריק. אפשר להוכיח ישירות בידיים, או לראות ש-0 אידיאל ראשוני.

2. $\mathfrak{m} \subseteq k[\mathbb{A}^n]$ מקסימלי אם ורק אם הוא מותאם לקבוצה סגורה מינימלית של $\mathbb{A}^n$, וקבוצות סגורות מינימליות הן נקודות. נקודה $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ מותאמת ל- $\mathfrak{m}_{\bar{a}} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$.

3. $k[x_1, \dots, x_n]$ הוא חוג פריקות-יחידה. לכן, אם $f \in k[\mathbb{A}^n]$ אי-פריק אם ורק אם $(f) \subseteq k[\mathbb{A}^n]$ ראשוני. במקרה הזה, $Z(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ יריעה אפינית אי-פריקה. וזה מה שקרוי **על-מישור**.

4. אם A אלגברה נוצרת-סופית מעל k ללא נילפוטנטים, אזי קיימת יריעה אפינית $X \subseteq \mathbb{A}^n$ כך ש- $A \cong k[X] \cong k[\mathbb{A}^n]/I(X)$. ההוכחה היא כי $A \cong k[x_1, \dots, x_n]/\alpha$ ישירות מהטענה, אבל היות ש- A ללא נילפוטנטית אזי $\alpha = \sqrt{\alpha}$ ולכן $X = Z(A)$ ולכן $A = k[X]$.

4.2 יריעות פרויקטיביות

הגדרה 32: נגדיר כקבוצה $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}_k^n = \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ כאשר לכל $\lambda \in k^\times$ ויחס השקילות הוא $(a_0, \dots, a_n) \sim (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ (אלו כל הישרים ב- $\mathbb{A}^{n+1}$ העוברים דרך (0)). נסמן ב- $[a_0, \dots, a_n]$ את $(a_0; a_1; \dots; a_n)$, מחלקת השקילות של הנקודה. $\mathbb{P}^n$

הגדרה 33: חוג מדורג הוא חוג S יחד עם איזומורפיזם $S \cong \bigoplus_{i \geq 0} S_i$.

דוגמה 34: $S = k[x_0, \dots, x_n]$. נגדיר $S_n = \bigoplus_{l_i=n} kx_0^{l_0} \dots x_n^{l_n}$ הפולינומים ההומוגניים מדרגה n .

טענה 35: אפשר לכתוב כל פולינום כסכום יחיד של פולינומים הומוגניים.

הגדרה 36: איבר $a \in S_d$ $0 \neq a$ נקרא **הומוגני** מדרגה d .

הגדרה 37: כל איבר $a \in S$ ניתן לכתובה יחידה $a = \sum_{d=0}^n a_d$, סכום סופי, כאשר $a_d \in S_d$.

הגדרה 38: אידיאל $\alpha \triangleleft S$ נקרא **הומוגני** אם $\alpha = \bigoplus_{d \geq 0} (\alpha \cap S_d)$ (אם ורק אם לכל $a \in \alpha$ מתקיים $d \geq 0$).

דוגמה 39: האידיאל $k[x, y] \triangleleft k[x, y]$ אינו הומוגני, כי $x, y^2 \notin (x + y^2)$.

הגדרה 40: $S_{\text{hom}} = \bigcup S_d$ (זו קבוצה). S_{hom}

למה 41: 1. $\alpha \triangleleft S$ הומוגני אם ורק אם יש ל- α יוצרים הומוגניים.

2. סכום, מכפלה, חיתוך ורדיקל של אידיאלים הומוגניים, הוא הומוגני.

3. אידיאל הומוגני $\alpha \triangleleft S$ הוא ראשוני אם ורק אם לכל $x, y \in S_{\text{hom}}$ כך ש- $xy \in \alpha$ מתקיים $x \in \alpha$ או $y \in \alpha$.

הוכחה:

1. אם α הומוגני, ו- $\alpha = (a_\alpha)_{\alpha \in I}$ אזי לכל a_α , כל הרכיבים ההומוגניים שלו נמצאים ב- α , לכן $\alpha = \left((a_{\alpha_d})_{d \geq 0} \right)_{\alpha \in I}$. בכיוון השני, אם $\alpha = (f_i)_{i \in I}$ איברים הומוגניים, אזי לכל $x \in \alpha$ מתקיים $x = \sum g_i f_i$ נניח ש- $f_i \in S_{n(i)}$ אזי $x_d = \sum (g_i)_{d-n(i)} f_i \in \alpha$ (באופן דומה לאיך שמתנהג בפולינומים הומוגניים).

2. אם $\alpha = (f_i)$, $\beta = (g_j)$ כך ש- $f_i, g_j \in S_{\text{hom}}$ אזי $\alpha + \beta = (f_i + g_j)$, $\alpha \cdot \beta = (f_i \cdot g_j)$. וזה הומוגני מהסעיף הקודם. יהיו α, β הומוגניים, $\sum x_d = x \in \alpha \cap \beta$, צריך להוכיח $x_d \in \alpha \cap \beta$, אבל $x_d \in \alpha$, רוצים להוכיח ש- $\sqrt{\alpha}$. $\forall d \geq 0, x_d \in \sqrt{\alpha}$. אפשר להניח $x = \sum_{i=0}^d x_i$, לפי הנחה קיים n כך ש- $x^n \in \alpha$, אבל $x^n = x_d^n + C$ כאשר C מדרגה קטנה מ- nd . זאת אומרת, $x_d^n \in \alpha$ לכן $x_d^n = (x^n)_{nd} \in \alpha$ כי α הומוגני, וזה אומר ש- $\sqrt{\alpha}$.

3. הכיוון $\Leftarrow$ ברור. בכיוון השני, רוצים להוכיח שלכל $f, g \in S$ כך ש- $g \notin \alpha$ ו- $fg \in \alpha$ מתקיים $f \in \alpha$. נכתוב $g = g_0 + \dots + g_m$ כאשר $g_m \notin \alpha$, $f = f_0 + \dots + f_l$ אזי $fg = f_l g_m + C$ כאשר C הם איברים מדרגה הקטנה מ- $l+m$. זאת אומרת, $\alpha \ni (fg)_{l+m} = f_l g_m$, לפי ההנחה, $g_m \notin \alpha$ ולכן $f_l \in \alpha$. אם ניקח $(f - f_l)g = \underbrace{fg}_{\in \alpha} - \underbrace{f_l g}_{\in \alpha}$ לכו באינדוקציה על l מקבלים ש- $\forall_i f_i \in \alpha$, ומכאן $f \in \alpha$.

■

הערה 42: אם S מדורג ו- $\alpha \triangleleft S$ הומוגני, אזי S/α מדורג, ליתר דיוק, $S/\alpha = \bigoplus S_d / S_d \cap \alpha$.

דוגמה 43: יהי $S = k[x_0, \dots, x_n]$. לכל $f \in S_d$ מתקיים $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n)$. נשים לב ש- f אינה פונקציה על המרחב הפרויקטיבי, כי היא לא נותנת ערכים זהים בשני האגפים. מה שכן, יש אותם אפסים. קרי, $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ אם ורק אם $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0$ נגדיר

$$Z_{\text{hom}}(f) = \left\{ \underbrace{[\bar{a}]}_{:= (a_0; \dots; a_n)} \in \mathbb{P}^n \mid f(\bar{a}) = 0 \text{ for all } [\bar{a}] \text{ representative} \right\}$$

חשוב לזכור, f איבר הומוגני.

יותר כללי, לכל $T \subseteq S_{\text{hom}}$ אפשר להגדיר $Z(T) = \bigcap_{f \in T} Z(f)$. יהי $\alpha \in S$ אידיאל הומוגני, נגדיר $Z(\alpha) := Z(\alpha_{\text{hom}})$.

הערה 44: לפי משפט הבסיס של הילברט, הקובע שחוג פולינומים של חוג נתרי הוא נתרי, $f_i \in S_{\text{hom}}$ עבור $\alpha = (f_1, \dots, f_n)$.

למה 45: 1. $Z(T_1) \cup Z(T_2) = Z(T_1 T_2)$.

2. $\bigcap Z(T_\alpha) = Z(\bigcup T_\alpha)$.

3. $Z(1) = \emptyset$.

4. $Z(0) = \mathbb{P}^n$.

הגדרה 46: נגדיר את **טופולוגיית זריצקי** על $\mathbb{P}^n$ כך שהקבוצות הסגורות הן $Z(T)$ לכל $T \subseteq S_{\text{hom}}$ (או $Z(\alpha)$ עבור $\alpha \triangleleft S$ הומוגני).

הגדרה 47: **יריעה פרויקטיבית** היא קבוצה סגורה ב- $\mathbb{P}^n$.

הגדרה 48: **יריעה קוואזי-פרויקטיבית** היא קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{P}^n$.

הגדרה 49: לכל $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ תת-קבוצה נגדיר $I(Y) = \langle f \in S_{\text{hom}} \mid \forall p \in Y, f(p) = 0 \rangle$, האידיאל הנוצר על ידי הפונקציות המאפסות.

הגדרה 50: אם $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ סגורה אזי נגדיר $S[Y] := S/I(Y)$, והוא ייקרא **חוג הקואורדינטות ההומוגניות**.

הערה 51: בהמשך נראה מתי שתי יריעות הן איזומורפיות. אם X_1, X_2 יריעות אפיניות ו- $X_1 \cong X_2$, אזי $k[X_1] = k[X_2]$. אם רוצים להגדיר את זה עבור יריעות פרויקטיביות, זה לא נכון. לכן במושג הקודם זה לא לגמרי מדויק וממש תלוי בשיכון.

הגדרה 52: לכל $i = 0, \dots, n$ נגדיר $U_i = \{(x_0; \dots; x_n) \mid x_i \neq 0\}$. זאת אומרת, $U_i = \mathbb{P}^n \setminus Z(x_i)$.

1. U_i פתוחה כמשלים של סגורה.

2. $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$.

3. נגדיר שתי העתקות:

φ_i, ψ_i

(א) $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n$ על ידי $\varphi_i(x_0; \dots; x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$. במלים אחרות, לכל $(x_0, \dots, x_n) \in U_i$ יש נציג יחידה מהצורה $(x_0, \dots, 1, \dots, x_n)$, כאשר ה-1 במקום ה- i .

(ב) $\psi_i : \mathbb{A}^n \rightarrow U_i$ על ידי $\psi_i(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

טענה 53: φ_i היא הומיאומורפיזם ו- ψ_i ההעתקה ההופכית.

מסקנה 54: כל יריעה (קוואזי-)אפינית הומיאומורפית ליריעה קוואזי-פרויקטיבית. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ סגורה (פקומית) אזי $X \subseteq U_i$ סגורה (פקומית) לכן גם ב- $\mathbb{P}^n$.

מסקנה 55: אם $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ היא (קוואזי-)פרויקטיבית אזי $Y = \bigcup (Y \cap U_i)$, $Y \cap U_i \subseteq U_i$ היא (קוואזי-)אפינית.

הוכחה: ללא הגבלת הכלליות, $i = 0$, $\psi = \psi_0$, $\varphi = \varphi_0$. נשים לב ש- $Id = \psi \circ \varphi = \psi \circ \varphi_0$. מספיק להראות ש- φ ו- ψ העתקות סגורות (מעבירות קבוצה סגורה לסגורה). נסמן $A = k[\mathbb{A}^n] = k[y_1, \dots, y_n]$ ו- $S = k[x_0, \dots, x_n]$. אנחנו רוצים להגדיר שתי העתקות – על ידי $\alpha : S_{\text{hom}} \rightarrow A$

$$\alpha(f) = f(1, y_1, \dots, y_n)$$

ו- $\beta : A \rightarrow S_{\text{hom}}$ על ידי

$$\beta(f)(x_0, \dots, x_n) = x^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

תהי $Y \subseteq U_i$ סגורה, אזי $Y = Z_{\text{hom}} \cap U_i$ כאשר $T \subseteq S_{\text{hom}}$.

תרגיל 56: $\varphi(Y) = Z(\alpha(T))$.

מתקיים $\bar{x} \in Z(\alpha(T)) \iff \bar{x} \in \varphi(T)$.

להפך, $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ סגורה אזי $Y = Z(T)$, $T \subseteq A$.

תרגיל 57: $\psi(Y) = Z(\beta(T)) \cap U_0$.

■

4.3 פונקציות רגולריות ומורפיזמים

הגדרה 58: תהי $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ קוואזי-אפינית. פונקציה $f : Y \rightarrow k$ נקראת **פונקציה רגולרית** ב- $p \in Y$ אם קיימת סביבה פתוחה $U \subseteq Y$ ופולינומים $g, h \in k[\mathbb{A}^n]$ כך ש- $h|_U \neq 0$ ו- $f|_U = \frac{g}{h}|_U$.

הגדרה 59: f תיקרא **רגולרית** אם היא רגולרית בכל נקודה.

למה 60: פונקציה רגולרית $f : Y \rightarrow k$ היא רציפה בטופולוגיית זריצקי.

הוכחה: מספיק להראות שמקור של כל קבוצה סגורה היא סגורה. אבל קבוצה סגורה ב- $\mathbb{A}^n$ היא או הכול או קבוצה סופית. לכן מספיק להראות ש- $f^{-1}(a)$ (מקור של נקודה שנשמנה a) היא נקודה. נעזר בלמה הבאה:

למה 61: "להיות סגורה זו תכונה מקומית", הווה אומר, $Z \subseteq X$ סגורה אם ורק אם קיים כיסוי פתוח $X = \bigcup U_\alpha$ כך ש- $Z \cap U_\alpha$ סגורה לכל α .

הוכחה: $Z \cap U_\alpha$ סגורה אם ורק אם $(X \setminus Z) \cap U_\alpha$ פתוחה, אבל זה טריוויאלי לגמרי שפתיחות היא תכונה מקומית.

■

הוכחה: נמשיך בהוכחה. f רגולרית, ולכן לכל $p \in Y$ קיימת סביבה U ופולינומים g, h כך ש- $h|_U \neq 0$ ו- $f|_U = \frac{g}{h}|_U$. לכן,

$$f^{-1}(a) \cap U = \{p \in U | f(p) = a\} = \left\{p \in U \mid \frac{g}{h}(p) = a\right\}$$

$$= \{p \in U | g(p) - a \cdot h(p) = 0\} = U \cap Z(g - a \cdot h)$$

ולכן $f^{-1}(a) \cap U$ סגורה, ולכן $f^{-1}(a)$ סגורה לפי למת העזר 61.

■

■

הגדרה 62: תהי $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ קוואזי-פרויקטיבית (סגורה מקומית), $f : Y \rightarrow k$ היא רגולרית ב- $p \in Y$ אם קיימת סביבה פתוחה $U \subseteq Y$ ו- $p \in U$ כך ש- $h|_U$ ו- $\frac{g}{h}|_U = f|_U$.

הערה 63: g, h בהגדרה מאותה דרגה, ולכן המנה מגדירה פונקציה על $\mathbb{P}^n \setminus Z(h)$.

הגדרה 64: f תיקרא רגולרית אם היא רגולרית בכל נקודה.

למה 65: $f : Y \rightarrow k$ רגולרית אזי f רציפה.

הוכחה: בדומה להוכחה הקודמת, f רגולרית, ולכן לכל $p \in Y$ קיימת סביבה U ופולינומים g, h כך ש- $h|_U \neq 0$ ו- $f|_U = \frac{g}{h}|_U$. לכן,

$$f^{-1}(a) \cap U = \{p \in U \mid f(p) = a\} = \left\{p \in U \mid \frac{g}{h}(p) = a\right\}$$

$$= \{p \in U \mid g(p) - a \cdot h(p) = 0\} = U \cap Z(g - a \cdot h)$$

ולכן f רציפה. בנוסף, $g - ah \in S_{\text{hom}}$.

■

הגדרה 66: 1. יריעה היא יריעה קוואזי-אפינית או קוואזי-פרויקטיבית.

2. יהיו X, Y יריעות. מורפיזם $\varphi : X \rightarrow Y$ הוא העתקה רציפה כך ש- $\varphi^*(\text{regular}) = \text{regular}$, הווה אומר, לכל $U \subseteq Y$ פתוחה וכל $f : U \rightarrow k$ רגולרית, הפונקציה

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{f} k$$

היא רגולרית.

3. $\varphi : X \rightarrow Y$ איזומורפיזם אם קיים מורפיזם $\psi : Y \rightarrow X$ כך ש- $\varphi \circ \psi = Id_Y$ ו- $\psi \circ \varphi = Id_X$.

הגדרה 67: 1. יהי X מרחב-טופולוגי ו- k שדה. אלומות פונקציות על X (עם ערכים ב- k) היא כלל $\mathcal{O}_x$ שלכל $U \subseteq X$ מתאים תת-חוג $\mathcal{O}_X(U) \subseteq \text{Func}(U, k)$, כך שמתקיימים שלושת התנאים הבאים:

$\mathcal{O}_X$

(א) לכל $V \subseteq U \subseteq X$ פתוחות, $f \in \mathcal{O}_X(U)$, $f|_V \in \mathcal{O}_X(V)$.

(ב) אם $U = \bigcup U_\alpha$ (כיסוי פתוח) ו- $f : U \rightarrow k$ מקיימת ש- $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$ אזי $f \in \mathcal{O}_X(U)$.

(ג) לכל $U \subseteq X$ פתוחה ו- $f \in \mathcal{O}_X(U)$, הקבוצה $D_U(f) = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ פתוחה ו- $\frac{1}{f|_{D_U(f)}} \in \mathcal{O}_X(D_U(f))$.

2. מרחב פונקציה הוא זוג $(X, \mathcal{O}_X)$ כאשר X מרחב-טופולוגי ו- $\mathcal{O}_X$ אלומות פונקציות על X . $(X, \mathcal{O}_X)$

3. מורפיזם של מרחבי פונקציות הוא פונקציה רציפה $\varphi : X \rightarrow Y$ כך שלכל $U \subseteq Y$ פתוחה ו- $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ מתקיים

$$\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$$

דוגמה 68: 1. תהי X יריעה ו- $\mathcal{O}_X(U)$ – פונקציות רגולריות על U , אזי $(X, \mathcal{O}_X)$ מרחב פונקציות.

הערה 69: נקבל את ההכלה הבאה כקטגוריות (ואז מדובר בתת-קטגוריה מלאה): "מרחבי פונקציות" $\subseteq$ "יריעות אפיניות".

2. $(X, \mathcal{O}_{\text{cont}}(X))$ כאשר $\mathcal{O}_{\text{cont}} f(U) : U \rightarrow \mathbb{R}$ – פונקציות רציפות.

3. X – יריעה C^∞ , $\mathcal{O}(X) : X \rightarrow \mathbb{R}$ – העתקות C^∞ .

הגדרה 70: 1. תהי Y יריעה, פונקציות רגולריות – $\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}_Y(Y)$.

2. לכל $p \in X$ נגדיר $\mathcal{O}_{X,p} = \{(U, f) | p \in U \subseteq Y \wedge f \in \mathcal{O}_Y(U)\} / \sim$, כאשר $\sim$ הוא יחס השקילות של המגדיר $(f_1, U_1) \sim (f_2, U_2)$ אם ורק אם קיימת סביבה $W \subseteq U_1 \cap U_2$ כך ש- $f_1|_W = f_2|_W$.

תרגיל 71: (א) $\sim$ הוא יחס שקילות.

(ב) $\mathcal{O}_{X,p}$ הוא חוג.

הערה 72: 1. אם $U \subseteq X$ צפופה ו- $f, g : X \rightarrow k$ רגולריות, כך ש- $f|_U = g|_U$ אזי $f \equiv g$ כי $f - g$ רציפה. בפרט זה מתקיים אם X אי-פריק ו- $U \neq \emptyset$.

2. אם X אי-פריקה ו- $U_1, U_2 \neq \emptyset$ אזי אם $W \subseteq U_1 \cap U_2$ אזי W צפופה, לכן $f|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2} \iff f_1|_W = f_2|_W$.

3. אם $(f_1, U_1) \sim (f_2, U_2)$ אזי $f_1(p) = f_2(p)$ (כאשר p הוא כמו בסעיף 2 של ההגדרה).

הגדרה 73: תהי X יריעה אי-פריקה, אזי נגדיר

$$\underbrace{k(X)}_{=\text{Rational Functions}} = \{(U, f) | 0 \neq U \subseteq X \wedge f \in \mathcal{O}_X(U)\} / \sim$$

כאשר $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$ אם ורק אם $f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}$. פונקציות רציונאליות = פונקציות רגולריות על קבוצה פתוחה (צפופה).

הערה 74: 1. $k(X) -$ שדה. אם $(U, f) \in k(X)$ אזי $0 \neq (U, f) \in k(X)$ אזי $(D_U(f), \frac{1}{f}) \in k(X)$.

2. אם X אי-פריקה, אזי $k(X) \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,p} \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ (הראשון זה פונקציות רגולריות על הכול, השני זה פונקציות רגולריות על p והשלישי זה פונקציות רגולריות על סביבה כלשהי).

3. אם $X_1 \cong X_2$ אזי $\mathcal{O}(X_1) \cong \mathcal{O}(X_2)$, $k(X_1) \cong k(X_2)$ אבל $S(X_1) \not\cong S(X_2)$ אם X_1, X_2 פרויקטיביים.

אמרנו בעבר שיריעה היא יריעה קוואזי-אפינית או קוואזי-פרויקטיבית. נרצה להגיד שהראשון הוא מקרה פרטי של השני. לשם כך, נוכיח את הלמה הבאה:

למה 75: יהי $\{x_i \neq 0\} = U_i \leq \mathbb{P}^i$ אזי $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n$ איזומורפיזם של יריעות.

הוכחה: צריך להוכיח $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n$ ו- $\psi_i : \mathbb{A}^n \rightarrow U_i$ שהפעלתן על פונקציה רגולרית תיתן פונקציה רגולרית.

עבור φ_0 רגולרית על פתוחה ב- $\mathbb{A}^n$ היא מהצורה $\frac{g(y_1, \dots, y_n)}{h(y_1, \dots, y_n)}$ אזי

$$\varphi_0^* \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{g \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)}{h \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)}$$

אנחנו רוצים שאלו יהיו פולינומים הומוגניים מאותה הדרגה, אבל הם כרגע לא. אבל, אם נכפיל את $g \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$ ב- x_0^m כאשר $m \geq \deg g$ נקבל כי $x_0^m g \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \in S_m$ (תרגיל). ועכשיו נכתוב:

$$\varphi_0^* \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{g \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)}{h \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)} = \frac{x_0^m \cdot g \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)}{x_0^m \cdot h \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)}$$

ולכן רגולרית על פתוחה U_0 (כי x_0 לא מתאפס על U_0). ■

מסקנה 76: כל יריעה היא קוואזי-פרויקטיבית.

למה 77: תהי X יריעה, $Y \subseteq \mathbb{A}^n = k[x_1, \dots, x_n]$ סגורה, יריעה אפינית, ו- $\varphi : X \rightarrow Y$ העתקה של קבוצות. אזי מורפיזם של יריעות אם ורק אם $\varphi^*(x_i) = x_i \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$ לכל i .

הוכחה: הכיוון $\Leftarrow$ (מניחים שהוא מורפיזם) טריוויאלי, כי אם φ מורפיזם אזי $\varphi^*(x_i) \in \mathcal{O}(X)$ כי $x_i \in \mathcal{O}(Y)$.

בכיוון השני $(\Rightarrow)$, φ רציפה. תהי $Z \subseteq Y$ סגורה, אזי $Z = Z_Y(f_1, \dots, f_n)$ (אפסים של פונקציות ב- Y). אזי $\varphi^{-1}(Z) = Z_X(\varphi^*(f_1), \dots, \varphi^*(f_n))$ (אפסים של פונקציות ב- X). אבל $\varphi^*(f_i) = f_i \circ \varphi = f_i(\varphi^*(x_1), \dots, \varphi^*(x_n))$ אבל $\varphi^*(x_i) \in \mathcal{O}(Y)$ לכל i . לכן $\varphi^*(f_i) \in \mathcal{O}(Y)$ ולכן $\varphi^*(f_i) \in \mathcal{O}(X)$ (כי $\varphi^*(f_i) \in \mathcal{O}(Y)$ ו- $\varphi^*(f_i) \in \mathcal{O}(X)$ ולכן $\varphi^*(f_i) \in \mathcal{O}(X)$). נרצה להוכיח ש- $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}(X)$ מדוע מדובר במורפיזם? תהי $U \subseteq Y$ פתוחה ו- $f \in \mathcal{O}_Y(U)$. נרצה להוכיח ש- $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$. מרגולריות, $f = \frac{g}{h}$ מקומית, ולכן $\varphi^*(f) = \frac{\varphi^*(g)}{\varphi^*(h)}$ אבל $\varphi^*(g), \varphi^*(h) \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ (כי $g, h \in \mathcal{O}_Y(U)$ ולכן $\varphi^*(g), \varphi^*(h) \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$). ולכן $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$. ■

הצעה 78: אם $(X, \mathcal{O}_X)$ מרחב-פונקציות, $U \subseteq X$ פתוחה, אזי $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ מרחב-פונקציות.

מסקנה 79: אם X אפינית ו- $f \in \mathcal{O}(X)$ ו- $D(f) = D_X(f) \subseteq X$ פתוחה אזי $(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)})$ יריעה אפינית.

הוכחה: תהי $X \subseteq \mathbb{A}^n$ סגורה, $f \in K[X]$. נגדיר $Y \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ על ידי $Y = Z(I(X), x_{n+1} \cdot f - 1)$ (או במילים אחרות, $Y = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid (x_1, \dots, x_n) \in X \wedge x_{n+1} \cdot f(x_1, \dots, x_n) = 1\}$). נראה ש- Y יריעה אפינית ונראה ש- $(Y, \mathcal{O}_Y) \cong (X, \mathcal{O}_X)$. נראה ש- $f|_Y = 1/x_{n+1}$. אזי Y יריעה אפינית ונראה ש- $(Y, \mathcal{O}_Y) \cong (X, \mathcal{O}_X)$. ■

נגדיר העתקות $\pi : Y \rightarrow X$ ו- $s : D(f) \rightarrow Y$. ההעתקות $\pi : Y \rightarrow X$ תוגדר על ידי $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$ וההעתקה השנייה תוגדר על ידי $s(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 1/f(x_1, \dots, x_n))$.

$\left(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)}\right)$ נשים לב ש- $D(f) \subseteq \pi(Y)$ (ישירות מהגדרת הקואורדינטה האחרונה של Y). π, s מורפיזמים לפי הלמה. π כזאת כי $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{O}(Y)$ ו- s כזאת כי $x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)} \in \mathcal{O}(D(f))$. לכן, היות שהן מורפיזמים, הן משרות איזומורפיזמים בין $D(f), Y$. ■

מסקנה 80: 1. לכל יריעה יש בסיס של פתוחות אפיניות.

2. כל יריעה Y ניתנת לכתיבה $Y = \bigcup_{i=1}^n U_i$ כאשר U_i פתוחות אפיניות.

הוכחה:

1. כל Y קואזי-פרויקטיבית, לכן $Y = \bigcup U_i \cap Y$ שכל $U_i \cap Y$ קואזי-אפיניות. לכן מספיק להניח ש- Y היא קואזי-אפינית. מכאן,

$$Y \text{ is open in } \bar{Y} \text{ is close in } \mathbb{A}^n$$

ולכן

$$Y = \bar{Y} \setminus Z(f_1, \dots, f_n) = \bar{Y} \setminus \bigcap Z_{\bar{Y}}(f_i) = \bigcup D_{\bar{Y}}(f_i)$$

וזה בסיס של פתוחות אפיניות.

2. לפי הסעיף הקודם, $Y = \bigcup U_\alpha$ כאשר U_α פתוח ואפיני. הכיסוי הוא סופי כי Y קואזי-קומפקטית (כי היא נתירת, הוכח בתרגיל).

■

טענה 81: תהי Y אפינית, X יריעה, אז יש איזומורפיזם טבעי $\text{Mor}(X, Y) \cong \text{Hom}_k(k[Y], \mathcal{O}(X))$.

הוכחה: אם $\varphi : X \rightarrow Y$ מורפיזם ו- $f \in k[Y] \subseteq \mathcal{O}(Y)$ אז $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}(X)$ ולכן φ משרה העתקה כך ש- $(f \mapsto \varphi^*(f)) \in \text{Hom}_k(k[Y], \mathcal{O}(X))$. בכיוון השני, יהי $h : k[Y] \rightarrow \mathcal{O}(X)$ נגדיר $h_i := h(x_i) \in \mathcal{O}(X)$. נסתכל בהעתקה $\tilde{h} : X \rightarrow \mathbb{A}^n$ שמוגדרת $\tilde{h} = (h_1, \dots, h_n)$ ונראה ש- $\tilde{h}(x) \in Y$ אם נראה את זה אזי $\tilde{h} : X \rightarrow Y$ ו- $h_i = h(x_i) \in \mathcal{O}(X)$ ולכן $\tilde{h} : X \rightarrow Y$ מורפיזם. איך נראה את זה? Y הוא מה שמאפס את התמונה, כי המקור הוא מנה של $I(Y)$. לכן, לכל $p \in X$, $f \in I(Y)$ מתקיים

$$f(\tilde{h}(p)) = f(h(x_1)(p), \dots, h(x_n)(p)) \stackrel{(1)}{=} h(f)(p) \stackrel{f \in I(Y)}{=} 0$$

כאשר (1) נובע מכך ש- h הומומורפיזם של k -אלגבראות.

תרגיל 82: לוודא שאלה העתקות הפוכות.

■

משפט 83: תהי $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ סגורה (אי־פריקה לפשטות)¹

$$1. \quad k[Y] = \mathcal{O}(Y)$$

2. לכל $P \in Y$ יהי $\mathfrak{m}_P \subseteq k[Y]$, $\mathfrak{m}_P = \{f \in k[Y] \mid f(P) = 0\}$ אזי $\mathfrak{m}_P \mapsto P$ מגדיר התאמה חד־חד־ערכית ועל בין $P \in Y$ ו־ $\mathfrak{m}_P \subseteq k[Y]$ מקסימלי.

3. לכל $P \in Y$, $\mathcal{O}_{Y,P} = k[Y]_{\mathfrak{m}_P}$ (זה מיקום (לוקליזציה) ב־ $\mathfrak{m}_P$) ו־ $\dim \mathcal{O}_{Y,P} = \dim Y$.

4. $K(Y) = \text{Frac}(k[Y])$, הפונקציות הרציונאליות. לכן $K(Y)$ הרחבה נוצרת־סופית של K ו־ $\dim K(Y) = \text{tr deg}_K K(Y)$ ².

הוכחה:

2. ראינו שיש העתקה חד־חד־ערכית ועל בין $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ ואידיאלים מקסימליים ב־ $k[\mathbb{A}^n]$ (האידיאל $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$). אם $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ סגורה, אזי

$$\max k[Y] = \max (k[\mathbb{A}^n]/I(Y)) = \{\mathfrak{m} \in \max k[\mathbb{A}^n] \mid \mathfrak{m} \geq I(Y)\} \longleftrightarrow \{P \in \mathbb{A}^n \mid P \in Y\}$$

3.1. לפי הגדרה, $K[Y] \subseteq \mathcal{O}(Y)$ (כי הקטן הוא פונקציות שבאות מפולינומים והגדול הן פונקציות רציונאליות). נתבונן בהעתקה $\alpha : k[Y] \rightarrow \mathcal{O}_{Y,P}$ שלוקחת $f \mapsto (Y, f)$. אם $g \notin \mathfrak{m}_P$ אזי $\alpha(g) \in \mathcal{O}_{Y,P}^\times$ כי $\frac{1}{g} \in \mathcal{O}_{Y,P}$. לכן, לפי הגדרת המיקום, מקבלים הומומורפיזם מ־ $k[Y]_{\mathfrak{m}_P} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,P}$.

• $\tilde{\alpha}$ חד־חד־ערכית כי Y אי־פריקה (תרגיל). כי אם $\alpha\left(\frac{f}{s}\right) = 0$ אזי $\frac{f}{s} = 0$ בסביבה של p ולכן $f = 0$ בסביבה של p ולכן $f = 0$.
• $\tilde{\alpha}$ היא על, לפי הגדרה (בדוק!).

זה מסיים את ג'.

לגבי א', לפי ב' ו־ג', $k[Y] \subseteq \mathcal{O}(Y) \subseteq \bigcap_{P \in Y} \mathcal{O}_{Y,P}$. כעת, מסעיפים ב' ו־ג' $\bigcap_{P \in Y} \mathcal{O}_{Y,P} = \bigcap k[Y]_{\mathfrak{m}_P} = \bigcap k[Y]_{\mathfrak{m}}$ (השוויון האחרון הוא כי מדובר בחיתוך כל המיקומים ביחס לאידיאל המקסימלי). נשתמש בלמה הבאה מאלגברה קומוטטיבית:

למה 84: אם A תחום שלמות אזי $A = \bigcap A_{\mathfrak{m}}$ כאשר $\mathfrak{m}$ אידיאל מקסימלי.

מהלמה נקבל ש־ $k[Y]_{\mathfrak{m}} = k[Y]$ וסיימנו את א'.

¹נכליל בעתיד תוצאה זו עבור סכמות ולכן מספיק לנו כרגע להוכיח עבור אי־פריקות, ככה ההוכחה יוצאת פחות מסובכת אלגברית.

²זו דרגת הטרנסנדנטיות, ראו תרגול 2.

³זו התחלה של החלק הטריטוריאלי של א' ואז ג' ואז שאר א'.

⁴בהכלה השנייה אנחנו משתמשים בכך ש־ Y אי פריק.

4. $k[Y] \subseteq k(Y)$ ברור לכן $\text{Frac}(k[Y]) \subseteq k(Y)$. בכיוון השני, לכל $\tilde{f} \in K(Y)$ אזי $f \in \mathcal{O}(U)$ עבור $U \subseteq X$ פתוחה, לכן מקומית $f = \frac{g}{h}$ כך ש- $g, h \in k[\mathbb{A}^n]$ ולכן $f \in \text{Frac}(k[X])$.
 בנוגע למימדים, $k(Y) = \text{Frac}(k[X])$ ולכן $\dim Y = \text{tr deg}_K K(X) = \dim Y$, כאשר הנימוק הוא תרגול 2.

$$\dim \mathcal{O}_{Y,P} = \dim k[Y]_{\mathfrak{m}_P} = \sup \{n \in \mathbb{N} | \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = 0\}$$

$$= \sup \{n \in \mathbb{N} | P = Z_n \subsetneq Z_{n-1} \subsetneq \cdots \subsetneq Z_0\} = \dim Y$$

⁵זה מסיים את הטענה.

■

4.4 מבוא לתורת קטגוריות

הגדרה 85: קטגוריה $\mathcal{C}$ היא אוסף של אובייקטים $\text{ob } \mathcal{C}$ ולכל $a, b \in \text{ob } \mathcal{C}$ יש מורפיזמים ביניהם $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(a, b) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(b, c) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(a, c)$ לכל $a, b, c \in \text{ob } \mathcal{C}$. יש הרכבה של מורפיזמים $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(a, b) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(b, c) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(a, c)$ לכל $a \in \text{ob } \mathcal{C}$ ישנו מורפיזם זהות $\text{Id}_a \in \text{Mor}(a, a)$ שמתחלף עם כל המורפיזמים האחרים.

הגדרה 86: פונקטור הוא כלל שמעביר מורפיזמים למורפיזמים ואובייקטים לאובייקטים בין קטגוריות, כך שכל האקסיומות הטבעיות מתקיימות (מורפיזם זהות לזהות וכדומה).

הגדרה 87: יהיו $F_1, F_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ מורפיזם של פונקטורים, ופירושו שהם כלל $\alpha(a) : F_1(a) \rightarrow F_2(a)$ כך ש- $\alpha(a) \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}(F_1(a), F_2(a))$ לכל $a \in \text{ob } \mathcal{A}$. מתקיים:

$$\begin{array}{ccc} F_1(a) & \xrightarrow{\alpha(a)} & F_2(a) \\ \downarrow F_1(f) & & \downarrow F_2(f) \\ F_1(b) & \xrightarrow{\alpha(b)} & F_2(b) \end{array}$$

הגדרה 88: $\alpha : F_1 \rightarrow F_2$ הוא איזומורפיזם אם קיים $\beta : F_2 \rightarrow F_1$ כך ש- $\alpha \circ \beta = \text{Id}$ וגם $\beta \circ \alpha = \text{Id}$. או לחילופין, אם $\alpha(a)$ איזומורפיזם לכל $a \in \text{ob } \mathcal{A}$.

הגדרה 89: פונקטור $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ייקרא שקילות של קטגוריות אם קיים $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ כך ש- $G \circ F \cong \text{Id}_{\mathcal{A}}$ וגם $F \circ G \cong \text{Id}_{\mathcal{B}}$.

למה 90: $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ שקילות אם ורק אם הוא פלא וגאמן (*Fully faithful*)⁶.

⁵גם בשוויון הזה אנחנו משתמשים באי-פריקות
⁶ופירושו:

- שכל $a, b \in \text{ob } \mathcal{A}$ מתקיים $\text{Mor}_{\mathcal{A}}(a, b) \xrightarrow{\sim} \text{Mor}_{\mathcal{B}}(F(a), F(b))$
- לכל $b \in \text{ob } \mathcal{B}$ קיים $a \in \text{ob } \mathcal{A}$ כך ש- $b \cong F(a)$.

הגדרה 91: אם $\mathcal{C}$ קטגוריה אזי יש קטגוריה $\mathcal{C}^{\text{op}}$ (מהמלה opposite, הפכי) כך ש- $\text{ob}\mathcal{C}^{\text{op}} = \text{ob}\mathcal{C}$ וגם $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(a, b) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(b, a)$.

דוגמה 92: יהי Vec_k קטגוריה של מרחבים-וקטוריים סוף-מימדיים מעל שדה k . ונגדיר את $\mathcal{C}$ להיות הקטגוריה שאיברים הם $\mathbb{N}$ (כולל האפס) ולכל $n, m \in \mathbb{N}$ נגדיר $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(n, m) = \text{Hom}_k(k^n, k^m)$ (מטריצות מעל k מגודל $n \times m$). אזי Vec_k שקולה ל- $\mathcal{C}$ לפי אלגברה ליניארית. 1.

4.5 חזרה לפונקציות רגולריות ומורפיזמים

נחזור כעת למסקנות מההוכחות שבפרק הקודם.

מסקנה 93: פונקטור $X \rightarrow k[X]$ משרה שקילות של קטגוריות בין הקטגוריה ההופכית של היריעות האפיניות האי-פריקות לבין האלגבראות הנוצרות-סופית מעל k ללא מחלקי-אפס.

הגדרה 94: יהי S מדורג.

1. אם $\mathfrak{p} \triangleleft S$ אידיאל ראשוני הומוגני ונגדיר את המיקום

$$S_{(\mathfrak{p})} = (S_{\text{hom}} \setminus \mathfrak{p})^{-1} S|_{\deg 0} = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in S_d \wedge g \notin \mathfrak{p} \right\}$$

קיבלנו ש- $S_{(\mathfrak{p})}$ חוג מקומי עם אידיאלי מקסימלי $\left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in S_d, g \notin \mathfrak{p}, f \in \mathfrak{p} \right\}$.

2. לכל $f \in S_d$ נגדיר

$$S_{(f)} = (S_f)_{\deg 0} = \left\{ \frac{g}{f^n} \mid g \in S_{nd} \right\}$$

משפט 95: תהי $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ סגורה ואי-פריקה אזי

1. $\mathcal{O}(Y) = k$.

2. $\forall P \in Y$, יהי $\mathfrak{m}_P \in S(Y)$ אידיאל הנוצר על ידי $f \in S(Y)_{\text{hom}}$ כך ש- $f(P) = 0$. אזי $\mathcal{O}_{Y,P} = S(Y)_{(\mathfrak{m}_P)}$ (כאשר מדובר במיקום כמו בהגדרה הקודמת).

3. $k(Y) = S(Y)_{((0))}$ – מיקום באידיאל האפס.

הוכחה: יהי $\{x_i, \neq 0\} = U_i \subseteq \mathbb{P}^n$ פתוחה, אזי $Y = \bigcup (U_i \cap Y)$ ונסמן $Y_i = Y \cap U_i$. נגדיר העתקה $\varphi : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$ שמשרה איזומורפיזם בין הקבוצות הסגורות בתחום ובטווח, ולכן

$$Y_i \cong Z_i := \varphi_i(Y_i) \subseteq \mathbb{A}^n$$

כעת, Y_i, Z_i יריעות אפיניות. $\varphi_i^* : k[Z_i] \xrightarrow{\sim} k[Y_i]$, ונרצה לתאר את $k[Y_i]$ באופן מדויק.

טענה 96: φ_i משרה איזומורפיזם $\varphi_i : k[Z_i] \rightarrow S(Y)_{(x_i)}$.

הוכחה:

$$\varphi_i(x_0, \dots, x_n) \rightarrow \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) := (y_1, \dots, y_n)$$

לכן φ_i^* משרה איזומורפיזם

$$\varphi_i^* : k[y_1, \dots, y_n] \xrightarrow{\sim} k\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] = k[x_0, \dots, x_n]_{(x_i)}$$

φ_i^* משרה איזומורפיזם

$$I(Z_i) \rightarrow \underbrace{I(Y)_{(x_i)}}_{= \left\{ \frac{f}{x_i^n} \mid f \in I(Y)_n \right\}}$$

נסעו ש- $\{f \in S_{(x_i)} \mid f(y_i) = 0\}$. $I(Y)_{(x_i)}$ ההוכחה: "ברור".

לכן, φ_i משרה איזומורפיזם $k(Z_i) \xrightarrow{\sim} S_{(x_i)}/I(Y)_{(x_i)} = S(y)_{(x_i)}$

נחזור להוכחה.

2. נבחר i כך ש- $P \in Y_i$ אזי $\mathcal{O}_{Y,P} = \mathcal{O}_{Y_i,P}$ אבל Y_i יריעה אפינית, ולכן $\mathcal{O}_{Y_i,P} = k[Y_i]_{\mathfrak{m}_P}$. לפי הטענה,

$$k[Y_i] = S(Y_i)_{(x_i)_{\mathfrak{m}_P}} = S(Y_i)_{(x_i)_{\mathfrak{n}_P(x_i)}} = S(Y_i)_{\mathfrak{n}_P}$$

כנדרש.

3. היות ש- $Y_i \subseteq Y$ פתוחה, אזי

$$k(Y) = k(Y_i) = \text{Frac}(k[Z_i]) \cong \text{Frac}(S(Y)_{(x_i)}) = S(Y)_{((0))}$$

1. תהי $f \in \mathcal{O}(Y)$ אזי $f \in \mathcal{O}(Y_i)$ $\forall i$. אי-פריקה ולכן $\mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(Y_i)$ היא חד-חד-ערכית ולכן $S(Y) \subseteq \text{Frac}(S(Y))$ וגם

$$\mathcal{O}(Y) \subseteq \mathcal{O}(Y_i) \subseteq k(Y) \subseteq \text{Frac}(S(Y))$$

אבל $\mathcal{O}(Y_i) = S(Y)_{(x_i)}$ ולכן $f = g_i/x_i^{N_i}$ כך ש- $g \in S(Y)_{N_i}$ עבור N_i מסוים, בפרט, $f \cdot x_i^{N_i} \in S(Y)_{N_i}$ לכל i . נבחר $N = \sum_{i=0}^n N_i$. אזי,

$$S(Y)_N = \text{Im}(S_n) = \text{span} \{x_0^{i_0}, \dots, x_n^{i_n} \mid i_0 + \dots + i_n = N\}$$

ולכן $f \cdot S(Y)_N \subseteq S(Y)_N$ (אם $i_0 + \dots + i_n = N$ אזי קיים i כך ש- $i_j \geq N_j$ ולכן $f \cdot x_j^{N_j} (x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}) = \underbrace{f \cdot x_j^{N_j}}_{\in S(Y)_{N_j}} \underbrace{(x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n})}_{\in S(Y)_{N-N_j}}$ ובפרט, $f^m x_0^N \in S(Y)$ לכל $m \in \mathbb{N}$. לכן,

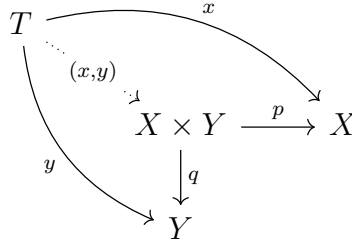
$S(Y)[f] \subseteq \frac{1}{x_0^N} S(Y)$. כעת, ניזכר במה שלמדנו באלגברה קומוטטיבית – $S(Y)$ חוג נטרי

ולכן $\frac{1}{x_0^N} S(Y)$ הוא $S(Y)$ -מודול נוצר-סופית, ולכן $S(Y)[f]$ מודול נוצר-סופית מעל $S(Y)$ (ולכן f שלם) ולכן קיימים $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)} \in S(Y)$ כך ש- $f^n + \alpha^{(1)} f^{n-1} + \dots + \alpha^{(n)} = 0$. אבל $\bigoplus_{n \geq 0} S(Y)_n = S(Y)$ ולכן $f^n + (\alpha^{(1)})_0 f^{n-1} + \dots + (\alpha^{(n)})_0 = 0$ כי f היא פונקציה ולכן היא חייבת להיות מדרגה 0 (תרגיל). אבל $S(Y)_0 = k$ ולכן שדה, ו- k סגור-אלגברית ו- f אלגברי מעל k ולכן $f \in k$.

■

4.6 מכפלות

הגדרה 97: תהא $\mathcal{C}$ קטגוריה ו- $X, Y \in \text{ob} \mathcal{C}$. אזי נגיד ש- $Z \in \text{ob} \mathcal{C}$ הוא **מכפלה** $X \times Y$ אם קיימות הטלות $p : Z \rightarrow X$ ו- $q : Z \rightarrow Y$ כך שלכל $T \in \text{ob} \mathcal{C}$ יש העתקה טבעית המקיימת



ואם מכפלה קיימת היא יחידה עד כדי איזומורפיזם.

הערה 98: יש קטגוריות שאין בהן מכפלות. נניח, קבוצת החבורות מגודל קטן או שווה ל-2. אבל ברוב הקטגוריות המעניינות יש.

טענה 99: בקטגוריה של יריעות יש מכפלות. בנוסף, אם X, Y הם קוואזי-אפיניות/פרויקטיביות (אלו ארבע טענות שונות) אזי $X \times Y$ גם כן כזאת.

הוכחה: לא נוכיח את המקרה הכללי, כי הוא מסקנה קלה של הדברים הבאים.

1. עבור $X = \mathbb{A}^n$ ו- $Y = \mathbb{A}^m$ נגדיר $Z = \mathbb{A}^{n+m}$ אזי לכל יריעה T מתקיים

$$\text{Hom}(T, \mathbb{A}^n) = O(T)^n$$

לכן כמובן

$$\text{Hom}(T, \mathbb{A}^{n+m}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(T, \mathbb{A}^n) \times \text{Hom}(T, \mathbb{A}^m)$$

2. עבור $X = \mathbb{P}^n$ ו- $Y = \mathbb{P}^m$

הערה 100: אם $X \times Y$ קיימת, אזי כקבוצה, היא מכפלה של X ו- Y . כמרחבים-טופולוגיים, הוכחנו בתרגיל לעומת זאת ש- $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \not\cong \mathbb{A}^2$ שכן הטופולוגיה היא לא טופולוגיית המכפלה.

נתבונן בהעתקה $\psi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ שפועלת על ידי

$$\psi((x_0; \dots; x_n), (y_0; \dots; y_m)) = ((z_{ij} = x_i y_j)_{i \in [0, n] \wedge j \in [0, m]})$$

נגיד שזה מוגדר היטב. אם $x_i \neq 0, y_j \neq 0$ אזי $z_{ij} \neq 0$ (ולכן שום דבר לא מעתק ל- $(0 : \dots : 0)$). נתבונן ב- $Z = Z(z_{ij} \cdot z_{kl} = z_{il} \cdot z_{kj})$. נטען שתי טענות:

טענה 101: (א) ψ היא על $Z - \text{Im } \psi = Z$ ו- ψ חח"ע ולכן יש העתקה של קבוצות $p, q : Z \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.
(ב) Z מכפלה של X ו- Y .

הוכחה:

(א) יהי $z_{ij} \in Z$ והיו i, j כך ש- $z_{ij} \neq 0$. ללא הגבלת הכלליות, $z_{00} \neq 0$. אז אפשר להניח ש- $z_{00} = 1$.

$$z_{00} \cdot z_{ij} = z_{0j} \cdot z_{i0}$$

זאת אומרת, $z_{ij} = z_{0j} \cdot z_{i0}$ (כי $z_{00} = 1$), ולכן $(z_{ij})_{i,j} = \psi((1, z_{01}, \dots, z_{0n}), (1, z_{10}, \dots, z_{m0}))$ (שכן, $\text{Im } \psi = Z$), יהי $(x_i \neq 0) = U_i \subseteq \mathbb{P}^n$ ו- $(y_j \neq 0) = U_j \subseteq \mathbb{P}^m$ ו- $(z_{ij} \neq 0) = U_{ij} \subseteq \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$.
 $\psi^{-1}(U_{ij}) = U_i \times U_j$.

בנוגע לחד-חד-ערכיות, נשים לב ש- $Z \cap U_{ij} \rightarrow U_i \times U_j$ (כאשר נשים לב- $U_i = \mathbb{A}^n$ ו- $U_j = \mathbb{A}^m$) הוא איזומורפיזם של יריעות אפיניות.

(ב) רוצים לבדוק להגדיר מורפיזמים $p : Z \rightarrow \mathbb{P}^n$ ו- $q : Z \rightarrow \mathbb{P}^m$.

למה 102: יהיו X, Y יריעות ו- $X = \bigcup U_i$ כיסוי-פתוח. ו- $f : X \rightarrow Y$ העתקה של קבוצות. אזי $f|_{U_i}$ מורפיזם אם ורק אם $f|_{U_i}$ מורפיזם.

הוכחה: הכיוון $\Leftarrow$ ברור. בכיוון השני, f רציפה כי רציפות היא תכונה מקומית והי מורפיזם בכל אחד מאיברי הכיסוי-הפתוח. יהי $V \subseteq Y$ פתוח, $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ ורוצים להוכיח ש- $f^*(\varphi) \in \mathcal{O}(f^{-1}(V))$. אבל פונקציה רגולרית היא תכונה מקומית, ולכן מספיק להראות ש- $f^*(\varphi)|_{f^{-1}(V) \cap U_i} \in \mathcal{O}(f^{-1}(V) \cap U_i)$, אבל זה נובע מהעובדה ש- $f|_{U_i}$ מורפיזם. ■

הוכחה: לפי הלמה מספיק להראות ש- $p|_{Z \cap U_{ij}} : U_{ij} \rightarrow U_i \subseteq \mathbb{P}^n$ היא מורפיזם, אבל זה בדיוק $(z_{ij}) \mapsto (z_{i0})$ וסיימנו. ■

לכן מוגדר היטב. ■

■

4.7 העתקות רציונליות

למה 103: יהיו X, Y יריעות, $U \subseteq X$ פתוחה וצפופה ו- $\psi, \varphi : X \rightarrow Y$ מורפיזמים כך ש- $\psi|_U = \varphi|_U$. אזי $\psi = \varphi$.

למה 104 (תת-למה): $\Delta \mathbb{P}^n \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ (כאשר Δ פירושו האלכסון, כל האיברים מהצורה $((x, x))$) קבוצה סגורה.

הוכחה: (של 104) $\Delta \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \cap \{z_{ij} = z_{ji}\}$ (תרגיל קל). אבל $\Delta \mathbb{P}^n \cap U_{ab} = Z \cap U_{ab}$ וזה מצדיק את הטענה. $\{z_{ij} = z_{ji}\}$ ומספיק להוכיח עבור $a = b = 0$ ומתקיים $Z \cap U_{ij} = \{z_{ij} = z_{i0} \cdot z_{0j}\}$ היא רציפה

(של 103) $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ סגורה מקומית ולכן מספיק להסתכל על העתקות $X \rightarrow \mathbb{P}^n$, לכן אפשר להניח ש- $Y = \mathbb{P}^n$. אזי ψ, φ מגדירים מורפיזם $(\psi, \varphi) : X \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ היא רציפה ו- $\Delta \mathbb{P}^n$ סגורה ולכן $(\psi, \varphi)^{-1}(\Delta \mathbb{P}^n)$ סגורה ב- X . אבל אם $\psi|_U = \varphi|_U$ שקול לזה ש- $U \subseteq (\psi, \varphi)^{-1}(\Delta \mathbb{P}^n)$. ■

הגדרה 105: 1. יהיו X, Y יריעות אי-פריקות. **העתקה רציונלית** $\varphi : X \rightarrow Y$ היא מחלקת שקילות של זוגות (U, φ_U) כך ש- $U \subseteq X$ פתוחה (צפופה) ולא-ריקה כך ש- $\varphi_U : U \rightarrow Y$ מורפיזמים. $(U, \varphi_U) \sim (V, \varphi_V)$ אם ורק אם $\varphi_U|_{U \cap V} = \varphi_V|_{U \cap V}$. לפי הלמה זה אכן יחס-שקילות.

2. $\varphi : X \rightarrow Y$ נקראת **שולטת** אם $\overline{\varphi_U(U)} = Y$.

3. אם $\varphi : X \rightarrow Y$ ו- $\psi : Y \rightarrow Z$ רציונליות ו- φ שולטת, אזי אפשר להגדיר $\psi \circ \varphi : X \rightarrow Z$ על ידי בחירת נציג (תרגיל: להגדיר את זה).

4. העתקה $\varphi : X \rightarrow Y$ נקראת **בירציונלית** אם קיימת $\psi : Y \rightarrow X$ כך ש- ψ, φ שולטות וגם $\psi \circ \varphi = Id_X$ ו- $\varphi \circ \psi = Id_Y$ (השוויון הוא כמחלקות שקילות, כל נציג באגף שמאל שקול לזהות).

למה 106: העתקה רציונלית $X \rightarrow Y$ היא בירציונלית אם קיימות קבוצות $U' \subseteq X$ ו- $V' \subseteq Y$ פתוחות וצפופות, כך ש- $\varphi|_{U'} : U' \xrightarrow{\sim} V'$.

הוכחה: הכיוון $\Rightarrow$ ברור, שכן אם U', V' קיימות, אזי נגדיר את ψ כמחלקת-שקילות $(V', \varphi|_{V'})$ וכמובן φ היא $(U', \varphi|_{U'})$ וכשניקח הרכבה נקבל זהות.

בכיוון השני, $\Leftarrow$, יהי $(U, \varphi_U : U \rightarrow Y)$ נציג של φ ו- $(V, \psi_V : V \rightarrow X)$ נציג של ψ . אזי $\psi \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)} = Id_{\varphi^{-1}(V)}$, זאת אומרת, $\psi \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} X$ כי הן מסכימות על קבוצה פתוחה צפופה. באופן דומה, $\varphi \circ \psi|_{\psi^{-1}(U)} = Id_{\psi^{-1}(U)}$. נגדיר $U' = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(U)) \subseteq U$ ו- $V' = \psi^{-1}(\varphi^{-1}(V)) \subseteq V$. נראה ש $\varphi(U') \subseteq V'$ ו- $\psi(V') \subseteq U'$ כי

$$U' = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(U)) \subseteq \varphi^{-1}(V)$$

ו- $\psi \circ \varphi|_{U'} = Id_{U'}$ (כי $\psi \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)} = Id_{\varphi^{-1}(V)}$) ובצורה דומה $\varphi \circ \psi|_{V'} = Id_{V'}$. כעת נוכיח, $\varphi(U') \subseteq V'$ אם ורק אם

$$\varphi \circ \psi \circ \varphi(U') \subseteq V$$

אבל

$$\varphi(U') = \varphi(\varphi^{-1} \circ \psi(U)) \subseteq \psi^{-1}(U)$$

ולכן

$$\varphi \circ \psi(\varphi(U')) \stackrel{\varphi \circ \psi|_{\psi^{-1}(U')} = Id_{U'}}{=} \varphi(U') \subseteq \psi^{-1}(U) \subseteq V$$

■

"ניסיתי להסביר מה שהולך כאן, אבל לא הולך כאן כלום. זה רק משחק עם האינדקסים, זה משהו בכלל בתורת-הקבוצות" -פרופ' ורשבסקי.

הגדרה 107: $\varphi : X \rightarrow Y$ שולטת, X, Y אי-פריקות, אזי לכל $f \in k(X)$ (קרי, לכל $f : Y \rightarrow \mathbb{A}^1$), אפשר להגדיר $f \circ \varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^1$ (קרי $f \circ \varphi \in k(X)$). הווה אומר, $\varphi : X \rightarrow Y$ מגדירה העתקה $\varphi^* : k(Y) \rightarrow k(X)$ (ויותר כללי, $(\varphi : \text{Rat}(Y, Z) \rightarrow \text{Rat}(X, Z))$).

משפט 108: 1. לכל יריעות X, Y העתקה $\varphi : X \rightarrow Y$ משרה העתקה חד-חד-ערכית ועל בין $\text{Hom}_k(k(Y), k(X))$ ובין $\text{RatDom}(X, Y)$ (העתקות רציונליות שולטות).

2. פונקטור $X \rightarrow k(X)$ משרה שקילות של קטגוריות:

(א) קטגוריית היריעות עם העתקות מ- $X \rightarrow Y$ שהן פונקציות רציונליות שולטות.

(ב) קטגוריית השדות הנוצרים-סופית מעל k עם העתקות שהן הומומורפיזמים של k -אלגבראות.

הוכחה:

1. יהי $\theta : k(Y) \rightarrow k(X)$ הומומורפיזם של k -אלגבראות. נרצה להוכיח ש- $\varphi : X \rightarrow Y$ כך ש- $\varphi^* = \theta$. ראינו שיש פתוחה אפינית $Y' \subseteq Y$ שמקיימת $k(Y') = k(Y)$, ולכן ניתן להניח ש- Y אפינית. נתבונן בהעתקה

$$\tilde{\theta} : k[Y] \hookrightarrow k(Y) \xrightarrow{\theta} k(X)$$

אנחנו יודעים ש- $k[Y]$ היא אלגברה נוצרת-סופית מעל k , אז יהיו $\{f_1, \dots, f_n\} \in k[Y]$ קבוצת-יוצרים. נתבונן ב- $\theta(f_1), \dots, \theta(f_n) \in k(X)$. פונקציה רציונלית היא קבוצה פתוחה, וחיתוך סופי של פתוחות הן פתוחות. לכן כל $\theta(f_i) \in \mathcal{O}(U_i)$ ולכן $\bigcap_{i=1}^n \theta(f_i) \in \mathcal{O}(U)$ כאשר $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$. לכן משרה θ הומומורפיזם

$$\theta' : k[Y] \rightarrow \mathcal{O}(U) \subseteq k(X)$$

אבל $\text{Hom}_k(k(Y), \mathcal{O}(U)) = \text{Hom}(U, Y)$. לכן θ נותן לנו העתקה $\varphi : U \rightarrow Y$, וזאת אומרת ש- $\varphi : X \rightarrow Y$ ולפי הבנייה $\varphi^* = \theta$.

תרגיל 109: להשלים את הכיוון השני של ההוכחה.

2. לפי הסעיף הקודם מספיק להראות שלכל L/k נוצר-סופית, קיימת יריעה X כך ש-
 $k(X) \cong L$. נוצר-סופית ולכן קיימת אלגברה נוצר-סופית A כך ש- $L = \text{Frac}(A)$.
 A תחום-שלמות ולכן קיימת X יריעה-אפינית אי-פריקה כך ש- $k[X] \cong A$. לכן

$$k(X) = \text{Frac}(k[X]) \cong \text{Frac}(A) = L$$

■

למה 110: נכתוב שתי טענות שבהתחלה לא נראות קשורות אחת לשנייה:

1. כל יריעה X אי-פריקה ממימד n היא בירציונלית לעל-מישור $Z(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$.
2. תהי L/k הרחבת-שדות, אזי קיים בסיס טרנסונדנטי $x_1, \dots, x_n \in L$ כך ש- $L/k(x_1, \dots, x_n)$ ספרבילי ונוצר-סופית.

הוכחה:

1. $(1) \Rightarrow (2)$. יהי $L = k(X)$, אזי לפי (2) מתקיים $L/k(x_1, \dots, x_n)$ ספרבילית ונוצר-סופית, אזי לפי משפט אהיבר הפרימיטיבי קיים $y \in L$ כך ש- $L = k(x_1, \dots, x_n, y)$. y אלגברי מעל $k(x_1, \dots, x_n)$ ולכן קיים פולינום $p \in k[t_1, \dots, t_n, t]$ כך ש- $p(x_1, \dots, x_n, y) = 0$. לכן $k(X) = L \cong k(Z(p))$. $Z(p)$ בירציונלי ל- $Z(p)$.

2. נוכיח כעת את (2). יהיו $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in L$ כך ש- $x_1, \dots, x_n$ בלתי-תלויים אלגברית, ו- $L = k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ אלגברי מעל $k(x_1, \dots, x_n)$.

למה 111: (למת עזר), אם $x_1, \dots, x_n$ בלתי-תלויים אלגברית ו- x_0 אלגברי מעל $k(x_1, \dots, x_n)$ אזי קיים $i \in \{0, \dots, n\}$ כך ש- x_i ספרבילי מעל $k(x_j | j \neq i)$.

הוכחה: $x_0, x_1, \dots, x_n$ תלויים אלגברית, ולכן קיים $p \in k[t_0, \dots, t_n]$ כך ש- $f(x_0, \dots, x_n) = 0$. אם $\text{char} = 0$ אז אין מה להוכיח, כי כל איבר ספרבילי.

$$p = \sum a_{i_0, \dots, i_n} x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}$$

אם מתקיים $\text{char} = q$, נניח שלכל $i_0, \dots, i_n$ כך ש- $a_{i_0, \dots, i_n} \neq 0$ מתקיים שלכל i $q | a_i$ אזי

$$p = \left(\sum a_{i_0, \dots, i_n} q x_0^{\frac{i_0}{q}} \cdots x_n^{\frac{i_n}{q}} \right)^q$$

כי העלאה בחזקת q היא הומומורפיזם בשדה סגור-אלגברית ממצוין q , אבל זאת בסתירה לאי-פריקות של p . לכן קיימת $i_0, \dots, i_n$ כך ש- $a_{i_0, \dots, i_n} \neq 0$. אזי, x_j ספרבילי מעל $k(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ כי הפולינום הפנימי ספרבילי. הפולינום הפנימי הוא בדיוק p , והיות שלא כל חזקותיו q אזי נקבל ספרביליות.

■

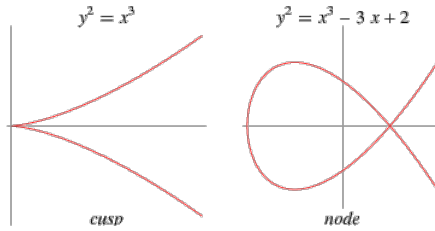
■

הוכחה: למה העזר גוררת את (2), וזה תרגיל באינדוקציה.

■

4.8 יריעות לא סינגולריות

היינו רוצים שכל נקודה תהיה הומיאומורפית בסביבתה ל- $\mathbb{C}^n$. לא היינו רוצים שפיצים כאלה:



הגדרה 112: תהי $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ יריעה אפינית אי-פריקה כך ש- $I(Y) = (f_1, \dots, f_m)$. נגיד ש- $P \in Y$ היא נקודה לא סינגולרית (או באופן שקול, Y לא סינגולרית ב- P) אם

$$\text{rank} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (P) \right)_{n \times m} = n - \dim Y$$

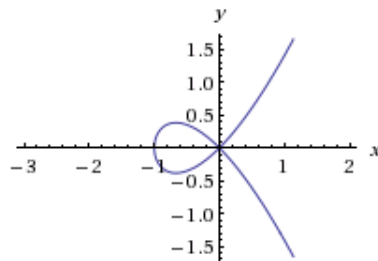
הערה 113: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in k(x_1, \dots, x_n)$, בפרט יש לזה משמעות בכל שדה, שכן אנחנו מדברים על נגזרת פורמלית.

הערה 114: צריך לבדוק מדוע בהגדרה אין תלות ביוצרים.

דוגמה 115: יהי $Y = Z(f)$, פולינום אי-פריק, אזי $J(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} (P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} (P) \right)$. אזי $\dim Y = n - 1$, אזי $P \in Y$ סינגולרית אם ורק אם

$$f(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1} (P) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} (P) = 0$$

דוגמה 116: $y^2 = x^2(x+1)$, הוא עקום-אליפטי שנראה כך:



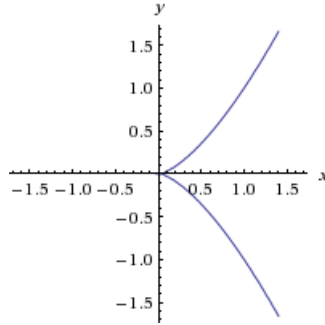
נכתוב את f ונקבל $f = y^2 - x^2 - x^3$. נחשב את הנגזרות:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x - 3x^2$$

זה שווה לאפס רק כאשר $x = y = 0$ (בהנחה שאנחנו לא במצב 2).

דוגמה 117: $y^2 = x^3$, זה גם עקום-אליפטי עם חוד:



דוגמה 118: נכתוב את f ונקבל $f = y^2 - x^3$. נחשב את הנגזרות:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2$$

וגם כאן, זה שווה לאפס רק כאשר $x = y = 0$.

הגדרה 119: לכל $P \in Y$ הגדרנו $\mathcal{O}_{Y,P}$ – חוג מקומי עם אידיאלי מקסימלי $\mathfrak{m}_P \triangleleft \mathcal{O}_{Y,P}$ נוצר-סופית (כי אנחנו בחוג נתרני), ולכן $\dim \mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2 < \infty$. נסמן $J(P) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right)_{i,j}$ – מטריצה התלויה ביוצרים.

משפט 120: $\text{rank} J(P) = n - \dim \mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2$. בפרט, $\text{rank} J(P) \leq n - \dim Y$ לכל P ו- $\dim \mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2 = \dim Y$ אם ורק אם $\text{rank} J(P) = n - \dim Y$.

הגדרה 121: יהי $(A, \mathfrak{m})$ חוג נתרני מקומי. $k = A / \mathfrak{m}$. נגיד ש- A הוא חוג רגולרי אם

$$\dim A = \dim_k \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$$

הערה 122: תמיד מתקיים ש- $\dim A \leq \dim_k \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$. לפי למת נקיימה $\dim_k \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$ הוא מספר היוצרים המינימלי של $\mathfrak{m}$.

הוכחה: יהי $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$. יהי $\alpha_P = (x - a_1, \dots, x - a_n) \triangleleft k[\mathbb{A}^n]$ אידיאל מקסימלי בחוג הגדול. נגדיר העתקה $\theta : k[\mathbb{A}^n] \rightarrow k^n$ שתהיה העתקת הנגזרת על ידי:

$$\theta(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$$

אזי מכלל לייבניץ $\theta(f \cdot g)(P) = f(P)\theta(g)(P) + g(P)\theta(f)(P)$ כעת, מתקיים $\theta(x_i - a_i) = (\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,n})$ (הדלתא של קרונקר) (ולכן θ על). אזי, נטען כי $\theta(\alpha_P^2) = 0$, וזה נובע מכלל לייבניץ (ולכן היא חח"ע). לכן, θ משרה איזומורפיזם בין α_P / α_P^2 לבין k^n .

יהי $(f_1, \dots, f_m) = I(Y)$ אזי

$$\text{rank} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (P) \right) = \dim \text{span} \theta(f_1, \dots, f_m) = \dim I(Y)$$

לכן

$$\begin{aligned} \text{rank}(J(P)) &= \dim \theta(I(Y)) \\ &= \dim (\text{Im} I(Y) \hookrightarrow \alpha_P \rightarrow \alpha_P / \alpha_P^2) \\ &= \dim I(Y) + \alpha_P^2 / \alpha_P^2 \end{aligned}$$

אבל

$$\mathcal{O}_{Y,P} = k[Y]_{\mathfrak{m}_P} = (k[\mathbb{A}^n] / I(Y))_{\mathfrak{m}_P} = (k[\mathbb{A}^n] / I(Y))_{\alpha_P} \stackrel{(1)}{=} \alpha_P / I(Y) + \alpha_P^2$$

כאשר (1) נובע מכך ש- $\mathfrak{m}_P = (\alpha_P / I(Y))_{\alpha_P}$. לכן:

$$\begin{aligned} \text{rank} J(P) &= \dim (I(Y) + \alpha_P^2 / \alpha_P^2) \\ &= \dim \alpha_P / \alpha_P^2 - \dim \alpha_P / I(Y) + \alpha_P^2 \\ &= n - \dim \mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2 \end{aligned}$$

■

הגדרה 123: 1. תהי Y יריעה, $P \in Y$. P תיקרא **רגולרית** או **לא-סינגולרית**, אם $\mathcal{O}_{y,P}$ רגולרית.

2. נסמן ב- $\text{Sing} Y \subseteq Y$ את קבוצת כל הנקודות הסינגולריות.

$\text{Sing} Y$

משפט 124: תהי Y יריעה אי-פריקה, אזי $\text{Sing} Y$ תת-קבוצה סגורה ממש.

הוכחה: תהי $Y = \bigcup Y_i$ כיסוי-פתוח על ידי פתוחות אפיניות. מספיק להראות ש- $\text{Sing} Y \cap Y_i$ סגורה ממש. לכן אפשר להניח ש- Y_i אפינית. אבל

$$\text{Sing} Y = \{P \in Y \mid \text{rank} J(P) = n - \dim Y\} = Z(I(Y), \det(\text{minor of } n - \dim Y) = 0)$$

ולכן סגורה.

מדוע $\text{Sing} Y \neq Y$?

• **מקרה פרטי:** נכתוב $Y = Z(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ כאשר $f \neq 0$ אי-פריק. אזי

$$\text{Sing} Y = \left\{ f \mid \forall_{1 \leq i \leq n+1} f(P) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \right\}$$

ואז $\text{Sing} Y = Y$ אם ורק אם $Z(f) \subseteq Z\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, אבל f אי-פריק ו- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ פולינום מדרגה נמוכה יותר, ולכן $f \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}$ אם ורק אם $\forall_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ וזה גורר (במצוין אפס) ש- $f = C \in k$. אם אנחנו לא במצוין אפס אלא במצוין q , אזי f פולינום ב- x_i^q ולכן f חזקה של q וזה בסתירה לאי-פריקות.

• **מקרה כללי:** אם Y בירציונלית ל- X אזי $\text{Sing} X = X \iff \text{Sing} Y = Y$ וראינו ש- Y בירציונלי ל- $Z(f)$, אבל במקרה הפרטי הוכחנו ש- $\text{Sing} Z(f) \neq Z(f)$.

■

4.9 מדוע נקודות רגולריות "טובות"?

הגדרה 125: אם $(A, \mathfrak{m})$ חוג מקומי, אזי אפשר להגדיר $\hat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{m}^n$, הגבול ההפוך של A .

משפט 126: $P \in Y$ רגולרית, אזי $\mathcal{O}_{P,Y} \cong k[x_1, \dots, x_{\dim Y}]$. זאת אומרת, $\mathcal{O}_{P,Y} \cong \mathcal{O}_{(0, \dots, 0), \mathbb{A}^{\dim Y}}$.

עובדה 127: אם $\mathcal{O}_{X,P}$ רגולרית, אזי $\mathcal{O}_{X,P}$ תחום פריקות-יחידה.

4.10 חיתוך במרחב פרויקטיבי

טענה 128: יהי $Y, Z \subseteq \mathbb{A}^n$ יריעות אפיניות אי-פריקות. יהי $W \subseteq Y \cap Z$ מרכיב אי-פריקות. אזי $\dim W > \dim Y + \dim Z - n$.

הוכחה:

• מקרה פרטי: $Z = Z(f)$, f אי-פריק. אזי $Y \cap Z = Z_Y(f)$ אבל הוכחנו שכל מרכיב אי-פריקות של $Z_Y(f)$ הוא ממימד לכל הפחות $\dim Y - 1$. לכן, אם $W \subseteq Z_Y(f)$ מרכיב אי-פריקות אזי

$$\dim W = \begin{cases} \dim Y & f|_Y = 0 \\ \dim Y - 1 & f|_Y \neq 0 \end{cases} \geq \dim Y - 1 = \dim Y + \underbrace{\dim Z}_{=n-1} - n$$

• מקרה כללי: נסתכל על

$$Y \cap Z = (Y \times Z) \cap \Delta \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$$

אבל מהאלכסון, אם $W \subseteq (Y \times Z) \cap \Delta \mathbb{A}^n$ מרכיב אי-פריקות אזי

$$\dim W \geq \dim Y \times Z = n = \dim Y + \dim Z - n$$

■

משפט 129: יהי $Y, Z \subseteq \mathbb{P}^n$ יריעות פרויקטיביות אי-פריקות, אזי:

1. אם $W \subseteq Y \cap Z$ מרכיב אי-פריקות, אזי $\dim W \geq \dim Y + \dim Z - n$.

2. אם $\dim Y + \dim Z - n \geq 0$, אזי $Y \cap Z \neq \emptyset$.

הוכחה:

1. נובע מהטענה הקודמת, כי $\mathbb{P}^n = \bigcup U_i$ אפיניות.

תרגיל 130: להשלים.

2. נובע גם כן מהטענה הקודמת. נתבונן ב- $\mathbb{A}^{n+1}$, $C(Z), C(Y) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ (החרוטים המתאימים), אזי $C(Z) \cap C(Y) \neq \emptyset$ כי שניהם מכילים את $(0, \dots, 0)$. בנוסף, אנחנו יודעים ש- $C(Y), C(Z)$ אפיניות ואי-פריקות, ולכן, לפי הטענה הקודמת

$$\dim C(Z) \cap C(Y) \geq \dim C(Z) + \dim C(Y) - n - 1 = \dim Z + \dim Y - n + 1$$

לכן, אם $\dim Z + \dim Y - n \geq 0$ אזי $\dim Z + \dim Y - n + 1 \geq 1$ ולכן

$$C(Y) \cap C(Z) \cap (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}) \neq \emptyset$$

■

מסקנה 131: אם $Z(f), Z(g) \subseteq \mathbb{P}^1$ עקומים (יריעות ממימד 1), אזי $Z(f) \cap Z(g) \neq \emptyset$.

בעיה 132: $|Z(f) \cap Z(g)| = ?$

משפט 133 (בזו): $|Z(f) \cap Z(g)| = \dim f \cdot \dim g$, כאשר אגף שמאל הוא כולל ריבוי.

הוכחה: נראה סקיצה של איך להוכיח:

לכל $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ סגורה, נתבונן ב- $S(Y) = S(I(Y))$. נשאל למה שווה $\dim_k(S_n(Y))$?

טענה 134: קיים פולינום $f_Y \in \mathbb{Q}[Z]$ כך ש- $h \gg 0$ עם $f_Y(h) = \dim S_n(Y)$ וגם $f_Y(z) = \dots + \frac{\deg Y}{d!} z^d$ עם $d = \dim Y$. לאחר מכן יש להוכיח את המשפט הבא

משפט 135: אם $Y, Z \subseteq \mathbb{P}^n$ יריעות אי-פריקות. $Y \cap Z = \bigcup H_i$ מרכיבי אי-פריקות. אזי

$$(\deg Y)(\deg Z) = \sum m_{H_i}(Y \cap Z) \deg H_i$$

כאשר m_{H_i} הוא הריבוי של H_i , ופרופ' ורשבסקי לא מוכן להגזיר כרגע, אלא נוכיח אותו כשנזכר על סכמות.

■

5 סכמות

5.1 אלומות

הגדרה 136: יהי X מרחב-טופולוגי. קדם-אלומה אבלית על X היא:

1. חבורה-אבלית $\mathcal{F}(U)$ לכל תת-קבוצה פתוחה $U \subseteq X$.

2. הומומורפיזמים של חבורות $\text{res}_U^V : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ (מהמלה restriction, צמצום) לכל $V \subseteq U$, כך שלכל $W \subseteq V \subseteq U$ מתקיים $\text{res}_U^W = \text{res}_V^W \circ \text{res}_U^V$ וגם $\text{red}_U^U = \text{Id}_U$. עבור $S \in \mathcal{F}(U)$, נסמן את $\text{res}_U^V(s)$ ב- $s|_V$.

res_U^V

דוגמה 137: אלומה של פונקציות היא קדם אלומה.

הגדרה 138: הגדרה שקולה לקודמת. תהי $\text{Top}(X)$ – קטגוריית כך שאובייקטים הם $U \subseteq X$ ומורפיזמים $\text{Mor}_{\text{Top}(X)}(U, V) = \begin{cases} U \hookrightarrow V & U \subseteq V \\ \emptyset & U \not\subseteq V \end{cases}$. אזי קדם-אלומה על X היא הפונקטור $\text{Top}(X) \rightarrow \text{Ab}$ (ממרחבים-טופולוגיים לחבורות-אבליות).

הגדרה 139: יהיו $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \text{Psheaves}(X)$ – קדם-אלומות אבליות, מורפיזם $F_1 \rightarrow F_2$ הוא מורפיזם של פונקטורים, זאת אומרת, הומומורפיזמים של חבורות $\varphi_U : \mathcal{F}_1(U) \rightarrow \mathcal{F}_2(U)$ כך שלכל $V \subseteq U$ הדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{F}_2(U) \\ \downarrow \text{res}_U^V(\mathcal{F}_1) & & \downarrow \text{res}_U^V(\mathcal{F}_2) \\ \mathcal{F}_1(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{F}_2(V) \end{array}$$

הגדרה 140: לכל $\mathcal{F} \in \text{Psheaves}(X)$ נגדיר $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$, זאת אומרת $\mathcal{F}_x = \Pi_{x \in U} \mathcal{F}(U) / \sim$. כך ש- $s \in \mathcal{F}(U)$ שקול ל- $t \in \mathcal{F}(V)$ אם ורק אם קיים $W \subseteq U \cap V$ כך ש- $s|_W = t|_W$. $\mathcal{F}_x$ נקרא **גבעול**.

$\mathcal{F}_x$

דוגמה 141: 1. אם X יריעה-אלגברית, $\mathcal{O}_X$ – אלומה של פונקציות רגולריות, אזי $\mathcal{O}_{X,x}$ הוא בדיוק הגבול הישר הזה.

2. לכל חבורה-אבלית A נגדיר קדם-אלומה קבועה CA על ידי $CA(U) = A$ לכל $U \subseteq X$. הגבעול של כל נקודה הוא גם A .

הערה 142: 1. לכל $\mathcal{F} \in \text{Psheaves}(X)$, $U \subseteq X$ פתוחה, $x \in X$, יש הומומורפיזם טבעי $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$.

2. לכל $x \in X$ והומומורפיזם $\alpha : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ משרה הומומורפיזם $\alpha_U : \mathcal{F}_1(U) \rightarrow \mathcal{F}_2(U)$ לכל U , לכן $\alpha_x : (\mathcal{F}_1)_x \rightarrow (\mathcal{F}_2)_x$. במפורש, $\alpha_x = \varinjlim_{U \ni x} \alpha_U$. יתר על כן, ההתאמה $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_x$ (לכל קדם-אלומה מותאם הגבעול שלה), היא פונקטור $\text{Psheaves}(X) \rightarrow \text{Ab}$.

הגדרה 143: 1. לכל $\mathcal{F}$ נגדיר קדם-אלומה $D(\mathcal{F})$ על ידי $D(\mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$

2. קיים מורפיזם טבעי $i : \mathcal{F} \rightarrow D(\mathcal{F})$ המוגדר על ידי $i_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow D(\mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$, $i_U(s) = (s_x)_{x \in U}$.

3. יהיו $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Psheaves}(X)$ עם $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ אזי α מגדיר מורפיזם $D(\alpha) : D(\mathcal{F}) \rightarrow D(\mathcal{G})$, מהצורה $D(\alpha)_U : \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x$ שמוגדרת $D(\alpha)_U = \prod_{x \in U} \alpha_x$.

⁷בדר"כ נשתמש במונח "קדם-אלומה" לתיאור "קדם-אלומה אבלית". נציין במפורש מתי שלא לכך הכוונה.

דוגמה 144: ניזכר בחלק 2 של הדוגמה הקודמת. $D(CA)(U) = \text{Fun}(U, A) = \prod_{x \in U} A$.

הגדרה 145: 1. קדם-אלומה $\mathcal{F} \in \text{Psheaves}(X)$ נקראת **מופרדת** אם לכל $U \subseteq X$ פתוחה וכל כיסוי-פתוח $U = \bigcup U_\alpha$ ו- $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$ כך ש- $s_1|_{U_\alpha} = s_2|_{U_\alpha}$ אזי $s_1 = s_2$.

2. קדם-אלומה מופרדת נקראת **אלומה** אם לכל $U = \bigcup U_\alpha$ כנ"ל, וכל $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ כך ש- $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ אזי קיים $s \in \mathcal{F}(U)$ כך ש- $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$.

נסביר את ההגדרה. נתבונן בהעתקה $\mathcal{F}(U) \rightarrow \{s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha) \mid s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}\}$ סעיף א' אומר שההעתקה הנ"ל היא חד-חד-ערכית. סעיף ב' אומר שההעתקה הזו היא על. מכאן, שני הסעיפים האלה מראים שאפשר להגדיר את ההעתקה מקומית.

הערה 146: התנאי של אלומה עבור $U = \emptyset$ אומר ש- $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.

דוגמה 147: 1. אם $(X, \mathcal{O}_X)$ מרחב פונקציות, אזי $\mathcal{O}_X$ אלומה.

2. לכל $\mathcal{F}$, $D(\mathcal{F})$ אלומה.

3. קדם-אלומה קבועה CA היא לא אלומה אם $A \neq \{0\}$.

4. לכל חבורה-אבלית A נגדיר אלומה קבועה BA על ידי $BA(U) = A^{\pi_0(U)} = A^{\pi_0(U)}$ לכל $U \subseteq X$. אזי BA אלומה ו- $(BA)_x = A$ לכל $x \in X$.

5. לכל מרחב-טופולוגי Y נגדיר אלומה של קבוצות h_Y על ידי $h_Y(U) = \text{Map}_{\text{cont}}(U, Y)$ זו אלומה.

למה 148: $\mathcal{F} \in \text{Psheaves}(X)$ היא מופרדת אם ורק אם $i_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow D(\mathcal{F})$ היא חח"ע זאת אומרת, $i_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow D(\mathcal{F})(U)$ היא חח"ע.

הוכחה: בכיוון הראשון, נניח ש- $\mathcal{F}$ לא מופרדת, זה אם ורק אם קיים $U = \bigcup U_\alpha$ כך ש- $s \in \mathcal{F}(U)$ עם $s|_{U_\alpha} = 0$ ו- $s \neq 0$. בפרט, לכל $x \in U$, $x \in U_\alpha$ ולכן $s_x = (s|_{U_\alpha})_x = 0$. הייתה לנו העתקה $\mathcal{F}(U) \rightarrow D(\mathcal{F})(U) = \prod \mathcal{F}_x$, והיא לא חח"ע, כי היא מעבירה את $s \neq 0$ ל- $s_x = 0$.

בכיוון השני, אם $\mathcal{F} \rightarrow D(\mathcal{F})$ לא חד-חד-ערכית, אזי קיים $s \in \mathcal{F}(U)$ כך ש- $s|_{V_x} = 0$ ו- $s \neq 0$. אזי $\mathcal{F}(U) \rightarrow \varinjlim \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_x$ אזי $s_x = 0$. זאת אומרת, לכל $x \in U$ קיים $x \in V_x \subseteq U$ כך ש- $s|_{V_x} = 0$. אזי $U = \bigcup V_x$ כיסוי-פתוח, ומכאן $\mathcal{F}$ לא מופרדת. ■

טענה 149: יהיו $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Psheaves}(X)$ ו- $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ מורפיזם. אזי α איזומורפיזם אם ורק אם $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ איזומורפיזם לכל $x \in X$.

הגדרה 150: $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ הוא חח"ע/על-איזומורפיזם אם $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ הוא כזה.

הוכחה: אם $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ איזומורפיזם אזי α_x איזומורפיזם (כי זה נכון לקדם-אלומות, ואלומה היא מקרה פרטי).

בכיוון השני, נניח $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ איזומורפיזם לכל $x \in X$, אזי צריך להוכיח שלכל $U \subseteq X$ מתקיים ש- $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ צורך כך נוכיח שהיא חד-חד-ערכית ועל.

- חד-חד-ערכית: ראינו שיש לנו דיאגרמה מתחלפת

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(\mathcal{F}(U)) & \longrightarrow & D(\mathcal{G}(U)) \end{array}$$

$\mathcal{G}$ אלומה ולכן מופרדת ולכן לפי הלמה החצים מלמעלה למטה הן חד-חד-ערכיים. $D(\mathcal{F})(U) = \prod \mathcal{F}_x$ ו- $D(\mathcal{G})(U) = \prod \mathcal{G}_x$ לפי הנחה ההעתקה ביניהם היא איזומורפיזם.

- על: אנחנו יודעים ש- α_x על, לכן ש- $t_x \in \mathcal{G}_x$ בתמונה של $\mathcal{F}_x$, כלומר, קיימת סביבה $x \in V$ ו- $s_x \in \mathcal{F}(V)$ כך ש- $\alpha(s_x) \in \mathcal{G}_x$ ו- $t \in \mathcal{G}(V)$ יש אותה תמונה ב- $\mathcal{G}_x$. פירוש, שאם נצמצם ל- V נקבל שהם שווים – קיים $x \in W_x \subseteq V$ פתוחה כך ש- $t|_{W_x} = \alpha(s_x|_{W_x})$ לכל $x, y \in U$ אנחנו רוצים להסתכל על $\alpha(s_x|_{W_x \cap W_y})$ ועל $\alpha(s_y|_{W_x \cap W_y})$. מתקיים

$$\alpha(s_x|_{W_x \cap W_y}) = \alpha(s_x)|_{W_x \cap W_y} = t|_{W_x \cap W_y} = \alpha(s_y)|_{W_x \cap W_y} = \alpha(s_y|_{W_x \cap W_y})$$

אבל α_x, α_y חד-חד-ערכיות, ולכן α חד-חד-ערכית (הוכחנו בחלק הקודם של ההוכחה). לכן, $s_x|_{W_x \cap W_y} = s_y|_{W_x \cap W_y}$ ולכן קיים $s \in \mathcal{F}(U)$ כך ש- $s|_{W_x} = s_x$. $\forall_x s|_{W_x} = s_x$ נראה ש- $\alpha(s) = t$ אבל

$$\alpha(s)|_{W_x} = \alpha(s|_{W_x}) = \alpha(s_x) = t|_{W_x}$$

אבל $U = \bigcup W_x$ כיסוי-פתוח ו- $\mathcal{G}$ אלומה, אזי $\alpha(s) = t$.

■

תהי $\mathcal{F} \in \text{Psheaves}(X)$ ותהי $D(\mathcal{F})(U) = \prod \mathcal{F}_x$ ונגדיר

$$a(\mathcal{F})(U) = \left\{ s \in D(\mathcal{F})(U) = \prod \mathcal{F}_x \mid \begin{array}{l} \exists \text{ open-cover } U = \bigcup U_\alpha \\ s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha) \text{ s.t. } i(s_\alpha) = s|_{U_\alpha} \end{array} \right\}$$

כאשר נזכור ש- $i : \mathcal{F} \rightarrow D(\mathcal{F})$ המעתיקה $\mathcal{F}(U) = \prod \mathcal{F}_x$.

משפט 151: 1. $a(\mathcal{F}) \subseteq D(\mathcal{F})$ היא תת-אלומה. קרי, $res : D(\mathcal{F})(U) \rightarrow D(\mathcal{F})(V)$ מקיים $res(D(\mathcal{F})(U)) \subseteq D(\mathcal{F})(V)$ גורר ש- $a(\mathcal{F})$ אלומה.

2. $i : \mathcal{F} \rightarrow D(\mathcal{F})$ משרה מורפיזם $i : \mathcal{F} \rightarrow a(\mathcal{F})$.

3. לכל $x \in X$ ההעתקה $i_x : \mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} a(\mathcal{F})_x$ איזומורפיזם. בפרט, $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} a(\mathcal{F})$ אם $\mathcal{F}$ אלומה.

4. לכל $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ מורפיזם של קדם-אלומות קיים $a(\alpha) : a(\mathcal{F}) \rightarrow a(\mathcal{G})$ כך שהדיאגרמה

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G} \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ a(\mathcal{F}) & \xrightarrow{a(\alpha)} & a(\mathcal{G}) \end{array}$$

5. לכל $\mathcal{F} \in P\text{Sheaves}(X)$ ו- $\mathcal{G} \in Sh(X)$ ומורפיזם $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ קיים ויחיד $\bar{\varphi} : a(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{G}$ כך שהדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & & \\ \downarrow a & \searrow \alpha & \\ a(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathcal{G} \end{array}$$

הערה 152: זוג בתנאי 5 הוא יחיד עד כדי איזומורפיזם.

הוכחה:

1. ברור. משתמשים בעובדה ש- $D(\mathcal{F})$ אלומה.

2. ברור. לכל $U \subseteq X$, $s \in \mathcal{F}(U)$ אזי $i(s) \in D(\mathcal{F})(U)$ באה מחתך של $\mathcal{F}$.

3. יהי $s \in \mathcal{F}_x$ כך ש- $s \in a(\mathcal{F})_x$. נבחר $U \subseteq X$ ו- $s \in \mathcal{F}(U)$ כך ש- s_x היא תמונה של s . אזי, $i_x(s_x) = i(s)_x = 0$, לכן $i(s) \in D(\mathcal{F})(U)$. אחרי הקטנה של U אפשר להניח ש- $i(s) = 0 \in D(\mathcal{F})(U)$. אבל $i(s) = (s_{y,y}) \in \prod_{y \in X} \mathcal{F}_y$ ולכן $\mathcal{F}_y = 0$ לכל y ובפרט $s_x = 0$. מכאן נובע שזה חד-חד-ערכי. מדוע זה על? יהי $t_x \in a(\mathcal{F})_x$ אזי t_x מגיע מ- $t \in a(\mathcal{F})(U)$, לכן t מקומית באה מ- $\mathcal{F}$, ולכן אחרי הקטנת U אפשר להניח ש- $t = i(s)$ כאשר $s \in \mathcal{F}(U)$. לכן $t_x = i_x(s_x)$. החלק האחרון של המשפט נובע מהמשפט הקודם.

4. ראינו ש- $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ נותנת $D(\alpha) : D(\mathcal{F}) \rightarrow D(\mathcal{G})$ שהיא העתקה על הגבעולים. כך שהדיאגרמה המתאימה מתחלפת

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G} \\ \downarrow D & & \downarrow D \\ D(\mathcal{F}) & \xrightarrow{D(\alpha)} & D(\mathcal{G}) \end{array}$$

נראה ש- $D(\alpha)(\alpha(\mathcal{F}))(U) \subseteq a(\mathcal{G})(U)$, זאת אומרת, אם $s \in D(\mathcal{F})(U)$ בא מקומית מ- $\mathcal{F}$ אזי $D(\alpha)(s) \in D(\mathcal{G})(U)$ בא מקומית מ- $\mathcal{G}$. אבל זה נובע מהתחלפות של הדיאגרמה. נראה עכשיו יחידות. יהי $\alpha' : a(\mathcal{F}) \rightarrow a(\mathcal{G})$ כך שמתקבלת הדיאגרמה

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G} \\ \downarrow a & & \downarrow a \\ a(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha'} & a(\mathcal{G}) \end{array}$$

רוצים להוכיח ש- $\alpha'(s) = a(\alpha)(s)$ לכל $s \in a(\mathcal{F})(U)$. אלומה, לכן מספיק להראות שקיים כיסוי $U = \bigcup U_\alpha$ כך שלכל α מתקיים $\alpha'(s)|_{U_\alpha} = a(\alpha)(s)|_{U_\alpha}$. נבחר $U = \bigcup U_\alpha$ כך ש- $s|_{U_\alpha} = i(s_\alpha)$ עבור $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ מסויים. אזי,

$$\alpha'(s)|_{U_\alpha} = \alpha(s|_{U_\alpha}) = \alpha(i(s_\alpha)) = i(\alpha(s_\alpha))$$

ובפרט, $\alpha'(s)|_{U_\alpha}$ מוגדר היטב ולא תלוי ב- α' .

■

הגדרה 153: נסמן $\mathcal{F}^\# = a(\mathcal{F})$ את האילום של $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}^\#$

הגדרה 154: 1. יהי $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ מורפיזם, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{PSheaves}(X)$ אזי אפשר להגדיר $\ker \varphi, \text{Im} \varphi, \text{co} \ker \varphi$ על ידי $(\ker \varphi)(U) = \ker(\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U))$ וכדומה.

2. φ היא חד-חד-ערכית/על אם $\text{co} \ker \varphi = 0 / \ker \varphi = 0$.

הערה 155: יהיו $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{PSheaves}(X)$ אזי $\ker \varphi$ הוא אלומה. אבל $\text{Im} \varphi$ ו- $\text{co} \ker \varphi$ לא.

דוגמה 156: $\mathcal{F} = CA$ קדם-אלומה קבועה כך ש- $\mathcal{F}(U) = A$. נגדיר $\mathcal{G} = BA$ אלומה קבועה – $\mathcal{G}(U) = \text{Map}_{\text{cont}}(A, A)$ אזי $\ker \varphi$ לא אלומה ו- $\text{Im} \varphi$ לא אלומה.

הגדרה 157: אם $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Sh}(X)$ ו- $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ נגדיר $\text{Im} \varphi = \left(\text{Im} \varphi^{\text{PSheaves}} \right)^\#$ וכך התמונה היא כן אלומה.

5.2 הגדרות קטגוריות

הגדרה 158: יהי $\mathcal{C}$ קטגוריה ו- $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ מורפיזם. φ נקרא **מונומורפיזם** (חד-חד-ערכי) אם לכל $X \in \text{Ob} \mathcal{C}$ העתקה $\text{Mor}(X, A) \rightarrow \text{Mor}(X, B)$ היא חד-חד-ערכית של קבוצות.

הגדרה 159: φ נקרא **אפימורפיזם** (על) אם הדבר המתאים קורה.

תרגיל 160: ההגדרות שניתנו עבור אלומות וקדם-אלומות זהות להגדרות קטגוריות.

הערה 161: אם $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ על/חד-חד-ערכי כקדם-אלומות אזי היא על/חד-חד-ערכי כאלומות.

למה 162: יהי $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ מורפיזם, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Sh}(X)$.

1. α הוא על/חד-חד-ערכי אם ורק אם $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ הוא על/חד-חד-ערכי.

2. $\text{Im} \alpha(U) = \{s \in \mathcal{G}(U) \mid t_x \in \mathcal{F}(U_\alpha) \wedge U = \bigcup U_\alpha \text{ s.t. } \alpha(t_x) = s|_{U_\alpha}\}$.

5.3 אלומות על מרחבים שונים

יהי $f : X \rightarrow Y$ העתקה רציפה, אז נגדיר 2 פונקטורים **(התמונה הישרה והתמונה ההפוכה)**

$f_*, f^\bullet$

$$f_* : \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(Y)$$

$$f^\bullet = f^{-1} : \text{Sh}(Y) \rightarrow \text{Sh}(X)$$

באופן הבא, $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X)$,

$$(f_* \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

קל לראות שזו אלומה.
עבור $\mathcal{G} \in \text{Sh}(Y)$ נגדיר

$$(f^\bullet \mathcal{G})^{\text{Psheaves}}(V) = \varinjlim_{f(V) \subseteq U \text{ where } U \text{ is open}} \mathcal{G}(U)$$

הערה 163: $f^\bullet(\mathcal{G})^{\text{Psheaves}}$ היא לא תמיד אלומה.

דוגמה 164: אם $f: X \rightarrow *$, אזי התמונה ההפוכה הנאיבית של קדם-אלומה קבועה היא קדם-אלומה קבועה.

5.4 סכמות

הגדרה 165: יהי X מרחב-טופולוגי.

1. **אלומת חוגים** היא אלומה $\mathcal{F}$ כך ש- $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ חוג קומוטטיבי עם יחידה ו- $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ הומומורפיזם של חוגים.

2. אם $\mathcal{F}$ אלומת חוגים, אזי לכל $x \in X$, $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$, הגבעול, הוא גם חוג.

הגדרה 166:

1. **מרחב-מחוג** (בלעז Ringed space) הוא זוג $(X, \mathcal{O}_X)$, כאשר X מרחב-טופולוגי ו- $\mathcal{O}_X$ אלומת-חוגים.

2. **מרחב-מחוג מקומית** הוא מרחב מחוג $(X, \mathcal{O}_X)$ כך שלכל $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ הוא חוג-מקומי.

דוגמה 167: אם $(X, \mathcal{O}_X)$ מרחב-פונקציות, אזי $(X, \mathcal{O}_X)$ מרחב מחוג מקומית, כי לכל $x \in X$ מתקיים ש- $(\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x)$ חוגי-מקומי.

סענה 168: ניתן לבצע בנייה, כך שלכל חוג A נבנה $\text{Spec} A = (\text{Spec} A, \mathcal{O}_{\text{Spec} A})$ מרחב-מחוג מקומית. כקבוצה $\text{Spec} A = \{\mathfrak{p} \triangleleft A \mid \text{prime ideal}\}$ והטופולוגיה היא שלכל $S \subseteq A$ נגדיר $Z(S) = V(S) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec} A \mid S \subseteq \mathfrak{p}\}$ להיות הקבוצות הסגורות. הקבוצות הפתוחות הן $D(f) = \{\mathfrak{p} \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ לכל $f \in A$.

■

הוכחה: באלגברה קומוטטיבית.

הערה 169: תזכורת, לכל אלומה $\mathcal{F}$ מתקיים $\mathcal{F}(U) \subseteq \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$.

לכל $\mathfrak{p} \in \text{Spec} \mathcal{O}_X$ נתבונן ב- $(A \setminus \mathfrak{p})^{-1} (A)$.

הגדרה 170: לכל $U \subseteq \text{Spec} A$ פתוחה, נגדיר

$$\mathcal{O}_X(U) = \left\{ f: U \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \mid U = \bigcup U_\alpha \wedge a_\alpha, s_\alpha \in A \text{ s.t. } \forall \mathfrak{p} \in U_\alpha s_\alpha \notin \mathfrak{p} \wedge f|_{U_\alpha} = a_\alpha/s_\alpha \text{ i.e. } f(\mathfrak{p}) = a_\alpha/s_\alpha \in A_{\mathfrak{p}} \right\}$$

טענה 171: 1. $\mathcal{O}_X(U)$ חוג.

2. $\mathcal{O}_X$ קדם-אלומה של חוגים תחת צמצום.

3. $\mathcal{O}_X$ אלומה (כי ההגדרה מקומית).

הגדרה 172: אם $\mathcal{F}$ (קדם-)אלומה על X , $U \subseteq X$, אז מקובל לסמן $\Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$.

משפט 173: יהי A חוג. $\text{Spec} A$ מרחב-מחוג מתאים, אזי

1. יש איזומורפיזם טבעי $\mathcal{O}_p \cong A_p$ לכל $p \in \text{Spec} A$. לכן הגנעול הוא מה שרצינו.

2. לכל $f \in A$ מתקיים $\Gamma(D(f), \mathcal{O}) \cong A_f$.

3. $\Gamma(\text{Spec} A, \mathcal{O}) \cong A$.

הוכחה:

1. נגדיר העתקה $\pi_p : \mathcal{O}_p \rightarrow A_p$ כך שלכל $f \in \mathcal{O}(U)$ עבור $p \in U$, מתקיים $\pi_p(f_p) = f(p) \in A_p$ כאשר $f_p \in \mathcal{O}_p$. תרגיל קל לוודא ש- π_p מוגדר היטב. ההעתקה היא הומומורפיזם של חוגים, וגם זה תרגיל. נראה שהיא חד-חד-ערכית ועל.

(א) מוגדר היטב: תרגיל קל.

(ב) הומומורפיזם: תרגיל.

(ג) על: קל, יהי $a/s \in A_p$ כך ש- $p \nmid s$. נתבונן ב- $p \in D(s) = \{q \mid s \notin q\}$. אזי a/s מגדיר פונקציה $D(s) \rightarrow A_q$ על ידי $a/s \mapsto (a/s)_q$. זאת אומרת, a/s מגדיר איבר של $\mathcal{O}(U)$.

(ד) חד-חד-ערכית: יהי $f_p \in \mathcal{O}_p$ כך ש- $\pi_p(f_p) = 0$. נבחר $f \in \mathcal{O}(U)$ כך ש- $f_p = f_p$. תמונה של f , אזי $f(p) = 0$, מקומית, f מגיעה מ- a/s לכן על ידי הקטנת U אפשר להניח ש- $f = a/s \in \mathcal{O}(U)$. אבל אם $f(p) = 0$ ב- A_p זה בדיוק אותו הדבר כמו להגיד ש- $a/s = 0$ ב- A_p ולכן קיים $p \nmid g$ כך ש- $a_g = 0$. $a/s = a_g/s_g$. $a_g = 0$ ולכן $g \nmid p$ ולכן $D_U(g) \rightarrow p$ (כאשר $D_U(g) = D(g) \cap U$) ולפי הגדרה

$$f|_{D_U(g)} = a/s|_{D_U(g)} = a_g/s_g \stackrel{a_g=0}{=} 0$$

2. נגדיר $\psi : A_f \rightarrow \mathcal{O}(D(f))$ על ידי $\psi(a/f^n) = (a/f^n) \in A_p$ ברור ש- ψ הומומורפיזם, נוכיח שהוא חד-חד-ערכי ועל.

(א) חד-חד-ערכי: נניח ש- $\psi(a/f^n) = 0$, זאת אומרת שלכל $p \in D(f)$ מתקיים ש- $a/f^n = 0 \in A_p$. לכן קיים $p \nmid g$ כך ש- $a_g = 0$. יהי $I = \text{Ann}(a)$. לפי ההנחה, $g \in I \setminus p$ ולכן לכל $p \in D(f)$ מתקיים $p \nmid I$ וזה אם ורק אם $p \notin V(I)$. זה אם ורק אם $V(I) \cap D(f) = \emptyset$ וזה אם ורק אם $V(I) \subseteq V(f)$.

למה 174: יהי I, T אידיאלים, אזי $V(I) \subseteq V(T)$ אם ורק אם $\sqrt{T} \subseteq \sqrt{I}$.

הוכחה: באלגברה קומוטטיבית.

לפי הלמה, $f \in \sqrt{I}$, ולכן קיים n כך ש- $f^n \in I$ זאת אומרת $f^n a = 0$. ואז אם ורק אם $A_{f^n} = 0 \in A_f$

(ב) על: יהי $S \in \Gamma(D(f), \mathcal{O})$ רוצים להוכיח ש- S מגיע מ- f^n . לפי ההגדרה קיים כיסוי, נניח $D(f) = \bigcup V_i$ כך ש- $S|_{V_i} = a_i/g_i$ כאשר $V_i \subseteq D(g_i)$. הבסיס של הטופולוגיה על $\text{Spec} A$ הוא $D(h)$ לכן אפשר להניח ש- $V_i = D(h_i)$ ובפרט $D(h_i) \subseteq D(g_i)$. אפשר להניח ש- $g_i = h_i$. מדוע? כי $D(h_i) \subseteq D(g_i)$, לכן $V(g_i) \subseteq V(h_i)$ ומהלמה הקודמת $h_i \in \sqrt{(g_i)}$, ולכן קיים n_i כך ש- $h_i^{n_i} = g_i b_i$. לכן ניתן לכתוב $a_i/g_i = a_i b_i / h_i^{n_i}$. זאת אומרת, $\frac{a_i}{g_i}|_{D(h_i)} = \frac{a_i b_i}{h_i^{n_i}}|_{D(h_i)}$ לכן אפשר להניח ש- $g_i = h_i^{n_i}$, אבל תמיד מתקיים ש- $D(h_i) = D(h_i^{n_i})$, ולכן $D(g_i) = D(h_i^{n_i})$. סה"כ מתקיים $D(f) = \bigcup D(g_i)$ ו- $S|_{D(g_i)} = a_i/g_i$.

למה 175: $D(F)$ היא קוואזי-קומפקטית.

הוכחה: $D(f) \subseteq \bigcup D(g_i)$ אם ורק אם $V((g_i)_{i \in I}) = \bigcap V(g_i) \subseteq V(f)$. לפי הלמה הקודמת, זה שקול לכך ש- $f \in \sqrt{(g_i)}$ וזה אם ורק אם קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $f^k \in (g_i)$ וזה אם ורק אם קיימת $I_0 \subseteq I$ סופית כך ש- $f^k \in \langle g_i \rangle_{i \in I_0}$ וזה אם ורק אם $D(f) \subseteq \bigcup_{i \in I_0} D(g_i)$.

הוכחה: לפי הלמה אפשר להניח ש- I סופית, ולכן $D(f) = \bigcup D(g_i)$ ולכן $a_i/g_i = s|_{D(g_i)}$

$$\forall i, j: a_i/g_i|_{D(g_i) \cap D(g_j)} = a_j/g_j|_{D(g_i) \cap D(g_j)}$$

לפי החד-חד-ערכיות שהוכחנו זה גורר ש- $a_i/g_i = a_j/g_j \in A_{g_i g_j}$ כי $D(g_i) \cap D(g_j) = \emptyset$ זה אומר שקיים m כך ש-

$$a_i g_j (g_i g_j)^m = a_j g_i (g_i g_j)^m$$

זה אומר שקיים m כך ש-

$$g_i^{m+1} (g_j^m a_j) = g_j^{m+1} (g_i^m a_i)$$

נשים לב ש-

$$\frac{a_i}{g_i} = \frac{a_i g_i^m}{g_i^{m+1}} \in D(g_i)$$

זאת אומרת שעל ידי החלפת $\frac{a_i}{g_i}$ ב- $\frac{a_i g_i^m}{g_i^{m+1}}$ אפשר להניח ש- $a_i g_j = a_j g_i$ לכל i, j . לפי הלמה קיים $k \in \mathbb{N}$ ו- $b \in A$ כך ש- $f^k = \sum b_i g_i$ ונגדיר $a = \sum b_i a_i$ ונראה שעבור $s \in \Gamma(D(f), \mathcal{O})$ אזי $s = \psi\left(\frac{a}{f^k}\right)$. מספיק להראות ש- $s|_{D(g_i)} = \frac{a}{f^k}|_{D(g_i)} = s|_{D(g_i)}$ וזה אם ורק אם $\frac{a}{f^k}|_{D(g_i)} = \frac{a_i}{g_i}|_{D(g_i)}$. אבל

$$a g_i = \left(\sum_j b_j a_j \right) g_i = \sum_j b_j (a_j g_i) = \sum_j b_j (g_j a_i) = \left(\sum_j b_j g_j \right) a_i = f^k a_i$$

3. מקרה פרטי של הסעיף הקודם עבור $f = 1$.

■

הגדרנו ספקטרום של חוג, נסתכל על דוגמאות לספקטרומים של דברים שונים.

דוגמה 176: 1. עבור k שדה, $\text{Spec } k = *$ – נקודה. אין טופולוגיה על נקודה, ומתקיים $\Gamma(\text{Spec } k, \mathcal{O}) = k$.

2. A חוג-מקומי ממימד 0, לדוגמה $A = k[x]/(x^n)$, $\text{Spec } A = *$, כי מקומיות אומרת שיש מקסימלי יחיד, ומימד 0 אומר שמקסימלי הוא ראשוני. אבל, $\Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}) = A$.

3. $\text{Spec } \mathbb{Z} = \{(0), 2, 3, 5, \dots, p, \dots\}$.

4. $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[x]$ אזי $\mathbb{A}_k^1 = \{(0), (f) \mid f \in k[x] \text{ irreducible and monic}\}$.

5. אם k שדה מושלם, אזי $\mathbb{A}_k^1 = \mathbb{A}_k^1 / \text{Gal}(\bar{k}/k)$. כי כל $f \in k[x]$ אי-פריק ומתוקן הוא מהצורה $f = \prod_{\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)} (x - \sigma(\alpha))$, וזה אם ורק אם.

6. אם R הוא חוג הערכה-דיסקרטית אזי $\text{Spec } R = \{(0), (m)\}$ כאשר (0) קרויה גנרית או צפופה, והנקודה השנייה נקראת מיוחדת או סגורה.

הגדרנו מרחבים-מחוגים (מקומית), נרצה להגדיר את המורפיזמים ביניהם. ניזכר בהגדרה עבור מרחב פונקציות:

הגדרה 177: אם $(X, \mathcal{O}_X)$ ו- $(Y, \mathcal{O}_Y)$ מרחב פונקציות, אזי המורפיזם הם: אם $f : X \rightarrow Y$ רציפה כך ש- $f^* : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ לכל $U \subseteq Y$ פתוחה, כך שמתחלפת עם צמצומים, מורפיזם $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ מגדיר הומומורפיזם של אלומות $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$.

כעת נגדיר עבור מרחב-מחוגים:

הגדרה 178: 1. מורפיזם $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ של מרחבים-מחוגים הוא זוג $(f, f^\#)$ כך ש- $f : X \rightarrow Y$ רציפה ו- $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ מורפיזם של אלומות החוגים, זאת אומרת $\mathcal{O}_Y(U) \rightarrow f_* \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ כך שמתחלפת עם צמצומים.

2. יהי $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ אזי $f^\#_U : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{P}_X(f^{-1}(U))$ לכל U . לכן לכל $x \in X$ משרה $f^\#_x : \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ ופירושו

$$\mathcal{O}_{Y, f(x)} = \varinjlim_{f(x) \in U} \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \varinjlim_{x \in f^{-1}(U)} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$$

כאשר ההעתקה האחרונה היא בשל העובדה שמדובר בגבול של העתקות.

הגדרה 179: יהיו A, B חוגים מקומיים, $f : A \rightarrow B$ הומומורפיזם. נקראת **מקומית** אם $\mathfrak{m}_A = f^{-1}(\mathfrak{m}_B)$.

דוגמה 180: נסתכל על מצב שבו זה לא מתקיים. אם R הוא חוג הערכה-דיסקרטית ו- $L = \text{Frac}(R)$ אזי $R \hookrightarrow L$ לא מקומית (כי האידיאל היחיד בשדה הוא (0) שמעתק ל- (0)).

דוגמה 181: יהיו $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ מרחבים-מחוגגים מקומית, אזי $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ מורפיזם של מרחבים-מחוגגים הוא מורפיזם של מרחבים-מחוגגים מקומית אם לכל $x \in X$ ההומומורפיזם $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ הוא הומומורפיזם מקומי.

טענה 182: יהיו A, B חוגים, אזי יש העתקה טבעית מ- $\text{Hom}_{\text{Rings}}(A, B)$ ל- $\text{Mor}_{\text{Locally ring spaces}}(\text{Spec} B, \text{Spec} A)$ שהיא חד-חד-ערכית ועל.

הוכחה: נבנה את ההעתקה ונוכיח את תכונותיה.

• יהי $(f, f^\#) : \text{Spec} A \rightarrow \text{Spec} B$. בפרט, $f^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec} A} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\text{Spec} B}$ והיא משרה העתקה $f^\# : \underbrace{\mathcal{O}_{\text{Spec} A}(\text{Spec} A)}_A \rightarrow \underbrace{\mathcal{O}_{\text{Spec} B}(\text{Spec} B)}_B$.

• יהי $\varphi : A \rightarrow B$ ונגדיר $\varphi^*(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. אזי $\varphi^* : \text{Spec} B \rightarrow \text{Spec} A$, וקל לראות שקומוטטיבית ורציפה.

• נרצה כעת למצוא העתקה $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ לכל $\varphi, \mathfrak{p} \in \text{Spec} A$ משרה הומומורפיזם $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$. יתר על כן, $\varphi_{\mathfrak{p}}$ הומומורפיזם מקומי. לכל $s \in \mathcal{O}_Y(U) \subseteq \text{Fun}(U \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}})$ אבל $f^\#(s) = f^{-1}(U) \rightarrow \coprod_{\mathfrak{q} \in f^{-1}(U)} B_{\mathfrak{q}}$ נגדיר $f^\#(s)(\mathfrak{q}) = \varphi_{\mathfrak{q}}(s(\varphi^{-1}(\mathfrak{q}))) \in B_{\mathfrak{q}}$. לכן נגדיר $q \in f^{-1}(U) \iff \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in U$. רוצים להוכיח ש- $f^\#(s) \in \mathcal{O}_{\text{Spec} B}(f^{-1}(U))$. זאת אומרת, מקומית $f^\#(s)$ מהצורה $\frac{b}{t}$. לפי ההגדרה, s מהצורה $\frac{a}{r}$ ולפי הבניה $f^\#(s)$ מקומית מהצורה $\frac{\varphi(a)}{\varphi(r)}$ (תרגיל). לכן, $f_{\mathfrak{p}}^\# = \varphi_{\mathfrak{p}}$ (תרגיל).

• נשאר להראות שההעתקות הפוכות זו-לזו. נסמן אותן כ-

$$\alpha : \text{Hom}_{\text{Rings}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\text{Locally ring spaces}}(\text{Spec} B, \text{Spec} A)$$

ו- β ההעתקה בכיוון השני. נשים לב ש- $\beta \circ \alpha = \text{Id}$ זה קל. בכיוון השני, יש לנו $(\varphi^*, \varphi^\#) : \text{Spec} B \rightarrow \text{Spec} A$ ו- $(f, f^\#) : \text{Spec} B \rightarrow \text{Spec} A$ מדוע $(f, f^\#) = (\varphi^*, \varphi^\#)$? נשים לב שפה אנחנו משתמשים בכך ש- f^* מקומית. לפי הבנייה הדיאגרמה הבאה מתחלפת

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow i_A & & \downarrow i_B \\ A_f(\mathfrak{p}) & \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}^\#} & B_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

כי $f^\#$ הומומורפיזם של אלומות, ולכן יש לנו דיאגרמה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_x & \longrightarrow & \mathcal{G}_x \end{array}$$

בפרט,

$$\varphi^*(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(i_B^{-1}(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})) = i_A^{-1}(f_{\mathfrak{p}}^\#(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})) \stackrel{f^\# \text{ is local}}{=} i_A^{-1}(f(\mathfrak{p})A_{f(\mathfrak{p})}) = f(\mathfrak{p})$$

$$\varphi^* = f.$$

■

דוגמה 183: $A = R$ חוג הערכה-דיסקרטית. $\text{Frac}(R) = L = B$. יש לנו שיכון $i : R \hookrightarrow L$ ומתקיים $i^*(0) = \eta$ (הנקודה הגנרית ב- Spec).

בפרט, $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ הוא איזומורפיזם, $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ הומיאומורפיזם ו- $f^\# : \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} f_* \mathcal{O}_X$.

הגדרה 184: 1. אם $(X, \mathcal{O}_X)$ מרחב-מחוג מקומית, אזי $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ גם כזה לכל $U \subseteq X$.

2. עבור קבוצה פתוחה $U \subseteq X$, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ היא **סכמה-אפינית** אם קיים חוג A כך ש- $(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong \text{Spec} A$.

3. **סכמה** היא מרחב-מחוג מקומית $(X, \mathcal{O}_X)$ כך שקיים כיסוי-פתוח $X = \bigcup U_\alpha$ כך ש- $(U_\alpha, \mathcal{O}_X|_{U_\alpha})$ היא סכמה אפינית.

הגדרה 185: **קדם-יריעה אלגברית אבסטרקטית** היא מרחב פונקציות $(X, \mathcal{O}_X)$ כך שקיים כיסוי פתוח $X = \bigcup U_\alpha$ שהוא יריעה-אפינית.

דוגמה 186: כל $(X, \mathcal{O}_X)$ יריעה קוואזי-פרויקטיבית היא כזאת.

מסקנה 187: הפונקטור $A \mapsto \text{Spec} A$ נותן שקילות של קטגוריות בין חוגים לבין סכמות-אפיניות. הפונקטור ההפוך הוא $X \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. הפונקטור Spec נאמן ומלא.

הערה 188: 1. לכל A , $\text{Spec} A$ הוא קוואזי-קומפקטי, אבל לא בהכרח נטרי. למשל, $A = k[x_1, \dots, x_n, \dots]$.

2. אם A חוג נטרי אזי $\text{Spec} A$ מרחב נטרי והם מאותו מימד.

3. אם $\text{Spec} A$ נטרי אזי A לא חייב להיות נטרי. לדוגמה, $A = k[x_1, \dots, x_n, \dots] / (x_1^2, \dots, x_n^2, \dots)$.

הגדרה 189: יהי X ויהי S .

1. **סכמה מעל S** היא מורפיזם $X \rightarrow S$.

2. **מורפיזם של סכמות מעל S** הוא דיאגרמה מתחלפת מהצורה

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \\ & & S \end{array}$$

דוגמה 190: 1. לכל סכמה X יש מורפיזם יחיד $X \rightarrow \text{Spec} \mathbb{Z}$. הוכחה בתרגיל. בפרט, כל סכמה היא סכמה מעל $\mathbb{Z}$.

2. יהי k שדה סגור-אלגברית, אזי אפשר להסתכל על סכמות אפיניות מעל k , הן הכללה יש יריעות אלגבריות מעל k .

5.5 סכמות פרויקטיביות

הגדרה 191: יהי $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ חוג מדורג. אזי, לכל S נרצה להתאים $\text{Proj} S$ שתהיה **הסכמה הפרויקטיבית** המתאימה לו. נגדיר

$\text{Proj} S$

$$\text{Proj} S = \left\{ \mathfrak{p} \in \text{Spec} S \mid \mathfrak{p} \text{ is homogenic ideal and } \mathfrak{p} \not\supseteq S_+ = \bigoplus_{n>0} S_n \right\}$$

ולכל $I \subseteq S$ אידיאל-הומוגני נגדיר $V_{\text{hom}}(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj} S \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$.

סעיף 192: מתקיים

$$V_{\text{hom}}(I) \cup V_{\text{hom}}(J) = V_{\text{hom}}(I \cdot J)$$

$$\bigcap V_{\text{hom}}(I_i) = V_{\text{hom}}\left(\sum I_i\right)$$

הגדרה 193: נגדיר אלומה $\mathcal{O}_{\text{Proj} S}$ על ידי

$$\forall \mathfrak{p} \in \text{Proj} S, S_{(\mathfrak{p})} = ((S \setminus \mathfrak{p})^{-1} S)_{\deg 0}$$

$$\mathcal{O}_{\text{Proj} S}(U) = \left\{ f : U \rightarrow \text{HS}_{(\mathfrak{p})} \mid f(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})} \text{ and locally } f \text{ is } \frac{a}{t} \text{ where } a, t \in S_n \right\}$$

קל לראות ש- $\mathcal{O}_{\text{Proj} S}$ אלומה.

סעיף 194: 1. לכל $\mathfrak{p} \in \text{Proj} S$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong S_{(\mathfrak{p})}$.

2. לכל $f \in S_{n, n>0}$ נגדיר $D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj} S \mid f \notin \mathfrak{p}\} = \text{Proj} S \setminus V((f))$. אזי, $(D_+(f), \mathcal{O}_{\text{Proj} S}|_{D_+(f)}) \xrightarrow{\sim} \text{Spec} S_{(f)}$ איזומורפיזם של מרחבים-מחוגגים.

3. $\text{Proj} S$ סכמה.

הוכחה:

1. כמו במקרה האפיני, יש לנו העתקה $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \rightarrow S_{(\mathfrak{p})}$ על ידי $f \mapsto f(\mathfrak{p})$. נשים לב ש- $\text{Proj} S = \bigcup D_+(f)$. לפי סעיף ב', $\text{Proj} S|_{D_+(f)}$ סכמה אפינית, לכן $\text{Proj} S$ סכמה.

2. כמו במקרה של יריעות, למשל $D_+(f) \rightarrow \text{Spec} S_{(f)}$. $\mathfrak{p} \subseteq S$ הומוגנית, $f \notin \mathfrak{p}$, אזי $\mathfrak{p} S_f \cap S_{(f)} \subseteq S_{(f)}$ ולכן $\mathfrak{p} S_f \subseteq S_f$ ראשוני.

■

5.6 תכונות ראשונות של סכמות

הגדרה 195: סכמה, $(\text{Spec} X, \mathcal{O}_X)$ נקראת קשירה אם $\text{Spec} X$ קשיר. היא נקראת אי-פריקה אם $\text{Spec} X$ אי-פריק. היא נקראת קוואזי-קומפקטית אם $\text{Spec} X$ קוואזי-קומפקטי. היא נקראת מצומצמת אם לכל U פתוחה $\text{nil}(\mathcal{O}_X(U)) = 0$ (הרדיקל הנילי). שלמה אם $\mathcal{O}_X(U)$ תחום-שלמות לכל U פתוחה.

למה 196: X קוואזי-קומפקטית אם ורק אם $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ עבור $U_i \subseteq X$ פתוחות אפיניות.

הוכחה: בכיוון הראשון, יהי $X = \bigcup U_i$ כיסוי-פתוח על ידי אפיניות, אזי מקוואזי-קומפקטיות יש כיסוי-סופי.

בכיוון השני, כל אפינית היא קוואזי-קומפקטית, ולכן איחוד של מספר סופי של קוואזי-קומפקטיות הוא גם קוואזי-קומפקטי. ■

למה 197: יהי $X = \text{Spec} A$ אזי X קשירה אם ורק אם $A \neq A_1 \times A_2$. X אי-פריקה אם ורק אם $\text{nil} A$ ראשוני. X מצומצמת אם ורק אם $\text{nil} A = 0$. שלמה אם ורק אם A תחום-שלמות.

מסקנה 198: $\text{Spec} A$ שלמה אם ורק אם אי-פריקה ומצומצמת.

הוכחה: (של המסקנה). בכיוון הראשון, אם X שלמה אזי היא מצומצמת. אם X לא אי-פריקה, אזי $X = X_1 \times X_2$ כך ש- $X_1, X_2 \not\subseteq X$ סגורות. נגדיר $U_i = X \setminus X_i$, אזי $U_1, U_2 \neq \emptyset$ וגם $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ולכן $\mathcal{O}(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}(U_1) \times \mathcal{O}(U_2)$ ולכן לא תחום-שלמות.

בכיוון השני, נניח ש- X היא אי-פריקה ומצומצמת. יהי $\emptyset \neq U \subseteq X$ פתוחה, $0 \neq f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ כך ש- $f \cdot g = 0$. נגדיר $Z_U(f) = \{x \in U \mid f(x) \in \mathfrak{m}_x\}$.

למה 199: $Z_U(f) \subseteq U$ סגורה.

הוכחה: יהי $U = \bigcup U_\alpha$ כיסוי-פתוח, אפיני, מספיק להראות ש- $Z_{U_i}(f)$ סגורה. זאת אומרת, אפשר להניח ש- $U = \text{Spec} A$, $f \in A$, אזי $Z_U(f) = V(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec} A \mid f \in \mathfrak{p}\}$ אם ורק אם $\mathfrak{p} \in Z_U(f)$ אם ורק אם $\frac{f}{1} \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \subseteq A_{\mathfrak{p}}$. $\pi : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ הטלה אזי $\pi(f) \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ אם ורק אם $f \in \pi^{-1}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}$, לכן, $Z_U(f)$ סגורה. $f \cdot g = 0$ אזי

$$U = Z_U(f \cdot g) = Z_U(f) \cup Z_U(g)$$

זה אם ורק אם $fg(x) \in \mathfrak{m}_x$ X אי-פריק אז U אי-פריק. אזי או $U = Z_U(f)$ או $U = Z_U(g)$, בה"כ $U = Z_U(f)$. יהי $U = \bigcup U_\alpha$ כיסוי-פתוח אפיני, אזי $U_i = Z_{U_i}(f|_{U_i})$, אבל U_i אפיני ולכן $f|_{U_i} \in \text{nil}(\mathcal{O}(U_i))$. אם $f \in A$ אזי $V(f) = \text{Spec} A$ אם ורק אם $f \in \text{nil} A$, $f|_{U_i} = 0$ לכל i ולכן $f = 0$. ■

הגדרה 200: 1. סכמה X נקראת נתרית מקומית אם קיים כיסוי אפיני פתוח $X = \text{Spec} A_i$ כך שכל A_i חוג אפיני.

2. X נקראת נתרית אם X נתרית מקומית וקיים כיסוי סופי ופתוח $X = \bigcup_{i=1}^n \text{Spec} A_i$ כאשר A_i נתרית.

סענה 201: X נתרית מקומית אם ורק אם לכל $\text{Spec} A \subseteq X$ פתוחה אפינית כאשר A נתרית. בפרט, סכמה $\text{Spec} A$ היא נתרית אם ורק אם A נתרית.

5.7 תכונות של מורפיזמים של סכמות

הגדרה 202: מורפיזם של סכמות $f : X \rightarrow Y$ נקרא:

1. אפיני;
2. סופי;
3. שיכון סגור;
4. מטיפוס סופי מקומית;
5. קוואזי-קומפקטי;
6. מטיפוס סופי;

אם קיים כיסוי פתוח אפיני $Y = \bigcup U_\alpha$ כך שמתקיים:

1. $f^{-1}(U_\alpha) = \text{Spec } A_\alpha$ ו- $f^{-1}(U_\alpha) = \text{Spec } B_\alpha$ בפרט, $f|_{f^{-1}(U_\alpha)} : A_\alpha \rightarrow B_\alpha$ מורפיזם ממורפיזם $A_\alpha \rightarrow B_\alpha$.
2. $f^{-1}(U_\alpha)$ אפיני ו- B_α מודול סופי על A_α לכל α .
3. $f^{-1}(U_\alpha)$ אפיני ו- $A_\alpha \twoheadrightarrow B_\alpha$ על.
4. קיים כיסוי-פתוח אפיני $f^{-1}(U_\alpha) = \bigcup \text{Spec } B_{\alpha\beta}$ כך ש- $B_{\alpha\beta}$ הוא אלגברה נוצרת-סופית מעל A_α .
5. $f^{-1}(U_\alpha)$ קוואזי-קומפקטי.
6. קיים כיסוי-פתוח אפיני סופי $f^{-1}(U_\alpha) = \bigcup \text{Spec } B_{\alpha\beta}$ כך ש- $B_{\alpha\beta}$ אלגברה נוצרת-סופית מעל A_α .

משפט 203: בכל המקרים ניתן להחליף "כי" ב-"לכל".

דוגמה 204: נוכיח לדוגמה את 4. אם $f : X \rightarrow Y$ מטיפוס סופי מקומית, אזי לכל פתוחה אפינית $U = \text{Spec } A \subseteq Y$ וכל פתוחה אפינית $f^{-1}(U) \subseteq X$ מתקיים $V = \text{Spec } B \subseteq f^{-1}(U)$, מתקיים B -אלגברה נוצרת-סופית מעל A .

הוכחה: בשלב הראשון, אפשר להחליף U_α ב- $\bigcup D_{g_i}(U_\alpha)$ – איחוד של פתוחות בסיסיות. לכל $f \in A_\alpha$ נשאל מהו $f^{-1}(D_g(U_\alpha))$?

$$f^{-1}(D_g(U_\alpha)) = \bigcup \text{Spec}(B_{\alpha\beta})_g$$

וגם מתקיים $D_g(U_\alpha) = \text{Spec}(A_\alpha)_g$ ו- $(B_{\alpha\beta})_g$ אלגברה נוצרת-סופית מעליו. בשלב השני נטען כי $f^{-1}(U) \rightarrow f$ מטיפוס סופי מקומית. לפי הגדרה, קיים כיסוי $Y = \bigcup U_\alpha$ כך ש- $f^{-1}(U_\alpha) = \text{Spec } A_\alpha \twoheadrightarrow B_\alpha$ אפיני ו- $A_\alpha \twoheadrightarrow B_\alpha$ על. אנחנו יודעים שאפשר לעדן – $D_{g_i}(U_\alpha)$ בסיס של פתוחות ב- Y , לכן לפי השלב הראשון, אפשר לעדן את U_α כך שחלק של U_α ים מכסים אותו. בשלב השלישי נטען שאפשר להניח ש- $Y = \bigcup U_\alpha$ כך ש- $U_\alpha = D_{g_i}(Y)$. לפי ההגדרה, $U_\alpha \subseteq Y$ אפיניות, וזה מתאים להעתקה $A \rightarrow A_\alpha$ (כי $A = \text{Spec } Y$ ו- $A_\alpha = \text{Spec } U_\alpha$). נכתוב

$D_{g_i}(Y) \subseteq D_{g_i}(U_\alpha)$ ולכן $D_{g_i}(Y) \subseteq U_\alpha$ כי $D_{g_i}(Y) = D_{g_i}(U_\alpha)$ אבל $U_\alpha = \bigcup D_{g_i}(Y)$ ישנה הכלה בכיוון ההפוך שנובעת מכך ש- $U_\alpha \subseteq Y$ ולכן

$$U_\alpha = D_g(Y) = D_g(U_\alpha)$$

ולכן

$$f^{-1}(D_g(U_\alpha)) = f^{-1}(D_g(Y))$$

זוה מסיים את השלב השלישי. יש לנו מסקנה מעניינת – $X = \bigcup \text{Spec} B_{\alpha\beta}$ כך ש- $B_{\alpha\beta}$ אלגברה נוצרת-סופית מעל A .

בשלב הרביעי נטען שניתן לבצע רדוקציה לטענה האלגברית. לפי המסקנה, $X = \bigcup \text{Spec} B_{\alpha\beta}$ כאשר $B_{\alpha\beta}$ אלגברה נוצרת-סופית מעל A . נתון לנו $D_g(\text{Spec} B_\alpha) = \text{Spec}(B_\alpha)_g$ ו- $(B_\alpha)_g$ אלגברה נוצרת-סופית מעל A אם B_α כזאת. לכן אפשר לעדן את $\bigcup \text{Spec} B_\alpha$ כך ש- $\text{Spec} B = V = \bigcup \text{Spec} B_\alpha$, ומטענה בשלב השלישי, ניתן לעדן כך ש- $B_\alpha = B_{g_\alpha}$ עבור $g_\alpha \in B$ מסויימת.

למה 205: תהי B אלגברה מעל A , $\text{Spec} B = \bigcup \text{Spec} B_{g_i}$ כך ש- B_{g_i} אלגברה נוצרת-סופית מעל A לכל i , אזי B אלגברה נוצרת-סופית מעל A .

הוכחה: $\text{Spec} B = \bigcup D(g_i)$ אם ורק אם $(g_i) = B$. בפרט, אפשר להניח ש- $\text{Spec} B = \bigcup_{i=1}^n D(g_i)$ וקיימים $b_1, \dots, b_n \in B$ כך שמתקיים:

$$1. \sum b_i g_i = 1.$$

(א) B_{g_i} אלגברה נוצרת-סופית מעל A . לכן קיימת קבוצה סופית $S \subseteq B$ כך ש- $S \cup \left\{ \frac{1}{g_i} \right\}$ יוצרת את B_{g_i} מעל A .

נגדיר $B_0 = A[b_0, \dots, b_n, g_1, \dots, g_n, S]$, אזי B_0 אלגברה נוצרת-סופית מעל A ולכן מספיק להראות ש- $B = B_0$. קודם כל, $(B_0)_{g_i} = B_{g_i}$ לכל i כי $(B_0)_{g_i} \subseteq S \cup \left\{ \frac{1}{g_i} \right\} \subseteq (B_0)_{g_i}$ ויצרים של B_{g_i} מעל A ולכן $B_{g_i} = (B_0)_{g_i}$. בנוסף, $b_i, g_i \in B_0$ ו- $\sum b_i g_i = 1$ ולכן $x \in B$ יהי $(g_1, \dots, g_n) = B_0$ כאידיאל ב- B_0 ולכן $(g_1^k, \dots, g_n^k) = B_0$ לכל k . יהי $x \in B$ ואנחנו רוצים להוכיח ש- $x \in B_0$. לפי הגדרה $(B_0)_{g_i} = B_{g_i}$ ולכן $\frac{x}{1} = \frac{y_i}{g_i^{m_i}}$ עבור $y_i \in B_0$ ו- $m_i \in \mathbb{N}$. לכן, $(x \cdot g_i^{m_i} - y_i) g_i^{n_i} = 0$. לכן, $y_i g_i^{n_i} \in B_0$ ו- $x \cdot g_i^{m_i+n_i} = y_i g_i^{n_i} \in B_0$. יהי $k = \max m_i + n_i$ אזי $x \cdot g_i^k \in B_0$ לכל i כי $g_i \in B_0$. לכן, אם ניקח $x \left(\sum g_i^k B_0 \right) \subseteq B_0$ אבל $x \left(\sum g_i^k B_0 \right) = x B_0$.

■

■

דוגמה 206: $f : X \rightarrow Y$ קוואזי-קומפקטית אם ורק אם לכל פתוחה $U \subseteq Y$ קיים $f^{-1}(U)$ שגם הוא קוואזי-קומפקטי. ההוכחה בתרגיל.

דוגמה 207: $f : X \rightarrow Y$ מטיפוס סופי אם ורק אם F מטיפוס סופי מקומית וקוואזי-קומפקטית.

5.8 מכפלות מסוייבות

הגדרה 208: תהי $\mathcal{C}$ קטגוריה. תהא הדיאגרמה הבאה:

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & S \end{array}$$

אזי **המכפלת המסוייבת** $X \times_S Y$ הוא האובייקט $Z \in \text{ob } \mathcal{C}$ ביחד עם $p_X : Z \rightarrow X$ ו- $p_Y : Z \rightarrow Y$ כך ש- (Z, p_X, p_Y) אוניברסלי במובן הבא: לכל $T \in \text{ob } \mathcal{C}$

$$\text{Hom}(T, Z) \cong \left\{ \begin{array}{c} f_X \in \text{Hom}(T, X) \\ f_Y \in \text{Hom}(T, Y) \end{array} \mid \begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ T & & \circlearrowleft & & S \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & Y & & \end{array} \right\}$$

אז כל העתקה $f \in \text{Hom}(T, Z)$ מעתקת ל- $(f_X = p_X \circ f, f_Y = p_Y \circ f)$.

הערה 209: $X \times_S Y$ היא יחידה עד כדי איזומורפיזם (אם היא קיימת).

משפט 210: לכל $X \rightarrow S \leftarrow Y$, דיאגרמה של סכמות, המכפלה המסוייבת קיימת.

לפני הוכחת המשפט נסתכל על שימושים שלו.

טענה 211: יהי $f : X \rightarrow Y$, $y \in Y$ נקודה אזי יש מורפיזם $\text{Spec } k(y) \rightarrow Y$. הסיב $f^{-1}(y)$ מוגדר על ידי $f^{-1}(y) = X \times_Y \text{Spec } k(y)$ ו- $f^{-1}(y)$ סכמה מעל $k(y)$.

תרגיל 212: כמרחב-טופולוגי, $f^{-1}(y)$ הינו סיב.

מסקנה 213: אפשר לחשוב על $f : X \rightarrow Y$ כמשפחה של סיבים $\{f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$.

דוגמה 214: $f : X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ מתאימה ל- $f_p = f^{-1}(p) : X_p \rightarrow \text{Spec } \mathbb{F}_p$ ו- $f_0 = f^{-1}(0) : X_0 \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Q}$.

דוגמה 215: לכל X סכמה עם מורפיזם $X \rightarrow S$ וכל $S' \rightarrow S$ סכמה עם מורפיזם $S' \rightarrow S$. נגדיר $X_{S'} := X \times_S S'$ וזה נקרא שינוי-בסיס של X ל- S' . עבור $X \rightarrow \text{Spec } k$ כאשר k שדה, ו- L/k הרחבת-שדות אפשר להגדיר $X_L = X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$.

טענה 216: יהי $f : X \rightarrow S$ מורפיזם ו- $S' \rightarrow S$ סכמה עם מורפיזם $S' \rightarrow S$. נגדיר $f' : X_{S'} \rightarrow S'$ ו- $X_{S'} = X \times_S S'$.

S' והוא ייקרא **שינוי-בסיס** של f תחת $S' \rightarrow S$.

הגדרה 217: תהי P תכונה של מורפיזמים של סכמות (למשל, אפיניות, טיפוס סופי וכו'). נגיד ש- P נשמר תחת שינוי-בסיס אם לכל $f : X \rightarrow S$ ב- P ומורפיזם כלשהו $S' \rightarrow S$ אזי המורפיזם $f' : X' \rightarrow S'$ גם שייך ל- P .

עובדה 218: כל התכונות 1-6 שהוכחו בתת-פרק הקודם, נשמרות תחת שינוי-בסיס.

דוגמה 219: $X = \{(x, y, t) \subseteq \mathbb{A}^3 \mid xy = t\} \rightarrow \mathbb{A}_t^1$ כאשר ההעתקה היא $(x, y, t) \mapsto t$. לכל $a \in k = \mathbb{A}_k^1$ הסיב a $\{a\} = X_a \rightarrow \{a\}$, כאשר $a \neq 0$ הוא פרבולה, וכאשר $a = 0$ הוא שני הצירים.

כעת נוכיח את המשפט על קיום המכפלה המסויבת.
הוכחה: נוכיח קודם את המקרה האפייני ואחר-כך נכליל אותו. לצורך המשפט נשתמש בשתי למות:

למה 220 (הדבקה של סכמות): בהינתן סכמות $\{X_i\}$ ותת-סכמות פתוחות $\{X_{ij}\}$ יחד עם איזומורפיזם $\varphi_{ij} : X_{ij} \xrightarrow{\sim} X_{ji}$ כך שמתקיים (ורשבסקי סירב לתת את הניסוח כי הוא ניתן באחד התרגילים או התרגולים...), אזי קיימת סכמה X ושיכונים-פתוחים $\psi_i : X_i \rightarrow X$ כך ש- $X = \bigcup \psi_i(X_i)$ ו- $\psi_i(X_{ij}) \cap \psi_j(X_j) = \psi_i(X_{ij})$.

למה 221 (הדבקה של מורפיזמים): יהיו X, Y סכמות ו- $X = \bigcup X_i$ כיסוי-פתוח. אזי לתת מורפיזם $f : X \rightarrow Y$ זה כמו לתת

$$\text{Hom}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \{f_i \in \text{Hom}(X_i, Y) \mid f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}\}$$

על ידי

$$f \mapsto f|_{X_i} := f_i$$

הוכחה: כעת נתחיל בשלב הראשון של ההוכחה. בשלב הראשון נניח ש- X, Y, S אפיניות – $X = \text{Spec} A, Y = \text{Spec} B$ ו- $S = \text{Spec} C$ אזי $X \times_S Y = \text{Spec}(A \otimes_C B)$ מקיים תכונה אוניברסלית של $X \times_S Y$ מתקיים

$$\begin{aligned} \text{Hom}(T, \text{Spec}(A \otimes_C B)) &= \text{Hom}(A \otimes_C B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)) \\ &= \text{Hom}(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)) \times_{\text{Hom}(C, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))} \text{Hom}(B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)) \\ &= \text{Hom}(T, \text{Spec} A) \times_{\text{Hom}(T, \text{Spec} C)} \text{Hom}(T, \text{Spec} B) \end{aligned}$$

כנדרש.

בשלב השני, נניח ש- $X \times_S Y$ קיים ו- $U \subseteq X$ פתוחה, אזי $p_X^{-1}(U) \subseteq X \times_S Y$ מקיימת תכונה אוניברסלית של $U \times_S Y$. ניזכר שקיימות העתקות $\pi_X : X \rightarrow S$ ו- $\pi_Y : Y \rightarrow S$ שבעזרתן אנו מגדירים את המכפלה המסויבת. נוכיח זאת, ישנה דיאגרמה:

$$\begin{array}{ccc} p_X^{-1}(U) & \xrightarrow{p_X} & U \\ & \searrow & \uparrow \\ & X \times_S Y & \longrightarrow X \end{array}$$

אזי כל T מתקיים

$$\begin{aligned} \text{Hom}(T, p_X^{-1}(U)) &= \{f \in \text{Hom}(T, X \times_S Y) \mid f(T) \subseteq p_X^{-1}(U)\} \\ &= \{f_X : T \rightarrow X, f_Y : T \rightarrow Y \mid (f_X, f_Y)(T) \subseteq p_X^{-1}(U) \wedge f_X \circ \pi_X = f_Y \circ \pi_Y\} \\ &= \{f_X : T \rightarrow X, f_Y : T \rightarrow Y \mid f_X(T) \subseteq U \wedge f_X \circ \pi_X = f_Y \circ \pi_Y\} \\ &= \text{Hom}(T, U) \times_{\text{Hom}(T, S)} \text{Hom}(T, Y) \end{aligned}$$

כנדרש.

בשלב השלישית יהי $X = \bigcup X_i$ כיסוי פתוח כך ש- $X_i \times_S Y$ קיים לכל i , אזי $X \times_S Y$. נוכיח זאת.

הערה 222: אם $X \times_S Y$ קיים אזי $X_i \times_S Y = p_X^{-1}(X_i)$ לפי שלב שתיים, וזאת אומרת ש- $X \times_S Y = \bigcup X_i \times_S Y$ כיסוי-פתוח.

נרצה עתה להשתמש בלמת ההדבקה עבור $Z_i = X_i \times_S Y$. נגדיר $X_{ij} = X_i \cap X_j \subseteq X$. נגדיר $Z_{ij} = p_X^{-1}(X_{ij})$. נטען שקיים איזומורפיזם טבעי $\varphi_{ij} : Z_{ij} \xrightarrow{\sim} Z_{ji}$. מדוע? כי משלב 2 מתקיים $Z_{ij} \cong X_{ij} \times_S Y$. במילים אחרות, Z_{ij} ו- Z_{ji} מקיימות התכונה האוניברסלית של $X_{ij} \times_S Y$ ולכן יש ביניהן איזומורפיזם קנוני. כעת φ_{ij} מקיימים את התנאים של למת ההדבקה (תרגיל), ולכן קיימת סכמה Z ושיכונים-פתוחים $\psi_i : Z_i \hookrightarrow Z$ כך ש- $Z = \bigcup \psi_i(Z_i)$ וגם $\psi_i(Z_{ij}) = \psi_i(Z_i) \cap \psi_j(Z_j)$. נרצה להוכיח ש- $Z = X \times_S Y$, קרי – הוא מקיים את התכונות האוניברסליות, וזה אומר שקיימת העתקה $p_X : Z \rightarrow X$ והעתקה $p_Y : Z \rightarrow Y$ שמשרות איזומורפיזם

$$(p_X, p_Y) : \text{Hom}(T, Z) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(T, X) \times_{\text{Hom}(T, S)} \text{Hom}(T, Y)$$

לכל T . נבנה את זה על ידי הדבקת מורפיזמים. $Z_i = X_i \times_S Y$ ולכן נתונה הטלה $p_{X_i} : Z_i \rightarrow X_i \subseteq X$. נראה ש- $p_{X_i}|_{Z_{ij}} = p_{X_j}|_{Z_{ji}}$ (אחרי זיהוי Z_{ij} עם Z_{ji}) – אבל שניהם מזוהים עם $p_{X_{ij}} : X_{ij} \times_S Y \rightarrow X_{ij}$. לפי למת ההדבקה קיים מורפיזם יחיד $p_X : Z \rightarrow X$ כך ש- $p_X|_{Z_i} = p_{X_i}$. באופן דומה עבור p_Y .

כדי לסיים, נבנה העתקה בכיוון השני $\text{Hom}(T, X) \times_{\text{Hom}(T, S)} \text{Hom}(T, Y) \rightarrow \text{Hom}(T, Z)$. בהינתן $\alpha : T \rightarrow X$ ו- $\beta : T \rightarrow Y$ רוצים למצוא $\gamma : T \rightarrow Z$ (ולהראות שהיא יחיד, תרגיל). נגדיר $T_i = \alpha^{-1}(X_i)$. $T = \bigcup T_i$ הוא כיסוי-פתוח. נתונים $\alpha_i := \alpha|_{T_i} : T_i \rightarrow X_i$ ולכן הם מגדירים $\gamma_i : T_i \rightarrow X_i \times_S Y = Z_i \subseteq Z$. אבל שני אלו הן ההעתקות המתאימות ל- α_i ו- $\beta_i := \beta|_{T_i} : T_i \rightarrow Y$. עכשיו צריכים להראות ש- $\gamma_i|_{T_i \cap T_j} = \gamma_j|_{T_i \cap T_j}$. אבל שני אלו הן ההעתקות המתאימות ל- α_i ו- β_i על $T_i \cap T_j$. נגדיר $\alpha_{ij} : T_i \cap T_j \rightarrow X_{ij}$ ו- $\beta_{ij} : T_i \cap T_j \rightarrow Y$ ומקבלים $\gamma_i = \gamma_j$ על ידי הדבקה.

בשלב הרביעי, $X \times_S Y$ קיימת אם S אפינית. נוכיח זאת. יהיו Y, S אפיניות, $X = \bigcup X_i$ כיסוי-פתוח אפיני, אזי $X_i \times_S Y$ קיימת לפי השלב השלישי. אם Y לא בהכרח אפיני, נבחר כיסוי-פתוח אפיני $Y = \bigcup Y_i$ אזי $X \times_S Y_i$ קיים ולכן מהשלב השלישי $X \times_S Y$.

בשלב החמישי והאחרון, המקרה הכללי – יהי $S = \bigcup S_i$ כיסוי-פתוח אפיני, נגדיר $\pi_X^{-1}(S_i) = X_i \subseteq X$ ו- $\pi_Y^{-1}(S_i) = Y_i \subseteq Y$. אזי, לפי השלב הרביעי $X_i \times_{S_i} Y_i$ קיים. אבל $X_i \times_S Y_i$ זה $X_i \times_{S_i} Y_i$. מדוע? כי

$$\begin{aligned} \text{Hom}(T, X_i \times_{S_i} Y_i) &= \text{Hom}(T, X_i) \times_{\text{Hom}(T, S_i)} \text{Hom}(T, Y_i) \\ &= \text{Hom}(T, X_i) \times_{\text{Hom}(T, S)} \text{Hom}(T, Y_i) \\ &= \text{Hom}(T, X_i) \times_{\text{Hom}(T, S)} \text{Hom}(T, Y) \end{aligned}$$

■ לכן $X_i \times_S Y$ קיים ולכן מהשלב השלישי $X \times_S Y$ קיים. ■

פרופ' ורשבסקי: "אתם יכולים לראות מכאן מדוע אי-אפשר לדרוש מבחן בסוף הקורס הזה, כשאלו ההוכחות".

5.9 העתקות פרידות ונאותות

המטרה: תהא X סכמה מטיפוס סופי מעל $\mathbb{C}$, אזי אפשר לדבר על $X(\mathbb{C})$ עם טופולוגיה אנליטית.

בעיה 223: מתי $X(\mathbb{C})$ האוסדורף? מתי קומפקטית?

הגדרה 224: אם X ו- S סכמות, נסמן $X(S) = \text{Hom}(S, X)$. אם $S = \text{Spec} A$ אזי $X(A) = X(S)$.

הגדרה 225: לכל מורפיזם בין סכמות $f : X \rightarrow Y$ נגדיר מורפיזם של סכמות $\Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$ המתאים ל- (Id_X, Id_X) .

הגדרה 226: 1. נקרא **קוואזי-מופרד** אם $f : X \rightarrow Y$ נקרא $\Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$ היא קוואזי-קומפקטי.

2. נקרא **פריד** אם $f : X \rightarrow Y$ נקרא $\Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$ שיכון-סגור.

3. נקרא **סגור** אם לכל $Z \subseteq X$ סגורה גם $f(Z) \subseteq Y$ סגורה.

4. נקרא **סגור-אוניברסלי** אם לכל $Y' \rightarrow Y$ המורפיזם $f' : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ הוא סגור.

5. נקרא **נאות** אם $f : X \rightarrow Y$ פריד, מטיפוס סופי וסגור-אוניברסלי.

ניזכר בהגדרה שקולה. $f : X \rightarrow Y$ שיכון-סגור, אז קיים כיסוי-פתוח אפיני $Y = \bigcup U_i$ כך ש- $f^{-1}(U_i) \rightarrow \Gamma(U_i)$ אפיני ו- $\Gamma(f^{-1}(U_i)) \rightarrow \Gamma(U_i)$.

למה 227: 1. $f : X \rightarrow Y$ שיכון-סגור אם $f(X) \subseteq Y$ סגורה, $f : X \xrightarrow{\sim} f(X)$ הומיאומורפיזם ו- $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ על.

2. $f : X \rightarrow Y$ שיכון-פתוח אם $f(X) \subseteq Y$ פתוחה ו- $f : X \xrightarrow{\sim} (Y, \mathcal{O}_Y)|_{f(X)}$ איזומורפיזם של סכמות.

3. $f : X \rightarrow Y$ שיכון-סגור מקומית, אם $f : X \xrightarrow{closed} Z \xrightarrow{open} Y$.

למה 228: 1. אם $f : X \xrightarrow{open} Z \xrightarrow{close} Y$ אזי f שיכון-סגור מקומית.

2. אם $f : X \rightarrow Y$ שיכון-סגור מקומית אזי f שיכון-סגור אם ורק אם $f(X) \subseteq Y$ סגורה.

הוכחה:

1. לפי הגדרה של $X \xrightarrow{open} Y$ הטופולוגיה המושרתת קיימת $W \subseteq Z$ פתוחה כך ש- $X = W \cap Y$. מכאן, $X \cong W \times_Z Y$ (מושאר כתרגיל).

2. ברור.

■

למה 229: 1. אם X, Y אפיניות, אזי $\Delta f : X \rightarrow X \times_Y X$ שיכון סגור.

2. לכל $f : X \rightarrow Y$, מתקיים ש- $\Delta f : X \rightarrow X \times_Y X$ שיכון-סגור מקומית.

הוכחה:

1. אם $X = \text{Spec} B$ ו- $Y = \text{Spec} A$ אזי $X \times_Y X = \text{Spec}(B \otimes_A B)$ מתאימה להעתקה $A \rightarrow B$. ההעתקה $X \rightarrow X \times_Y X$ מתאימה להעתקה $B \otimes_A B \rightarrow B$ וזוהי בדיוק ההעתקת הכפל, שזוהי העתקה על, ולכן מהגדרה Δf שיכון-סגור.

2. יהי $Y = \bigcup V_i$ כיסוי-פתוח אפיני ו- $U_{ij} = f^{-1}(V_i)$ כיסוי-פתוח אפיני. אזי כל $U_{ij} \times_{V_j} U_{ij} \subseteq X \times_Y X$ קבוצה פתוחה אפינית. לכן, $\Delta f : X \rightarrow X \times_Y X$ מתפרק דרך'

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta f} & X \times_Y X \\ \downarrow = & & \\ \bigcup U_{ij} & \xrightarrow{\Delta'} & \bigcup (U_{ij} \times_{V_i} U_{ij}) \end{array}$$

מספיק להראות ש- Δ' שיכון-סגור. אבל $\Delta'(\bigcup U_{ij} \times_{V_j} U_{ij}) = \bigcup U_{ij}$ ו- $\Delta'|_{U_{ij}} : U_{ij} \rightarrow U_{ij} \times_{V_i} U_{ij}$ שיכון-סגור לפי הסעיף הקודם.

■

מסקנה 230: כל $f : \text{Spec} B \rightarrow \text{Spec} A$ הוא פריד.

למה 231: 1. X פרידה אם ורק אם לכל $U, V \subseteq X$ פתוחות אפיניות, $U \cap V$ אפינית ו- $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \otimes \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_X)$ הניתנת על ידי $(\alpha \otimes \beta) \mapsto \alpha|_{U \cap V} \cdot \beta|_{U \cap V}$ היא על.

2. X קוואזי פרידה אם ורק אם לכל $U, V \subseteq X$ פתוחות אפיניות מתקיים ש- $U \cap V$ קוואזי-קומפקטית.

לפני ההוכחה נזכיר ש- $X = \bigcup U_i$ כיסוי-פתוח אפיני אזי $X \times X = \bigcup U_i \times U_j$ גם כיסוי-פתוח אפיני. בנוסף, אם $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ אזי $\Delta_X^{-1}(U \times V) = U \cap V$ וההעתקה המושרית $\Delta_X|_{U \cap V} : U \cap V \rightarrow U \times V$.

הוכחה:

1. X פרידה אם ורק אם $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ שיכון-סגור אם ורק אם $\Delta_X|_{U \cap V} : U \cap V \rightarrow U \times V$ שיכון-סגור אם ורק אם $U \cap V$ אפינית ו- $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \otimes \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_X)$ על.

2. X היא קוואזי-פרידה אם ורק אם $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ קוואזי-קומפקטית אם ורק אם לכל $U \times V \subseteq X \times X$ מתקיים $U \cap V = \Delta_X^{-1}(U \times V)$ קוואזי-קומפקטית.

■

למה 232: אם X נתרית-מקומית אזי X קוואזי-פרידה.

הוכחה: רוצים להוכיח שלכל $U = \text{Spec} A \subseteq X$ ו- $V = \text{Spec} B$ פתוחות, $\Delta_X^{-1}(U \times V)$ קוואזי-קומפקטית. אבל $U \cap V \subseteq U = \text{Spec} A$ פתוחה ו- X נתרית מקומית לכן A חוג נתרין ולכן $\text{Spec} A$ מרחב-טופולוגי נתרין ולכן $U \cap V$ קוואזי-קומפקטי. ■

הגדרה 233: דיאגרמה מתחלפת מהצורה

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

נקראת **דיאגרמה קרטזית** אם ההעתקה המושרית $A \xrightarrow{\sim} B \times_D C$ היא איזומורפיזם. יש שמסמנים אותה עם $\square$ במקום $\circlearrowleft$ באמצע הדיאגרמה.

טענה 234: 1. אם $f : X \rightarrow Y$ אפיני או שיכון-סגור או שיכון-פתוח אזי f מורפיזם פריד.

2. הרכבה של העתקות קוואזי-פרידות היא קוואזי-פרידה.

3. מורפיזמים (קוואזי-)פרידים נשמרים תחת שינוי-בסיס.

4. אם $f : X \rightarrow Y$ ו- $f' : X' \rightarrow Y'$ (קוואזי-)פרידים מעל S , אזי $f \times_S f' : X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$ גם כזו.

5. קוואזי-פריד היא תכונה מקומית. הווה אומר, $f : X \rightarrow Y$ כזה אם ורק אם קיים כיסוי-פתוח אפיני $U = \bigcup U_i$ כך ש- $f|_{f^{-1}(U_i)}$ הוא כזה.

6. יהי $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, אם $g \circ f$ היא קוואזי-פרידה אזי גם f כזה.

הוכחה:

5. $f : X \rightarrow Y$, $U = \bigcup U_i$ כיסוי-פתוח אפיני, $X_i = f^{-1}(U_i)$ אזי $X = \bigcup X_i$ ו- $X \times_Y X = \bigcup X_i \times_{Y_i} X_i$ כיסויים-פתוחים אפיניים. $\Delta f : X \rightarrow X \times_Y X$ קיים שיכון-סגור אם ורק אם $\Delta f|_{f^{-1}(U_i)} : X_i \rightarrow X_i \times_{Y_i} X_i$ אבל לפי הגדרה, אבל $\Delta f|_{X_i \times_{Y_i} X_i} : X_i \rightarrow X_i \times_{Y_i} X_i$.

1. מספיק לפי סעיף 5 ש- $f|_{U_i} : f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ פריד. זאת אומרת, מספיק להוכיח ש- Y אפינית. אם $f : X \rightarrow Y$ אפינית אז X אפינית ולכן f פריד. אם $f : X \rightarrow Y$ שיכון-סגור אזי X אפיני. אם $f : X \rightarrow Y$ שיכון-פתוח אז $\Delta f : X \xrightarrow{\sim} X \times_Y X$ שיכון-סגור.

2. יהיו $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. נתבונן בדיאגרמה הבאה:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\Delta f} & X \times_Y X & \longrightarrow & X \times_Z X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Delta g} & Y \times_Z Y & & \end{array}$$

וזו דיאגרמה קרטזית. לפי ההנחה Δ_f ו- Δ_g הם קוואזי-קומפקטים או שיכון-סגור. ידוע שקוואזי-קומפקטי ושיכון-סגור נשמרים תחת שינוי-בסיס. לכן ההעתקה $X \rightarrow X \times_Z X$ קוואזי-קומפקטי או שיכון-סגור. הרכבה של קוואזי-קומפקטיות או של שיכון-סגורים היא קוואזי-קומפקטית או שיכון-סגור בהתאמה, וסיימנו.

3. נובע מכך שקוואזי-קומפקטי או שיכון-סגור נשמרים תחת שינוי-בסיס. יהי $f : X \rightarrow Y$ ו- $Y' \rightarrow Y$ כלשהו, $X' = X \times_Y Y'$ ו- $f' : X' \rightarrow Y'$. נחשב

$$X' \times_{Y'} X' = (X \times_Y Y') \times_{Y'} (X \times_Y Y') = (X \times_Y X) \times_Y Y'$$

לכן אם Δ_f קוואזי-קומפקטי או שיכון-סגור אזי גם השינוי-בסיס.

4. לכן, לכל S , $X \times_S X' \rightarrow X \times_S Y'$, שינוי-בסיס של $X' \rightarrow Y'$ ולכן

$$X \times_S X' = (X \times_S Y') \times_{Y'} X'$$

לכן $Id \times f'$ כזה לפי הסעיף הקודם. באופן דומה עבור $f \times Id_{Y'}$. לכן $f \times f'$ פריד לפי הסעיף הקודם.

1. כמו ב-2, $X \xrightarrow{\Delta_f} X \times_Y X \xrightarrow{\Delta_g} X \times_Z X$, $\Delta_{g \circ f} : X \xrightarrow{\Delta_f} X \times_Y X \xrightarrow{\Delta_g} X \times_Z X$. שיכון-סגור מקומי ולכן גם $\tilde{\Delta}_g$ ולכן מספיק להוכיח את הלמה הבאה:

למה 235: יהי $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ מורפיזם כך ש- α, β שיכון-סגור מקומית ו- $\beta \circ \alpha$ קוואזי-קומפקטי או שיכון-סגור אזי α קוואזי-קומפקטי או שיכון-סגור בהתאמה.

הוכחה: אם $\beta \circ \alpha$ שיכון-סגור אזי $\beta \circ \alpha(A) \subseteq C$ קבוצה-סגורה, לכן $\alpha(A) \subseteq B$ קבוצה סגורה (לפי הגדרה של טופולוגיה מושרית). זאת אומרת, α שיכון-סגור מקומית ותמונתו סגורה ולכן הוא שיכון-סגור לפי למה שהוכחנו.

עבור קוואזי-קומפקטי, לפי הגדרה $B \xrightarrow{\text{close}} B' \xrightarrow{\text{open}} C$, $\beta : B \xrightarrow{\text{close}} B' \xrightarrow{\text{open}} C$ רוצים להוכיח שלכל $U \subseteq B$ פתוחה אפינית, $\alpha^{-1}(U) \subseteq A$ קיים $U' \subseteq B'$ שיכון-סגור, לכן קיימת $U' \subseteq B'$ פתוחה קוואזי-קומפקטי כך ש- $U = U' \cap B$. אבל U קוואזי-קומפקטית ולכן אפשר להניח שגם U' קוואזי-קומפקטית. ■

■

מסקנה 236: (של 6): עבור $Z = \text{Spec } \mathbb{Z}$. אם X סכמה קוואזי-פרידה, אזי כל $f : X \rightarrow Y$ קוואזי-פרידה. בפרט, אם כל $f : X \rightarrow Y$, X נתרי מקומית, אזי f קוואזי-פריד. אם X אפינית אז $X \rightarrow Y$ פריד.

נעבור כעת להעתקות נאותות.

טענה 237: 1. שיכון-סגור הוא נאות.

2. הרכבה של מורפיזמים נאותים היא נאות.

3. מורפיזמים נאותים נשמרים תחת שינוי-בסיס.

4. אם $f: X \rightarrow Y$ ו- $f': X' \rightarrow Y'$ נאותים מעל S , אזי $f \times f': X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$ נאות.

5. נאותות היא תנאי מקומי.

6. יהיו $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, אם $g \circ f$ נאות ו- g פריד, אזי f נאות.

הוכחה: ראינו את הטענה הזו עבור העתקות פרידות. אזי הפרידות מתקיימת. נשאר להראות עבור טיפוס-סופי וסגור-אוניברסלי.

• טיפוס סופי: נרצה להוכיח את הטענה בתנאים האלה:

1. שיכון-סגור מטיפוס-סופי.

2. הרכבה נשמרת.

3. נשמר תחת שינוי בסיס.

4. תמיד נובע מ-2 ו-3.

5. מהגדרה.

6. אם $g \circ f$ מטיפוס-סופי אזי גם f .

את כל הדברים האלה הוכחנו בתרגיל הבית.

• סגור-אוניברסלי: נרצה להוכיח את הטענה בתנאים האלה:

1. שיכון סגור זה העתקה סגורה, ושינוי-בסיס של שיכון-סגור הוא שיכון-סגור.

2. אם $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ סגורה אם f ו- g כאלה. $X \times_Z Z' \rightarrow Y \times_Z Z' \rightarrow Z'$ סגורה.

3. ברור.

5. להגיד ש- $Y \rightarrow X$ סגורה זה תנאי מקומי.

■

מסקנה 238: אם X מעל $Speck$ נאותה, אזי $\deg_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X) < \infty$. יתר על כן, כל $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ היא קבועה על מרכיב קשירות של X .

הוכחה: כל $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ מגדירה מורפיזם $X \xrightarrow{f} \mathbb{A}_k^1 \subseteq \mathbb{P}_k^1$ כאשר $\mathbb{P}_k^1$ פרידה (נסביר עוד מעט). לכן, לפי סעיף 6 של הטענה, $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ נאותה ולכן $\text{Im} f \subseteq \mathbb{P}^1$ סגורה. לכן, $\text{Im} f$ היא $\mathbb{A}^1$ או קבוצה סופית של נקודות, אבל התמונה סגורה ולכן לא $\mathbb{A}^1$ ולכן סופית. ■

הגדרה 239: 1. לכל חוג A נגדיר $\mathbb{P}_A^n = \text{Proj} A[x_0, \dots, x_n]$ בפרט $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n = \text{Proj} \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]$.

2. לכל סכמה Y נגדיר $\mathbb{P}_Y^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} Y$.

3. מורפיזם $f : X \rightarrow Y$ נקרא **פרויקטיבי גלובלי** אם f מתפרק כ- $X \hookrightarrow \mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$.

דוגמה 240: אם $Y = \text{Spec} A$ אזי $X \rightarrow \text{Spec} A$ פרויקטיבי גלובלי. אם $X = \text{Proj} S$ כאשר S/A אלגברה מדורגת נוצרת-סופית על ידי S , זאת אומרת $S = A[x_0, \dots, x_n]/I$ כאשר I אידיאל הומוגני.

הגדרה 241: 4. $f : X \rightarrow Y$ נקרא **פרויקטיבי** אם מקומית f היא $\text{Proj} S \rightarrow \text{Spec} A$ כנ"ל.

5. $f : X \rightarrow Y$ **קוואזי-פרויקטיבי** אם $f : X \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{f'} Y$ כך ש- f' פרויקטיבי ו- j שיכון-פתוח.

משפט 242: $f : X \rightarrow Y$ פרויקטיבי אזי f נאות.

הוכחה: להיות נאות זו תכונה מקומית. לכן מספיק להניח ש- f מהצורה של הדוגמה – $f : X \xrightarrow{\text{close}} \mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$ שיכון-סגור נאות ולכן מספיק להראות $\mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$ נאותה ולכן מספיק להראות ש- $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ נאות. ניזכר ש- X פרידה אם ורק אם קיים כיסוי-פתוח אפני $X = \bigcup U_i$ כך ש- $U_i \cap U_j$ אפנית לכל i, j והפונקציה $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \otimes \Gamma(U_j, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$ היא על. כעת, ניקח

$$U_i = D^+(X_i) = \{\bar{x} \mid x_i \neq 0\}$$

זאת אומרת,

$$U_i = \text{Spec} \mathbb{Z}[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i]$$

ולכן

$$U_i \cap U_j = \text{Spec} \mathbb{Z}[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i, x_0/x_j, \dots, x_n/x_j]$$

ובפרט, החוג הזה נוצר על ידי שני החוגים U_i, U_j . נשאר להראות $\mathbb{P}_A^n \rightarrow \text{Spec} A$ סגורה לכל A אם ורק אם $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ סגורה-אוניברסלית. נוכיח על ידי שימוש בקריטריון ההערכה. ■

הגדרה 243: $(O, \mathfrak{m})$ תחום-מקומי עם $k = \text{Frac}(O)$. התנאים הבאים שקולים:

1. לכל $x \in k^\times$ מתקיים או $x \in O$ או $x^{-1} \in O$.
2. אם $(O, \mathfrak{m}) \subseteq (O', \mathfrak{m}')$ כך ש- $(O', \mathfrak{m}')$ תחום-מקומי עם $k = \text{Frac}(O')$ ו- $\mathfrak{m} = O \cap \mathfrak{m}'$ אזי $(O, \mathfrak{m}) = (O', \mathfrak{m}')$.
3. קיימת חבורה אבלית סדורה מלאה Γ והעתקה $\Gamma \rightarrow k \setminus \{0\}$ כך ש- $v(a \cdot b) = v(a) + v(b)$ ו- $v(a) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ כאשר $a + b \neq 0$. ו- $O = \{x \in k \setminus \{0\} \mid v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$.

הוכחה: נוכיח שהתנאים האלו באמת שקולים.

1. $(1) \Leftrightarrow (3)$. נגדיר $\Gamma = k^\times/O^\times$ כתבורה ונגדיר סדר $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ אם ורק אם $\beta\alpha^{-1} \in O$.

2. (3) $\Leftarrow$ (1). נתון לנו ש- $v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$ ולכן $v(1) = 0$. לכן $O = \{x \in k \mid v(x) \geq v(1)\}$ ולכן או $v(x) \geq 0$ או $v(x^{-1}) \geq 0$. זה שקול ל- $x \in O$ או $x^{-1} \in O$.

3. (1) $\Leftarrow$ (2). נניח ש- $(O, \mathfrak{m}) \subset (O', \mathfrak{m}')$. נבחר $x \in O' \setminus O$ ולפי 1 ומתקיים ש- $x^{-1} \in O \subseteq O'$ ולכן $x^{-1} \in \mathfrak{m} = O \cap \mathfrak{m}'$ ולכן $x^{-1} \in \mathfrak{m}'$ אבל הוא הפיך, בסתירה.

■

משפט 244: יהי $f : X \rightarrow Y$ מורפיזם קוואזי-פריד.

1. f פריד אם ורק אם לכל חוג-הערכה O עד $\text{Frac}(k)$ ולכל דיאגרמה מתחלפת מהצורה

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec} k & \longrightarrow & X \\ \downarrow \text{Unique if exists} & \nearrow & \downarrow \\ \text{Spec} O & \longrightarrow & Y \end{array}$$

קיים ככל היותר מורפיזם אחד $h : \text{Spec} O \rightarrow X$ כך שכל דיאגרמה מתחלפת.

2. f נאותה אם מטיפוס סופי ולכל דיאגרמה כמו 1, h קיים ויחיד.

הערה 245: אם Y סכמה נתרית ו- $f : X \rightarrow Y$ מטיפוס סופי, אזי מספיק לבדוק את התנאי עבור O חוג-הערכה דיסקרטי.

הערה 246: אם $f : X \rightarrow Y$ מורפיזם של סכמות מטיפוס סופי מעל שדה k סגור אלגברית אזי:

1. f פריד אם ורק אם לכל עקום חלק C , נקודה $x \in C$ ודיאגרמה מתחלפת מהצורה

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & x \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ C & \longrightarrow & Y \end{array}$$

קיים לא יותר מ- h יחיד.

2. f נאותה אם h תמיד קיים.

לא ניתן הוכחה מלאה, אבל נעבור על חלקים מההוכחה כדי שנבין איך לעשות את זה, גם אם יחסרו חלק מהשורות. לפני שנוכיח, נשאל למה זה שימושי.

סעיף 247: $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \rightarrow \text{Spec} \mathbb{Z}$ נאות.

הוכחה: יהי $\varphi : \text{Spec} k \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ מורפיזם. נרצה להוכיח ש- φ ניתנת להרחבה (יחידה)⁸: $\tilde{\varphi} : \text{Spec} O \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$. φ מתואם עם $(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k)$. באינדוקציה אפשר להוכיח ש- $a_i \neq 0$ לכל i .

⁸ה-"יחידה" בסגוריים כי כבר ראינו את זה לפי משפט קודם עבור $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$.

O חוג הערכה ותהי $v : k^\times \rightarrow \Gamma$ הערכה מתאימה. נבחר i כך ש- $v(a_i) \leq v(a_j)$ לכל j . אזי, $v\left(\frac{a_j}{a_i}\right) = v(a_j) - v(a_i) \geq 0$ ולכן $\frac{a_j}{a_i} \in O$. נתבונן בהומומורפיזם של חוגים $\psi : \mathbb{Z}\left[\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] \rightarrow O$ כך ש- $\psi\left(\frac{x_j}{x_i}\right) = \frac{a_j}{a_i}$. משרה מורפיזם

$$\psi^* : \text{Spec} O \rightarrow \text{Spec} \mathbb{Z}\left[\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] = D_+(x_i) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$$

אזי ψ^* מרחיבה את φ כי

$$\psi^*|_{\text{Spec} k} \in \text{Hom}(\text{Spec} k, \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n) = \mathbb{P}^n(k)$$

■

הערה 248: עבור חוג כללי A קשה לתאר את $\text{Hom}(\text{Spec} A, \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n)$. עבור שדה זה כאמור קל, עבור חוג-הערכה זה קצת יותר בסדר.

הוכחה: נוכיח בשלבים.

הגדרה 249: יהי $x_0, x_1 \in X$. נגיד ש- x_0 היא **ייחוד** של x_1 אם $x_0 \in \overline{x_1}$. זה שקול לכך שעבור $Z \subseteq X$, $x_0 \in Z \ni x_1$ סגורה.

למה 250: למה ראשונה. יהי $f : X \rightarrow Y$ קוואזי-קומפקטי ו- $x_1 \in X$ נקודה גנרית, אזי $f(X) \subseteq Y$ סגורה אם ורק אם $f(X) \subseteq Y$ סגורה תחת ייחוד, זאת אומרת אם $x_1 \in f(X)$ אזי לכל $x_0 \in \overline{x_1}$ אזי $x_0 \in f(X)$.

הוכחה: נוכיח את הלמה הראשונה. בכיוון הראשון, אם $Z \subseteq Y$ סגורה אזי Z סגורה תחת ייחוד. בכיוון השני, עוברים למקרה האפייני ומשתמשים באלגברה קומוטטיבית. לכן, $X \rightarrow Y$ קוואזי-פריד אזי $X \rightarrow X \times_Y X$ קוואזי-קומפקטי ולכן אפשר להשתמש בלמה.

טענה 251: יהיו $x_0 \in \overline{x_1}, x_0, x_1 \in X$ אזי קיים חוג-הערכה O ומורפיזם $f : \text{Spec} O \rightarrow X$ כך ש- $f(\eta) = x_1$ ו- $f(s) = x_0$ כאשר $s \in \text{Spec} O$ נקודה סגורה ו- $\eta \in \text{Spec} O$ נקודה גנרית.

הוכחה: נוכיח את הטענה. יהי $z = \overline{x_1} \subseteq X$, אזי אפשר להניח ש- $X = Z$. יהי $x_0 \in U \subseteq Z$ סביבה פתוחה אפיינית של x_0 , אזי $x_1 \in U$ כי היא גנרית. לכן אפשר להניח $U = \text{Spec} A$ כאשר A תחום-שלמות ו- $\mathfrak{m} \subseteq A$ אידיאל מקסימלי המתאים ל- x_0 . יהי $k = \text{Frac} A$ ונתבונן בחוג המקומי $(A_{\mathfrak{m}}, \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})$ אזי $(A_{\mathfrak{m}}, \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}) \subseteq (O, \mathfrak{n}) \subseteq k$ מהתנאי השני. מכאן

$$A \rightarrow A_{\mathfrak{n}} \rightarrow O$$

וזה מתאים ל

$$\text{Spec} O \rightarrow \text{Spec} A = U$$

■

■

מסקנה 252: אם $Y \subseteq X$ סגורה תחת ייחוד, לכל חוג-הערכה O וכל $\varphi : \text{Spec } O \rightarrow X$ כך ש- $\varphi(\eta) \in Y$ מתקיים $\text{Im } \varphi \subseteq Y$.

טענה 253: אם X נתרית, אזי $Y \subseteq X$ סגורה תחת ייחוד אם ורק אם התנאי מתקיים עבור O חוג-הערכה דיסקרטית.

הוכחה: נוכיח את הטענה. אם $x \in \bar{y} \in Y$, אזי קיימת סדרה

$$x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$$

כך ש- $x_{i-1} \in \bar{x_i}$ מקור-ממד 1 (פירושו ש- $\bar{x_{i-1}} \subseteq \bar{x_i}$ מקור-ממד 1). במקרה האפייני נבצע מיקום – $O \subseteq A$ שיתאים ל- y ו- $m \subseteq A$ אזי A_m נתרי. לכן קיימת שרשרת מקסימלית $O \subsetneq p_1 \subsetneq p_2 \subsetneq \dots \subsetneq p_n = m$ של ראשוניים. במשתמשים בעובדה שחוג-הערכה O הוא חוג-הערכה דיסקרטית אם $\dim O = 1$. ■

5.10 אלומות של מודולים

הגדרה 254: 1. יהי $(X, \mathcal{O}_X)$ מרחב מחווג. **אלומה של $\mathcal{O}_X$ -מודולים או $\mathcal{O}_X$ -מודול**, היא אלומה $\mathcal{M}$ כך ש- $\mathcal{M}(U)$ הינו $\mathcal{O}_X(U)$ -מודול לכל U והצמצום $\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(V)$ מתואם עם צמצומים $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$.

2. **מורפיזם של $\mathcal{O}_X$ -מודולים** הוא מורפיזם של אלומות $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ כך ש- $a(\varphi(m)) = \varphi(a(m))$ לכל $a \in \mathcal{O}_X(U)$ ולכל $m \in \mathcal{M}(U)$.

עובדה 255: אם $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ הומומורפיזם של $\mathcal{O}_X$ -מודולים, אזי $\ker f$, $\text{Im } f$, $\text{coker } f$ הם $\mathcal{O}_X$ -מודול.

דוגמה 256: 1. יהיו $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$ -מודולים, נגדיר $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ – האילום של הקדם-אלומה $U \rightarrow \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}(U)$.

2. אפשר להסתכל על $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ – זה $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -מודול.

3. נגדיר $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (לא כמו בסעיף הקודם) על ידי

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X/U}(\mathcal{F}/U, \mathcal{G}/U) \in \mathcal{O}_X(U) - \text{Mod}$$

זו אלומה ו- $\mathcal{O}_X$ -מודול.

הגדרה 257: 1. $\mathcal{O}_X$ -מודול $\mathcal{F}$ נקרא **חופשי** אם $\mathcal{F} \cong \bigoplus_{x \in I} \mathcal{O}_X$.

2. $\mathcal{O}_X$ -מודול $\mathcal{F}$ נקרא **חופשי-מקומית** אם קיים כיסוי-פתוח $X = \bigcup U_\alpha$ כך ש- $\mathcal{F}(U_\alpha)$ חופשי.

3. אם $\mathcal{F}$ חופשי-מקומית, אזי לכל $x \in X$ אפשר להגדיר $\text{rank}_x \mathcal{F} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. $\text{rank } \mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ היא קבועה ולכן אם X קשירה אזי $x \rightarrow \text{rank}_x(\mathcal{F})$ קבועה ולכן מוגדר $\text{rank } \mathcal{F}$.

4. $\mathcal{O}_X$ -מודול הוא הפיך $\mathcal{O}_X$ -מודול חופשי-מקומית מדרגה 1.

5. אלומת אידיאלים היא תת-מודול של $\mathcal{O}_X$.

הגדרה 258: יהי $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ מורפיזם של מרחבים מחווגים.

1. אזי $f_*\mathcal{O}_X -$ אלומה של חוגים על Y . לכל $\mathcal{F} - f_*\mathcal{F} - \mathcal{O}_X$ -מודול זה $f_*\mathcal{O}_X$ -מודול.

2. f מגדירה מורפיזם של $f_*\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y -$ הומומורפיזם של אלומות של חוגים. בפרט, $f_*\mathcal{O}_X$ זה $\mathcal{O}_Y$ -מודול.

3. $f^{-1}\mathcal{O}_Y -$ אלומת חוגים על X .

הגדרה 259: נגדיר $f^*g := f^{-1}g \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ וזה $\mathcal{O}_X$ -מודול.

למה 260: $f_* : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$ צמוד מימין ל- $f^* : \mathcal{O}_Y\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod}$.

הוכחה: לכל $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$ ו- $\mathcal{G} \in \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$ מתקיים:

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*g, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^{-1}g \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}(f^{-1}g, \mathcal{F})$$

■

5.11 אלומות קוואזי-קוהרנטיות על סכמות

הגדרה 261: יהי A חוג, M מודול מעל A ויהי $\tilde{M} - \mathcal{O}_X$ -מודול, $X = \text{Spec} A$. לכל $p \in X$ נתבונן ב- M_p שהוא A_p -מודול. לכל $U \subseteq X$ פתוחה. נגדיר

$$\tilde{M}(U) = \{s : U \rightarrow \coprod_{p \in U} M_p \mid s(p) \in M_p \wedge s = m/f \text{ locally where } m \in M, f \in A\}$$

סעיף 262: 1. $\tilde{M}$ הוא $\mathcal{O}_X$ -מודול.

2. לכל $p \in X$ מתקיים ש- $\tilde{M}_p = M_p$ (אגף שמאל הוא גבעול, אגף ימין הוא מיקום).

3. לכל $f \in A$ מתקיים $\Gamma(D(f), \tilde{M}) = M_f$.

4. $\Gamma(X, \tilde{M}) = M$.

5. $\tilde{M} -$ האילום של הקדם אלומה $M \otimes_A \mathcal{O}_X(U) \rightarrow U$, זאת אומרת $\tilde{M} = M \otimes_A \mathcal{O}_X$.

הוכחה:

1. ברור.

2. זהה למקרה $M = A$.

3. זהה למקרה $M = A$.

4. זהה למקרה $M = A$.

5. יהי $\tilde{M}'$ – אילום של $U \rightarrow \mathcal{O}_X(U) \otimes_A M$. אז ההעתקה הטבעית $\mathcal{O}_X(U) \otimes_A M \rightarrow \tilde{M}'(U)$ על ידי $f \otimes m \mapsto f(m|_U)$ מגדירה מורפיזם של קדם אלומות $\tilde{M}' \rightarrow \tilde{M}$. על גבעולים זה איזומורפיזם ולכן איזומורפיזם.

■

טענה 263: יהי $X = \text{Spec} A, Y = \text{Spec} B, \varphi : A \rightarrow B$ ו- $f = \varphi^* : Y \rightarrow X$. אזי:

1. הפונקטור $M \mapsto \tilde{M}$ הוא פונקטור מדויק, מלא ונאמן מ- A -מודולים ל- $\mathcal{O}_X$ -מודולים.

$$2. \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \cong \widetilde{M \otimes_A N}.$$

$$3. \widetilde{\left(\bigoplus M_i\right)} = \bigoplus \tilde{M}_i.$$

4. לכל B -מודול N $f_* \left(\tilde{N} \right) = \widetilde{N_A}$ – מודול מתאים מעל A .

$$5. \widetilde{B \otimes_A M} = f^* \left(\tilde{M} \right).$$

הוכחה:

1. $M \mapsto \tilde{M}$ הוא פונקטור, וזה תרגיל פשוט.

(א) מדויק: רוצים להראות שאם $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3$ מדויקת אזי $\tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2 \rightarrow \tilde{M}_3$ מדויקת. אבל סדרה מדויקת של אלומות היא אם ורק אם הסדרה של הגבעולים מדויקת – $\left(\tilde{M}_1\right)_p \rightarrow \left(\tilde{M}_2\right)_p \rightarrow \left(\tilde{M}_3\right)_p$ וזה אם ורק אם $\left(\tilde{M}_1\right)_X \rightarrow \left(\tilde{M}_2\right)_X \rightarrow \left(\tilde{M}_3\right)_X$ ומיקום הוא מדויק.

(ב) מלא ונאמן: רוצים להוכיח שלכל M, N יש איזומורפיזם $i : \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N})$. נטען שיש לנו העתקה בכיוון השני, והיא $\Gamma = \Gamma(X, \cdot)$, זאת שכן $M = \Gamma(X, \tilde{M})$ מהטענה הקודמת. אזי, $\Gamma \circ i = \text{Id}$ לפי הגדרה. יש לנו העתקה על מורפיזמים – $i : (\alpha : M \rightarrow N) \rightarrow (\tilde{\alpha} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N})$ על ידי $i \left(\frac{\alpha(m)}{g} \right) = \tilde{\alpha} \left(\frac{m}{g} \right)$. בנוסף, Γ היא חד-חד-ערכית כי $\tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ הומומורפיזם של $\mathcal{O}_X$ -מודול ו- $\tilde{M} = (\mathcal{O}_X \otimes_A M)$, זאת אומרת M יוצרת את $\tilde{M}$ כ- $\mathcal{O}_X$ -מודול.

2. מכפלה טנזורית מתחלפת עם מיקום.

3. סכום-ישר מתחלף עם מיקום.

4. נבדוק את ההעתקה משני הכיוונים. נבנה העתקה α מ- $\tilde{N}_A$ ל- $f_* (\tilde{N})$.

$$\tilde{N}_A(U) = \left\{ s \in \prod_{p \in U} N \otimes_A A_p \mid s \text{ is locally } \frac{n}{g}, g \in A, n \in N \right\}$$

$$f_* (\tilde{N})(U) = \tilde{N}(f^{-1}(U)) = \left\{ t \in \prod N \otimes_A B_q \mid q \in f^{-1}(U), t = \frac{n}{b}, b \in B, g \in f^{-1}(U) \right\}$$

$$g \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(g) \in U$$

אבל $\varphi : A \rightarrow B$ משרה העתקה $\varphi^{-1}(q) \rightarrow B \setminus q$. לכן משרה העתקה. נראה שלכל $g \in \Gamma(D(g), \tilde{N}_A) \rightarrow \Gamma(D(g), f_* (\tilde{N}))$ α משרה איזומורפיזם. אגף שמאל הוא המיקום N_g . אגף ימין הוא המיקום $N_{\varphi(g)} = N_g$.

למה 264: אם $\alpha : A \rightarrow B$ הומומורפיזם של אלומות, אזי α איזומורפיזם אם $\alpha(U) : A(U) \xrightarrow{\sim} B(U)$ בסיס של פתוחות.

5. קל לראות שמתקיים

$$f^* (\tilde{M}) = \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\tilde{M}$$

אבל

$$f^{-1}(\tilde{M}) = f^{-1}(\mathcal{O}_Y \otimes_B M)^\# = (f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_B M)^\#$$

כאשר $\#$ הוא אילום. לכן:

$$\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\tilde{M} = (\mathcal{O}_Y \otimes_B B \otimes_A M)^\# = \widetilde{B \otimes_A M}$$

■

הגדרה 265: תהא $(X, \mathcal{O}_X)$ סכמה.

1. $\mathcal{O}_X$ -מודול $\mathcal{F}$ נקרא **קוואזי-קוהרנטי** אם קיים כיסוי-פתוח אפני $X = \bigcup \text{Spec } A_\alpha$, כך ש- $\mathcal{F}|_{\text{Spec } A_\alpha} = \tilde{M}_\alpha$ עבור A_α -מודול מסויים M_α .

2. נניח ש- X נתרת מקומית⁹. אזי $\mathcal{O}_X$ -מודול $\mathcal{F}$ נקרא **קוהרנטי** אם בנוסף כל M_α נוצר-סופית מעל A_α .

דוגמה 266: 1. $\mathcal{O}_X - \mathcal{O}_X$ מודול קוהרנטי.

2. $i : Y \hookrightarrow X$ שיכון-סגור. אזי $i_* \mathcal{O}_Y$ הוא $\mathcal{O}_X$ -מודול קוואזי-קוהרנטי (וקוהרנטי אם X נתרת).

⁹לא קריטי, אבל עוזר לפשט את ההגדרה.

משפט 267: $\mathcal{F}|_U \cong$ פתוחה אפינית, $U = \text{Spec} A \subseteq X$ הוא קוואזי-קוהרנטי אם ורק אם לכל M עבור A -מודול M (ו- M/A נוצר-סופית עבור קוהרנטי).

למה 268: יהי $X = \text{Spec} A$, $f \in A$, $\mathcal{F}|_X = \mathcal{O}_X$ מודול קוואזי-קוהרנטי, אזי $\Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(D(f), \mathcal{F})$ משרה איזומורפיזם $r: \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F})$. זאת אומרת:

1. לכל $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ כך ש- $s|_{D(f)} = 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $sf^n = 0$.

2. לכל $t \in \Gamma(D(f), \mathcal{F})$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $f^n t = \tilde{t}|_{D(f)}$.

הוכחה: (של הלמה). לפי הגדרה קיים כיסוי-פתוח אפיני $X = \bigcup U_\alpha$ כך ש- $\mathcal{F}|_{U_\alpha} = \tilde{M}_\alpha$. לכן, אפשר לעדן את $X = \bigcup U_\alpha$ על ידי מעבר לפתוחות בסיסיות אפיניות ב- U_α . לכן אפשר להניח $U_\alpha = D(g_\alpha) \subseteq X$.

1. יהי $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ כך ש- $s|_{D(f)} = 0$. יהי

$$s_\alpha = s|_{D(g_\alpha)} \in \Gamma(D(g_\alpha), \mathcal{F}) = M_\alpha$$

יתר-על-כן, X קוואזי-קומפקטית אפשר להניח ש- $X = \bigcup D(g_\alpha)$ איחוד-סופי. $s|_{D(f)} = 0$ ולכן $s_\alpha|_{D(f)} = 0$ לכל α . מהשוויון $\Gamma(D(f \cdot g_\alpha), \mathcal{F}) = (M_\alpha)_f$ במיקום $\frac{s_\alpha}{1} = 0$. לכן קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $f^n s_\alpha = 0$ זאת אומרת $f^n s|_{U_\alpha} = 0$ לכל α ולכן $f^n s = 0$.

2. נסמן $t_\alpha = t|_{D(g_\alpha)}$, $t_\alpha \in (M_\alpha)_f$. לכן קיים $n_\alpha \in \mathbb{N}$ כך ש- $f^{n_\alpha} t_\alpha \in \Gamma(D(f \cdot g_\alpha), \mathcal{F})$. בא מאיבר $\tilde{t}_\alpha \in \Gamma(D(g_\alpha), \mathcal{F})$ אם $\tilde{t}_\alpha|_{D(g_\alpha) \cap D(g_\beta)} = \tilde{t}_\beta|_{D(g_\alpha) \cap D(g_\beta)}$ אזי הם מגדירים $\tilde{t}$ כמו שרצינו. נקח $\tilde{t}_\alpha|_{D(g_\alpha g_\beta)} = \tilde{t}_\beta|_{D(g_\alpha g_\beta)}$ ונשתמש בסעיף הקודם.

■

השיעור 269: תהא X סכמה, אזי $\mathcal{O}_X$ -מודול $\mathcal{F}$ הוא קוואזי-קוהרנטי אם ורק אם לכל פתוחה אפינית $U = \text{Spec} A \subseteq X$ קיים A -מודול M כך ש- $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}$ (קוהרנטי אם X נתרית ו- M הוא A -מודול נוצר סופית). 30/05/2016

הוכחה: בדומה להוכחת הלמה הקודמת, קיים בסיס של פתוחות אפיניות U_α דומה ולכן $\mathcal{F}|_U$ במקומו עד הגדרה 281 מובא סיכום החלק המתאים מהארטשורן. חסר, במקומו עד הגדרה 281 מובא סיכום החלק המתאים מהארטשורן.

מסקנה 270: יהא A חוג ו- $X = \text{Spec} A$. הפונקטור $M \mapsto \tilde{M}$ מגדיר שקילות של קטגוריות בין A -Mod (הקטגוריה של A -מודולים) לבין הקטגוריה של $\mathcal{O}_X$ -מודולים קוואזי-קוהרנטיים. הפונקטור ההופכי הוא $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$. אם A נתר, אזי הפונקטור מגדיר שקילות קטגוריות בין הקטגוריה של A -מודולים והקטגוריה של $\mathcal{O}_X$ -מודולים קוהרנטיים.

טענה 271: תהא X סכמה אפינית, ותהא $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ סדרה קצרה מדויקת של $\mathcal{O}_X$ -מודולים, ונניח ש- $\mathcal{G}$ קוואזי-קוהרנטי, אזי הסדרה

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}) \rightarrow 0$$

מדויקת.

הוכחה: הוכחנו כבר ש- Γ מדויק משמאל, לכן מספיק להוכיח שההעתקה האחרונה היא על. יהא $s \in \Gamma(X, \mathcal{H})$ חתך גלובאלי של $\mathcal{H}$. היות שההעתקה $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ על אלומות היא על, אז לכל $x \in X$ קיימת סביבה פתוחה $D(f)$ של x כך ש- $s|_{D(f)}$ מרימה את חתך $t \in \mathcal{F}(D(f))$. נטען שקיים $n > 0$ כך ש- $f^n s$ ניתן להרמה לחתך גלובאלי של $\mathcal{F}$. ואכן, נכסה את X על ידי מספר סופי של פתוחות $D(g_i)$ כך שלכל i החתך $s|_{D(g_i)}$ מרים לחתך $t_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$. ב- $D(f) \cap D(g_i) = D(fg_i)$ יש שני חתכים, $t, t_i \in \mathcal{F}(D(fg_i))$ ששניהם הרמה של s . לכן, $t - t_i \in \mathcal{G}(D(fg_i))$. היות ש- $\mathcal{G}$ קוואזי-קוהרנטי, אזי מלמה 268 קיים $n > 0$ כך ש- $f^n(t - t_i) = 0$. מתאים לחתך $u_i \in \mathcal{G}(D(g_i))$. נבחר n שמתאים לכל ה- i ים ונסמן $t'_i = f^n t_i + u_i$. אזי t'_i הוא הרמה של $f^n s$ על $D(g_i)$, ובנוסף, $t'_i|_{D(fg_i)} \equiv f^n t|_{D(fg_i)}$. על $D(g_i g_j)$ יש שני חתכים t'_i, t'_j של $\mathcal{F}$, שניהם הרמה של $f^n s$, ולכן $t'_i - t'_j \in \mathcal{G}(D(g_i g_j))$ ומתקיים $t'_i|_{D(fg_i g_j)} \equiv t'_j|_{D(fg_i g_j)}$. ולכמה שוב מלמה 268 מתקיים כי $f^m(t'_i - t'_j) = 0$ עבור איזשהו $m > 0$ שאינו תלוי ב- i, j . נדביק את החתכים $f^m t'_i$ של $\mathcal{F}$ ונקבל חתך גלובאלי t'' של $\mathcal{F}$ מעל X , שהוא הרמה של $f^{n+m} s$. לכן קיים $n > 0$ כך ש- $f^n s$ ניתן להרמה לחתך גלובאלי.

נכסה את X על ידי $r \in \mathbb{N}$ פתוחות $D(f_i)$ כך ש- $s|_{D(f_i)}$ ניתן להרמה לחתך של $\mathcal{F}$ מעל $D(f_i)$. לפי מה שהראינו, קיים $n > 0$ וחתכים גלובאליים $t_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ כך ש- t_i הרמה של $f_i^n s$. היות ש- $D(f_i)$ הן כיסוי פתוח של X , האידיאל $(f_1^n, \dots, f_r^n)$ הוא כל A וניתן לכתוב $1 = \sum_{i=1}^r a_i f_i^n$ עם $a_i \in A$. יהא $t = \sum a_i t_i$, אזי t חתך גלובאלי של $\mathcal{F}$ שתמונתו ב- $\Gamma(X, \mathcal{H})$ היא $\sum a_i f_i^n s = s$ כנדרש. ■

הערה 272: לטענה הזו יש הוכחה קוהומולוגית פשוטה, שנובעת מכך ש- $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$ לכל אלומה קוואזי-קוהרנטית $\mathcal{G}$ על סכמה אפינית X , אך זה מחוץ למסגרת הקורס.

טענה 273: תהא X סכמה. הגרעין, קו-גרעין והתמונה של כל מורפיזם של אלומה קוואזי-קוהרנטית הם קוואזי-קוהרנטיים. כל הרחבה של אלומה קוואזי-קוהרנטית היא קוואזי-קוהרנטית. אם X נתרית, אז אותו דבר רק עם אלומות קוהרנטיות.

הוכחה: בשל הקוואזי-קוהרנטיות, כל ההוכחות הן מקומיות ולכן מספיק להוכיח במקרה ש- X אפינית. הטענה על הגרעין, קו-גרעין והתמונה נובעת מהעובדה שהפונקטור $M \mapsto \tilde{M}$ מדויק ומלא ונאמן מ- A -מודולים לאלומות קוואזי-קוהרנטיות. נותר להוכיח עבור הרחבה של אלומות קוואזי-קוהרנטיות.

תהא $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ סדרה קצרה מדויקת של $\mathcal{O}_X$ -מודולים, ונניח ש- $\mathcal{G}$ ו- $\mathcal{H}$ קוואזי-קוהרנטיים, הוכחנו שהסדרה המתאימה של חתכים גלובאליים $0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}) \rightarrow 0$ היא מדויקת, על ידי שימוש בפונקטור $\sim$ נקבל את הדיאגרמה

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{H}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{H} \longrightarrow 0 \end{array}$$

החצים האנכיים הקיצוניים הם איזומורפיזמים, שכן $\mathcal{G}$ ו- $\mathcal{H}$ קוואזי-קוהרנטיים. מלמת החמישה נקבל שהחץ האנכי האמצעי הוא גם איזומורפיזם, ולכן $\mathcal{F}$ גם קוואזי-קוהרנטי. במקרה הנדיר, מקוהרנטיות המודולים המתאימים נוצרים סופית, ולכן נקבל שגם המודול המתאים ל- $\mathcal{F}$ כזה ולכן קוהרנטי בעצמו. ■

טענה 274: יהא $f: X \rightarrow Y$ מורפיזם של סכמות:

1. אם $\mathcal{G}$ אלומה קוואזי-קוהרנטית של $\mathcal{O}_Y$ -מודולים, אזי $f^*\mathcal{G}$ היא אלומה קוואזי-קוהרנטית של $\mathcal{O}_X$ -מודולים.

2. אם X ו- Y נתרין, ואם $\mathcal{G}$ קוהרנטית, אזי $f^*\mathcal{G}$ קוהרנטית.

3. אם מתקיים אחד מהשניים: X נתרית או f קוואזי-קומפקטי ופריד, אזי אם $\mathcal{F}$ אלומה קוואזי-קוהרנטית של $\mathcal{O}_X$ -מודולים אזי $f_*\mathcal{F}$ אלומה קוואזי-קוהרנטית של $\mathcal{O}_Y$ -מודולים.

הוכחה:

1. הטענה מקומית ולכן מספיק להוכיח עבור המקרה האפיני, שנובע בקלות ממה שהוכחנו.

2. ברור.

3. הטענה מקומית, אבל רק ל- Y ולא ל- X , לכן נניח ש- Y אפינית. מההנחה נובע ש- X קוואזי-קומפקטית, ולכן קיים לה כיסוי-סופי של פתוחות אפיניות U_i . אם f פריד, $U_i \cap U_j$ אפיני ונסמנו U_{ijk} . אם x נדיר, $U_i \cap U_j$ קוואזי-קומפקטי ולכן קיים כיסוי-סופי של פתוחות אפיניות U_{ijk} . כעת, לכל $V \subseteq Y$ פתוחה, חתך s של $\mathcal{F}$ מעל $f^{-1}V$ הוא כמו אוסף חתכים s_i של $\mathcal{F}$ מעל $U_i \cap f^{-1}V$ שהצמצומים לפתוחות $U_{ijk} \cap f^{-1}V$ כולם שווים, מתכונות אלומה שהוכחנו. לכן, קיימת סדרה מדויקת של אלומות על Y

$$0 \rightarrow f_*\mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_i f_*(\mathcal{F}|_{U_i}) \rightarrow \bigoplus_{i,j,k} f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}})$$

על ידי abuse of notation נסמן ב- f^* גם את המורפיזם המושרה $U_i \rightarrow Y$ ו- $U_{ijk} \rightarrow Y$. כעת, $f_*(\mathcal{F}|_{U_i})$ ו- $f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}})$ הן קוואזי-קוהרנטיות מלמה 263(ד'), ולכן $f_*\mathcal{F}$ קוואזי-קוהרנטית מהטענה הקודמת. ■



הערה 275: אם X ו- Y נתרין, לא בהכרח נובע ש- f_* של אלומה קוהרנטית היא אלומה קוהרנטית, זה נכון אם f מורפיזם סופי או מורפיזם פרויקטיבי או מורפיזם נאות.

הגדרה 276: תהא Y תת-סכמה סגורה של סכמה X ויהא $i: Y \rightarrow X$ מורפיזם ההכלה. נגדיר את **אלומת האידיאלים** של Y שתסומן $\mathcal{I}_Y$ להיות הגרעין של ההעתקה $i^*: \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$.

$\mathcal{I}_Y$

טענה 277: תהא X סכמה. לכל תת-סכמה סגורה Y של X , אלומת האידיאלים המתאימה, $\mathcal{I}_Y$, היא אלומה קוואזי-קוהרנטית של אידיאלים על X . אם X נתרית, אז אלומת האידיאלים היא קוהרנטית. בכיוון ההפוך, כל אלומת אידיאלים קוואזי-קוהרנטית על X היא אלומת אידיאלים של תת-סכמה סגורה הנקבעת ביחידות של X .

הוכחה: נוכיח רק את הכיוון " $\Leftarrow$ " אם Y תת-סכמה סגורה של X , אזי מורפיזם ההכלה $i: Y \rightarrow X$ הוא קוואזי-קומפקטי ופריד, ולכן לפי הטענה הקודמת, $i_* \mathcal{O}_Y$ היא קוואזי-קוהרנטית על X . לכן, היות ש- $\mathcal{I}_Y$ היא גרעין של מורפיזם של אלומות קוואזי-קוהרנטיות, אלומת האידיאלים אף היא קוואזי-קוהרנטית. אם X נתרית, אזי לכל תת-קבוצה פתוחה אפינית $U = \text{Spec } A$ של X , החוג A נתרי, ולכן האידיאל $I = \Gamma(U, \mathcal{I}_Y|_U)$ נוצר-סופית, ולכן $\mathcal{I}_Y$ קוהרנטית. ■

מסקנה 278: תהא $X = \text{Spec } A$ סכמה אפינית, אזי קיימת התאמה חד-חד-ערכית ועל בין אידיאלים $a \triangleleft A$ ובין תת-סכמות סגורות $Y \subseteq X$ הניתנת על ידי שליחת a לתמונה של $\text{Spec } A/a$ ב- X . בפרט, כל תת-סכמה סגורה של סכמה אפינית היא אפינית.

הגדרה 279: יהא S חוג מדורג ויהא M S -מודול מדורג. נגדיר את האלומה המתאימה ל- M על $\text{Proj } S$ ונסמנה ב- $\tilde{M}$ באופן הבא. לכל $p \in \text{Proj } S$, תהא $M_{(p)}$ חבורת האיברים מדרגה 0 במיקום $T^{-1}M$, כאשר T היא המערכת הכפלית של איברים הומוגניים ב- S שאינם ב- p . לכל פתוחה $S \subseteq \text{Proj } S$ נגדיר את $\tilde{M}(U)$ להיות קבוצת הפונקציות s מ- U ל- $M_{(p)}$ $\prod_{p \in U} M_{(p)}$ שהן שברים באופן מקומי. מכאן, לכל $p \in U$ קיימת סביבה V של p ב- U ואיברים הומוגניים $m \in S$ ו- $f \in S$ מאותה דרגה, כך שלכל $q \in V$ מתקיים ש- $f \notin q$ ו- $s(q) = m/f$ ב- $M_{(q)}$. נגדיר את $\tilde{M}$ להיות אלומה עם העתקות הצמצום המתאימות.

סענה 280: יהא S חוג מדורג ו- M S -מודול מדורג. יהא $X = \text{Proj } S$:

1. לכל $p \in X$, הגבעול $(\tilde{M})_p = M_{(p)}$.
2. לכל $f \in S_+$ הומוגני, מתקיים $\widetilde{M(f)} \cong \widetilde{M}|_{D_+(f)}$ על ידי האיזומורפיזם של $D_+(f)$ עם $\text{Spec } S_{(f)}$, כאשר $M_{(f)}$ הוא חבורת האיברים מדרגה 0 במודול המקומי M_f .
3. M היא $\mathcal{O}_X$ -מודול קוואזי-קוהרנטי. אם S נתרי ו- M נוצר-סופית, אזי $\tilde{M}$ קוהרנטי.

הוכחה:

1. ברור.
2. ברור.
3. נובע מ-(2).

■

הגדרה 281: יהא S חוג מדורג ויהי $X = \text{Proj } S$. נגדיר $\mathcal{O}_X(k) = \widetilde{S(k)}$, כאשר $S(k)$ הוא S -מודול מדורג ו- $\mathcal{O}_X(k)$ הוא $\mathcal{O}_X$ -מודול.

הגדרה 282: לכל $\mathcal{O}_X$ -מודול $\mathcal{F}$ נגדיר $\mathcal{F}(k) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(k)$.

סענה 283: $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ חוג-מדורג, $X = \text{Proj } S$. נניח ש- S נוצר על ידי S_1 מעל S_0 .

1. $\mathcal{O}_X(n)$ הוא $\mathcal{O}_X$ -מודול הפיך (קרי, חופשי מקומית מדרגה 1).

2. $\widetilde{M \otimes_S N} = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$. בפרט, $\widetilde{M(n)} = \widetilde{M}(n)$.

$$3. \mathcal{O}_X(n+m) \cong \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m).$$

דוגמה 284: דוגמאות לתנאי בשאלה – מודולים S בהם הוא נוצר על ידי S_1 מעל S_0 :

1. $S = A[x_0, \dots, x_m]$, חוג-מדורג. $S_0 = A$ ו- S_1 הוא הפולינומים הליניאריים, ו- S אכן נוצרת כך.

2. $S = A[x_0, \dots, x_m]/I$ כאשר I אידיאל-הומוגני, גם מקיים את התנאי.

הוכחה:

1. יהי $f \in S_1$. רוצים להוכיח $\mathcal{O}_{D_+(f)} \cong \mathcal{O}_X(n)|_{D_+(f)}$, כי אז לפי הנחה על S , אנחנו יודעים ש- $X = \bigcup_{f \in S_1} D_+(f)$. ראינו ש- $\widetilde{M}|_{D_+(f)} = \widetilde{M(f)}$, בפרט, $\mathcal{O}_X(n)|_{D_+(f)} \cong \widetilde{S(n)}_{(f)}$. לכן נשאר להראות ש- $\widetilde{S(n)}|_f \cong S(f)$. האיברים באגף ימין הם $\frac{a}{f^m}$ כאשר $a \in S_n$. האיברים באגף שמאל הם $\frac{b}{f^m}$ כאשר $b \in S_{n+m}$. מה האיזומורפיזם? הכפלה או חילוק ב- f^n .

2. $(M \otimes_S N)_{(f)} \cong M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$ (תרגיל). לכן, $\widetilde{M \otimes_S N} \cong \widetilde{M}_{(f)} \otimes_{\widetilde{S}_{(f)}} \widetilde{N}_{(f)}$. לכן $\widetilde{M \otimes_S N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$, בפרט, נקח $N = S(n)$ ונקבל $\widetilde{M \otimes_S S(n)} = \widetilde{M(n)}$. לכן $\widetilde{M(n)} = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$ אם נקח גם $M = S(m)$ נקבל $\mathcal{O}_X(n+m) = \widetilde{M \otimes_S S(m+n)} = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m+n) = \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m)$.

■

הגדרה 285: $S = \bigoplus S_i$, $X = \text{Proj } S$. $\mathcal{F}$ הוא $\mathcal{O}_X$ -מודול. נגדיר חבורה-אבלית מדורגת $\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(k))$. אזי $\Gamma_*(\mathcal{F})$ הוא S -מודול מדורג. אכן, רוצים לבנות העתקה $S_n \times \Gamma(X, \mathcal{F}(k)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}(n+k))$.

הערה 286: לכל M יש הומומורפיזם טבעי $M_0 \rightarrow \Gamma(X, \widetilde{M})$.

טענה 287: $S_0[S_1] = \bigoplus \widetilde{S_i} = S$, $X = \text{Proj } S$. אזי לכל $\mathcal{O}_X$ -מודול קיים $\mathcal{F}$ יש איזומורפיזם טבעי $\beta: \Gamma_*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$.

למה 288: תהי X סכמה. $\mathcal{L}$ הוא $\mathcal{O}_X$ -מודולי הפיך. $X_f = \{f \in \Gamma(X, \mathcal{L}) \mid f \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x\}$ ויהי $\mathcal{F}$ שהוא $\mathcal{O}_X$ -מודול קוואזי-קוהרנטי. אזי:

1. נניח ש- X קוואזי-קומפקטי. $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ כך ש- $s|_{x_f} = 0$, אזי קיים n כך ש- $s \otimes f^n \in 0$.

2. נניח ש- X קוואזי-קומפקטי וקוואזי-פריך, ו- $t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$. אזי קיים n כך ש- $t \otimes f^n \in 0$. $\Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ ניתן להרחיב עד לאיבר של $\Gamma(X_f, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$.

הערה 289: 1. $X_f \subseteq X$ קבוצה פתוחה. מדוע? כי אם $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$, אזי זו פונקציה רגולרית וראינו את זה. אבל מקומית $\mathcal{L}$ איזומורפי ל- $\mathcal{O}_X$.

2. אם $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ וגם X אפינית, אזי ראינו כבר את הלמה הזאת.

הוכחה: (של הלמה).

1. $\mathcal{L}$ הפיך ולכן קיים כיסוי פתוח אפיני $X = \bigcup U_i$ כך ש- $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$. יתר-על-כן, הכיסוי הוא סופי כי X קוואזי-קומפקטי. $s|_{X_f} = 0$, זה גורר $S|_{(U_i)_f} = 0$ לכל i . נגדיר

$$s_i = S|_{U_i} \in \Gamma(U_i, \mathcal{L}|_{U_i}) \cong \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$$

לכן קיים n כך ש- $f^n s_i = 0$ לכל i . זה גורר $s \otimes f^n \in \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ מקיים $s \otimes f^n|_{U_i} = 0$ לכל i , וזה שקול לעבודה ש- $s \otimes f^n = 0$.

2. דומה.

הוכחה: (של הטענה). יהי $f_1, \dots, f_n \in S_1$ יוצרים של S מעל S_0 . נבנה איזומורפיזם $\beta_i : \Gamma(D_+(x_i), \widetilde{\Gamma_*}(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} \Gamma(D_+(f_i), \mathcal{F})$ אנחנו יודעים שמתקיים

$$\Gamma(D_+(x_i), \widetilde{\Gamma_*}(\mathcal{F})) = \Gamma_*(\mathcal{F})_{(f_i)} = \bigoplus \frac{1}{f_i^n} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$$

נגדיר $\beta_i : \frac{1}{f_i^n} \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \rightarrow \Gamma(D_+(f_i), \mathcal{F})$ על ידי $\beta_i \left(\frac{1}{f_i^n} s \right) = \frac{1}{f_i^n} \oplus s|_{D_+(f_i)}$. הלמה אומרת שזה איזומורפיזם. $\mathcal{F}$ קוואזי-קוהרנטית, לכן β_i מגדיר איזומורפיזם $\beta_i : \Gamma(D_+(x_i), \widetilde{\Gamma_*}(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} \Gamma(D_+(f_i), \mathcal{F})$ כי $\Gamma_*(\mathcal{F})|_{D_+(f_i)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}|_{D_+(f_i)}$.

קל לבדוק ש- $\beta_i|_{D_+(f_i) \cap D_+(f_j)} = \beta_j|_{D_+(f_i) \cap D_+(f_j)}$. לכן הם מגדירים איזומורפיזם $\Gamma_* \widetilde{(\mathcal{F})} \rightarrow \mathcal{F}$.

■
■

מסקנה 290: יהי A חוג.

1. אם $Y \subseteq \mathbb{P}_A^n$ סגורה אזי קיים $I \subseteq S = A[x_0, \dots, x_n]$ הומוגני כך ש- $Y = Z(I)$. זאת אופרת, $Y = \text{Proj}(S/I)$.

2. סכמה Y היא פרויקטיבית גלובלית מעל A אם ורק אם $A = \text{Proj} S$, S/A נוצר-סופית על ידי S_1 .

הוכחה:

1. Y כנ"ל סגורה, זה מגדיר לנו $I_Y \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}$ באלומת האידיאלים. זי לכל $k \in \mathbb{Z}$, נרצה ש- $I_Y(k) \subseteq \mathcal{O}_X(k)$, $I_Y(k) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(k)$ מודול חופשי מקומית. לכן אם $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ אזי $\mathcal{F}_1(k) \subseteq \mathcal{F}_2(k)$. לכן

$$\Gamma_*(I_Y) = \bigoplus \Gamma(X, I_Y(k)) \subseteq \underbrace{\Gamma_*(\mathcal{O}_X)}_{=S} = \bigoplus \Gamma(X, \mathcal{O}_X(k))$$

ונגדיר $I = \Gamma_*(I_Y) \triangleleft S$. אזי $Z(I) = Y$ כי $Z(I) \subseteq \mathbb{P}_A^n$ תת-סכמות סגורות, לכן $Y = Z(I)$ אם ורק אם $I_Y = I_{Z(I)}$. אבל

$$I_{Z(I)} = \widetilde{I} = \widetilde{\Gamma_*(I_Y)} = I_Y$$

כאשר השוויון הימני הוא מהטענה הקודמת.

2. Y פרויקטיבי מעל A ולכן $Y \subseteq \mathbb{P}_A^n$ סגורה. לכן, מהסעיף הקודם, $Y = \text{Proj}(S/I)$ ו- S/I נוצר-סופית על ידי $(S/I)_1$. הכיוון ההפוך ברור.

■

הגדרה 291: תהי Y סכמה מעל $\text{Spec} A$. $\mathcal{O}_Y$ -מודול-הפך $\mathcal{L}$ נקרא **מלא מאוד** אם קיים שיכון-סגור מקומית $i : Y \hookrightarrow \mathbb{P}_A^n$ ש- $\mathcal{L} = i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(1)$.

למה 292: 1. Y/A קוואזי-פרויקטיבית אם ורק אם קיים $\mathcal{O}_Y$ -מודול מלא מאוד.

2. Y/A פרויקטיבית אם ורק אם Y/A נאותה וקיים $\mathcal{O}_Y$ -מודול מלא מאוד.

הוכחה:

1. מההגדרה.

2. כיוון $\Leftarrow$ ברור. בכיוון השני, לפי 1 קיים שיכון סגור מקומית $i : Y \hookrightarrow \mathbb{P}_A^n$ כאשר Y נאותה, ולכן $i(Y)$ סגורה ולכן i שיכון-סגור.

■

הערה 293: $\mathcal{O}_Y$ -מודול מלא מאוד הוא לא יחיד.

הגדרה 294: תהי Y סכמה. $\mathcal{F}$ הוא $\mathcal{O}_X$ -מודול. נגיד ש- $\mathcal{F}$ **נוצר על ידי חתכים גלובליים** אם קיימים חתכים גלובליים $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ כאשר $i \in I$. לכל $x \in X$ $(s_i)_x \in \mathcal{F}_x$ יוצרים את $\mathcal{O}_{X,x}$ -מודול $\mathcal{F}_x$ אם ורק אם

$$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X^I \rightarrow \mathcal{F}$$

היא על. זאת אומרת, $\mathcal{F}$ נוצרת על ידי חתכים גלובליים אם ורק אם $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^I/M$ עבור איזשהו M .

דוגמה 295: 1. אם $X = \text{Spec} A$ אזי כל $\mathcal{F}$ קוואזי-קוהרנטי הוא נוצר על ידי חתכים גלובליים. $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$ ו- $M \cong A^I/\tilde{N}$ אזי $\tilde{M} \cong \mathcal{O}_X^I/\tilde{N}$.

2. אם $X = \text{Proj} S$, S נוצר על ידי S_1 , אזי $\mathcal{O}_X(1)$ נוצר על ידי חתכים גלובליים הבאים מ- S_1 . זאת כי $X = \bigcup D_+(f)$ ו- $\mathcal{O}_X(1)$ יוצרת את $D_+(f)$ את $D_+(f)$.

3. $X = \mathbb{P}_A^n$ אזי $\Gamma(\text{Proj} S, \mathcal{O}_X(1)) = 0$.

משפט 296 (סר): יהי X פרויקטיבי מעל A , חוג נתר. $\mathcal{L}$ הוא $\mathcal{O}_X$ -מודול מלא מאוד ו- $\mathcal{F}$ הוא $\mathcal{O}_X$ -מודול קוהרנטי. אזי קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ ה- $\mathcal{O}_X$ -מודול $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ נוצר על ידי מספר סופי של חתכים גלובליים.

הוכחה: אפשר להניח ש- $X = \mathbb{P}_A^n$ ו- $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$. יהי $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ שיוכו-סגור כך ש- $\mathcal{L} = i^*\mathcal{O}(1)$. אזי הטענה עבור $(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ שקולה לטענה עבור $(i_*\mathcal{F}, \mathcal{O}(1))$. מדוע? כי $i_*\mathcal{F}$ קוהרנטי.

$$i_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes k}) = i_*(\mathcal{F} \otimes i^*(\mathcal{O}(k))) = i_*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}(k) = i_*(\mathcal{F})(k)$$

וגם $\Gamma(\mathbb{P}^k, i_*g) = \Gamma(X, g)$. יהי $\bigcup D_+(x_i) = X = \mathbb{P}_A^n$. אנחנו יודעים ש- $\mathcal{F}/X$ קוהרנטי, ולכן $\mathcal{F}|_{D_+(x_0)} = \widetilde{M}_i$ כאשר $M_i = \Gamma(D_+(x_i), \mathcal{F})$ שזה $\Gamma(D_+(x_i), \mathcal{O}_X)$ -מודול נוצר-סופית. יהיו יוצרים של M_i מעל A_i . $x_i \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ ולפי הלמה קיים m כך ש- $s_{ij} \cdot X_i^m \in \Gamma(D_+(x_i), \mathcal{F}(m))$ ניתן להרחבה עד $t_{ij} \in \Gamma(\mathbb{P}_A^n, \mathcal{F}(m))$ ו- $\{t_{ij}\}$ יוצרים את $\mathcal{F}(m)$ כי $t_{ij}|_{D_+(x_i)} = s_{ij}X_i^m|_{D_+(x_i)} \in \mathcal{F}(m)|_{D_+(x_i)}$. ■

מסקנה 297: יהי X פרויקטיבי מעל חוג-נתרי A ויהי $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$ פלא מאוד אזי כל $\mathcal{O}_X$ -מודול קוהרנטי $\mathcal{F}$ הוא פנה של $\mathcal{O}(-m)^N$ עבור $N, m \in \mathbb{N}$ מסוימים.

הוכחה: לפי המשפט קיימים m, N כך ש- $\mathcal{F}(m)$ מנה של $\mathcal{O}_X^N$. זאת אומרת ש- $\mathcal{O}_X^N \twoheadrightarrow \mathcal{F}(m)$ ועל ידי הסתכלות ב- $\mathcal{O}(-m) \otimes \mathcal{F}(m) \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ נקבל $\mathcal{O}_X(-m)^N \twoheadrightarrow \mathcal{F}$. ■

משפט 298: בהנחות הל"ל $\Gamma(X, \mathcal{F})$ הוא מודול נוצר-סופית מעל A . בפרט $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ אלגברה סופית מעל A .

הוכחה: נכתוב את רעיון ההוכחה. אפשר להניח ש- $X = \mathbb{P}_A^n$. נשתמש בקוהומולוגיה וחישוב ישיר עבור $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(m)$. לבסוף נשתמש במסקנה. נוכיח את זה מאוחר יותר. ■

מסקנה 299: יהי $f : X \rightarrow Y$ מורפיזם. X, Y נתריים מקופית. אזי לכל $\mathcal{O}_X$ -מודול קוהרנטי $\mathcal{F}$, ה- $\mathcal{O}_Y$ -מודול $f_*\mathcal{F}$ גם קוהרנטי.

הוכחה: זה עובדה מקומית ולכן אפשר להניח ש- $Y = \text{Spec} A$ כאשר A נתרי. אנו יודעים ש- $f_*\mathcal{F}$ הוא קוואזי-קוהרנטי, כי פרויקטיבי גורר קוואזי-קומפקטי וגם קוואזי-קוהרנטי. לכן $f_*\mathcal{F} = \widetilde{M}$ כאשר

$$M = \Gamma(Y, f_*\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$$

לכן, לפי המשפט, M נוצר-סופית מעל A . ■

מסקנה 300: כל $f : X \rightarrow Y$ עבור Y נאות.

ניזכר שאם $X \rightarrow \text{Spec} A$ נאות, אזי, מהלמה של Chow, קיים מורפיזם פרויקטיבי בירציונלי $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ כך ש- $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X \rightarrow \text{Spec} A$ גם פרויקטיבית. **הוכחה:** נוכיח את המסקנה. נרצה להוכיח שלכל $\mathcal{O}_X$ -מודול קוהרנטי $\mathcal{F}$, $f_*\mathcal{F}$ קוהרנטי.

נוכיח באינדוקציה נתרית על X . $\mathcal{F}$ הוא $\mathcal{O}_X$ -מודול קוהרנטי, לכן $\pi^*\mathcal{F}$ הוא $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -מודול קוהרנטי. לכן, מהמסקנה הקודמת, $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_*\pi^*\mathcal{F}$ הוא $\mathcal{O}_X$ -מודול קוהרנטי ו- $f_*\tilde{\mathcal{F}} = f_*\pi_*\pi^*\mathcal{F}$ הוא $\mathcal{O}_Y$ -מודול קוהרנטי לפי המסקנה.

$\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ איזומורפיזם מעל פתוחה $U \subseteq X$ כי $\pi|_U = \text{Id}$. לכן $\pi|_U = \text{Id}$ ולכן $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \pi_*\pi^*\mathcal{F}$ היא איזומורפיזם מעל U . לכן $\text{Supp}(\ker \alpha) \subseteq X \setminus U$. לפי הגדרה

$$0 \rightarrow A \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$$

מדויקת אזי

$$0 \rightarrow \Gamma(X, A) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \tilde{\mathcal{F}})$$

גם מדויקת.

$$0 \rightarrow \Gamma(Y, f_* A) \rightarrow \Gamma(Y, f_* \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(Y, f_* \tilde{\mathcal{F}})$$

מדויקת אבל $\Gamma(Y, f_* \tilde{\mathcal{F}})$ נוצרת סופית מעל A כי $\tilde{\mathcal{F}}$ קוהרנטי. גם $\Gamma(Y, f_* A)$ נוצרת-סופית מעל A לפי הנחת האינדוקציה. ■

5.12 מורפיזם ל- $\mathbb{P}^n$ ואלומות מלאות

נזכיר

$$\Gamma(\mathbb{P}_A^n, \mathcal{O}(1)) = A[x_0, \dots, x_n]_{\deg 1} = \bigoplus A x_i$$

משפט 301: יהי A חוג. X סכמה מעל A .

1. יהי $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ מעל A , אזי $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$ היא אלומה הנוצרת על ידי חתכים גלובליים – עבור $0 \leq i \leq n$ $s_i = \varphi^*(x_i)$.

2. להפך, יהי $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ -מודול הפיך הנוצר על ידי $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, אזי קיים מורפיזם $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ כך ש- $\mathcal{L} \cong \varphi^*(\mathcal{O}(1))$ ותחת האייזומורפיזם הזה $\varphi^*(x_i) = s_i$.

הוכחה:

1. $\varphi^*(x_0), \dots, \varphi^*(x_n) \in \Gamma(X, \varphi^*(\mathcal{O}(1)))$ יוצרים את $\mathcal{O}(1)$ ולכן $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$ יוצרים את $\Gamma(X, \varphi^*(\mathcal{O}(1)))$.

הערה 302: $X_{s_i} = \varphi^{-1}(D_+(x_i))$ ומשרה העתקה $\varphi_i : X_{s_i} \rightarrow D_+(x_i) = \text{Spec} A \left[\frac{x_j}{x_i} \right]$.

2. נתבונן ב- $X_{s_i} \subseteq X$ פתוחה, $s_0, \dots, s_n$ יוצרים את $\mathcal{L}$ אם ורק אם $X = \bigcup X_{s_i}$ אם ורק אם $(s_0)_x, \dots, (s_n)_x$ יוצרים את $\mathcal{L}_x$ שהוא מודול-חופשי מדרגה 1 זה אם ורק אם לכל x קיים i כך ש- $(s_i)_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x$ (לא באידיאל המקסימלי) וזה אם ורק אם לכל x קיים i כך ש- $x \in X_{s_i}$ גורר $X = \bigcup X_{s_i}$. כדי לבנות את φ נבנה $\varphi_i : X_{s_i} \rightarrow D_+(x_i)$ כך ש- $\varphi_i|_{X_{s_i} \cap X_{s_j}} = \varphi_j|_{X_{s_i} \cap X_{s_j}}$. נגדיר הומומורפיזם

$$\psi_i : A \left[\frac{x_j}{x_i} \right] \rightarrow \Gamma(X_{s_i}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1}) = \Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_{X_{s_i}})$$

ומתקיים

$$\psi_i \left(\frac{x_j}{x_i} \right) = s_j \otimes s_i^{-1}$$

ויהי $\varphi_i = \psi_i^* : X_{s_i} \rightarrow D_+(x_i)$ העתקה המתאימה. קל לראות שהם מתחלפים על X_{s_i} ולכן קיים φ . קל לראות ש- φ מקיימת כל התנאים. φ יחידה לפי ההערה.

הערה 303: לפי המשפט

$$\mathrm{Hom}(X, \mathbb{P}_A^n) = \left\{ (\mathcal{L}, s_0, \dots, s_n) \mid \begin{array}{l} \mathcal{L} \text{ is an inverse } \mathcal{O}_X - \text{module} \\ s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L}) \text{ generating } \mathcal{L} \end{array} \right\}$$

וזה בסיס לכל בעיות המודולים בגיאומטריה אלגברית, נניח Moduli Spaces וכו'.

שימוש למשפט: אם k שדה, אזי $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_k^n) = \mathrm{PGL}_n(k) = \mathrm{GL}_{n+1}(k)/k^\times$.

למה 304: יהי $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ מורפיזם, $\mathcal{L} = \varphi^*(\mathcal{O}(1))$, $s_i = \varphi^*(x_i) \in \Gamma(X, \mathcal{O}(1))$. שיכון-סגור אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $X_{s_i} \subseteq X$ היא אפינית לכל i .

2. המורפיזם $A\left[\frac{x_j}{x_i}\right] \rightarrow \Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_{s_i})$ הניתן על ידי $\frac{x_j}{x_i} \rightarrow s_j/s_i$ הוא על לכל i .

הוכחה: $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ שיכון-סגור אם ורק אם $\varphi_i = \varphi|_{X_{s_i}} : X_{s_i} \rightarrow D_+(x_i) = \mathrm{Spec} A\left[\frac{x_j}{x_i}\right]$ שיכון-סגור לכל i וזה אם ורק אם X_{s_i} אפינית ו- $A\left[\frac{x_j}{x_i}\right] \rightarrow \Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_{s_i})$ היא על.

טענה 305: נניח $A = k$, שדה סגור-אלגברית, X/k נאותה, ויהי $V = \mathrm{Span}_k s_i \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ אזי φ שיכון-סגור אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. V מפרידה נקודות. הווה אומר, לכל $P \neq Q \in X$, נקודות סגורות, קיים $s \in V$ כך ש- $s_P \in \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P$ וגם $s_Q \notin \mathfrak{m}_Q \mathcal{L}_Q$ ולהפך.

2. V מפרידה וקטורים משיקים. הווה אומרת, לכל $P \in X$ נקודה סגורה, המרחב $\mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P / \mathfrak{m}_P^2 \mathcal{L}_P$ יוצר את $\{t \in \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P \mid \exists s \in V \text{ s.t. } s_P = t\}$.

הוכחה: יהי $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ שיכון-סגור.

הערה 306: בשביל לבדוק את שני התנאים, אפשר להניח ש- $X = \mathbb{P}^n$ ו- $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$ מדוע? כי $\tilde{V} = \mathrm{Span}_k x_i \subseteq \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ אזי φ משרה הומומורפיזם $\tilde{\varphi}^* : \tilde{V} \rightarrow V$. אם $P \neq Q$ אזי $\varphi(P) \neq \varphi(Q)$ מתקיים וגם φ משרה $\varphi^* : \mathfrak{m}_{\varphi(P)} \mathcal{O}(1) / \mathfrak{m}_{\varphi(P)}^2 \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P / \mathfrak{m}_P^2 \mathcal{L}_P$ גם תנאי 2 מתקיים.

הוכחה: אבל אם $P \neq Q \in \mathbb{P}^n(k)$ קיים $s = \sum a_i x_i$ כך ש- $s(P) = 0$ אבל $s(Q) \neq 0$. בנוסף, אפשר להניח ש- $P = (1, 0, \dots, 0)$ אזי

$$\mathfrak{m}_P = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \Rightarrow \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P / \mathfrak{m}_P^2 \mathcal{L}_P = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

ולכן $\mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P = (x_1, \dots, x_n)$.

להפך, נניח ששני התנאים מתקיימים ואנו רוצים להוכיח ש- φ שיכון-סגור. תנאי 1 גורר $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ היא חד-חד-ערכית. נאותה ולכן φ סגורה וחד-חד-ערכית על נקודות ולכן נובע שזה הומומורפיזם $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ $\xrightarrow{\text{close in}}$ נשאר להראות ש- $\varphi_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ היא על. X היא נאותה ולכן $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ מורפיזם נאות ולכן $\varphi_* \mathcal{O}_X$ קוהרנטי (נובע ממסקנה קודמת). רוצים להוכיח ש- $\varphi_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ על וזה אם ורק אם $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, \varphi(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, P}$ היא על. $\varphi_* \mathcal{O}_X$ קוהרנטי מעל $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ ולכן $\mathcal{O}_{X, P}$ מודול נוצר-סופית מעל $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, \varphi(P)}$. תנאי 2 הוא אם ורק אם $\mathfrak{m}_{\varphi(P)} \rightarrow \mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2$ היא על. בנוסף, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, \varphi(P)} / \mathfrak{m}_{\varphi(P)} \cong \mathcal{O}_{X, P} / \mathfrak{m}_P$ נשאר להוכיח את הלמה הבאה:

למה 307: $\varphi : (A, \mathfrak{m}_A) \rightarrow (B, \mathfrak{m}_B)$ מורפיזם מקומי של חוגים נתרניים מקומיים כך ש:

1. B מודול נוצר-סופית מעל A .

2. $\mathfrak{m}_A \rightarrow \mathfrak{m}_B / \mathfrak{m}_B^2$ היא על.

3. $\varphi : A / \mathfrak{m}_A \xrightarrow{\sim} B / \mathfrak{m}_B$.

אזי φ על.

הוכחה: יהי $I = \mathfrak{m}_A B \subseteq \mathfrak{m}_B \subseteq B$ אזי $I \subseteq \mathfrak{m}_B$ וגם $I + \mathfrak{m}_B^2 = \mathfrak{m}_B$ (לפי 2), אזי נוכל להשתמש בלמת נקאיימה ונקבל $I = \mathfrak{m}_B$. נתבונן ב- $A / \mathfrak{m}_A \rightarrow B / \mathfrak{m}_A B \rightarrow B / \mathfrak{m}_B$. ההעתקה הימנית היא איזומורפיזם כי $I = \mathfrak{m}_B$. מתנאי 3 אנחנו יודעים שהאיברים הראשון והשלישי איזומורפיים, ולכן הראשון והשני איזומורפיים, וההעתקה השמאלית היא איזומורפיזם. B נוצר-סופית מעל A ו- $B / \mathfrak{m}_A B$ נוצר על ידי 1 ולכן B נוצר על ידי 1 ולכן מנקאיימה $A \rightarrow B$ על. ■

■

■

חלק III

תרגולים

6 תרגול ראשון

6.1 מרחבים טופולוגיים נתריים

הגדרה 308: מרחב טופולוגי נקרא **נתרי** אם הוא מקיים את תנאי השרשרת היורדת על תת-קבוצות סגורות. קרי, כל שרשרת יורדת של קבוצות סגורות מתייצבת.

דוגמה 309: $\mathbb{A}_k^n$ הוא נתרי.

הוכחה: אם יש לנו שרשרת יורדת של סגורות $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$, זה נותן לנו שרשרת עולה של אידיאלים $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \dots$ ב- $k[x_1, \dots, x_n]$. החוג הזה נתרי ממשפט הבסיס של הילברט, ולכן השרשרת מתייצבת. כעת, מסגירות $\overline{Y_i} = Y_i$, $Z(I(Y_i)) = \overline{Y_i} = Y_i$. ■

מסקנה 310: כל יריעה אפינית היא מרחב-טופולוגי נתרי.

טענה 311: יהי X מרחב-טופולוגי נתרי. אזי כל תת-קבוצה סגורה לא ריקה $Y \subseteq X$ היא איחוד סופי של סגורות אי-פריקות $Y = \bigcup_{i=1}^r Y_i$. יתר על כן, אפשר גם ש- $Y_i \subset Y_j$ לכל $i \neq j$ הפירוק הוא יחיד.

הגדרה 312: ה- Y_i הנ"ל מהפירוק ייקראו **רכיבי האי-פריקות** של Y .

הוכחה: נתחיל מקיום הפירוק. נסמן

$$\Omega = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ is closed and is not a finite union of closed composable sets}\}$$

נניח $\Omega \neq \emptyset$ כיוון ש- X נתרי אזי קיים איבר מינימלי ונסמנו Y . בפרט, Y פריקה ולכן יש סגורות $Z, W \subsetneq Y$ כך ש- $Y = Z \cup W$. מכאן, $Z, W \notin \Omega$ ולכן $Z = \bigcup_{i=1}^r Z_i, W = \bigcup_{j=1}^s W_j$ כאשר $Z_i \subseteq Z, W_j \subseteq W$ סגורות ואי-פריקות. לכן $Y = \bigcup_{i=1}^r Z_i \cup \bigcup_{j=1}^s W_j$ בסתירה, ולכן $\Omega = \emptyset$. עבור $Y \subseteq X$ סגורה, אזי $Y = \bigcup_{i=1}^r Y_i$, אם יש $i \neq j$ כך ש- $Y_i \subseteq Y_j$ אז נזרוק את Y_i . נקבל שיש סגורות אי-פריקות ללא הכלות.

יחידות. נניח שגם $Y = \bigcup_{j=1}^s Z_j$ סגורות ואי-פריקות. נניח שאין יחידות ומתקיים גם $Y = \bigcup_{i=1}^r Y_i$ אזי

$$Y_i \subseteq Y = \bigcup_{j=1}^s Z_j$$

ולכן

$$Y_i = Y_i \cap Y = \bigcup_{j=1}^s (Y_i \cap Z_j)$$

ולכן $Y_i \cap Z_j \subseteq Y_i$ סגורה. מכאן קיים j_0 כך ש- $Y_i = Y_i \cap Z_{j_0}$ ולכן $Y_i \subseteq Z_{j_0}$. בה"כ $j_0 = 1$. באותו אופן, יש i_0 כך ש- $Z_1 \subseteq Y_{i_0}$ וסה"כ $Y_1 \subseteq Y_{i_0}$ אבל הנחנו ש- $Y = \bigcup Y_i$ איחוד

ללא הכלות, ולכן $Y_1 = Y_{i_0}$ ולכן $i_0 = 1$. נרצה להמשיך מכאן לאחר הראשון, נשתמש בסגור והפרש. נסמן

$$\begin{aligned} Y' &= \overline{Y \setminus Y_1} \\ &= \overline{\left(\bigcup_{i=1}^r Y \setminus Y_1 \right)} \\ &= \bigcup_{i=2}^r Y_i \\ &= \bigcup_{i=2}^r \overline{(Y_i \setminus Y_1)} \end{aligned}$$

ולבסוף $Y_i \setminus Y_1 \subseteq Y_i$ וניתן לכתוב $Y_i = \overline{(Y_i \setminus Y_1)} \cup (Y_i \cap Y_1)$ אי-פריקות. $Y_i \neq Y_i \cap Y_1$ ולכן $Y_i \subseteq Y_1$ בסתירה. לכן, $Y_i = \overline{Y_i \setminus Y_1}$ ומתקיים $Y' = \bigcup_{i=2}^r Y_i$ וכיוון ש- $Y_1 = Z_1$ אזי $Y' = \bigcup_{j=2}^s Z_j$ וניתן לחזור על החלק הראשון. ■

מסקנה 313: כל יריעה אפינית ניתנת להצגה כאיחוד ללא הכלות של סגורות אי-פריקות.

6.2 משפט האפסים של הילברט

למה 314 (למת ההבחנה של וירשטראס): יהי $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ לא קבוע. אחרי החלפת משתנים ליניארית $f = x_n^d + g(x_1, \dots, x_n)$ כך ש- $\deg(g) < d$ (פה הדוגה היא הדוגה המלאה, כי אנחנו בכמה משתנים).

הוכחה: נקח פולינום ב- $2n$ משתנים,

$$F(x, y) \in k[x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

על ידי

$$f(x_1 + \lambda_1 x_n, \dots, x_n + \lambda_{n-1} x_n, \lambda_n x_n)$$

נכתוב את החלק ההומוגני מהדרגה הגבוהה ביותר, וזה יהיה סכום של איברים מהצורה $a \prod_{i=1}^{n-1} (x_i + \lambda_i x_n)^{d_i} (\lambda_n x_n)^{d_n}$ ולכן $F(x, y) = f_d(\lambda_1, \dots, \lambda_n) x_n^d + g$, כאשר g הוא כל הגורמים ממעלה נמוכה יותר ב- x_n . נשאר להראות שיש $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ כך ש- $f_d(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 1$. היות ש- f_d פולינום הומוגני ממעלה d מספיק להראות שיש $\mu_1, \dots, \mu_n \in k$ כך ש- $f_d(\mu_1, \dots, \mu_n) \neq 0$, כי אם $a \neq 0 = f_d(\mu_1, \dots, \mu_n)$ אז $\lambda_i = \frac{\mu_i}{a}$. נוכיח באינדוקציה על n :

• עבור $n = 1$ זה ברור.

• עבור $n > 1$: $g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d g_i x_n^i$ כאשר $g_i \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$. כעת, $g_d \neq 0$ פולינום ב- $n-1$ משתנים, ולכן מהנחת האינדוקציה יש $\{\mu_1, \dots, \mu_{n-1}\}$ כך ש- $g_d(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \neq 0$. כעת, הפולינום $g(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, x_n)$ הוא פולינום שאינו אפס במשתנה x_n ולכן יש μ_n שלא שורש וסיימנו.

■

למה 315 (למת הנורמליזציה של נתר): תהי A k -אלגברה נוצרת-סופית, אזי קיימת תת- k -אלגברה $B \subseteq A$ כך ש- $B \cong k[x_1, \dots, x_d]$ ו- $B \subseteq A$ הרחבה סופית.

הגדרה 316: $B \subseteq A$ חוגים, $a \in A$ נקרא **שלם** מעל B אם a הוא שורש של פולינום מתוקן עם מקדמים ב- B . זה שקול לכך ש- $B[a]$ כאלגברה הוא B -מודול נוצר-סופית (כמודול). אם $a_1, \dots, a_n \in A$ שלמים מעל B , אזי $B[a_1, \dots, a_n]$ B -מודול נוצר-סופית (כמודול).

עובדה 317: $B \subseteq A$ הרחבה שלמה.

1. לכל אידיאל ראשוני $p \subseteq B$ קיים אידיאל ראשוני $q \subseteq A$ כך ש- $p = q \cap B$.

2. בהינתן שרשרת $p_1 \subseteq p_2 \subseteq \dots \subseteq p_n$ של ראשוניים ב- B , לכל שרשרת $q_1 \subseteq q_2 \subseteq \dots \subseteq q_m$ כך ש- $p_i = q_i \cap B$, $n > m$, $q_m \subseteq \dots \subseteq q_n$ עם אותה הזרישה.

3. עבור ראשוני p ב- B , אם $q \subseteq q'$ ראשוניים ו- $p = q \cap B = q' \cap B$ אזי $q = q'$.

■

הוכחה: באלגברה קומוטטיבית.

הגדרה 318: נגדיר את **מימד קרול** של A להיות

$$\dim A = \sup \{n | p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_n\}$$

כאשר כל ה- p_i ראשוניים.

מסקנה 319: אם $B \subseteq A$ הרחבה שלמה, אזי $\dim A = \dim B$.

הוכחה: (של הלמה): A היא k -אלגברה נוצרת-סופית, ופירושו ש- $\varphi : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A$ נסמן $I = \ker \varphi$. אם $I = 0$ אז סיימנו טריוויאלית. נניח אם כן כי $I \neq 0$, ולכן קיים $f \in I$, $f \neq 0$ שאינו קבוע. לפי למת ההבחנה, $f = x_n^d + \sum_{i=0}^{d-1} f_i x_n^i$. מכאן,

$$k[x_1, \dots, x_{n-1}] \hookrightarrow k[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\varphi} A$$

נסמן ב- A' את התמונה של $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ בתוך A . $(f) \subseteq I$, ולכן ישנה העתקה

$$A' \hookrightarrow \underbrace{k[x_1, \dots, x_n] / (f)}_{=C} \xrightarrow{\psi} k[x_1, \dots, x_n] / I = A$$

C הוא A' -מודול נוצר-סופית כמודול (נוצר על ידי $1, x_n, \dots, x_n^{d-1}$). עוד נשים לב ש- A הוא C -מודול נוצר-סופית כמודול. לכן A הוא A' -מודול נוצר-סופית כמודול. כעת, A' הוא k -אלגברה עם פחות יוצרים מאשר A . באינדוקציה על מספר היוצרים של A :

• $n = 1$: אזי $A = k[x] / I \xrightarrow{\varphi} k[x]$. נקח את B להיות k וסיימנו.

• $n > 1$: מהנחת האינדוקציה יש $B \subseteq A'$ שאיזומורפי לחוג פולינומים, וההרחבה סופית, ולכן A סופי מעל B .

■

הערה 320: $\dim k[x] = 1$, שכן כל האידיאלים הראשוניים נוצרים על ידי הפולינומים האי-פריקים, שהם פולינומים ממעלה 1 (כי אנחנו מעל k סגור אלגברית). יתר על כן, $\dim k[x_1, \dots, x_n] = n$.

מסקנה 321: תהי A k -אלגברה נוצרת-סופית שהיא גם שדה, אז A היא הרחבה אלגברית סופית. בפרט, אם k סגור אלגברית אזי $A = k$.

הוכחה: מלמת הנורמליזציה $k[x_1, \dots, x_d] \cong B \subseteq A$ הרחבה-סופית. אם $d \geq 1$ אז $1 \leq \dim B = \dim A = 0$, בסתירה. לכן $d = 0$. ■

משפט 322 (משפט האפסים החלש): $A = k[x_1, \dots, x_n]$. כל אידיאל מקסימלי ב- A הוא מהצורה $(x_1 - \lambda_1, \dots, x_n - \lambda_n)$ כאשר $\lambda_i \in k$. במילים אחרות, יש התאמה חד-חד-ערכית בין אידיאלים מקסימליים ב- A לבין נקודות ב- $\mathbb{A}^n$ לבין הומומורפיזמים $A \rightarrow k$.

הוכחה: נשים לב שכל אידיאל מהצורה $(x_1 - \lambda_1, \dots, x_n - \lambda_n)$ הוא מקסימלי, על ידי ההצבה $f \mapsto f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

בכיוון השני, יהי $\mathfrak{m}$ אידיאל מקסימלי, ונסתכל על ההטלה $\pi : A \rightarrow A/\mathfrak{m}$, מהחוג לשדה. הטווה הוא לא רק שדה אלא גם k -אלגברה נוצרת-סופית, וכיוון ש- k סגור אלגברית, לפי המסקנה $A/\mathfrak{m} = k$. נסמן $\lambda_i = \pi(x_i)$. מכאן נובע, $x_i - \lambda_i \in \mathfrak{m}$. $(x_1 - \lambda_1, \dots, x_n - \lambda_n) \subseteq \mathfrak{m}$ וממקסימליות מתקיים שוויון. ■

משפט 323 (משפט האפסים החזק): $a \subseteq A = k[x_1, \dots, x_n]$ אידיאל, אז $I(Z(a)) = \sqrt{a}$ (כבר ראינו ש- $\sqrt{a} \subseteq I(Z(a))$). נקח $p \in \bigcap_{a \subseteq p} p$ is prime. נראה ש- $f \notin \sqrt{a}$ אז יש p ראשוני כך ש- $a \subseteq p$ וגם $f \notin p$.

7 תרגול שני

7.1 הערות על משפט האפסים

ניזכר שמשפט האפסים אומר שעבור $A = k[t_1, \dots, t_n]$, אז $I(Z(a)) = \sqrt{a}$ אם $a \subseteq A$.

מסקנה 324: עבור $f \in A$, $Z(f) = \emptyset \iff f \in A^\times$.

נשים לב להכללה הבאה:

סענה 325: עבור $X \subseteq \mathbb{A}^n$ סגורה ואי-פריקה, $\bar{f} \in k[X]$ אזי

$$\bar{f} \in k[X]^\times \iff \{x \in X \mid \bar{f}(x) = 0\} = \emptyset$$

הוכחה: היות ש- X סגורה, אזי $X = Z(p)$. ולכן מתקיים $k[X] = A/I(X) = A/p$. בנוסף,

$$\{x \in X | \bar{f}(x) = 0\} = \emptyset \iff X \cap Z(f) = \emptyset$$

אבל $X \cap Z(f) = Z(p) \cap Z(f) = Z(p + (f))$. אבל על ידי הפעלת I נקבל את $\sqrt{p + (f)} \subsetneq A$, ולכן קיים אידיאל מקסימלי m $\sqrt{p + (f)} \subseteq m$ וזה אם ורק אם $Z(m) \subseteq X \cap Z(f)$, אבל $Z(m)$ הוא נקודה, היות ש- m אידיאל מקסימלי, ולכן יש נקודה בחיתוך וסיימו. ■

נשים לב להכללה הנוספת הבאה:

טענה 326: X יריעה אי-פריקה $g \in \mathcal{O}(X)$ פונקציה רגולרית.

$$g \in \mathcal{O}(X)^\times \iff \{g = 0\} = \emptyset$$

הוכחה: $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$ יריעה היא איחוד של מספר סופי של תת-קבוצות פתוחות אפיניות. מכאן, $\{g = 0\} = \bigcup_{i=1}^r U_i \cap \{g|_{U_i} = 0\}$. פונקציה רגולרית על U_i . להגיד $g \in \mathcal{O}(X)^\times$ זה אומר ש- $g \neq 0$ לכל X ולכן גם לכל U_i . ■

7.2 תורת המימד

הגדרה 327: X מרחב-טופולוגי. המימד של X שיסומן $\dim X$ יוגדר להיות

$$\dim X = \sup \{n | Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n\}$$

כאשר מדובר בשרשרת עולה ממש של תת-קבוצות סגורות ואי-פריקות.

דוגמה 328: $\dim \mathbb{A}^1 = 1$. זאת כיוון שקבוצה היא אי-פריקה אם ורק היא נקודה, ולכן כל שרשרת היא מהצורה $\{*\} \subsetneq \mathbb{A}^1$.

הערה 329: עבור יריעה אפינית X , $\dim X = \dim k[X]$.

הוכחה: הוכחנו שיש התאמה בין קבוצות סגורות אי-פריקות ב- $\mathbb{A}^n$ ובין אידיאלים ראשוניים ב- $k[t_1, \dots, t_n]$ הניתנת על ידי ההעתקות I, Z . ממשפט האפסים יש התאמה בין קבוצות אי-פריקות ב- $X = Z(a)$ ובין אידיאל ראשוני שמכיל את a . $\sqrt{a}$. ממשפט ההתאמה בחוגים יש התאמה בין אידיאלים ב- A שמכילים את a לבין אידיאלים ב- $A/\sqrt{a}$. ■

הערה 330: X מרחב-טופולוגי, $Z, Y_1, \dots, Y_r \subseteq X$ סגורות. בנוסף Z אי-פריק ו- $Z \subseteq \bigcup_{i=1}^r Y_i$ אזי $Z = \bigcup_{i=1}^r (Y_i \cap Z)$ ומאי-פריקות Z נקבל שקיים i כך ש- $Z \subseteq Y_i$.

מסקנה 331: עבור X מרחב-טופולוגי נתון, $X = \bigcup_{i=1}^r X_i$ (פירוק לרכיבי אי-פריקות). לכן $\dim X = \max \dim X_i$ (שכן כל שרשרת מוכלת בתוך רכיב אי-פריקות).

טענה 332: תהי B k -אלגברה סופי מעל $A \subseteq B$ (נוצר-סופית מעל A כמודול) כאשר $A \cong k[t_1, \dots, t_n]$. אזי $\dim B = n$.

הוכחה: $A \subseteq B$ הרחבה סופית, לכן $\dim A = \dim B$. לכן מספיק להראות ש-
 $\dim k[t_1, \dots, t_n] \geq n$ כמו כן, (כי אנו יודעים על שרשרת באורך n ,
היא השרשרת של הוספת משתנים). נוכיח באינדוקציה את הטענה (כפי שמנוסחת בטענה
עצמה):

עבור $n = 0$ הוכחנו.

עבור $n > 0$, תהי $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_m$ שרשרת מקסימלית של ראשוניים ב- A
 $k[t_1, \dots, t_n]$. A תחום-שלמות ולכן $p_0 = 0$ ובפרט $m \geq 1$. מכאן, קיים $f \in p_1$ לא קבוע
ושונה מ-0. A הוא תחום פריקות-יחידה, ולכן $f = \prod_{i=1}^r f_i^{n_i}$ שהם גורמים אי-פריקים שונים.
כיוון ש- p_i ראשוניים, ניתן להניח בה"כ ש- f אי-פריק. בתחום פריקות-יחידה, איבר אי-פריק
מגדיר אידיאל ראשוני, ולכן (f) אידיאל ראשוני, אבל $(f) \subseteq p_1$, ולכן גם $p_1 = (f)$ שכן
אחרת היה ניתן להאריך את השרשרת (נשים לב, השרשרת בהכרח סופית, שכן החוג הוא
חוג נתרן). נתבונן בחוג המנה $B' = A/p_1$, אזי יש לנו שרשרת של ראשוניים ב- B' מהצורה
 $0 = \overline{p_1} \subsetneq \overline{p_2} \subsetneq \dots \subsetneq \overline{p_m}$ כאשר $\overline{p_i} = p_i/p_1$ ולכן $\dim B' \geq m - 1$. נכתוב $B' = A/(f)$ ובלי
הגבלת הכלליות המשתנה t_n מופיע ב- f , ולכן נקבל ש- B' סופי מעל $A' = k[t_1, \dots, t_{n-1}]$.
לפי הנחת האינדוקציה $\dim B' = n - 1$ ולכן $\dim B' \geq m - 1$.

■

קיבלנו שוויון $\dim B = n$.

ראינו דרכים שונות לחישוב מימד, בין היתר על ידי חישוב המימד בכל רכיבי האי-פריקות.
נראה עוד דרך.

עבור X אפינית ואי-פריקה, אזי $K[X]$ תחום-שלמות. נסמן ב- $k(X)$ את שדה השברים
של $k[X]$. (ניזכר, $k(X)$ הוא שדה הפונקציות הרציונאליות על X).

טענה 333: $\dim X = \text{tr. deg } k(X)$ כאשר tr. deg היא דרגת הטרנסנדנטיות.

הגדרה 334: $A \subseteq B$ הרחבה של חוגים כלשהם. איבר $b \in B$ ייקרא **אלגברי** מעל A אם הוא
שורש של פולינום ב- $A[t]$. אחרת, הוא ייקרא **טרנסנדנטי**.

הגדרה 335: $b_1, \dots, b_n \in B$ ייקראו **בלתי-תלויים אלגברית** מעל A אם לכל $p \in A[t_1, \dots, t_n]$
כך ש- $p(b_1, \dots, b_n) = 0$ בהכרח $p = 0$.

הערה 336: להגיד ש- $b_1, \dots, b_n \in B$ בלתי-תלויים אלגברית מעל A זה שקול ללהגיד שההעתקה
 $\varphi: A[t_1, \dots, t_n] \rightarrow B$ המוגדרת על ידי $\varphi(t_i) = b_i$ וקבועה על A היא חד-חד-ערכית.

הגדרה 337: $S \subseteq B$ נקראת בלתי-תלויה אלגברית מעל A אם כך תת-קבוצה סופית שלה היא
בלתי-תלויה אלגברית.

הגדרה 338: L/K הרחבת-שדות. $S \subseteq L$ נקרא **בסיס טרנסנדנטי** של K מעל K אם:

1. S בלתי-תלויה אלגברית מעל K .

2. $L/K(S)$ הרחבה אלגברית.

למה 339: $S \subseteq L$ קבוצה בלתי-תלויה אלגברית מעל K , אז $a \in L$ אז $S \cup \{a\}$ בלתי-תלויה אלגברית
אם ורק אם a טרנסנדנטי מעל $K(S)$.

הערה 340: כדאי לשים לב לדמיון לאי-תלות ליניארית, שם איבר יחד עם קבוצה יהיו בלתי-
תלויים ליניארית אם הוא לא איבר ב- span שלהם.

למה 341 (ההחלפה): אם $S \subseteq L$ ו- $a, b \in L$ אלגברי מעל $K(S \cup \{a\})$ וטרנסנדנטי מעל $K(S)$ אזי a אלגברי מעל $K(S \cup \{b\})$.

הערה 342: שוב, כדאי לשים לב לדמיון ללמה זהה עבור אי-תלות ליניארית, עד כדי ההחלפה בין $K(S)$ לבין span .

מסקנה 343: • כל תת-קבוצה בלתי-תלויה אלגברית ניתנת להשלמה לבסיס.

• קבוצה $S \subseteq L$ היא בסיס אם ורק אם היא בלתי-תלויה אלגברית מקסימלית וזה אם ורק אם היא פורשת מינימלית (כאשר פורשת פירושו ש- $L/K(S)$ הרחבה אלגברית).

• לכל שני בסיסים יש אותה עצמה.

נחזור לטענה הקודמת:

טענה 344: $\dim X = \text{tr. deg } k(X)$ כאשר tr. deg היא דרגת הטרנסנדנטיות.

הוכחה: אנחנו יודעים ש- $\dim k[X] = \dim X$ ומלמת הנורמליזציה של נתר זה שווה ל- $\dim k[t_1, \dots, t_n]$.

$$k[X] \hookrightarrow k(X)$$

$$k[t_1, \dots, t_n] \hookrightarrow k(t_1, \dots, t_n)$$

■ וכל איבר בשורה השנייה מוכל במי שמעליו, ומשלמות יש להם אותה דרגה.

משפט 345 (משפט האידיאל הראשי של קרול – *Krull Hauptidealsatz*): יריעה אי-פריקה, $g \notin \mathcal{O}(X)^\times$ פונקציה גולרית על X . אז כל רכיב אי-פריקות של $\{g = 0\}$ הוא ממימד $\dim X - 1$.

■ **הוכחה:** באלגברה קומוטטיבית, ובשיעור הבא.

מסקנה 346: $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ סגורה, $Y = \bigcup_{i=1}^r Y_i$ אזי $\forall_i \dim Y_i = n - 1$ אם ורק אם $Y = Z(g)$ עבור g פולינום לא קבוע.

מסקנה 347: X יריעה ו- $Z_0 \subsetneq \dots \subsetneq Z_{p-1} \subsetneq Z_p$ שרשרת מקסימלית של קבוצות סגורות אי-פריקות, אזי $\dim Z_i = i$. $\forall_i$ בפרט, לכל שרשרת מקסימלית אורך בדיוק $\dim X$.

הוכחה: X יריעה, אזי $Z_0 = \{*\}$ (נקודה). יש תת-קבוצה פתוחה אפינית (קרי, איזומורפית לאפינית) $* \in U$. נסתכל על $\emptyset \neq Z_i \cap U$, היא סגורה ב- U ופתוחה ב- Z_i ולכן צפופה בה. היות שהיא צפופה אז הסגור שלה הוא הכולת לכן $\dim Z_i = \dim(Z_i \cap U)$. היות ש- U אפינית, אז מספיק להראות עבור X אפינית. נוכיח באינדוקציה על i :

$i = 0$, נקבל $\{*\} = Z_0$ ולכן $\dim Z_0 = 0$.

$i > 0$, נניח ש- $\dim Z_i = i$ ונניח ש- $\dim Z_{i+r} = i + r$ עבור $r > 2$. $Z(p_i) = Z_i \subsetneq Z_{i+1} = Z(p_{i+1})$ כאשר $p_{i+1} \subsetneq p_i$ אידיאלים ראשוניים ב- $k[X]$. ננסה להבין מהו $k[Z_i]$, ונקבל ש- $k[Z_i] = k[X]_{(p_i)}$ (ממשפט האיזומורפיזם) וישנו $\varphi : k[Z_{i+1}] \twoheadrightarrow k[Z_i]$ לא חח"ע, ולכן $g \in \ker \varphi = p_i/p_{i+1}$. לכן $Z_i \subseteq \{g = 0\} \subsetneq Z_{i+1}$, לכן אפשר לכתוב את $\{g = 0\}$ כאיחוד סופי של רכיבי אי-פריקות, וממשפט קרול כל אחד מהם ממימד $\dim Z_{i+1} - 1 = i + r - 1$, אבל $i + r > i + 1$ ולכן ניתן לעדן את השרשרת המקסימלית, בסתירה.

■

8 תרגול שלישי

8.1 משפט האידיאל הראשי של קרול

משפט 348 (משפט האידיאל הראשי של קרול): X יריעה אי-פריקה, $g \neq 0$ פונקציה רגולרית על X . אם $Z_X(g) = \{x \in X | g(x) = 0\} \neq \emptyset$ אז לכל רכיב אי-פריקות של $Z_X(g)$ מימד $\dim X - 1$.

הערה 349: יריעה יכולה להיות אפינית או פרויקטיבית במקרה הזה, אין הגבלות.

הוכחה: פעם שעברה ראינו הוכחה עבור $X = \mathbb{A}^n$. לכן כעת כל שננסה הוא לראות שבשאר המקרים ניתן לבצע רדוקציה למקרה האפיני. נסמן $Y = Z_x(g)$ ויהי $x \in Y$ מנתריות X נובעת נתריות Y ולכן יש פירוק לרכיבי אי-פריקות $Y = \bigcup_{i=1}^r Y_i$. עבור i מתאים כלשהו. לכל $1 \leq i \leq r$ קיימת נקודה $p \in Y_i$ כך ש- $p \notin Y_j$ לכל $j \neq i$, כי אם לא אז $Y_i \subseteq \bigcup_{j \neq i} Y_j$ כאשר Y_i אי-פריקה והאיחוד הוא איחוד של אי-פריקות, ולכן כפי שהראינו מזה

Y_i is open in $X \setminus \bigcup_{j \neq i} Y_j$. לכן, $Y_i \subseteq X$ מוכל ב- Y_j מסויים, בסתירה. לכן, $x \in X \setminus \bigcup_{j \neq i} Y_j$ הוכחנו בכיתה שכל יריעה יש כיסוי על ידי פתוחות אפיניות, ולכן $x \in U \subseteq X \setminus \bigcup_{j \neq i} Y_j$ לכן U צפופה ב- X ומאי-פריקות נקבל $\dim U = \dim X$. כמו כן, $x \in U \cap Y_i \neq \emptyset$ ולכן $U \cap Y_i$ סגורה ב- U , אי-פריקה וצפופה ב- Y_i ולכן $\dim Y_i = \dim Y_i \cap U$. כעת נוכל לעשות רדוקציה למקרה של X יריעה אפינית אי-פריקה ו- $Y = Z_X(g)$.

$g \in k[X]$, מנורמליזציה של נתר קיים $\varphi^* : A \hookrightarrow k[X]$ (הרחבה סופית) כאשר $A \cong k[t_1, \dots, t_n]$. $\dim X = n$ ו- $\dim Y \leq n-2$. נניח בשלילה ש- $\dim Y \leq n-2$. הצורה של φ היא $\varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^n$. שלם מעל A ואפילו נמצא בהרחבת שדות סופי של $\text{Frac} A$. נקח $H(T)$ להיות הפולינום המינימלי של g מעל $\text{Frac} A$.

עובדה 350: בעצם $H(T) \in A[T]$ כי g שלם מעל A .

$$\begin{array}{ccc} A[T] = k[t_1, \dots, t_n, T] & & \\ \downarrow T=0 & \searrow \phi^* & \\ A = k[t_1, \dots, t_n] & \xrightarrow{\varphi^*} & k[X] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n+1} & & \\ \uparrow \phi(x)=(\varphi(x), g(x)) & \swarrow & \\ \mathbb{A}^n & \xleftarrow{\varphi} & X \end{array}$$

זאת שכן:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{A}^{n+1} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & k \end{array}$$

מתקיים $\phi(X) \subseteq Z_{\mathbb{A}^{n+1}}(H) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. $\dim Z_{\mathbb{A}^{n+1}}(H) = n+1-1 = n$. זאת כי מדובר בקבוצה אי-פריקה כי H פולינום מינימלי של g ולכן לא ניתן לפרק אותו. ממשפט העלייה ("going up") $\phi(X)$ תת-קבוצה סגורה ממימד $\dim X = n$ (כי זאת תמונה של X , כל שרשרת שיושבת בתוך X יושבת בתוך $k[X]$). כיוון ש- $\phi(X) \subseteq Z(H)$ ושניהם סגורים, אי-פריקים

ומאותו מימד, יש שוויון (הוכח בתרגיל הבית). לכן ההעתקה $\phi : X \rightarrow \mathbb{A}^{n+1}$ מתפקטרת במלואה דרך $Z(H)$, וזו העתקה על. נסתכל כעת על $\{g = 0\} \subseteq X$. מתקיים

$$\{g = 0\} = \phi^{-1}(\{T = 0\}) = \phi^{-1}(\{T = 0\} \cap \{H = 0\}) \stackrel{H = \sum_{i=0}^r a_i T^i}{=} \phi^{-1}(\{a_0 = 0\})$$

מאותו טיעון כמו קודם, היות ש- φ^* סופית, אזי $\dim\{g = 0\} = \dim\{a_0 = 0\}$, אבל הנחנו ש- $\dim\{g = 0\} \leq n - 2$ ולכן $\dim\{a_0 = 0\} = 0$, כי זו קבוצה שמגדירה את המרחב, ולכן $a_0 \in k^\times$. לכן $H(g) = 0$ ועל ידי הצבה נקבל $\sum_{i=0}^r a_i g^i = 0$ ולכן נוכל לכתוב $\frac{1}{g} = \frac{-1}{a_0} \sum_{i=1}^r a_i g^i \in k[X]$ ולכן g הפיכה ולכן לא מתאפסת וסיימנו. ■

מסקנה 351: 1. תהי X יריעה אפינית ממימד n , $Y \subseteq X$ תת-יריעה אי-פריקה ממימד m , אזי קיימות פונקציות גולריות על $X - f_1, \dots, f_r$ עם $r = n - m$ כך ש- Y היא רכיב אי-פריקות של $Z_X(f_1, \dots, f_r)$.

2. $\varphi : Y \rightarrow X$ מורפיזם בין יריעות אי-פריקות, $x \in X$, אזי כל רכיב אי-פריקות של רכיב $\varphi^{-1}(x)$ הוא ממימד $\dim Y - \dim X$ לפחות.

הוכחה:

1. נסמן $W = X \setminus Y$, זו תת-קבוצה פתוחה במרחב אפיני שהוא בפרט נתרי ולכן יש פירוק לרכיבי אי-פריקות $W = \bigcup_{i=1}^d W_i$. נבחר לכל i נקודה $w_i \in W_i \setminus W_j$ לכל $j \neq i$, כמו בהוכחה קודם. נגדיר

$$Y_i = Y \cup \{w_1, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_d\} = Y \cup \{w_1, \dots, w_d\} \setminus \{w_i\}$$

כאשר $\hat{w}_i$ מדגיש ש- w_i אינו איבר בקבוצה). לכן $I(Y_i) \neq 0$ ולכן קיים בו $h_i \in I(Y_i)$ וניתן לבחור את h_i כך ש- $h_i(w_i) \neq 0$. אפשר להניח כי $h_i(w_i) = 1$ ו- $h_i|_{Y_i} = 0$. ניקח $f = \sum_i h_i \in k[X]$, היא מקיימת $f|_Y = 0$ ולכל רכיב אי-פריקות w_i של $W = X \setminus Y$ $f|_{w_i} \neq 0$. לכן $Y \subseteq Z_X(f)$, וממשפט האידיאל הראשי של קרול, כל רכיב אי-פריקות של $Z_X(f)$ הוא ממימד $n - 1$. Y סגורה ואי-פריקה ולכן מוכלת באיזה רכיב אי-פריקות של $Z_X(f)$, ולכן ישנו X' אפיני ואי-פריקה. Y סגורה ואי-פריקה ב- X' עם מימדים

$$\dim Y = m \leq \dim X' = n - 1$$

לכן באינדוקציה יש $g_1, \dots, g_{r-1} \in k[X]$ כך ש- Y רכיב אי-פריקות של $Z_{X'}(g_1, \dots, g_{r-1})$. כמו כן $f \in I(X')$ ו- $k[X'] = k[X]/I(X')$ נבחר $\tilde{g}_i \in k[X]$ נציגים של g_i ומתקיים $Y \subseteq Z_{X'}(g_1, \dots, g_{r-1}) \subseteq Z_X(f, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{r-1})$ הוא רכיב אי-פריקות של הגורם באגף הימני.

2. יש לנו $x \in X$ ו- $\varphi^{-1}(x) \subseteq Y$ ו- $\varphi : Y \rightarrow X$ מורפיזם בין יריעות אי-פריקות. פתוחות אפיניות $x \in U \subseteq X$ ולכן מספיק להראות עבור X אפינית ואי-פריקה. נסמן $n = \dim X$. נראה שהמימד של נקודה הוא 0. לפי הסעיף הקודם, יש $f_1, \dots, f_n \in k[X]$ כך ש- $\{x\}$ רכיב אי-פריקות של $Z_X(f_1, \dots, f_n)$.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ \varphi^{-1}(Z_x(f_1, \dots, f_n)) & \longrightarrow & Z_x(f_1, \dots, f_n) \end{array}$$

לכן $\dim Z_Y(\varphi^* f_1, \dots, \varphi^* f_n) \geq \dim Y - n = \dim Y - \dim X$. יהי V רכיב אי-פריקות של $\varphi^{-1}(x)$. V סגורה ואי-פריקה בתוך $\varphi^{-1}(Z_x(f_1, \dots, f_n))$ ולכן מוכלת ברכיב אי-פריקות של $\varphi^{-1}(Z_x(f_1, \dots, f_n))$ ונסמנו W . נפעיל את φ ונקבל

$$\{x\} = \varphi(V) \subseteq \varphi(W) \subseteq Z_x(f_1, \dots, f_n)$$

נשים לב ש- $\varphi(W)$ אי-פריק כי

תרגיל 352: תמונה רציפה של אי-פריק הוא אי-פריק.

אבל $\{x\}$ בעצמו רכיב אי-פריקות, לכן $\varphi(W) = \{x\}$ ולכן $W \subseteq \varphi^{-1}(X)$ ולכן $V = W$.

■

8.2 החרוט מעל יריעה פרויקטיבית

הערה 353: זה תרגיל 2.10 בהארטשורן.

תהא $\emptyset \neq Y \subseteq \mathbb{P}^n$ יריעה פרויקטיבית.

הגדרה 354: נזכר בבנייה של המרחב הפרויקטיבי, שם יש לנו העתקת מנה $\theta: \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0, \dots, 0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$. נגדיר את החרוט מעל Y להיות $C(Y) = \theta^{-1}(Y) \cup \{0, \dots, 0\}$.

טענה 355: $I(Y) = I(C(Y))$.

הוכחה: היות ש- Y יריעה, אזי קיים a אידיאל הומוגני ב- $S = k[t_0, \dots, t_n]$ רדיקלי כך ש- $Y = Z_{\mathbb{P}^n}(a)$. עבור $\bar{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \theta^{-1}(Y)$ ו- $f \in I(Y)$ הומוגני לפי הגדרה של $I_{\mathbb{P}^n}(Y)$. בנוסף, $f(0, \dots, 0) = 0$ כי f הומוגני. לכן לכל $f \in I(Y)$ מתקיים $f|_{C(Y)} = 0$. מצד אחד, $I(Y) \subseteq I(C(Y))$. מצד שני, עבור $f \in I(C(Y))$ ו- $\bar{a} \neq (0, \dots, 0) \in C(Y)$ ו- $f \in I(C(Y))$ מתקיים $t \cdot a \in C(Y)$ לכן גם $f(t \cdot a) = 0$. בנוסף, $f((0, \dots, 0)) = 0$ ולכן אין גורמים חופשיים. עבור $f = \sum_{i=1}^d f_i$ הומוגני מדרגה i .

$$f(t \cdot a) = \sum_{i=1}^d f_i(t \cdot a) = \sum_{i=1}^d t^i f_i(a) = 0$$

נגדיר $F = \sum_{i=1}^d T^i f_i \in S[T]$, הפולינום המתאפס בכל נקודה (a, t) כאשר $0 \neq a \in C(Y)$ ו- $t \in k^\times$, לכן F פולינום האפס, ולכן $T^i f_i = 0$ לכל i ולכן $f_i \in I(C(Y))$ ולכן גם $f_i \in I(Y)$. הומוגני. יתר על כן, $f_i \in I_{\mathbb{P}^n}(Y)$ וקיבלנו כי $I(C(Y)) \subseteq I(Y)$. לכן קיבלנו שיוויון.

■

מסקנה 356: Y אי-פריק אם ורק אם $C(Y)$.

8.3 הטלה מנקודה

הערה 357: זה תרגיל 3.14 בהארטשורן.

$H \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ על-מישור. $\mathbb{P}^n \cong Z_{\mathbb{P}^{n+1}}(\sum_{i=0}^{n+1} a_i t_i = f)$ ונבחר נקודה $P \in \mathbb{P}^{n+1} \setminus H$. נגדיר העתקה $\pi : \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{P\} \rightarrow H$ על ידי $\pi(Q)$ נקודת החיתוך היחידה של הישר PQ עם H . אפשר להניח ש- $H = Z(t_0)$, על ידי החלפת קואורדינטות, בהנחה ש- t_0 מופיע ב- f ונקבל את $P = [1; 0; \dots; 0]$.

9 תרגול רביעי

9.1 הטלה מנקודה

נמשיך את פרק זה מהתרגול הקודם. ראינו שעבור נקודה $P \in \mathbb{P}^{n+1}$ ועל-מישור $H \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ $P \notin H$, אזי ניתן להגדיר מורפיזם $\pi : \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{P\} \rightarrow H$. לאחר שינוי קואורדינטות ניתן להניח ש- $P = (1 : 0 : \dots : 0)$ ו- $H = \{t_0 = 0\}$. נסתכל על $Y \subseteq \mathbb{A}^3$ ה- twisted cubic , שהיא $\{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\}$. ניתן לכתוב

$$Y = Z(x^2 - y, xy - z)$$

ונזהה את $\mathbb{A}^3$ עם

$$\{w = 1\} = U_0 \subseteq \mathbb{P}^3 = [w : x : y : z]$$

כעת, נסתכל על הסגור הפרויקטיבי של Y והוא

$$\bar{Y} = Z_{\mathbb{P}^3}(\beta(I))$$

נשים לב שההעתקה β לא משמרת חיבור (אבל כן כפל), כי בשל הדרגות ייתכן שהחיבור לא ישתמר (בדוק!). לכן, לא ניתן להפעיל את β על יוצרים ולקבל יוצרים של האידיאל החדש. נבצע הומוגניזציה ונקבל:

$$\bar{Y} = Z_{\mathbb{P}^3}(wy - x^2, wy - zw, xz - y^2)$$

כעת, עבור $P = [0 : 0 : 1 : 0]$ ו- $H = \{y = 0\}$ נקבל

$$\pi(\bar{Y}) = \{[s^3 : s^2t : 0 : t^3]\} \cong \{[s^3 : s^2t : t^3]\}$$

ולמעשה קיבלנו עקום המוגדר על ידי המשוואה $x^3 = w^3$ הקרוי Cuspidal Cubic.

9.2 שיכון ה-d-uple

נבחר $0 < n, d \in \mathbb{N}$ ונסמן $N = \binom{n+d}{d} - 1$. נגדיר את השיכון $\rho_{n,d} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$. נסמן $\Gamma = \{I = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \sum i_j = d\}$ זו קבוצה בגודל N . נגדיר חיבור עבור $I = (i_0, \dots, i_n)$, $J = (j_0, \dots, j_n)$, אזי החיבור יהיה החיבור איבר-איבר $I + J = (i_0 + j_0, \dots, i_n + j_n)$. נזהה את $\mathbb{P}^n$ עם $S = k[t_0, \dots, t_n]$. נסמן $t^I = \prod_{j=0}^n t_j^{i_j}$. לכל $a = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n$ ונסמן $a^I = t^I(a) = \prod_{j=0}^n a_j^{i_j}$. כעת נוכל סוף-סוף להגדיר את ρ — $\rho(a) = [\dots : a^I : \dots]_{I \in \Gamma}$ (קואורדינטות).

דוגמה 358: עבור $n = 1$ ו- $d = 3$, $\rho_{1,3} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$, על ידי $\rho_{1,3}([s : t]) = [s^3 : s^2t : st^2 : t^3]$.

כעת, בהינתן n, d כלשהם, נגדיר $S = k[t_0, \dots, t_n]$ ו- $R = k[\{Z_I\}_{I \in \Gamma}]$ ($N + 1$ משתנים). נגדיר $\theta : R \rightarrow S$ $\theta(Z_I) = \prod_{j=0}^n t_j^{i_j}$. נסמן $\mathfrak{a} = \ker \theta$, ומראשוניות האידיאל מתקיים $R/\mathfrak{a} = \text{Im} \theta \subseteq S$. $\mathfrak{a}$ אידיאל הומוגני, ולכן ניתן לכתוב $f \in \mathfrak{a} = \ker \theta$ על ידי $f = \sum f_i$ כאשר f_i הומוגני ממעלה i . אבל נזכור שהוא גם בגרעין, ולכן

$$0 = \theta(f) = \sum \theta(f_i) \Rightarrow \forall_{i \in \mathbb{N}} \theta(f_i) = 0$$

עכשיו עבור $f \in \mathfrak{a}$ ו- $a \in \mathbb{P}^n$:

$$0 = \theta(f) = f(t^I) \Rightarrow \forall_{i \in \mathbb{N}} f(a^I) = 0 \Rightarrow \forall_{i \in \mathbb{N}} f(\rho(a)) = 0$$

ולכן $\rho(\mathbb{P}^n) \subseteq Z(\mathfrak{a})$. נרצה להראות שיש שוויון.

נגדיר אידיאל $\mathfrak{b} = (Z_i Z_j - Z_k Z_l \mid I + J - K + L)$. $\mathfrak{b}$ הוא מוגדר על ידי פולינומים הומוגניים ממעלה 2, לכן $\mathfrak{b}$ אידיאל הומוגני. נקח יוצר נפעיל עליו את θ ונקבל

$$\theta(Z_I Z_J - Z_K Z_L) = t^I \cdot t^J - t^K \cdot t^L = t^{I+J} - t^{K+L} = 0$$

ומכאן $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ ולכן $\rho(\mathbb{P}^n) \subseteq Z(\mathfrak{a}) \subseteq Z(\mathfrak{b})$. נסמן $W = Z_{\mathbb{P}^N}(\mathfrak{b})$, $U_i = \{t_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$ ו-

$V_i = \{Z_{I_i} \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^N$ כאשר $I_i = \left(0, \dots, \underbrace{\quad}_{i\text{th coordinate}}, \dots, 0 \right)$ הוא מולטי-אינדקס

טהור. נראה ש- $W \subseteq \bigcup_{i=0}^n V_i$. נסתכל על $b = [\dots : b_I : \dots] \in W$. נניח בשלילה ש- $b_{I_i} = 0$ לכל i , $b \in \mathbb{P}^N$ גורר שיש מולטי-אינדקס I כך ש- $b_I \neq 0$ כאשר $I = (i_0, \dots, i_n)$, ולכן בהכרח יש איזשהו $i_j \neq 0$. בה"כ $i_0 \neq 0$. נסתכל על קבוצת כל המולטי-אינדקסים שהרכיב הראשון שלהם הוא לא 0 — $\{I = (i_0, \dots, i_n) \mid b_I \neq 0 \wedge i_0 \neq 0\}$, היות שהכול סופי, אזי יש $\tilde{I}$ כך ש- i_0 מקסימלי מבין כולם. כלומר, לכל $J = (j_0, \dots, j_n)$ כך ש- $j_0 > i_0$ מתקיים $b_J = 0$. לפי ההנחה, $0 < \tilde{i}_0 < d$ ולכן יש עוד אינדקס $\tilde{I}$ ובה"כ $\tilde{i}_1 \neq 0$, סה"כ, קיבלנו ש-

$$\tilde{I} = \left(\underbrace{\quad}_{0 < \tilde{i}_0 < d \text{ and is maximal}}, \underbrace{\tilde{i}_1}_{>0}, \dots \right)$$

ולכן מתקיים

$$Z_{\tilde{I}}^2 - Z_{\tilde{i}_0+1, \tilde{i}_1-1, \dots} \cdot Z_{\tilde{i}_0-0, \tilde{i}_1+1, \dots} \in \mathfrak{b}$$

ולכן $b_{\tilde{I}}^2 \neq 0$ אבל קיבלנו פה ש- $\tilde{i}_0 > i_0 + 1$ בסתירה לבחירת $\tilde{I}$ כמקסימלי. לכן יש מולטי-אינדקס מהצורה $I_i = (0, \dots, 0, d, 0, \dots, 0)$ כך $b_{I_i} \neq 0$. לכן $b \in V_i$, $W \subseteq \bigcup_{i=0}^n V_i \subseteq \mathbb{P}^N$, קיבלנו אם כן ש

$$\rho^{-1}(V_i) = \rho^{-1}(\{a^{I_i} \neq 0\}) = \{a_i^d \neq 0\} \{a_i \neq 0\} = U_i$$

לכן, אם נזהה את $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$ עם $\mathbb{A}^n$ ואת $V_i \subseteq \mathbb{P}^N$ עם $\mathbb{A}^N$ (יש איזומורפיזם), אזי $\rho|_{U_i} \left(\left(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0} \right) \right) = \left(\dots, \frac{a^I}{a_0^d}, \dots \right)$ ומתקיים:

$$\frac{a^I}{a_0^d} = \frac{1}{a_0^d} \cdot \prod_{j=0}^n a_j^{i_j} = \frac{1}{a_0^d} a_0^{\sum_{j=0}^n i_j} \cdot \prod_{j=0}^n \left(\frac{a_{i_j}}{a_0} \right)^{i_j}$$

ולכן

$$\rho|_{\mathbb{A}^n} \left(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0} \right) = \left(\dots, \left(\frac{a_{ij}}{a_0} \right)^{i_j}, \dots \right)$$

זוה מורפיזם.

נגדיר מורפיזם $W \rightarrow \mathbb{P}^n$, כאשר נזכור ש- $W = \bigcup_{i=0}^n V_i$, זה ישרה מורפיזם $W \cap V_0 \rightarrow U_0$, כאשר $V_0 \rightarrow U_0$ נגדיר $\tau_0(b) = \left\{ \frac{Z_i}{Z_{I_0}} \cdot \frac{Z_j}{Z_{I_0}} - \frac{Z_k}{Z_{I_0}} \cdot \frac{Z_L}{Z_{I_0}} \mid I + J = K + L \right\}$. באופן דומה נגדיר מורפיזמים $\tau_i : W \cap V_i \rightarrow U_i \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. כל אחד מהם הוא מורפיזם. נשאר לבדוק שהם מסכימים על חיתוכים. חישוב פשוט מראה שזה מתקיים.

9.3 שימוש לשיכון

הגדרה 359: $H \subseteq \mathbb{P}^n$ על-משטח מדרגה d אם $H = Z(f)$ כאשר $f \in S$ הומוגני מדרגה d .

טענה 360: $\mathbb{P}^n \setminus H$ אפינית.

הוכחה: נכתוב $f = \sum a_I t^I$ כאשר I מולטי-אינדקס כמו קודם, ונקח את $\rho_{n,d}$ ונקבל מהשיכון:

$$\mathbb{P}^n \setminus H \cong \rho(\mathbb{P}^n \setminus H) = W \setminus \rho(H)$$

אבל היות ש- $H = Z_{\mathbb{P}^n}(\sum a_I t^I)$ שמתקיים

$$\rho(H) = Z_{\mathbb{P}^N} \left(\sum a_I \theta^{-1}(t^I) \right) \cap W = Z_{\mathbb{P}^N} \left(\sum a_I Z_I \right) \cap W$$

ועל ידי החלפת קואורדינטות ב- $\mathbb{P}^N$ אפשר לקבל שהפולינום הליניארי באגף ימין הוא מונום. סה"כ קיבלנו

$$\mathbb{P}^n \setminus H \xrightarrow{\ell} (\mathbb{P}^N \setminus Z_{\mathbb{P}^N}(Z_I)) \cap \cong W' \subseteq \mathbb{A}^N$$

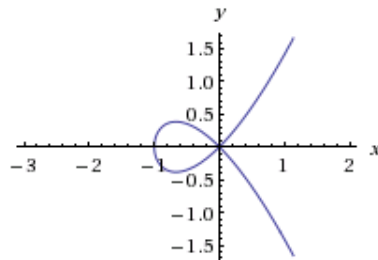
כאשר W' סגור ולכן יריעה אפינית.

■

10 תרגול חמישי

10.1 Blow-up בנקודה

טוב כדי לקבל מורפיזם בירציונלי בנקודה, או להתרת סינגולריות. נסתכל על העקום הבא עם סינגולריות בראשית



רואים שיש סינגולריות על ידי גזירה או על ידי הסתכלות שיש חיתוך של העקום עם עצמו. מה נעשה? במקום להסתכל על העקום, נסתכל עליו כמסילה בפרמטריזציה $\gamma(t)$, כעת אנחנו עוברים בנקודה הבעייתית בשני זמנים שונים. במקום הראשית נכניס את $\mathbb{P}^1$, וכך ביציאה ובכניסה יהיו נקודות שונות.

וכעת, באופן פורמלי. נסתכל על $\mathbb{A}^n$ ועל סינגולריות בראשית $(0, \dots, 0)$ (תמיד אפשרי על ידי הזהה). נסתכל על $\underbrace{\mathbb{A}^n}_{x_1, \dots, x_n} \times \underbrace{\mathbb{P}^{n-1}}_{y_1, \dots, y_n}$, זו יריעה קוואזי-פרויקטיבית (כי כל יריעה היא

כזו. אבל גם כי $\mathbb{A}^n$ משוכנת בתוך $\mathbb{P}^{n-1}$, ועל ידי מכפלה של יריעות נקבל את הנדרש). נסמן

$$X = Z\left(\{x_i y_j - x_j y_i\}_{i,j}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \\ \downarrow \text{projection} \end{array}$$

$$\text{BL}_0 \mathbb{A}^n = X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^n$$

מהו X ? עבור $P \in \mathbb{A}^n$ כאשר $0 \neq P = (a_1, \dots, a_n)$. מתקיים $\varphi^{-1}(P) = \{P \times [y_1, \dots, y_n]\}$ וה- y_i צריכים לקיים $a_i y_j = a_j y_i$, לכן אפשר להגיד ש- $y_j = \frac{a_j}{a_i} y_i$ (כאשר ניתן להניח ש- $a_i \neq 0$ כלשהי, שכן $P \neq 0$). היות שמדובר בקואורדינטות פרויקטיביות הומוגניות, אזי הגדרה בכפלה מגדירה ביחידות. לכן $\varphi^{-1}(P) = (a_1, \dots, a_n) \times \left[\frac{a_1}{a_i} : \dots : \frac{a_n}{a_i}\right]$. לכן לכל נקודה שאינה הראשית יש בדיוק מקור אחד. לכן, $X \setminus \varphi^{-1}((0, \dots, 0)) \cong \mathbb{A}^n \setminus (0, \dots, 0)$ (זה הומיאומורפיזם). הוכחנו חד-חד-ערכיות ועל ורציפות, ועתה גם נגדיר הפכית). נסמן $\psi : \mathbb{A}^n \setminus (0, \dots, 0) \rightarrow X \setminus \varphi^{-1}((0, \dots, 0))$ על ידי $\psi(P) = P \times P$. לכן איזומורפיזם של יריעות, שכן שניהם מורפיזמים. נשים לב בנוסף, ש- $\mathbb{A}^n \setminus (0, \dots, 0)$ ו- $X \setminus \varphi^{-1}((0, \dots, 0))$ פתוחות (מחסירים מהן קבוצות סגורות, שכן φ מורפיזם והראשית סגורה בנקודה), אזי זה איזומורפיזם של קבוצות פתוחות ולכן φ בירציונלי.

מהו $\varphi^{-1}((0, \dots, 0))$? לא נוכל להשתמש בשיטה הקודמת, שכן המשוואות מתנוונות זהותית, ולכן נקבל $\varphi^{-1}((0, \dots, 0)) = \{(0, \dots, 0)\} \times \mathbb{P}^{n-1} \cong \mathbb{P}^{n-1}$.

יהי $L \subseteq \mathbb{A}^n$ ישר שעובר דרך הראשי. נקח פרמטריזציה, אזי $L = \{tP \mid 0 \neq P \in L\}$. נסמן $L' = \varphi^{-1}(L \setminus (0, \dots, 0))$, ומתקיים מהחישוב קודם $L' = \{(ta_1, \dots, ta_n) \times [ta_1 : \dots : ta_n]\} = \{(ta_1, \dots, ta_n) \times [a_1 : \dots : a_n]\}$ נרצה לשאול אם כן מהו $\bar{L}$, בהתבוננות קצרה נקבל $\bar{L} = \{(ta_1, \dots, ta_n) \times [a_1 : \dots : a_n] \mid t \in k\}$ ולכן $\bar{L} \cap \varphi^{-1}((0, \dots, 0)) = (0, \dots, 0) \times [a_1 : \dots : a_n]$.

נסמן $E = \varphi^{-1}((0, \dots, 0))$. $\mathbb{A}^n$ אי-פריק ו- $\mathbb{A}^n \setminus (0, \dots, 0)$ אי-פריקה (כפתוחה צפופה באי-פריקה), אבל זה איזומורפי ל- $X \setminus E$ ולכן אף הוא אי-פריק. מתקיים

$$E \subseteq \overline{X \setminus E} \subseteq X$$

לכן X אי-פריק, שכן $\overline{X \setminus E} = X$.

תהי $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ תת-יריעה סגורה, אזי $\tilde{Y} = \overline{\varphi^{-1}(Y \setminus (0, \dots, 0))} \subseteq X$ זה יהיה ה- $\text{BL}_0 Y$ או ה- Strict Transform של Y ב- X . זה בניגוד ל- Total Transform שהוא $\varphi^{-1}(Y)$, שאותו קל יותר לחשב אך הוא פחות מעניין אותנו.

10.2 דוגמאות

דוגמה 361: $Y = Z(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}^2$. האיור מהפרק הקודם הוא האיור המתאים ליריעה הזו. $U_0 = \varphi^{-1}((0, \dots, 0))$ ו- $\underbrace{\mathbb{A}^2}_{x,y} \times \underbrace{\mathbb{P}^1}_{t,u} \supseteq X = \text{BL}_0 \mathbb{A}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^2$. נסמן U_0

$\mathbb{A}^2 \times \{t \neq 0\}$ ו- $U_1 = \mathbb{A}^2 \times \{u \neq 0\}$, והם מכסים את X , וכל אחד מהם איזומורפי ל- $\mathbb{A}^3$. מהו $\tilde{Y}$? כזכור, $\tilde{Y} = \varphi^{-1}(Y \setminus (0, \dots, 0)) \subseteq \varphi^{-1}(Y)$. נחשב

$$\varphi^{-1}(Y) = Z_X(y^2 - x^2 - x^3, xu - yt) \subseteq X$$

ב- U_0 מתקיים $t = 1$ ולכן נשארנו עם המשוואות $y^2 - x^2 - x^3 = 0$ ו- $xu = y$. נציב ונקבל $x^2 = 0$ נציב $u^2 - 1 - x = 0$ או $x^2 = 0$, שמפצל ל- $x^2 u^2 - x^2 - x^3 = x^2(u^2 - 1 - x) = 0$ במשוואה הראשונה ונקבל $y = 0$. סה"כ קיבלנו את $\{(0, 0) \times [1 : u]\}$ והסגור של זה הוא E . נסתכל אם כן על $u^2 - 1 - x = 0$ ו- $xu = y$ עבור $x = y = 0$ מתקבל $u = \pm 1$ וזה נותן $\{(0, 0) \times [1 : \pm 1]\}$. באופן דומה, עבור U_1 נקבל על ידי משוואה אחת את E והמשוואה השנייה תיתן את אותן נקודות.

$$\tilde{Y} = \{Y \setminus (0, \dots, 0)\} \cup \{(0, 0) \times [1 : \pm 1]\}$$

והנקודות בצד ימין אלו בדיוק נקודות החיתוך של הישר עם הראשית.

הגדרה 362: $Y \subseteq \mathbb{A}^2$ עקום. הווה אומר, $Y = Z(f)$ ו- $f \in k[x, y]$. עבור נקודה $(a, b) \in \mathbb{A}^2$, נבצע החלפת משתנים, כך ש- $x \mapsto x - a$ ו- $y \mapsto y - b$ והנקודה שלנו היא בראשית. $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$ כאשר f_i הומוגני ממעלה i . נגדיר $\mu_P(Y) = \min\{r \mid f_r \neq 0\}$ הריבוי של P ב- Y .

$$\mu_P(Y) = 0 \text{ אם ורק אם } f_0 \neq 0 \text{ אם ורק אם } P \notin Y$$

טענה 363: $P \in Y$ ו- P לא סינגולרית ב- Y אם ורק אם $\mu_P(Y) = 1$.

הוכחה: נניח $\mu_P(Y) = 1$ ובה"כ $P = (0, 0)$. $J = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$. מהומוגניות, $f_1 = \alpha x + \beta y$. לכן $\frac{\partial f}{\partial x}|_P = \frac{\partial f_1}{\partial x}$ ובאופן דומה $\frac{\partial f}{\partial y}|_P = \frac{\partial f_1}{\partial y}$. היות ש- $f_1 \neq 0$ אזי $\alpha \neq 0$ או $\beta \neq 0$. לכן,

$$\text{rank} J(P) = 1 = \dim \mathbb{A}^2 - \dim Y = 2 - 1$$

ולכן P לא סינגולרית.

■

הכיוון השני הוא בדיוק הכיוון ההפוך.

הגדרה 364: נניח $P \in Y = Z(f)$, $\mu_P(Y) = r$. אזי ניתן לכתוב $f_r = \prod_{i=1}^r g_i$ כאשר g_i ליניארי. לכל כזה קוראים **כיוון משיק של Y בנקודה P** .

דוגמה 365: עבור $Y = Z(y^2 - x^2 - x^3)$, אזי $f = \underbrace{y^2 - x^2}_{f_2} - \underbrace{x^3}_{f_3}$, $P = (0, 0)$. אזי $\mu_P(Y) = 2$ ו- $f_2 = (y - x)(y + x)$.

הגדרה 366: $P \in Y$ נקראת **node** אם $\mu_P(Y) = 2$ ויש שני כיוונים משיקים שונים, בדומה לדוגמה.

טענה 367: במקרה של node, על ידי Blow-up ניתן להסיר את הסינגולריות.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות, $P = (0, 0)$, וגם $f = f_2 + f_3 + \dots + f_d$ כך ש- $f_2 = g_1 \cdot g_2$ ו- $g_1 \neq g_2$. גורמים ליניארים שונים. על ידי החלפת קואורדינטות ניתן לקבל $g_1 = x$ ו- $g_2 = y$. לכן $f = x \cdot y + f_3 + \dots + f_d \in k[x, y]$ ונסמן $h = f_3 + \dots + f_d$ כל הגורמים ממעלה לפחות 3.

נבצע blow-up. $\varphi: \mathbb{A}^2 \rightarrow \text{BL}_0(\mathbb{A}^2)$, $X = \varphi^{-1}((0, 0))$, $E = \varphi^{-1}((0, 0))$.

$$\varphi^{-1}(Y) = Z(xy + h(x, y) = 0, xu - yt = 0)$$

ב- $U_0 = \mathbb{A}^2 \times \{t = 1\}$ מתקיים על ידי הצבה $x^2u + h(x, xu) = 0$. ניתן להוציא גורם x^3 מ- h ונקבל $x^2u + x^3 \cdot \tilde{h}(x, u) = 0$. נוציא גורם משותף x^2 החוצה ונקבל $x^2(u + x\tilde{h}(x, u)) = 0$. $x^2 = 0$ נותן לנו את E . הרכיב שאנחנו מחפשים הוא $u + x \cdot \tilde{h}(x, u) = 0$ אם $x = y = 0$ אזי $u = 0$ ונקבל את הנקודה $(0, 0) \times [1 : 0]$.

$$\tilde{Y} = Y \setminus (0, 0) \cup \left\{ \underbrace{(0, 0) \times [1 : 0]}_{Q_1}, \underbrace{(0, 0) \times [0 : 1]}_{Q_2} \right\}$$

נראה ש- Q_1, Q_2 לא סינגולריות. $Q_1 \in U_0$ ולכן $xy + h(x, y)$ ו- $xu - yt$ הן המשוואות המגדירות. נחשב את היעקוביאן.

$$J = \begin{pmatrix} u & -t & -y & x \\ y + \frac{\partial h}{\partial x} & x + \frac{\partial h}{\partial y} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חישוב של $J(Q_1)$ ייתן לנו

$$J(Q_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו ש- $\text{rank } J(Q_1) = 1 = \dim X - \dim Y$ ולכן היא לא נקודה סינגולרית. באותו אופן גם Q_2 . ■

10.3 tacnode

$Y = Z(x^2 - x^4 - y^4)$. נחקור את $\mu_0(Y)$, החזקה הגבוהה ביותר היא 2 ולכן 2. נבצע blow-up בראשית.

$$\varphi^{-1}(Y) = \{x^2 - x^4 - y^4 = 0, xu - yt = 0\}$$

ב- $U_0 = \mathbb{A}^2 \times \{t = 1\}$ ולכן נציב שם ונקבל $x^2(1 - x^2 - y^4) = 0$, החלק $x^2 = 0$ נותן לנו את E . החלק השני נותן לנו $x^2(1 - x^2 - y^4) = 1$, לכן $x \neq 0$. מכאן, $\tilde{Y} \cap U_0 \cap E = \emptyset$. $u = 1$ ונציב כמו קודם ונקבל $y^2t^2 - y^4t^4 - y^4 = 0$ ואז $y^2(t^2 - y^2t^4 - y^2) = 0$. $y^2 = 0$ נותן לנו את E . החלק השני נותן לנו את $t^2 - y^2t^4 - y^2 = 0$. אם נציב $y = 0$ נקבל $t = 0$ ולכן $\tilde{Y} \cap E \cap U_1 = \{(0, 0) \times [0 : 1]\}$. נמשיך לעבוד ב- U_1 . $\tilde{Y} \cap U_1 = Z_{U_1}\{t^2 - y^2t^4 - y^2\}$ ונכתוב $f = \underbrace{t^2 - y^2}_{f_2} - \underbrace{y^2t^4}_{f_6}$ ו- $f_2 = (t - y)(t + Y)$. לכן $\mu_Q(\tilde{Y}) = 2$ ואנחנו שוב במצב של node

עם שני כיוונים משיקים שונים. לכן אם נעשה שוב blow-up, נתיר את הסינגולריות.

10.4 cups

$\varphi^{-1}(Y) =$ עם כיוון משיק אחד. $\mu_{(0,0)}(Y) = 2$ ולכן $f = y^2 - x^3$ ו- $Y = \{y^2 = x^3\} \subseteq \mathbb{A}^2$
 $\{y^2 = x^3, xu = yt\}$. ב- U_0 $t = 1$ ושוב נציב ונקבל $x^2(u^2 - x) = 0$, $x^2 = 0$ נותן לנו את E ,
 ולכן $u^2 - x = 0$ נותן לנו את $(0, 0) \times [1 : 0]$.

$$J = \begin{pmatrix} u & -t & -y & x \\ 3x^2 & 2y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $\text{rank} J(Q) = 1$. ולכן נקודה רגולרית.

10.5 סיכום

עבור $Y \subseteq \mathbb{A}^2$ כל נקודה סינגולרית ניתנת להתרה על ידי מספר סופי של blow-up.

11 תרגול שישי

11.1 אלומות

X מרחב-טופולוגי, קדם אלומה $\mathcal{F}$ על X היא פונקטור $\mathcal{F} : X^\circ \rightarrow \text{Set}, \text{Grp}, \text{Ab}, \text{Rng}$, שלוקח קבוצות פתוחות ומעתיק אותם לאיזושהי קטגוריה. היות שזה פונקטור הוא משמר את העתקת הזהות והרכבות.

קדם אלומה $\mathcal{F}$ היא אלומה אם לכל כיסוי-פתוח $U = \bigcup U_\alpha$, מתקיים שהסדרה הבאה מדויקת

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{\alpha} \mathcal{F}(U_\alpha) \rightarrow \prod_{\alpha, \beta} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

קיים פונקטור האילוס: $a : PSh(X) \rightarrow Sh(X)$.

תזכורת מהתרגילים: אם $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ הומומורפיזם של אלומות, אזי $\ker \varphi$ אלומה, ומתקיים $(\ker \varphi)_p = \ker(\varphi_p)$ (ובאופן דומה עם התמונה). מכאן, נקבל ש- φ איזומורפיזם אם ורק אם לכל $p \in X$ מתקיים ש- φ_p איזומורפיזם.

הגדרה 368: הסדרה

$$\cdots \rightarrow \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \cdots$$

נקראת סדרה מדויקת ב- $\mathcal{F}_n$ אם $\text{Im} \varphi_{n-1} = \ker \varphi_n$.

טענה 369: הסדרה

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

היא מדויקת ב- $\mathcal{F}$ אם ורק אם לכל $p \in X$

$$\mathcal{G}_p \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_p \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}_p$$

מדויקת ב- $\mathcal{F}_p$.

הוכחה: הכיוון הראשון קל. אם הסדרה מדויקת אזי $\text{Im } \varphi = \ker \psi$, ולכן לכל $p \in X$ מתקיים $\text{Im}(\varphi_p) = (\text{Im } \varphi)_p = (\ker \psi)_p = \ker(\psi_p)$. בכיוון השני, עבור $U \subseteq X$ פתוחה, נסתכל על

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{H}(U) \\ & & \downarrow & & \\ & & \mathcal{F}_p & \xrightarrow{\text{Im } \varphi_p \mapsto 0} & \mathcal{H}_p \end{array}$$

ונבצע רדיפת-דיאגרמות. לכל $p \in U$ מוצאים $p \in V_p \subseteq U$ כך ש- $\varphi(s)|_{V_p} \in \ker \psi(V_p)$, אבל $\ker \psi$ אלומה ולכן $\varphi(s) \in \ker \psi(U)$. קיבלנו שקדם האלומה $\{U \rightarrow \text{Im}(\mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U))\}$ משוכנת ב- $\ker \psi$. כיוון שאילום משמר שיכונים, נקבל גם $\text{Im } \varphi \subseteq \ker \psi$. מכאן ממשיכים עם רדיפת דיאגרמות. ■

סעיף 370:

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$$

מדויקת אם ורק אם

$$0 \rightarrow \mathcal{H}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

מדויקת לכל $U \subseteq X$.

הוכחה: הכיוון השני קל. אם מדויקת לכל U , אזי היות שגבול ישר הוא פונקטור מדויק, גם $0 \rightarrow \mathcal{G}_p \rightarrow \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{H}_p$ מדויק לכל p ולכן מדויקת. בכיוון השני, אם מדויקת אזי $\text{Im } \varphi = \ker \psi$. לכן אם $\ker \varphi = 0$ אזי $\ker \varphi(U) = 0$. נשאר להראות שקדם אלומת התמונה היא כבר אלומה. ■

אם X מרחב-טופולוגי, $\mathcal{F}$ אלומה על X ו- $Z \subseteq X$ סגורה, אזי ניתן למשוך לאחור את האלומה לקבוצה הסגורה. בנוסף, ראינו בתרגול שאפשר להרחיב עם 0. פירוש, שיש סדרה-קצרה-מדויק

$$0 \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_{Z^c}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_*(\mathcal{F}|_Z) \rightarrow 0$$

12 תרגול שביעי

12.1 פונקטורים צמודים

הגדרה 371: יהיו $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ קטגוריות. יש לנו פונקטורים $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ו- $L: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. הפונקטורים L, R ייקראו **צמודים** אם לכל אובייקט $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ וכל אובייקט $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ מתקיים

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(L(Y), X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, R(X))$$

וזהו איזומורפיזם של קבוצות. L נקרא **הצמוד משמאל של R** , ו- R נקרא **הצמוד מימין של L** .

דוגמה 372: 1. R חוג-קומוטטיבי. נסתכל על $\mathcal{C} = \mathcal{D} = R\text{-mod}$. עבור M מודול, אפשר להגדיר שני פונקטורים. פונקטור הטנזור $- \otimes M : R\text{-mod} \rightarrow R\text{-mod}$ ופונקטור ההומומורפיזם $\text{Hom}(M, -) : R\text{-mod} \rightarrow R\text{-mod}$. מאלגברה קומוטטיבית אנחנו יודעים שלכל P, N מתקיים

$$\text{Hom}(N \otimes_R M, P) \cong \text{Hom}(N, \text{Hom}(M, P))$$

2. Free-forgetful. יהי k שדה, ו- $\mathcal{C}$ יהיו מרחבים-וקטוריים מעל k . נקח את $\mathcal{D}$ להיות קטגוריית הקבוצות. קיים פונקטור שוכח $U : k\text{-vec} \rightarrow \text{Set}$ ששוכח את כל המבנה של המרחב-הווקטורי. יש לנו פונקטור הפוך, F , שיהיה הבנייה החופשית – עבור קבוצה S מתקיים $F(S) = \bigoplus_{s \in S} k_s$. נגדיר את הפעולה על ההעתקות בצורה $F(\varphi)(e_s) = e_{\varphi(s)}$. הדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & V = U(V) \\ \downarrow \text{ומתקיים} & \exists! \nearrow & \\ F(S) & & \end{array}$$

$$\text{Hom}_{k\text{-vec}}(F(S), V) = \text{Hom}_{\text{Set}}(S, U(V))$$

למעשה, הבנייה הזו תעבוד לא רק על מרחבים-וקטוריים, אלא גם על חבורות, חבורות-אבליות, k -אלגבראות, מודולים מעל חוג וכדומה, כל דבר שיש לו בנייה חופשית.

3. ניזכר באבליזציה. יש לנו שיכון $i : \text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$ ובכיוון השני ישנה האבליזציה ab , חילוק החבורה בתת-חבורות הקומוטטורים שלה: $ab(G) = G/[G, G]$. מהתכונה האוניברסלית של מנה, אנחנו יודעים שבהינתן הומומורפיזם של חבורות, הוא עובר להומומורפיזם של חבורות אבליות. במקרה שלנו מתקיים

$$\text{Hom}_{\text{Ab}}(ab(G), A) = \text{Hom}_{\text{Grp}}(G, i(A))$$

4. נסתכל על אילום עבור X מרחב-טופולוגי, יש לנו את פונקטור השיכון $i : \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Psh}(X)$ ופונקטור האילום $\text{Psh}(X) \rightarrow \text{Sh}(X)$ ומתקיים

$$\text{Hom}_{\text{Sh}(X)}(a(\mathcal{F}), \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_{\text{Psh}(X)}(\mathcal{F}, i(\mathcal{G}))$$

5. עבור $f : X \rightarrow Y$ רציפה, מתקיים $f^{-1} : \text{Sh}(Y) \rightarrow \text{Sh}(X)$ ו- $f_* : \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(Y)$. נטען שמתקיים

$$\text{Hom}_{\text{Sh}(X)}(f^{-1}(\mathcal{G}), \mathcal{F}) \cong \text{Hom}_{\text{Sh}(X)}(\mathcal{G}, f_*(\mathcal{F}))$$

הוכחה: עבור $U \subseteq X$ ו- $V \subseteq Y$ נרצה ש- $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(V)$ נגדיר

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \left\{ \varphi = \{\varphi_{U,V}\} \mid \begin{array}{l} \varphi_{U,V} : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U) \\ U \subseteq X, V \subseteq Y \\ f(U) \subseteq V \\ \text{commute with restrictions} \end{array} \right\}$$

עבור איזשהו U, V כאלה, אזי $U \subseteq f^{-1}(V)$. לכן יש לנו

$$\mathcal{G}(V) \xrightarrow{\varphi_{f^{-1}(V), U}} \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

$$\mathcal{G}'(V) \xrightarrow{\varphi_{f^{-1}(V'), U}} \mathcal{F}(f^{-1}(V')) \longrightarrow \mathcal{F}(U')$$

ולכן

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*(\mathcal{F}))$$

וקיבלנו כיוון אחד. עכשיו נלך בכיוון השני. יש לנו דיאגרמה מתחלפת מהצורה

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \varinjlim_{f(U) \subseteq W} \mathcal{G}(W) & & \end{array}$$

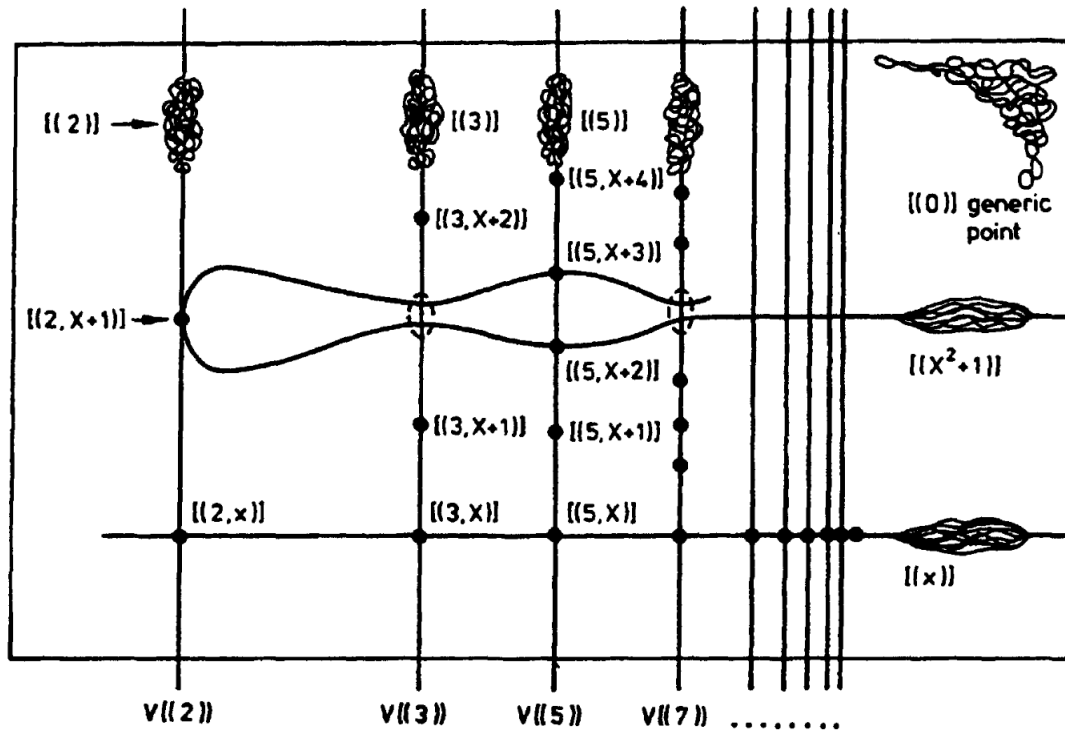
■

וקיבלנו את הכיוון השני.

כדאי לזכור את הסיסמה "צמוד מימין – מדויק משמאל".

12.2 דוגמאות של סכמות

$\mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec} k[x]$. נסתכל על $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}[x]$. ננסה להבין מהו. עבור $q \in \mathrm{Spec} \mathbb{Z}[x]$ אם q ראשי אזי $q = (g)$ עבור g אי-פריק. אם q לא ראשי אזי קיימים $f_1, f_2 \in q$ ללא גורם משותף ב- $\mathbb{Z}[x]$. מהלמה של גאוס, ל- f_1, f_2 אין גורם משותף ב- $\mathbb{Q}[x]$, אבל הוא תחום ראשי, ולכן קיימים $g_1, g_2 \in \mathbb{Q}[x]$ כך ש- $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$. על ידי מכנה משותף, יש $c \in \mathbb{Z}$ כך ש- $cg_1, cg_2 \in \mathbb{Z}[x]$. מכאן, $c = cg_1 f_1 + cg_2 f_2 \in q$. כלומר. $c = cg_1 f_1 + cg_2 f_2 \in q$. והוא ראשוני ב- $\mathbb{Z}$ כי הוא צמצום. לכן, קיים $p \in \mathbb{Z}$ ראשוני כך ש- $q \cap \mathbb{Z} = (p)$. נוכל להסתכל על ההטלה לתוך $\mathbb{Z}/(p)[x]$ והיות שהיא על אזי ההרחבה תשאיר אותנו עם אידיאל ראשוני שאינו אפס, ולכן הוא מהצורה $\pi(g) = \bar{f}$ ולכן $p = (p, f)$ מקסימלי. הקבוצה הזו נראית כך:



12.3 הדבקות

עבור X_1, X_2 סכמות. יהיו $U_i \subseteq X_i$ תת-סכמות פתוחות ו- $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ איזומורפיזם של סכמות. נסתכל על הדבקה הבאה כמרחב-טופולוגי $X = X_1 \amalg_{U_1 \sim U_2} X_2$. זה מגיע עם טופולוגיה, כאשר $i_1 : X_1 \rightarrow X$ ו- $i_2 : X_2 \rightarrow X$, אזי $V \subseteq X$ פתוחה אם ורק אם $V_1 = i_1^{-1}(V) \subseteq X_1$ ו- $V_2 = i_2^{-1}(V) \subseteq X_2$ פתוחות. יש לנו מרחב-טופולוגי, כדי לקבל סכמה נמשיך לאלומה.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(V) &= \mathcal{O}_{X_1}(i_1^{-1}(V)) \times_{\mathcal{O}_U(i_1^{-1}(V) \cap U)} \mathcal{O}_{X_2}(i_2^{-1}(V)) \\ &= \{(s_1, s_2) \mid s_j \in \mathcal{O}_j(i_j^{-1}(V)) \text{ s.t. } \varphi(s_2|_{V_2 \cap U_2}) \cong s_1|_{V_1 \cap U_1}\} \end{aligned}$$

צריך לבדוק שזה אכן מגדיר אלומה. מושאר כתרגיל.

13 תרגול שמיני

13.1 הדבקות

בשבוע שעבר דיברנו על איך מדביקים שתי סכמות לסכמה אחת. נראה עכשיו דוגמה, הישר עם הראשית הכפולה.

דוגמה 373: נקח $X_1 = X_2 = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[x]$. נסמן ב- P את הראשית, קרי, האידיאל (x) , נקודה סגורה. נקח $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{P\}$, הן תת-סכמות פתוחות איזומורפיות. נדביק. $X = X_1 \amalg_{U_1 \sim U_2} X_2$. מה קיבלנו? מבחינת נקודות, ישנן הנקודות $\mathbb{A}^1 \setminus \{P\} \cup \{P_1, P_2\}$. הטופולוגיה כאמור היא שקבוצה היא פתוחה אם המקור שלה פתוח ב- X_1, X_2 . נטען ש- X

אי-פריקה, שכן זה שקול לכך שחיתוך של כל שתי פתוחות הוא לא ריקות, אבל הפתוחות מכילות את הנקודה הגנרית וסיימנו.

הראינו איך מדביקים שתי סכמות, נראה איך מדביקים יותר.

הגדרה 374: יהיו $\{X_i\}_{i \in I}$ משפחה של סכמות $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$. **מידע הדבקה** הוא המידע הבא:

1. לכל $i \in I$, $U_{i,i} = X_i$ פתוחות לכל $j \in I$ יחד עם $U_{i,i}$.
2. לכל $i, j \in I$ יש $\varphi_{i,j} : U_{i,j} \xrightarrow{\sim} U_{j,i}$ איזומורפיזם. כך ש- $\varphi_{j,i}^{-1} = \varphi_{i,j}$ וג $\varphi_{i,i} = Id_{X_i}$.
3. לכל $i, j, k \in I$ מתקיים:

$$\varphi_{i,j}(U_{i,j} \cap U_{i,j}) = U_{j,i} \cap U_{j,k} \quad (\text{א})$$

$$U_{i,j} \cap U_{i,k} \text{ על } \varphi_{i,k} = \varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} \quad (\text{ב})$$

(ג) הדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccc} U_{i,j} \cap U_{i,k} & \xrightarrow{\varphi_{i,j}} & U_{j,i} \cap U_{j,k} \\ & \searrow \varphi_{i,j} & \downarrow \varphi_{j,k} \\ & & U_{k,i} \cap U_{k,j} \end{array}$$

אזי קיימת ויחידה סכמה X ומורפיזם $\psi_i : X_i \rightarrow X$ לכל i כך שמתקיים:

1. $\psi_i(X_i)$ תת-סכמה פתוחה ב- X שאיזומורפית ל- X_i על ידי ψ_i . קרי, שיכון-פתוח.
2. $X = \bigcup_i \psi_i(X_i)$.
3. $\psi_i(U_{i,j}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$.

4. על $U_{i,j}$ הדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccc} U_{i,j} & \hookrightarrow & X_i \\ \downarrow \varphi_{i,j} & & \searrow \psi_i \\ & & X \\ & \nearrow \psi_j & \\ U_{j,i} & \hookrightarrow & X_j \end{array}$$

הקבוצה היא $X = \coprod X_i / \sim$ עם יחס השקילות $X_i \ni x_i \sim x_j \in X_j$ אם ורק אם $\varphi_{i,j}(x_i) = x_j$. זהו יחס-שקילות (תרגיל). הטופולוגיה תוגדר על ידי ההעתקות $\psi_i : X_i \rightarrow \coprod X_i \twoheadrightarrow X = \coprod X_i / \sim$ והטופולוגיה היא הטופולוגיה הגסה ביותר כך ש- ψ_i רציפה לכל i . לכן, $V \subseteq X$ פתוחה אם ורק אם $\psi_i^{-1}(V) \subseteq X_i$ פתוחה לכל $i \in I$. מההגדרה ψ_i חד-חד-ערכית, רציפה ו- $X = \bigcup_i \psi_i(X_i)$.

טענה 375: $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ סכמה, ψ_i הומיאומורפיזם על התמונה, אזי $(\psi_i(X_i), \psi_{i*}\mathcal{O}_{X_i})$ סכמה. לצורך כך נוכיח למעשה את הטענה הבאה – אם X מרחב-טופולוגי, $\{U_i\}_{i \in I}$ כיסוי-פתוח, אלומה על U_i עם מידע-הדבקה:

1. לכל $i, j \in I$ מתקיים $\varphi_{i,j} : \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}$ ו- $\varphi_{i,j} = Id_{\mathcal{F}_i}$.

2. $\varphi_{i,j}^{-1} = \varphi_{j,i}$.

3. לכל $i, j, k \in I$, $\varphi_{i,k} = \varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j}$ על $U_i \cap U_j \cap U_k$ והדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j \cap U_k} & \xrightarrow{\varphi_{i,j}} & \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \\ & \searrow \varphi_{i,k} & \downarrow \varphi_{j,k} \\ & & \mathcal{F}_k|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \end{array}$$

אזי קיימת ויחידה אלומה $\mathcal{F}$ על X יחד עם $\psi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_i$.

הוכחה: נוכיח את הטענה השנייה. תהי $V \subseteq X$ פתוחה. נסתכל על

$$\mathcal{F}(V) = \left\{ (s_i)_{i \in I} \mid \begin{array}{l} s_i \in \mathcal{F}_i(V \cap U_i) \\ \varphi_{i,j}(s_i|_{V \cap U_i \cap U_j}) = s_j|_{V \cap U_i \cap U_j} \end{array} \right\}$$

בדיקה קלה תראה שזה קדם-קלומה של קבוצות/חבורות-אבליות/חוגים. בדיקה יותר מסובכת תראה שמדובר באלומה. נשים לב שהסדרה הבאה מדויקת

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(V) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}_i(V \cap U_i) \rightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}_i(V \cap U_i \cap U_j)$$

■

ההמשך מושאר כתרגיל.

13.2 סכמות מצומצמות

תזכורת: חוג A נקרא מצומצם אם $\text{nil} A = 0$.

הגדרה 376: סכמה X נקראת **מצומצמת** אם לכל $U \subseteq X$, האלומה $\mathcal{O}_X(U)$ מצומצמת.

סענה 377: X מצומצמת אם ורק אם לכל $x \in X$, האלומה $\mathcal{O}_{X,x}$ מצומצמת.

הוכחה: נניח X מצומצמת. יהי $x \in X$, נקח $U = \text{Spec} A$ סביבה אפינית של x . $x \rightarrow \mathfrak{p} \subseteq A$. ראשוני, $\mathcal{O}_{X,x} \cong A_{\mathfrak{p}}$. X מצומצמת ולכן $A \cong \mathcal{O}_{X,x}$ מצומצמת ולכן $\text{nil}(A_{\mathfrak{p}}) = \text{nil}(A)_{\mathfrak{p}} = 0$. בכיוון השני, ניקח $\text{Spec} A = U \subseteq X$ פתוחה ואפינית. הוכחנו באלגברה קומוטטיבית שלהיות 0 זו תכונה-מקומית. לכן, לכל $\text{nil}(\mathcal{O}_{X,x}) = \text{nil}(A)_{\mathfrak{p}} = 0$ ולכן $\text{nil} A = 0$. הראינו רק עבור כיסוי אפיני, מה עם כיסוי כללי? עבור $V \subseteq X$ פתוחה כללית, ניקח כיסוי אפיני, $V = \bigcup U_i$ ו- $\text{nil}(\mathcal{O}_X(V)) = 0$ ולכן $f|_{U_i} \in \text{nil}(\mathcal{O}_X(U_i)) = 0$ ממה שהוכחנו קודם. ולכן יש חתך שכל הצמצומים שלו אפס עבור איזשהו כיסוי, ולכן מתכונת האלומה $f = 0$. ■

סענה 378: לכל סכמה X קיימת סכמה מצומצמת X_{red} עם מורפיזם $\varphi : X_{\text{red}} \rightarrow X$ כך ש- φ^* הומיאומורפיזם ו- $\varphi_* \mathcal{O}_{X_{\text{red}}} \rightarrow \mathcal{O}_X$ על.

הוכחה: נבנה את הסכמה המצומצמת. במקרה האפייני, $X = \text{Spec} A$. נסתכל על $A \rightarrow A/\text{nil} A = A_{\text{red}}$. זה משרה $X_{\text{red}} = \text{Spec} A_{\text{red}} \rightarrow \text{Spec} A = X$. ניזכר שלכל ראשוני $\mathfrak{p}$ מתקיים $\text{nil} A \subseteq \mathfrak{p}$ ולכן יש התאמה חד-חד-ערכית ועל ששומרת סדר בין אידיאלים ראשוניים ב- A לבין A_{red} . לכן $X_{\text{red}} \rightarrow X$ הומיאומורפיזם. במקרה הכללי, X סכמה, נגדיר אידיאל על ידי $(\text{nil} \mathcal{O}_X)(U) = \text{nil}(\mathcal{O}_X(U))$. זו אלומה. X_{red} מרחב-מחוגג מקומית מצומצם. ■

משפט 379 (התכונה האוניברסלית של סכמה מצומצמת): תהי X סכמה מצומצמת ו- $f: X \rightarrow Y$ מורפיזם, אזי הדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \exists! g & \uparrow \\ & & Y_{\text{red}} \end{array}$$

הוכחה: בשלב הראשון, עבור $Y = \text{Spec} A$ מתקיים שיש התאמה 1-1 שמאפשרת לנו להסתכל על הדיאגרמה המתחלפת הקיימת:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{O}_X(X) \\ \downarrow & \searrow \exists! g^* & \uparrow \\ A_{\text{red}} & & \end{array}$$

בשלב השני, עבור Y כללי, נקח כיסוי אפייני פתוח Y_i ומתקיים $Y_{\text{red}} = \bigcup_i Y_{i,\text{red}}$. קיימת לנו הדיאגרמה המתחלפת הבאה:

$$\begin{array}{ccc} X_i = f(Y_i) & \xrightarrow{f_i = f|_{X_i}} & Y_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

■

14 תרגול תשיעי

14.1 מורפיזם אפייני

הגדרה 380: מורפיזם $\varphi: X \rightarrow Y$ בין סכמות הוא **אפייני** אם קיים ל- Y כיסוי אפייני $\{U_i\}$ כך ש- $\varphi^{-1}(U_i)$ אפיינית.

טענה 381: $\varphi: X \rightarrow Y$ אפייני אם ורק אם לכל $U \subseteq Y$ מתקיים $\varphi^{-1}(U)$ אפיינית.

הוכחה: כיוון אחד טריוויאלי. בכיוון השני, יהי $\varphi: X \rightarrow Y$ מורפיזם אפייני. בשלב הראשון נטען שאפשר להניח שהכיסוי הנתון מורכב כולו מפתחות בסיסיות $D(f)$. יש $U = \text{Spec} A$

כך ש- $\varphi^{-1}(U) = \text{Spec} B$ עם $f \in A$ עבור $D(f) \subseteq U$ ב- $\text{Spec} B$ $\varphi^{-1}(D(f)) = \text{Spec} B$. יש לנו הדיאגרמה הבאה:

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(D(f)) & \longrightarrow & D(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi^{-1}(U) = \text{Spec} B & \longrightarrow & \text{Spec} A = U \end{array}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(D(f)) &= \{q \in \text{Spec} B \mid f \notin \varphi(q)\} \\ &= \{q \in \text{Spec} B \mid \varphi^\#(f) \notin q\} \\ &= \text{Spec} B_{\varphi^\#(f)} \end{aligned}$$

כעת, בשלב השני, $\varphi : X \rightarrow Y$ מורפיזם אפיני, $U \subseteq Y$ פתוחה כלשהי, אז $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi^{-1}(U) \rightarrow U$ גם כן מורפיזם אפיני. φ אפיני, ולכן יש כיסוי על ידי פתוחות אפיניות U_i כך ש- $\varphi^{-1}(U_i)$ אפיניות. $U \cap U_i$ פתוחה ב- U_i ולכן אפשר לכסות אותה על ידי $D(f_{ij}) \subseteq U_i$. לפי השלב הראשון גם $\varphi^{-1}(D(f_{ij}))$ אפיניות. סה"כ קיבלנו שיש כיסוי של U מהצורה $\{D(f_{ij})\}_{i,j}$ כך ש- $\varphi^{-1}(D(f_{ij}))$ אפיניות ולכן $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$ מורפיזם אפיני. בשלב השלישי, $U = \text{Spec} A \subseteq Y$ פתוחה אפינית, ולכן $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$ אפיני. לכן אפשר להניח $Y = U = \text{Spec} A$. כלומר, נשאר להראות את הדבר הבא – $\varphi : X \rightarrow Y = \text{Spec} A$ מורפיזם אפיני. צריך להראות $\varphi^{-1}(Y) = X$ אפינית. φ מורפיזם אפיני ולכן יש כיסוי אפיני U_i כך ש- $\varphi^{-1}(U_i)$ אפיני ואפשר להניח ש- $U_i = D(f_i)$. נסמן $\varphi^{-1}(U_i) = \text{Spec} B_i$. $Y = \bigcup D(f_i)$ סכמה אפינית ולכן היא קוואזי-קומפקטית ולכן אפשר להניח שהכיסוי סופי – $Y = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$ כאשר $(1) = A = (f_1, \dots, f_n)$ אידיאל היחידה. מכאן $\varphi^\# : A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ עם $f_1, \dots, f_n \mapsto \varphi^\#(f_1), \dots, \varphi^\#(f_n)$ גם כן יוצרים את אידיאל היחידה.

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(D(f_i)) &= \{x \in X \mid \varphi(x) \in D(f_i)\} \\ &= \{x \in X \mid f_i \notin \varphi(x)\} \\ &= \left\{x \in X \mid (f_i)_p \notin \mathfrak{m}_p \subseteq \mathcal{O}_{Y,p}\right\} \text{ where } \mathcal{O}_{Y,p} = A_p \text{ and } \mathfrak{m}_p = pA_p \\ &= \{x \in X \mid f_i \notin \mathfrak{m}_{\varphi(x)} \subseteq \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}\} \\ &= \{x \in X \mid \varphi^\#(f_i) \notin \mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}\} \\ &= X_{\varphi^\#(f_i)} \end{aligned}$$

■

ולפי שאלה 2.17 בהארטשורן קיבלנו ש- X אפינית.

14.2 שיכונים למיניהם

הגדרה 382: תהא X סכמה. $U \subseteq X$ נקראת **תת-סכמה פתוחה** אם U סכמה אשר כמרחב-טופולוגי תת-קבוצה פתוחה ו- $\mathcal{O}_U \cong \mathcal{O}_X|_U$.

הגדרה 383: **שיכון-פתוח** הוא מורפיזם $Y \rightarrow X$ המשרה איזומורפיזם בין Y לבין תת-סכמה פתוחה ב- X .

הגדרה 384: שיכון-סגור הוא מורפיזם $\varphi : Y \rightarrow X$ המשרה הומיאומורפיזם בין Y לתת-קבוצה סגורה ב- X וכך ש- $\varphi^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_Y$ היא על.

הגדרה 385: תת-סכמה סגורה היא מחלקת שקילות של שיכונים-סגורים כאשר $(Y \rightarrow X) \sim (Y' \rightarrow X)$ אם ורק אם הדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\exists} & Y' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

טענה 386: כל אידיאל $I \subseteq A$ מגדיר תת-סכמה סגורה על הקבוצה $V(I)$.

הערה 387: הוא אינו יחיד.



טענה 388: X סכמה, $Y \subseteq X$ תת-סכמה סגורה. קיים מבנה של תת-סכמה סגורה על Y "הקטן ביותר" – המצומצם המושרה.

14.3 יריעות וסכמות

k שדה סגור-אלגברית. נבנה פונקטור $\text{Var}/k \rightarrow \text{Sch}/k$, $t : \text{Var}/k \rightarrow \text{Sch}/k$ פונקטור מיריעות מעל k לסכמות מעל k :

1. שלב ראשון: $t : \text{Top} \rightarrow \text{Top}$. X מרחב-טופולוגי T_1 ונגדיר

$$t(x) = \{\emptyset \neq Z \subseteq X \mid Z \text{ is close and irreducible}\}$$

עבור $Y \subseteq X$ סגורה, $t(Y) \subseteq t(X)$. בנוסף $t(Y_1 \cup Y_2) = t(Y_1) \cup t(Y_2)$ וגם $t(\cap Y_i) = \cap t(Y_i)$. נכריז על הקבוצות מהצורה $t(Y)$ כאשר $Y \subseteq X$ סגורה כסגורות ב- $t(X)$ וקיבלנו טופולוגיה על $t(X)$. אם יש לנו העתקה רציפה $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$, אזי לכל $Z \in t(X_1)$ סגורה ואי-פריקה שאינה ריקה, אזי $\overline{\varphi(Z)}$ סגורה, אי-פריקה ולא ריקה ב- $t(X_2)$. נטען מכך ש- $t \circ \varphi$ רציפה. עבור $Y \subseteq X_2$ סגורה:

$$\begin{aligned} (t \circ \varphi)^{-1}(Z) &= \{Z \in t(X_1) \mid \overline{\varphi(Z)} \subseteq Y\} \\ &= \{Z \in t(X_1) \mid \varphi(Z) \subseteq Y\} \\ &= \{Z \in t(X_1) \mid Z \subseteq \varphi^{-1}(Y)\} \\ &= t(\varphi^{-1}(Y)) \end{aligned}$$

כנדרש. $\varphi : X \rightarrow t(X)$ על ידי $p \mapsto \overline{\{p\}}$ שיכון טופולוגי. $Y \subseteq X$ סגורה, אזי $\varphi^{-1}(t(Y)) = Y$. לכן, לכל $Y \subseteq X$ סגורה, $U = t(X) \setminus t(Y)$ פתוחה ב- $t(X)$. לכן $X \setminus Y = \varphi^{-1}(U)$.

2. בהינתן יריעה V נגדיר $t : \text{Var}/k \rightarrow k\text{-RingSp}$ על ידי $V \mapsto (t(V), \varphi_* \mathcal{O}_V)$, וזה כבר מרחב-מחוגג מקומית. נראה שעבור יריעה אפינית V מתקיים $t(V) = \text{Spec} A(V)$ כאשר $A(V)$ חוג הקואורדינטות. יש התאמה חד-חד-ערכית ועל בין $p \in \text{Spec} A(V)$

לבין $Z \subseteq V$ אי-פריקה, וזה מוביל להומיאומורפיזם בין $t(V)$ לבין $\text{Spec} A(V)$. עבור $U \subseteq \text{Spec} A(V) = t(V)$ יש לנו העתקה

$$\mathcal{O}_{\text{Spec} A(V)} U \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}(U \cap V)$$

מסקנה 389: עבור יריעה אי-פריקה V , $t(V)$ היא סכמה שלמה, נתרית מטיפוס סופי מעל k .

15 תרגול עשירי

15.1 שיכונים סגורים

בתרגול הגדרנו:

הגדרה 390: $\varphi : Y \rightarrow X$ נקרא **שיכון-סגור** אם φ משרה הומיאומורפיזם בין Y לתת-קבוצה סגורה של X וגם $\varphi^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_Y$ על.

בשיעור הגדרנו:

הגדרה 391: $\varphi : Y \rightarrow X$ נקרא **שיכון-סגור** אם קיים כיסוי-פתוח אפיני $\{U_i\} \subseteq X$ כך ש- $\varphi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U_i))$ אפיניות $\mathcal{O}_X(U_i) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U_i))$ על.

למה אנחנו משתמשים באותו מושג? נראה ששתי ההגדרות שקולות:

סענה 392: שיכון סגור הוא שיכון סגור. קרי, הגדרה 390 והגדרה 391 שקולות.

הוכחה: נניח $\varphi : Y \rightarrow X$ שיכון סגור (במובן ההרצאה) אזי φ מורפיזם אפיני. על ידי שימוש באותם כלים מהתרגול הקודם לכל $U = \text{Spec} A \subseteq X$ אז $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U))$ (מראים שאם זה נכון לפתוחה אפינית זה נכון לכל המיקומים שלה, וכך על כל הפתוחות האפיניות וכך מסיימים). אבל היות ש- U אפינית נקבל ש- $\mathcal{O}_X(U) = A$ ו- $\mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U)) = \text{Spec} B$ ולכן $\mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U)) = B$ מכאן ההעתקה העל שלנו היא $A \twoheadrightarrow B$ ולכן יש אידיאל $I \triangleleft A$ כך ש- $B \cong A/I$.

נראה ש- $\mathcal{O}_X \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_Y$ על (העתקה בין אלומות היא על אם לכל פתוחה ולכל חתך בפתוחה צריך להראות שקיים כיסוי-פתוח עם חתכים במקום הכיסוי). נקח $x = \varphi(y) \in X, y \in Y$. תהא U כך ש- $U = \text{Spec} A \subseteq X$ עם $x \in U = \text{Spec} A \subseteq X$ מכאן $\mathcal{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{p}_x}$. $y \in \varphi^{-1}(U) = \text{Spec} A/I \subseteq Y$ עם $x \in U = \text{Spec} A \subseteq X$ מכאן $\mathcal{O}_{Y,y} = (A/I)_{\mathfrak{q}_y}$ ישנה הדיאגרמה המתחלפת

$$\begin{array}{ccc} A & \twoheadrightarrow & A/I \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{p}_x} & \longrightarrow & (A/I)_{\mathfrak{q}_y} \end{array}$$

ולכן על. עבור $U = \text{Spec} A \subseteq X$ מתקיים $\varphi^{-1}(U) = \text{Spec} A/I$ שהומיאומורפית ל- $V(I) \subseteq X$ סגורה. היות שלהיות תת-קבוצה סגורה זו תכונה מקומית, $\varphi(Y)$ סגורה ב- X וגם הומיאומורפיזם זו תכונה מקומית.

בכיוון השני, נניח ש- $\varphi : Y \rightarrow X$ שיכון סגור (במובן התרגול), צריך להראות ש- φ אפינית ושכלל פתוחה אפינית $U \subseteq X$ מתקיים $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U))$ על. נשים לב שעבור $U \subseteq X$ פתוחה אזי $\varphi(Y) \subseteq X$ סגורה ולכן $\varphi(Y) \cap U \subseteq U$ ולכן $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$ היא הומיאומורפיזם על התמונה. בנוסף, אם יש לנו $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_Y$ על אז גם $\mathcal{O}_X|_U \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_Y|_U$ על ומכאן גם $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$ היא שיכון סגור (במובן התרגול). לכן, מספיק להראות עבור $U = X = \text{Spec} A$, כך שהעתקה $Y \rightarrow X = \text{Spec} A$ הומיאומורפיזם לתת-קבוצה סגורה. Y היא סכמה, ולכן אפשר לכסות אותה על ידי קבוצת פתוחות אפיניות $Y = \bigcup V_i$. אז $\varphi(V_i) \subseteq \varphi(Y)$ פתוחה בטופולוגיה המושרית. כלומר, יש פתוחות $U_i \subseteq X$ כך ש- $U_i \cap \varphi(Y) = \varphi(V_i)$. מכאן, יש לנו העתקות

$$\text{Spec} B_i = V_i \rightarrow \varphi(V_i) \hookrightarrow U_i \hookrightarrow X = \text{Spec} A$$

ואלו העתקות בין אפיניות $A \rightarrow B_i$ שמתאימות ל- $\varphi|_{V_i} : V_i \rightarrow X$. עבור $f \in A$, $\varphi^{-1}(D_X(f)) = D_{V_i}(g)$ כאשר $g \in B_i$ התמונה של f תחת $A \rightarrow B_i$. באופן זה אפשר למצוא $\{f_j\} \subseteq A$ כך ש- $\bigcup D(f_j) = \bigcup U_i$ ומכאן $\bigcup D_{V_i}(g_j) = Y$. פתוחה ב- X ולכן גם לה אפשר למצוא כיסוי על ידי פתוחות בסיסיות. מכאן $\text{Spec} A = \bigcup D(f_j)$. X היא סכמה אפינית ולכן קוואזי-קומפקטית, ולכן אפשר להחליף את הכיסוי הזה בכיסוי סופי $\{D(f_1), \dots, D(f_n)\}$ כך ש- $\varphi^{-1}(D(f_i))$ אפיניות ב- Y או ריקות. מכאן $f_1, \dots, f_n$ יוצרים את A ולכן $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = A \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ ולכן $\varphi^\# : \mathcal{O}_X(X) = A \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ קיבלנו $g_j \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ יוצרים של החוג הזה. 2.16, לא בטוח נקבל ש- Y אפינית. לכן $\text{Spec} B = Y \rightarrow X = \text{Spec} A$ ו- $\varphi(Y)$ סגורה, ולכן מתרגיל אחר בתרגיל הבית נקבל ש- $B \cong A/I$ עבור $I \triangleleft A$ כלשהו. ■

15.2 נורמליזציה

הגדרה 393: חוג A נקרא **נורמלי** אם לכל $\mathfrak{p} \in \text{Spec} A$ מתקיים ש- $A_{\mathfrak{p}}$ הוא תחום סגור בשלמות.

הגדרה 394: סכמה X נקראית **נורמלית** אם לכל $x \in X$ מתקיים ש- $\mathcal{O}_{X,x}$ הוא תחום סגור בשלמות.

סענה 395: X סכמה שלמה (במובן אי-פריקה ומצומצמת) אזי הנורמליזציה של X היא סכמה נורמלית ביחד עם מורפיזם $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$ אפיני ועל המקיימת את התכונה האוניברסלית — לכל Z נורמלית ואי-פריקה ומורפיזם דומיננטי

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\exists!} & \tilde{X} \\ & \searrow f & \downarrow \nu \\ & & X \end{array}$$

הוכחה: נוכיח שקיימת נורמליזציה של סכמה.

1. $X = \text{Spec} A$. תחום שלמות, נסמן $k = \text{Frac} A$ ו- $\tilde{A}$ הסכום השלם של A ב- k . קיים שיכון $\tilde{A} \hookrightarrow A$ שמשרה העתקה $\nu : \text{Spec} \tilde{A} \rightarrow X$. ν מורפיזם אפיני. ν על לפי משפט ה-going-up. בנוסף, סגור שלם מתחלף עם מיקום ולכן $\tilde{X}$ נורמלית. נסתכל על התכונה

האוניברסלית:

$$\text{Spec} B = Z \xrightarrow{f} X$$

$$\uparrow$$

$$\tilde{X}$$

כאשר B נורמלי ואי-פריק. f דומיננטי, ולכן קיים שיכון $A \hookrightarrow B$ ו- Z אי-פריק ולכן $\text{nil}(B)$ ראשוני.

$$\begin{array}{ccc} k & \searrow & \\ \uparrow & & \text{Frac}^B/\text{nil}(B) = L \\ \tilde{A} & & \uparrow \\ \uparrow & & \\ A & \hookrightarrow B \longrightarrow & B/\text{nil}(B) \end{array}$$

כל איבר של תמונת $\tilde{A}$ ב- L שלום מעל תמונת A ב- L ולכן גם מעל תמונת B ב- L . עבור $g \in \text{Spec} B$ נסמן $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A \in \text{Spec} A$ ונסמן ב- $\tilde{A}$ $\tilde{\mathfrak{p}} \in \text{Spec} \tilde{A}$ כך ש- $\tilde{\mathfrak{p}} \cap A = \mathfrak{p}$. לכן:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}} & \longrightarrow & L \\ \downarrow & & \uparrow \\ A_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & B_{\mathfrak{q}} \end{array}$$

כל איבר מ- $\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ שלם מעל $B_{\mathfrak{q}}$ ולכן כבר ב- $B_{\mathfrak{q}}$. לכן:

$$\begin{array}{ccc} k & \searrow & \\ \uparrow & & \text{Frac}^B/\text{nil}(B) = L \\ \tilde{A} & \dashrightarrow & \uparrow \\ \uparrow & & \\ A & \hookrightarrow B \longrightarrow & B/\text{nil}(B) \end{array}$$

וגם

$$\text{Spec} B = Z \xrightarrow{f} X$$

$$\dashrightarrow$$

$$\tilde{X}$$

כעת, אם נכתוב $Z = \bigcup Z_i = \text{Spec} B_i$ אזי יש לנו העתקות $Z \xrightarrow{f} X$ $Z_i \xrightarrow{\text{dominant}}$ ולכן

$$f(Z) = f(\overline{Z_i}) \subseteq \overline{f(Z_i)}$$

ומכאן

$$X = \overline{f(Z)} \subseteq \overline{f(Z_i)}$$

ולכן $Z_i \rightarrow X$ דומיננטי ונותר רק להדביק.

2. נסתכל עבור X כללית (סכמה שלמה). לכל $U \subseteq X$ פתוחה אפינית מתקיים $\nu_U : \tilde{U} \rightarrow U$ נורמליזציה. נדביק את כל הנורמליזציות $\{\tilde{U}\}$. בהינתן $U = \text{Spec} A, V = \text{Spec} B \subseteq X$ פתוחות ב- X עם נורמליזציות $\tilde{U}, \tilde{V}$. מהו $U \cap V$? האם הוא אפיני? באופן כללי לא. אם X נפרדת אז כן. מה שכן, לכל $x \in U \cap V$ יש $f \in A$ ו- $g \in B$ כך ש- $x \in D_U(f) = D_V(g)$ וזה אם ורק אם $A_f \cong B_g$ וזה גורר $\tilde{A}_f \cong \tilde{B}_g$. לכן אפשר למצוא פתוחות $W \subseteq \tilde{U}$ ו- $W' \subseteq \tilde{V}$ פתוחה ו- $W \cong W'$ כך ש- $W \subseteq \tilde{U}$ פתוחה ו- $W' \subseteq \tilde{V}$ פתוחה. באותו אופן בודקים שהתנאי על חיתוך משולש מתקיים ומדביקים. נסתכל עכשיו על התכונה האוניברסלית. ישנה הדיאגרמה:

$$\begin{array}{ccccc} & & \exists! & & \\ & & \curvearrowright & & \\ Z & \xrightarrow{f} & X & \xleftarrow{\nu} & \tilde{X} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ f^{-1}(U) & \longrightarrow & U & \xleftarrow{\nu_U} & \tilde{U} \end{array}$$

■

הערה 396: 1. X שלמה. לכל אפינית $\emptyset \neq U \subseteq X$ פתוחה אזי $U = \text{Spec} A$ פתוחה ב- X .
 $\tilde{A} \subseteq k_U = \text{Frac} A$ ומ- $\tilde{A}$ הגדרנו את $\tilde{U}$. מכאן השדה שלנו הוא שדה קבוע לכל U .
 2. באותו אופן אפשר להגדיר $\text{Nor}_L X$ עבור $L/k(X)$ הרחבה סופית. לכל $\text{Spec} A \subseteq X$ ניקח $\tilde{A}$ הסגור השלם של A בתוך L . $A \hookrightarrow k(X) = \text{Frac} A \hookrightarrow L$ ולהדביק.

15.3 תכונות גיאומטריות של יריעות

נסתכל על הרחבת השדות k'/k . יש הומיאומורפיזם $\text{Spec} k' \rightarrow \text{Spec} k$ ויש לנו הדיאגרמה הקרטזית הבאה:

$$\begin{array}{ccc} X_{k'} = X \times_{\text{Spec} k} \text{Spec} k' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec} k' & \longrightarrow & \text{Spec} k \end{array}$$

כאשר החצים האופקיים הם הומיאומורפיזמים.

בעיה 397: אם X שלמה, האם $X_{k'}$ גם כן?

הוכחה: התשובה היא לא, נוכיח. עבור $X = \text{Spec} \mathbb{Q}[x, y]/(x^2 + y^2)$ כאשר $k = \mathbb{Q}$. זו סכמה שלמה (כי היא נקודה, שכן $x^2 + y^2 = 0$ רק עבור $(0, 0)$). נקח $k' = \mathbb{C}$. מכאן, $X_{\mathbb{C}} = \text{Spec} \mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2) = \text{Spec} \mathbb{C}[x, y]/(x + iy)(x - iy)$ וזה כבר פריק ולכן לא שלם.
 דוגמה נוספת. יהי $p \in \mathbb{Z}$, $0 \neq p$ ראשוני, $k = \mathbb{F}_p(T)$ ו- $k' = \mathbb{F}_p(S)$ כך ש- $X_{k'} = X_{\mathbb{F}_p(S)} = \text{Spec} \mathbb{F}_p(S)$, $X = \text{Spec} \mathbb{F}_p(T)$, כמו קודם זו רק נקודה אחת כי זה שדה. אבל $X_{k'} = \text{Spec}(\mathbb{F}_p(S) \otimes_{\mathbb{F}_p(T)} \mathbb{F}_p(S))$ לא מצומצם, כי יש נילפוטנט. שכן:

$$(S \otimes 1 - 1 \otimes S)^p = (S \otimes 1)^p - (1 \otimes S)^p = S^p \otimes 1 - 1 \otimes S^p = T \otimes 1 - 1 \otimes T = 0$$

16 תרגול אחד-עשר

16.1 הערות לתרגיל הקודם

• נורמליזציה: היה מעט בלבול בתרגול הקודם. התכונה האוניברסלית כוללת גם:

– אם B חוג נורמלי אז $\text{nil}B = 0$.

– סגור שלם זו תכונה מקומית על אי-פריקים.

מתוך שני אלה נובע שאם $Z = \text{Spec}B$ אי-פריק ונורמלי אזי B סגור בשלמות.

• k שדה. X מטיפוס-סופי מעל k . X נקראת אי-פריקה גיאומטרית אם לכל הרחבת-שדות L/k אז $X_L = X \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}L$ אי-פריקה.

טענה 398: התכונות הבאות שקולות:

1. X אי-פריקה גיאומטרית.

2. $X_{\bar{k}}$ אי-פריקה כאשר $\bar{k}$ הוא הסגור האלגברי של k .

3. $X_{k^{\text{sep}}}$ אי-פריקה כאשר k^{sep} הסגור הספרבילי.

הוכחה: ברור ש- $(1) \Leftrightarrow (2) + (3)$. X אי-פריקה אם ורק אם כל $\emptyset \neq U \subseteq X$ פתוחה (אפינית) צפופה ב- X וזה אם ורק אם קיים כיסוי על ידי פתוחות (אפיניות) U_i כך ש- U_i אי-פריקה לכל i וגם $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. אם $X = \bigcup U_i$ כיסוי של X אזי $X \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}L = \bigcup (U_i \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}L)$ כיסוי-פתוח של X_L .

מסקנה 399: בשביל להראות ש- $(3) \Leftrightarrow (2)$ מספיק להראות שעבור $X = \text{Spec}A$ אי-פריק מעל k^{sep} אז ל- $A \otimes_k \bar{k}$ יש אידיאל ראשוני מיינימלי יחיד.

למה 400: תהי L/k הרחבת-שדות אי-ספרבילית טהורה¹⁰. X אי-פריקה אפינית מעל k . אזי גם X_L אי-פריקה אם ורק אם A k -אלגברה נוצרת-סופית ותחום שלמות אזי $\text{nil}(A \otimes_k L)$ אידיאל ראשוני.

הוכחה: נניח ש- $\alpha, \beta \in A \otimes_k L$ מחלקי-אפס לא טריוויאליים – $\alpha \cdot \beta = 0$. אזי $\alpha = \sum a_i \otimes$ $\beta = \sum b_i \otimes s_i$ עם $a_i, b_i \in A$ ו- $t_i, s_i \in L$. אז כבר ב- $A \otimes_k k(t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m)$ יש מחלקי-אפס, ולכן מספיק להראות עבור L/k הרחבה-סופית. אבל כל הרחבה-סופית היא סדרה של הרחבות-פשוטות, ולכן מספיק להראות עבור הרחבה-פשוטה – $L = k(\gamma)$ כלשהו. לכן $L = k(\gamma) = k[x]/(x^q - C)$ כאשר $C \in k$. נשים לב ש- $L = \{ \beta \in L \mid \beta^q \in k \} \subseteq L$. נשים לב ש- $L = k(\gamma)$ כלשהו.

$A \rightarrow A \otimes_k L$ שלם, כי כל איבר β ב- L מקיים $x^q - d = 0$ עבור $d \in K$ מתאים. $a \otimes \beta \in A \otimes_k L$ מקיים את $x^q - (d \otimes d) = 0$. נניח $\mathfrak{p} \in \text{Spec}A \otimes_k L$ כך ש- $\mathfrak{p} \cap A = 0$. אזי לכל $\beta \in \mathfrak{p}$ עם $\beta^p \in k$ מתקיים ש- $\beta^p \in A \cap \mathfrak{p}$ ולכן $\beta^q \in A \cap \mathfrak{p}$ ולכן $\beta \in \text{nil}(A \otimes_k L)$ ולכן שוויון.

¹⁰תזכורת: לכל $\alpha \in L$ קיים q כך ש- $\alpha^q \in k$ ו- $q = p^r$ עם $p = \text{char}k$.

באותו אופן לכל ראשוני $q \in \text{Spec } L \otimes_k \text{Spec } A$ יש בדיוק ראשוני אחד מעליו $L \otimes_k \text{Spec } A$ ולכן $\text{Spec } A \otimes_k L \rightarrow \text{Spec } A$ הומומורפיזם.

מסקנה 401: כיוון ש- $\bar{k}/k^{sep}$ הרחבה אי-ספרבילית טהורה אז אם X_k^{sep} אי-פריקה אז גם $X_{\bar{k}}$ אי-פריקה.

למה 402: L/k הרחבת-שדות. X מטיפוס-סופי מעל k אזי X אי-פריק גיאומטרית מעל k אם ורק אם X_L אי-פריק גיאומטרית מעל L .

הוכחה: בכיוון אחד זה קל, אם X אי-פריק גיאומטרית אז זה אומר שלכל הרחבת-שדות. בכיוון השני, נניח ש- X_L אי-פריק גיאומטרית מעל L . תהי F/k הרחבה כלשהי:

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F.L = F' \\ \uparrow & & \uparrow \\ k & \hookrightarrow & L \end{array}$$

לפי הנחה $X_{F'}$ אי-פריק. לכן:

$$\begin{array}{ccc} X_{F'} & \longrightarrow & X_F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } F' & \longrightarrow & \text{Spec } F \end{array}$$

ולכן היות שהעל נשמר ממכפלה-מסויבת, והיות שהתמונה הרציפה של אי-פריקה זה אי-פריקה אזי X_F אי-פריק.

נשאר להראות שאם X מטיפוס-סופי מעל שדה סגור-אלגברית אזי X אי-פריק גיאומטרית. X היא יריעה קלאסית ולכן $X = V(f_1, \dots, f_m)$ ולכן X_L היא פתרון של המערכת הפולינומאלית ב- L^n . נטען כי אם $X = \emptyset$ אז $X_L = \emptyset$. ממשפט האפסים $f_1, \dots, f_m$ יוצרים את $k[x_1, \dots, x_n]$ שיוצרים גם את $L[x_1, \dots, x_n]$ ולכן $X_L = \emptyset$. במלים אחרות, $X_L \neq \emptyset$ אזי $X \neq \emptyset$. אם $X_L \neq \emptyset$ לא אי-פריק אז יש $\alpha, \beta \in A \otimes_K L$ $0 \neq \alpha \cdot \beta = 0$. זו משוואה פולינומאלית. X_L לא אי-פריק, לכן יש פתרון מעל L , לכן יש פתרון מעל k , לכן X לא אי-פריק בסתירה.

16.2 הלמה של Chow

למה 403: $r : X \rightarrow S$ מופרדת מטיפוס-סופי, כאשר S נתרית. אזי קיימת

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & \downarrow r \\ & & S \end{array}$$

כך ש- X' קוואזי-פרויקטיבית מעל S ו- g מורפיזם פרויקטיבי על ובירציונלי. יתר על כן, אם בנוסף X נאותה מעל S אז יש X' כל' ל פרויקטיבית מעל S .

1. שלב 1: רדוקציה ל- X אי-פריקה. מושאר כתרגיל לקורא.

2. שלב 2: מציאת כיסוי טוב. נמצא כיסוי אפיני סופי של X המורכב מסכמות קוואזי-פרויקטיביות מעל S . נקח כיסוי $S_i \in \text{Spec } A_i$ של S . נתרי ולכן יש כיסוי סופי של A_i חוגים נתריים. את $r^{-1}(S_i)$ אפשר לכסות על ידי מספר סופי של אפיניות $U_{ij} = \text{Spec } B_{ij}$ כאשר B_{ij} הן A_i -אלגברה נוצרות-סופית. מכאן $B_{ij} = A_i[x_1, \dots, x_{d_{ij}}]/I$ ונקבל דיאגרמה מתחלפת

$$\begin{array}{ccc} U_{ij} & \hookrightarrow & \mathbb{A}_{S_i}^{d_{ij}} \\ \downarrow & & \downarrow \text{open} \\ \bar{U}_{ij} & \hookrightarrow & \mathbb{P}_{S_i}^{d_{ij}} \end{array} \quad \nearrow S_i$$

לכן U_{ij} קוואזי-פרויקטיביים על S_i . כמו כן:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{P}_S^0 = \mathbb{P}^0 \times S \cong S & \\ & \nearrow & \downarrow \\ S_i & \hookrightarrow & S \end{array}$$

לכן S_i קוואזי-פרויקטיבי מעל S . הכל נתרי ולכן $U_{ij} \rightarrow S_i \rightarrow S$ גם קוואזי-פרויקטיבי.

3. שלב 3: בנייה. נסמן את הכיסוי הזה ב- $\{U_i\}_{i=1}^N$ כאשר U_i קוואזי-פרויקטיביים מעל S . $U_i \hookrightarrow P_i \rightarrow S$ אי-פריקה ולכן $U = \bigcap_{i=1}^N U_i \neq \emptyset$. לכן קיים מורפיזם

$$U \rightarrow X \times_S \underbrace{P_1 \times_S P_2 \times_S \cdots \times_S P_n}_P$$

נסמן ב- X את התמונה הסכמית (Scheme theoretic image) של $U \rightarrow X \times_S P$.

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & X' & \hookrightarrow & X \times_S P \\ & & \searrow g & & \downarrow \\ & & & & X \end{array}$$

ומתקיים $g(U) = U$ $P \hookrightarrow \mathbb{P}_S^m \rightarrow S$ ולכן S מעל P פרויקטיבי מעל S . $g(U) = U$ $g(X') = \overline{g(X')}$ מכאן $g(X') = \overline{g(X')}$ היות ש- $U = g(U) \subseteq g(X')$ אזי

$$X = \bar{U} = \overline{g(U)} \subseteq \overline{g(X')} = g(X')$$

ולכן g על. נשאר עוד להראות ש- X' קוואזי-פרויקטיבי מעל X וזה מושאר כתרגיל לקורא.

■

16.3 עקומים מעל שדה סגור-אלגברית

k שדה סגור אלגברית.

משפט 404: יש שקילות של קטגוריות בין הקטגוריות הבאות:

1. קטגוריית העקומים הפרויקטיבים הלא סינגולרים עם מורפיזמים הדומיננטיים כסכמות.
2. קטגוריית העקומים הקוואזי פרויקטיבים עם העתקות רציונליות דומיננטיות.
3. קטגוריית השדות פונקציות ממד 1 מעל k עם מורפיזמים שהם k הומומורפיזמים.

הגדרה 405: L/k נקרא שדה פונקציות אם הוא הרחבה נוצרת סופית. ממד שדה פונקציות הוא $\text{tr deg } L/k$.

הערה 406: נניח Y עקום, $P \in Y$ נקודה לא סינגולרית. $\mathcal{O}_{Y,P}$ הוא חוג-מקומי, רגולרי, נתרי ממד 1 ולכן חוג-הערכה דיסקרטי.

17 תרגול שניים-עשר

17.1 Spec יחסי

ניזכר שכאשר $f : X \rightarrow S$ מורפיזם אפיני, פירושו שלכל $U \subseteq S$ פתוחה אפינית אז $f^{-1}(U)$ אפיני. ניזכר גם שאפיני גורר קוואזי-קומפקטי ומופרד. ישנה גם העתקה $f^\# : \mathcal{O}_S \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ ההעתקות $\mathcal{O}_S(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ נותנות ל- $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ מבנה של $\mathcal{O}_S(U)$ -אלגברה. לכן $f_*\mathcal{O}_X$ היא $\mathcal{O}_S$ -אלגברה.

נוסיף את ההנחה ש- S נתרי. אזי $f_*\mathcal{O}_X$ היא קוואזי-קוהרנטית. נניח שיש מורפיזם בין סכמות אפיניות מעל S :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & S \end{array}$$

$h^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow h_*\mathcal{O}_X$ נפעיל את g_* ונקבל:

$$\begin{array}{ccc} g_*\mathcal{O}_Y & \xrightarrow{g_*(h^\#)} & g_*h_*\mathcal{O}_X = f_*\mathcal{O}_X \\ & \nwarrow g^\# & \uparrow f^\# \\ & & \mathcal{O}_S \end{array}$$

קיבלנו פונקטור מהסכמות האפיניות מעל S ל- $\mathcal{O}_S$ -אלגבראות קוואזי-קוהרנטיות, על ידי $f : X \rightarrow S$ הולך ל- $f_*\mathcal{O}_X$.

הפונקטור הזה הוא שקילות. תהי B $\mathcal{O}_S$ -אלגברה קוואזי-קוהרנטית, עם $\mu : \mathcal{O}_S \rightarrow B$. $\mu_U : \mathcal{O}_S(U) \rightarrow B(U)$ אלו חוגים ולכן ניתן לבצע Spec ולקבל $\pi_U : \text{Spec } B(U) \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_S(U) = U$. כעת, מה אם יש לנו $V \subseteq U \subseteq S$ פתוחות אפיניות?

$$\begin{array}{ccc} B(U) & \xrightarrow{\text{res}} & B(V) \\ \mu_U \uparrow & & \mu_V \uparrow \\ \mathcal{O}_S(U) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{O}_S(V) \end{array}$$

נפעיל Spec ונקבל את הדיאגרמה הקרטזית הבאה:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec} B(U) & \longleftarrow & \text{Spec} B(V) \\ \downarrow \pi_U & & \downarrow \pi_V \\ U & \longleftarrow & V \end{array}$$

לכן $\text{Spec} B(V) = \pi_V^{-1}(V)$.

טענה 407: $\{\text{Spec} B(U), \pi_U\}$ תנאי-הדבקה. $U, V \subseteq S$ אפיניות. אם $U \cap V \neq \emptyset$ אזי $W \subseteq U \cap V$ אפיני. נקבל:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec} B(U) & & & & \text{Spec} B(V) \\ & \swarrow \text{Projective} & & \searrow \text{Projective} & \\ & \text{Spec} B(W) & & & \\ \downarrow \pi_U & & \downarrow \pi_W & & \downarrow \pi_V \\ U & & W & & V \end{array}$$

נטען שאפשר להדביק $\text{Spec}_S B \xrightarrow{\pi} S$ מורפיזם אפיני, כאשר הקו-התחתון מתחת ל- Spec אומר שזו הסכמה המודבקת ביחס ל- S .

17.2 אגדים וקטוריים

בגיאומטריה דיפרנציאלית, לכל נקודה על יריעה דיפרנציאלית, נרצה להצמיד מרחב וקטורים של משיקים.

בעיה 408: על לולאה רציפה, כמה דרכים יש להצמיד אגד-וקטורי מממד 1?

עובדה 409: יש בדיוק 2 דרכים – לולאה וטבעת-מבוס.

בעיה 410: ועל ספרה?

עובדה 411: אין שום דרך, לפי משפט הכדור השעיר.

הגדרה 412: אגד-וקטורי מדרגה n מעל סכמה Y הוא סכמה X עם מורפיזם $P : X \rightarrow Y$ יחד עם טריוויליזציה $\{U_i, \psi_i\}$, כאשר $\{U_i\}$ כיסוי-פתוח של Y , $\psi_i : P^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_{U_i}^n$, כך שלכל $\text{Spec} A = V \subseteq U_i \cap U_j$ פתוחה אפינית:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{A}_{U_j}^n & \xleftarrow{P^{-1}(U_j)} & & P^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Psi_i} \mathbb{A}_{U_i}^n \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & \mathbb{A}_V^n & \xleftarrow{\Psi_j} P^{-1}(V) & \xrightarrow{\Psi_i} \mathbb{A}_V^n = \mathbb{A}^n \times V & \\
 & \searrow & \swarrow & & \\
 & & \Psi_j \circ \Psi_i^{-1} & &
 \end{array}$$

הצעה 413: גבנה ממודול-חופשי מקומית אגד וקטורי.

הוכחה: נזכר ש- ε מודול חופשי מקומית מדרגה n מעל Y אומר שיש כיסוי-אפיני $\{U_i\} = \{\text{Spec } A_i\}$ של Y עם איזומורפיזם $\varphi_i: \varepsilon|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}^n = \widetilde{A_i^n}$.
 נסתכל על $\text{Sym}(\varepsilon)$ ה- $\mathcal{O}_Y$ -אלגברה הסימטרית הנוצרת על ידי ε . אפשר להגדיר $\mathbb{V}(\varepsilon) = \underline{\text{Spec}}_Y(\text{Sym } \varepsilon) \xrightarrow{P} Y$ ונטען ש- $\mathbb{V}(\varepsilon)$ אגד-וקטורי. נסתכל בדיאגרמה:

$$\begin{array}{ccc}
 \varepsilon|_{U_i} & \xrightarrow{\varphi_i} & \widetilde{A_i^n} \\
 \downarrow & & \downarrow \text{Sym} \\
 \text{Sym}(\varepsilon|_{U_i}) & \xrightarrow{\varphi_i} & \widetilde{\text{Sym } A_i^n} = \widetilde{A_i}[x_1, \dots, x_n]
 \end{array}$$

■

ולכן נקבל העתקה $\text{Spec}(\varepsilon|_{U_i}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_{U_i}^n$.