

משפט אבל-רופיני ופתרון משוואה כללית ממעלה
חמישית
עומר שכטר

עבודת סיום קורס: 80402 תולדות המתמטיקה
מוגש למרצה: פרופ' בנימין וייס

תקציר

בעבודה זו נחקור את משפט אבל-רופיני הקובע שלא קיימת נוסחה לפתרון משוואה כללית ממעלה חמישית ומעלה באמצעות רדיקלים. משפט זה, שהוכח חלקית לו ניתנה על ידי פאולו רופיני והוכח מלאה ניתנה על ידי נילס הנריק אבל, נפתר עשרות שנים לפני עבודותיו של אווריסט גלואה הצרפתי וללא כל הכלים של "תורת-גלואה" כפי שהיא מוכרת לנו כיום. בעבודה זו נסתכל על ההיסטוריה של ההוכחה, כולל הרקע ההיסטורי, נסתכל על ההוכחה עצמה ועל הגישה בפיתורה יחד עם השוני מעבודותיו של גלואה, ואת ההשלכות שלה על הקהילה המתמטית.

תקציר

תוכן עניינים

3	הקדמה	1
3	רקע היסטורי	2
3	נסיונות פתרון משוואות עד לגראנז'	2.1
4	לגראנז' וגאוס	2.2
4	רופיני וקושי	2.3
5	תרומתו של אבל	2.4
6	תורת גלואה כפתרון כללי	2.5
6	ניתוח המאמרים	3
6	המאמר של רופיני	3.1
7	המאמר של אבל	3.2
11	השפעת המאמרים	4
12	סיכום	5
12	ביבליוגרפיה	6

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES, OU L'ON DÉMONTRE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA RÉOLUTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Brochure imprimée chez Grøndahl, Christiania 1824.

Les géomètres se sont beaucoup occupés de la résolution générale des équations algébriques, et plusieurs d'entre eux ont cherché à en prouver l'impossibilité; mais si je ne me trompe pas, on n'y a pas réussi jusqu'à présent. J'ose donc espérer que les géomètres recevront avec bienveillance ce mémoire qui a pour but de remplir cette lacune dans la théorie des équations algébriques.

Soit

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0$$

l'équation générale du cinquième degré, et supposons qu'elle soit résoluble algébriquement, c'est-à-dire qu'on puisse exprimer y par une fonction des quantités a, b, c, d et e , formée par des radicaux. Il est clair qu'on peut dans ce cas mettre y sous la forme:

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \dots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}},$$

m étant un nombre premier et R, p, p_1, p_2 etc. des fonctions de la même forme que y , et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à des fonctions rationnelles des quantités a, b, c, d et e . On peut aussi supposer qu'il soit impossible d'exprimer $R^{\frac{1}{m}}$ par une fonction rationnelle des quantités a, b etc. p, p_1, p_2 etc., et en mettant $\frac{R}{p_1^m}$ au lieu de R il est clair qu'on peut faire $p_1 = 1$. On aura donc,

איור 1: העמוד הראשון ממאמרו הראשון של אבל על אי-פתירות משוואה כללית ממעלה חמישית ומעלה

1 הקדמה

פתרון משוואות מלווה את המתמטיקה עוד מתחילתה. בראשית היו המשוואות כלי במתמטיקה שימושית של תיאור מילולי לבעיות מחיי היומיום. בהמשך עברו המשוואות לתאר בעיות גיאומטריות, שימושיות ומופשטות, ולאחר מכן גם בעיות אלגבריות כלליות מופשטות. הקשר בין מתמטיקה בכללותה לנושא פתרון המשוואות כה בלתינתק¹, עד כי בציבור הכללי, אולי בשל דרך הלמידה בחטיבות הביניים ובתיכונים, הדימוי של עבודה מתמטית היא פתרון משוואות.

בעוד במהלך השנים נמצאו שיטות כלליות לפתרון משוואות פולינומיות ממעלות 1-4 עד סוף המאה ה-18 לא נמצאה שיטה כללית לפתרון משוואה ממעלה חמישית. ב-1799, ולאחר מכן ב-1824 הוכיחו פאולו רופיני האיטלקי ונילס הנריק אבל הנורווגי (ללא כל שיתוף פעולה, ורק באמצעות ידע עקיף על עבודתו אחד של השני) שלא קיימת שיטה כללית כזו, למשוואות ממעלה חמישית ויותר. הוכחתם, עם כמה שהייתה מהפכנית בתגליתה וחשובה, הספיקה במהרה להישכח לאחר פתרונו של אווריסט גלואה את הבעיה הזו בשנת 1831 (הוגש לפרסום בשנה זו, פורסם על ידי ליוביל ב-1846). פתרונו של גלואה היה אלגנטי יותר וכללי יותר, בניגוד למשפט רופיני-אבל שלא נתן הסבר לתוצאה - גלואה הוכיח תיאוריה כללית המסבירה מבחינה מבנית מדוע יש או אין פתרון לכל המשוואות מכל המעלות, וגם קריטריון לכל משוואה מהסוג הזה, האם היא פתירה על ידי רדיקלים, ואם כן כיצד. כיום בקורסים באלגברה מופשטת נלמדת רק עבודתו של גלואה, בעוד משפט אבל-רופיני נזנח.

בעבודה זו נסקור את הרקע המתמטי של הניסיון לפתור ולהוכיח אי-פתירות של המשוואה ממעלה חמישית, מהקדמונים ותחילת המודרנה לז'וזף לואי לגראנז', דרך פאולו רופיני, לואי אוגוסטין קושי, נילס הנריק אבל ואוריסט גלואה. נסקור את הוכחתו של רופיני לבעיה, הוכחה שהייתה חלקית והושלמה על ידי אבל. ניתן תרגום מלא למאמרו של אבל המוכיח את האי-פתירות וננתח את צעדיו במאמר זה, תוך כדי השוואה לפתרון של גלואה וננסה לבדוק את ההשפעה של משפט אבל-רופיני על המתמטיקה בכלל ועל הקהילה המתמטית בפרט.

2 רקע היסטורי

2.1 נסיונות פתרון משוואות עד לגראנז'

פתרון משוואות מלווה את המתמטיקה מראשיתה, גם אם בתחילה היה חסר הכתיב והמובן המתמטי עצמו. הבבלים השאירו רישומים של פתרון משוואות ריבועיות על ידי השלמה לריבוע, אוקלידס היווני פתר בעיות גיאומטריות באמצעות פתרון משוואות ריבועיות. בראהמגופטה ההודי שכלל את השיטה הבבלית על ידי המצאת הסימנים לנעלמים של המשוואה והכרה במספרים שליליים ואל-ח'וואריזמי הערבי שכלל את שיטותיו². במהלך ימי-הביניים התפתח הידע המתמטי עם מציאת שיטות לפתרון משוואה ממעלה שלישית על ידי שיפונה דל פרו וניקולו טרטליה. גילוי זה הוביל במהירות למציאת שיטה כללית לפתרון משוואות ממעלה רביעית, באופן דומה על ידי ג'ירולמו קראדנו³.

בתקופת הרנסנס המשיכו מתמטיקאים בחיפושם אחר דרכים כלליות לפתרון משוואות ממעלה מסויימת. המתמטיקאי הצרפתי פרנסואה וייט העלה לראשונה סימון הנעלמים⁴ - קבועים שאינם ידועים וטרם רבות לחקר המשוואות. רנה דקארט הצרפתי אף הוא שיער, ללא הוכחה, את מה שלימים יודע כמשפט היסודי של האלגברה (לכל משוואה ממעלה $n \in \mathbb{N}$ מעל שדה סגור-אלגברית קיימים n פתרונות כולל ריבוי). דקארט גם היה הראשון להתייחס בצורה חיובית לפתרונות שהם שורשים של מספרים שליליים, פתרונות שלפניו נחשבו כתוצרי לוואי של השיטה הקיימת למציאת פתרון⁵.

על חשיבות הבעיה והקושי שהיא העלתה ניתן ללמוד מכתביו של ההיסטוריון הצרפתי של המתמטיקה ז'אן-אטיין מונטוקלה (1725-1799) אשר כתב על אודות הבעיה במטאפורה צבאית, אחרי שנים של עמידה במקום:

"...עברנו את כל הביצורים, אך הבעיה מסוגרת מאחורי החומה האחרונה ומגוננת על עצמה בעקשנות. מי יהיה הגאון בר-המזל שיוביל את המתקפה עליה ויכניעה?"⁶

¹ B. M. Kiernan, *The development of Galois theory from Lagrange to Artin*, Archive for History of Exact Sciences 8 (1971), pp. 40

² J J O'Connor and E F Robertson, *Quadratic, cubic and quartic equations*, on MacTutor, School of mathematics and statistics, University of St Andrews, Scotland

³ J J O'Connor and E F Robertson, *Quadratic, cubic and quartic equations*, on MacTutor, School of mathematics and statistics, University of St Andrews, Scotland

⁴ Peter Pesic, *Abel's Proof: An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvability*, The MIT Press (2007) pp. 43-47

⁵ Peter Pesic, *Abel's Proof: An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvability*, The MIT Press (2007) pp. 53

⁶ R G Ayoub, *Paolo Ruffini's Contributions to the Quintic*, Archive for History of Exact Science 23 (1980), pp. 257

מתמטיקאים נוספים שניסו לפתור את הבעיה בתקופה זו היו, בין היתר, לאונרד אוילר, אטיין בזו ואדוורד וארינג.

2.2 לגראנז' וגאוס

בשנת 1771 פרסם לואי לגראנז' את מאמרו החלוצי *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* ("על התיאוריה האלגברית של משוואות") ובו ניסה להבין מדוע הפתרונות למשוואה ממעלה שלישית ורביעית הצליחו, אך למעלה מכך לא. בשיטה של המעלה השלישית יש שימוש בהשלמה והצבה שעוזרות להעלים את הגורם של x^2 , שאפשרי גם במשוואה ממעלה רביעית. לגראנז' הראה שלא ניתן להשתמש בצורה זו עבור משוואה ממעלה חמישית, שכן הם רק מסבכים את המשוואה ומעבירים אותנו לעבודה עם משוואה ממעלה שלישית⁷. לגראנז' שם לב לחשיבות שורשי היחידה המרוכבים והעלה טיעון מפתיע: אם נסתכל על $R = (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^3$ כאשר ξ_i הם שורשי היחידה המרוכבים ו- x_i הם שורשי משוואה ממעלה שלישית, אזי בחירת השמות (x_1 במקום x_2 לדוגמה) היא שרירותית. אנו יכולים לבצע תמורה על השמות, ויש בדיוק $3! = 6$ דרכים לעשות כן. לגראנז' בחן את כל 6 האפשרויות האלו וגילה כי הם מובילים בסופו של דבר רק ל-2 תוצאות שונות, והם R ו- $R' = (\xi_1 x_1 + \xi_3 x_2 + \xi_2 x_3)^3$ בדיוק. לדבר זה התייחס לגראנז' בטענה שהוא "בעל ערך". באופן דומה בדק לגראנז' את $4! = 24$ התמורות על פתרונות משוואה ממעלה רביעית וראה שהם מניבים בדיוק 3 ערכים שונים. ל- R הוא קרא "רזולבנטה" ולטענתו ניכר שכאשר הרזולבנטה מקבלת פחות ערכים מאשר מעלת המשוואה - ניתן לפתור את המשוואה. כאשר ניגש לגראנז' לבדוק את הרזולבנטה של משוואה ממעלה 5 הוא גילה כי היא מקבלת 6 ערכים שונים, מספר הגדול יותר ממעלת המשוואה. מכאן הסיק לגראנז' שהדרכים הישנות לא תעבודנה בפתרון המשוואה ממעלה חמישית ושיש לנסות בדרכים אחרות לפתורה.

למסקנה הפוכה הגיע פרידריך גאוס. בעבודת הדוקטורט שלו משנת 1799 הוא טען כי לא קיימת שיטה כללית לפתרון משוואה ממעלה חמישית על ידי רדיקלים, זאת למרות ההתקדמות שהצליח להשיג אחרי הוכחתו הראשונה למשפט היסודי של האלגברה. גאוס כתב על כך:

"אחרי עבודה של גיאומטריקנים [בתקופה זו "גאומטריקן" ו-"מתמטיקאי" שומשו כמלים נרדפות ע.ש.], נותרה תקווה מועטה להגעה לדרך כללית לפתרון אלגברי של משוואות. ככל שחולף הזמן נראה שהולך ופוחת הסיכוי שפתרון כזה אפשרי. אולי לא יהיה זה כה קשה להוכיח, בריגורוזיות מלאה, את האי-פתירות של משוואה ממעלה חמישית"⁸

גאוס עצמו הדגים בספרו *Disquisitiones Arithmeticae* כי המשוואות הציקלוטומיות פתירות על ידי רדיקלים, זאת כחלק מנסינון להראות אפשרות בנייה בסרגל ומחוגה של מצולעים משוכללים שונים. היות שגאוס כאמור לא האמין כי קיימת שיטה כללית לפתור משוואות ממעלות גבוהות, הוא נתן את המשוואות הציקלוטומיות האלה כדוגמה מיוחדת ומעניינת למשוואות ממעלה גבוהה שלהן כן קיימת נוסחה לפתרון⁹.

2.3 רופיני וקושי

פאולו רופיני פרסם שש הוכחות לאי-פתירות משוואה ממעלה חמישית, הראשונה ב-1799 והאחרונה ב-1813. כל אחת מוסיפה על קודמתה ומנסה להיאבק בביקורת שהועלתה עליה. את מאמרו הראשון פתח רופיני בפסקה:

"פתרון אלגברי כללי למשוואה ממעלה גדולה מ-4 הוא תמיד בלתי אפשרי. להלן משפט חשוב ביותר ... לגראנז' הדגול סיפק את הבסיס להוכחתו"¹⁰

רופיני כתב את מאמרו בסגנון ארוך, מעל 500 עמוד, ולא-ברור. סגנונו הקשה על מתמטיקאים בתקופתו לקבלה. הוא שלח את מאמרו שלוש פעמים בשלוש שנים שונות לגראנז' שלא השיב לו לאף אחד מהם. בשנת 1810 ביקש רופיני מהאקדמיה בפריז שתכריז על נכונות הוכחתו. המתמטיקאים לגראנז', לז'נדר ולקרואה מונו לבדוק אותה, והפיקו דו"ח שכלל את האמירה ש"לגראנז' טען שעבודה זו לא ממש ראויה להתייחסות"¹¹. רופיני שלח

⁷ Ian Stewart, *Galois Theory, Third Edition*, Chapman & Hall/CRC Mathematics (2003) pp. 12

⁸ Quoted in R G Ayoub, *Paolo Ruffini's Contributions to the Quintic*, Archive for History of Exact Science 23 (1980), pp. 262

⁹ Henrik Kragh Sørensen, *Niels Henrik Abel and the theory of equations*, Appendix of progress report, Institut for Videnskabs Historie, Aarhus Universitet, Aarhus (1999) pp. 35

¹⁰ Paolo Ruffini, *Teoria Generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto* (תיאוריה כללית על משוואות, שבהן פתרון אלגברי למשוואות ממעלה חמישית או גבוהה יותר מ-4 הוא בלתי-אפשרי) (כלליות מדרגה גבוהה מארבע הוא בלתי-אפשרי)

¹¹ J J O'Connor and E F Robertson, *Paolo Ruffini Biography*, on MacTutor, School of mathematics and statistics, University of St Andrews, Scotland

בקשה דומה לאקדמיה המלכותית בבריטניה, שהשיבה בצורה טובה יותר בטענה שהם אינם מצרפים אישור לכך שהעבודה אכן מוכיחה את מה שהיא מתיימרת, אבל חברי ועדת הבדיקה אכן חושבים שהיא עושה כן.¹² התייחסות חיובית אחת למאמרו של רופיני הייתה של המתמטיקאי הצרפתי החשוב לואי אוגוסטין קושי שהכליל חלק מגילוי של רופיני בנושא חבורות תמורות ב-1813 ו-1815, מאמריו אלה של קושי נקראו על ידי נילס אבל, וכך התוודע באופן עקיף לעבודותיו של רופיני. במכתב של קושי לרופיני, חצי שנה לפני מותו של השני, כתב לו:

"מאמרך על הפתרון הכללי למשוואות הוא עבודה שראויה לתשומת לב של מתמטיקאים, ולדעתי היא מוכיחה ללא כל צל של ספק את האופתירות של משוואה כללית ממעלה גדולה מארבע."¹³

למרות תמיכתו של קושי, עבודתו של רופיני עדיין לא זכתה להערכה או פרסום בקרב הקהילה המתמטית. על השאלה מדוע עבודתו של רופיני נדחתה, אך בערך 20 שנה אחריה עבודתו של אבל התקבלה טוב יותר יחסית כתב ההיסטוריון של המתמטיקה ריימונד איוב:

"הקהילה המתמטית לא הייתה מוכנה לקבל רעיון מהפכני כזה: שפולינום לא יכול להיפתר על ידי רדיקלים. בנוסף נושא התמורות היה אקזוטי ולא מאוד משומש, ומאמריו המוקדמים של רופיני היו לא פשוטים לקריאה. ... בין 1800 לבין 1820, השתנתה התפישה בקהילה המתמטית ... מניסיון לפתור את המשוואה ממעלה חמישית לניסיון להוכיח את אי-פתירותה"¹⁴

2.4 תרומתו של אבל

נילס אבל הצעיר, בעידוד מורו למתמטיקה קרא את עבודותיהם של לגראנז' וקושי על תמורות ופתרון משוואות. מאמרו של קושי משנת 1815 היה מבוסס על עבודתו של רופיני, אך לפי הידוע אבל מעולם לא קרא את רופיני, שעבודותיו היו קשות להבנה ובאיטלקית. לאחר נסיונות כושלים רבים למצוא שיטה כללית לפתרון משוואה ממעלה חמישית, שינה אבל את דעתו לגבי קיום פתרון ופרסם בשנת 1824, שנתיים אחרי מות רופיני, את ההוכחה המלאה הראשונה לאי-פתירות משוואה כללית ממעלה חמישית, הוכחה שסגרה הפערים בעבודותיו של רופיני. ההוכחה נכתבה בקיצור נמרץ, לאורך 6 עמודים בלבד, שכן הודפסה על חשבון המחבר. שנתיים לאחר מכן, ב-1826 קרא אבל מאמר המסכם את עבודתו של רופיני וכתב על כך:

"הראשון, ואם אינני טועה היחיד, שניסה לפני להראות אי-פתירות של משוואה אלגברית כללית הוא הגיאומטריקן [קרי "מתמטיקאי". ע.ש.] רופיני. אבל מאמרו כה מסובך שקשה לברר את נכונו טענותיו. נראה לי שהסברים לא תמיד מספקים"¹⁵

כאשר פורסם מאמרו הראשון של אבל בשנת 1824 הוא לא התקבל בהערכה רבה. אבל שלח עותק לגאוס בגטינגן, אך גאוס לא התלהב ממנו כלל¹⁶. ההשפעה הראשונית הגיעה בשנת 1826 עם פרסום המאמר בכתב-העת של המתמטיקאי הגרמני קרל (A. L. Crelle) בברלין - *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. פרסום זה הוא שהחל להביא את אבל והוכחתו לידיעת הקהילה המתמטית העולמית¹⁷. אבל שלח את מאמרו לגאוס, שדעותיו בנושא מתאימות להוכחת אי-פתירות, אך מכתבו של אבל נמצא חתום וסגור ברשותו של גאוס לאחר מותו¹⁸ במכתב של אבל ללז'נדר משנת 1828 הוא הפציר בו לפרסם את תגליתו:

"אדוני, פרסמתי עבודה יפה מאוד על פתרונות אלגבריים למשוואות ... אני מזמין לפרסם את התיאוריה הזו במהירות האפשרית; זה יביא לך כבוד רב ויחשב כתגלית הגדולה ביותר שנותרה באנליזה"¹⁹

J J O'Connor and E F Robertson, **Paolo Ruffini Biography**, on MacTutor, School of mathematics and statistics, University of St Andrews, Scotland¹²

J J O'Connor and E F Robertson, **Paolo Ruffini Biography**, on MacTutor, School of mathematics and statistics, University of St Andrews, Scotland¹³

R G Ayoub, **Paolo Ruffini's Contributions to the Quintic**, Archive for History of Exact Science 23 (1980),¹⁴ pp. 274

Niels Henrik Abel, **OEuvres**, pp. 218 Quoted in Henrik Kragh Sørensen, **Niels Henrik Abel and the theory of equations**, Appendix of progress report, Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet, Aarhus (1999) pp. 64

Henrik Kragh Sørensen, **Niels Henrik Abel and the theory of equations**, Appendix of progress report,¹⁶ Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet, Aarhus (1999) pp. 69

Henrik Kragh Sørensen, **Niels Henrik Abel and the theory of equations**, Appendix of progress report,¹⁷ Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet, Aarhus (1999) pp. 44

R G Ayoub, **Paolo Ruffini's Contributions to the Quintic**, Archive for History of Exact Science 23 (1980),¹⁸ pp. 275

Niels Henrik Abel, **OEuvres**, part 2 pp. 279 Quoted in **Niels Henrik Abel and the theory of equations**,¹⁹ pp. 70

לאופולד קרונקר הוא זה שהכניס את משפט אבל לתכנית הלימודים האוניברסיטאית. הוא הוכיח מחדש את משפט אבל ללא שימוש בחלקים הבעייתיים בהוכחה בצורה פשוטה יותר ופרסם אותם בשנת 1879 ב-*Academie der Wissenschaften*. קרונקר לא ביקר את הוכחתו של אבל אך נתן לה צורה פשוטה יותר.

2.5 תורת גלואה כפתרון כללי

אווריסט גלואה הצרפתי ככל הנראה הכיר חלק מכתביו של אבל בדרכו לפתח את מה שידוע היום בשם "תורת גלואה" המספקת, בין היתר, הסבר שלם לפתרונות של משוואות פולינומאליות. למעשה, גלואה פעל ועבד כמתמטיקאי בפרז' בזמן שנילס אבל עצמו ביקר בעיר. גלואה הכיר את עבודותיהם של לגראנז' וקושי בנושא, וגם את המאמר של אבל בכתב-העת של קרל. גלואה הכחיש כל תלות בעבודותיו של אבל²⁰, אך היה מודע לעבודתו ולעבודתו של רופיני, כפי שהוא מצוטט:

"ידוע כיום כי משוואה כללית ממעלה גבוהה מ-4 אינה פתירה על ידי רדיקלים... זהו ידע שנהפך למצוי למרות התעלמותם של הגיאומטריקנים [קרי "מתמטיקאים". ע.ש.]. מהוכחותיהם של אבל ורופיני..."²¹

גלואה פנה לחקור פתרונות של משוואות על ידי חקירת אובייקט שלו הוא קרא "חבורה" (groupe), שאותו הוא התאים לכל משוואה. החבורה הכילה תמורות מסויימות על שורשי המשוואה, וגלואה הראה, על ידי חקירת המשוואות ובהינתן החבורה המתאימה לה, האם המשוואה שהיא מייצגת פתירה, מה שלעתיד ייקרא "חבורה פתירה". גלואה השתמש רבות באינווריאציה של צמידות (מה שעתידי להיקרא "תת-חבורה נורמלית") כדי לאפיין את הפתרון.

עבודותיו של גלואה כמעט ולא התפרסמו בחייו, והגיעו לידיעת הקהילה המתמטית לאחר מותו, כאשר ז'וזף ליוביל פרסם אותם בכתב העת שלו *Journal de mathématiques pures et appliquées* בשנת 1846. כיום זוהי התיאוריה המבוססת והמקובלת בתחום, והיא הנלמדת ברוב ספרי הלימוד והקורסים המתאימים, לעומת עבודותיהם של רופיני ואבל, שכבר לא נלמדות כלל.²²

3 ניתוח המאמרים

נרצה לסקור בקצרה את הוכחתו של רופיני (ההוכחה הראשונה מ-1799, ועיבוד שלה משנת 1813). לאחר מכן ניתן תרגום ראשון לעברית, ככל הידוע לנו, של הוכחתו של אבל. תוך כדי, ננתח את המאמרים ונבין את הכלים העיקריים ששומשו בהם.

3.1 המאמר של רופיני²³

רופיני מתחיל את מאמרו מאיפה שמאמרו של לגראנז' על תמורות מסתיים. ראשית הוא מסווג תמורות לסוגים שונים (לפי שמות מקובלים כיום):

חזקות של חילוף (cycle)	תמורות פשוטות (Simple permutations)
חזקות של תמורה שאינה חילוף	
לא טרנזיטיביות	תמורות מורכבות (Composite permutations)
טרנזיטיביות, לא פרימיטיביות	
טרנזיטיביות ופרימיטיביות	

לאחר חקירת הסוגים האלו, רופיני מוכיח של- S_5 אין תת-חבורה מאינדקס 3,4 או 8. זאת ללא שימוש במושג האינדקס, ההוכחה חישובית ודומה להוכחה של לגראנז'.

²⁰B. M. Kiernan, *The development of Galois theory from Lagrange to Artin*, Archive for History of Exact Sciences 8 (1971), pp. 90

²¹R G Ayoub, *Paolo Ruffini's Contributions to the Quintic*, Archive for History of Exact Science 23 (1980), pp. 253

²²בספר David S. Dummit, Richard Foote, *Abstract Algebra, 3rd Edition*, Wiley (2003) מופיע שמו של אבל פעם אחת בהקשר של אי-פתירות. בספר Ian Stewart, *Galois Theory, Third Edition*, Chapman & Hall/CRC Mathematics (2003) אבל ורופיני אינם מוזכרים כלל. בספר Harold Edwards, *Galois Theory (Graduate Texts in Mathematics)*, Springer (1997) מוזכרים רופיני ואבל מספר פעמים, כולל מספר מילים על משפט אבל-רופיני, אך הוכחת המשפט ניתנת בכלים של תורת-גלואה. בעברית הספר הרחבת שדות ותורת גלואה מאת פרופ' אברהם גינזבורג בהוצאת האוניברסיטה הפתוחה אינו מזכיר את אבל או רופיני כלל.

²³על בסיס תקציר, כפי שניתן ב-Appendix, Henrik Kragh Sørensen, *Niels Henrik Abel and the theory of equations*, Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet, Aarhus (1999) chapters 5.1.1 and 5.1.2. of progress report,

כעת, טוען רופיני ללא הוכחה, טענה שהיא ככל הנראה הבעייתית ביותר בהוכחתו - כי כל רדיקל שמופיע בפתרון המשוואה יהיה ניתן להבעה על ידי פונקציה רציונאלית של שורשי המשוואה. אבל יוכיח בעצמו טענה זו, ובכך בעצם סתם את החור בהוכחתו של רופיני (על כך בפרק הבא). רופיני מסתכל על שתי פונקציות Z, M בחמישה משתנים, שקיים בהם היחס $Z^5 - M = 0$, יחס של הוצאת שורש חמישי של פונקציה רציונאלית. רופיני הניח ש- Z נוצר על ידי תמורת Q שהשאירה את M ללא שינוי, וטען כי Q מחזור באורך 5. אם Z נשארת ללא שינוי לאחר תמורה P , אזי היא נשארת ללא שינוי תחת $Q^{-1}PQ$ (כי זו תמורה צמודה). רופיני אינו משתמש בטענות מקובלות בתורת החבורות, שלא היו קיימות אז, אלא מראה חישוב לאחר בדיקת האפשרויות שדבר זה אינו אפשרי, ולכן ללא שינוי תחת Q , בסתירה. לכן, לא קיימת P כזו, ו- $5! = 120$ הערכים האפשריים ל- Z מתאימים לסידורים שונים של השורשים ש- Z מקבלת. לכן, השורש הראשון שנמצא אינו שורש חמישי, ולפי ההוכחה הקודמת על תת-חבורה מאינדקס של S_5 גם לא שלישי או רביעי, ולכן בהכרח שורש ריבועי. עתה רופיני מסתכל על השורש השני שהוא מוציא, זה אינו יכול להיות שורש שני או רביעי, כי אז הפונקציה תקבל $2 \cdot 2 = 4$ או $2 \cdot 4 = 8$ ערכים, וזה כאמור לא אפשרי, בגלל המשפט על אינדקס של תת-חבורות של S_5 . מכאן מסיק רופיני כי שפתרון של משוואה ממעלה חמישית חייב לכלול תחילה הוצאת שורש ריבועי, שאחריו הוצעת שורש שלישי. מתקבלת כאן פונקציה הנותנת 6 פתרונות, וזה לטענת רופיני לא מסתדר מבחינת כמות הפתרונות האפשרית. המאמר הראשון של רופיני היה המקום הראשון בו הוצג מושג ה-"סדר" של איבר, יחס צמידות וציקליות של איבר בחבורת תמורות. הוא הוכיח מספר משפטים חשובים (שנכתוב אותם בסמלים המקובלים היום):²⁴

1. סדר של תמורה הוא הכפולה המשותפת המינימלית (lcm) של אורכי העגילים בפירוק.

2. איבר ב- S_5 מסדר 5 הוא עגיל באורך 5.

3. אם ל- $G < S_5$ יש סדר שמתחלק ב-5, אזי יש בה איבר מסדר 5.

4. ל- S_5 אין תת-חבורה מאינדקס 3,4 או 8.

את ההוכחה של רופיני מ-1813 ניתן לחלק לארבעה חלקים:

1. אם שתי פונקציות y, P על השורשים $x_1, \dots, x_5$ שמתקיים ביניהן הקשר $y^p - P = 0$ (עבור $p \in \mathbb{N}$) ואם P אינה משתנה תחת התמורה (12345), קיים ערך y_1 של y שמשתנה ל- y_2, y_3, y_4, y_5 על ידי $y_k = \xi_5^k y_1$ כאשר ξ_5 הוא שורש היחידה החמישי.

2. אם P אינה משתנה תחת התמורה (123), אזי y_1 חייב להשתנות ל- $\xi_3 y_1$ כאשר ξ_3 הוא שורש היחידה השלישי.

3. התמורה (13452) מורכבת מ- $(123)(12345)$ ו- y חייב לא להשתנות. לכן $\xi_5^5 \xi_3^5 = 1$, ולכן מתקיים כי $\xi_3 = 1$, ומכאן נובע כי y לא יכול להשתנות תחת התמורות (512), (451), (345), (234), (123). על ידי מכפלת התמורות האלה ניתן לקבל את המחזור (12345) ולכן y לא יכול להשתנות על ידי מחזור מאורך 5.

4. לכן, בלתי אפשרי על ידי הוצאת שורש אחת-אחרי-השנייה לתאר את הפונקציה, ולכן אי-פתירה על ידי רדיקלים.

3.2 המאמר של אבל²⁵

אבל פותח את מאמרו בהנחה בשלילה, שבהינתן

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0 \quad (3.1)$$

ניתן להביע את y כפונקציה של a, b, c, d, e המשתמשת רק בחיבור, חיסור, כפל, חילוק והוצאת שורש. מכאן טוען אבל ש-"קל לראות" כי ניתן להביע את y בצורה הבאה:

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + \dots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} \quad (3.2)$$

²⁴J J O'Connor and E F Robertson, **Paolo Ruffini Biography**, on MacTutor, School of mathematics and statistics, University of St Andrews, Scotland

²⁵בהתבסס על תרגומו לאנגלית, בתוך Peter Pesic, **Abel's Proof: An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvability**, The MIT Press (2007) Appendix A

כאשר m ראשוני ו- R, p, p_i פונקציות מאותה צורה של y , כך עד פונקציות רציונאליות של המקדמים.²⁶ ניתן להניח במקום זאת שבלתי אפשרי להביע את $R^{\frac{1}{m}}$ על ידי פונקציות רציונאליות של המקדמים על ידי החלפת $\frac{R}{p_1^m}$ במקום R נקבל $p_1 \cdot \left(\frac{R}{p_1^m}\right)^{\frac{1}{m}} = R$

$$y = p + R^{\frac{1}{m}} + \dots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} \quad (3.3)$$

כעת, אם נציב את (3.3) לתוך (3.1) נקבל את הביטוי:

$$0 = q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + \dots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} \quad (3.4)$$

כך ש- q, q_i הם פולינומים במקדמים וב- R, p_i, p . כעת נטען כי $q = q_1 = \dots = q_{m-1} = 0$ בהכרח (בלשון תורת-גלואה, אנו אומרים כי אם $f(x) \in F[x]$ פולינום אי-פריק ממעלה m , ו- $K = F[x]/(f(x))$ אזי $\{1, x \bmod f(x), \dots, x^{m-1} \bmod f(x)\}$ בסיס למרחב הווקטורי של K מעל F).²⁷ אם נציב $R^{\frac{1}{m}} = z$ נקבל כי $z^m - R = 0$ (3.4) משוואה ב- z ממעלה $m-1$. אם בשלילה לא כל המקדמים של (3.4) הם אפס, אזי קיים שורש משותף יחד עם $z^m - R = 0$, אם k הוא מספר השורשים המשותפים האלו, נוכל למצוא משוואה מדרגה k ששורשיה הם k השורשים האלו ושכל המקדמים הם פונקציות רציונאליות ב- R, q, q_i . נקרא למשוואה זו:

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \dots + r_k z^k = 0 \quad (3.5)$$

מהעובדה שהם שורשים גם של $z^m - R = 0$ נובע כי הם כולם מהצורה $\xi_i z$ כאשר ξ_i שורש-היחידה ה- i . אם נציב כעת $\xi_i z$ לתוך z במשוואות, נקבל k משוואות מהצורה $0 = r + \xi_i r_1 z + \xi_i^2 r_2 z^2 + \dots + \xi_i^k r_k z^k$. כעת נוכל להתייחס לכל אחד מה- z^i בתור משתנה נפרד וקיבלנו k משוואות ליניאריות עם k נעלמים, ולכן נוכל להביע את z בתור פונקציה רציונאלית של המקדמים r_i , שהם פונקציות רציונאליות של מקדמי המשוואה המקורית, R ו- p, p_i . ומכאן נובע ש- z אף הוא פונקציה רציונאלית שלהם, מהרכבה, בסתירה להנחה. לכן בהכרח מתקיים $q = q_1 = \dots = q_{m-1} = 0$. ומכאן נובע כי המשוואה (3.1) מסופקת כאשר $y \in \left\{R^{\frac{1}{m}}, \alpha R^{\frac{1}{m}}, \dots, \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}\right\}$ כאשר α הוא שורש המשוואה

$$\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + \alpha + 1 = 0 \quad (3.6)$$

זאת על ידי הצבה (המשוואה הזו היא למעשה $\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = 0$). את אי-פריקות הפולינום המתקבל הוכיח גאוס בקטע מספר 341 בספרו *Disquisitiones Arithmeticae* משנת 1801, שאותו אבל קרא והכיר). מתקיים כי כל ערכי y שונים כי אם נציב:

$$\begin{aligned} y_1 &= p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \dots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} \\ y_2 &= p + \alpha R^{\frac{1}{m}} + \alpha^2 p_2 R^{\frac{2}{m}} + \dots + \alpha^{m-1} p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} \\ &\vdots \\ y_m &= p + \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}} + \alpha^{m-2} p_2 R^{\frac{2}{m}} + \dots + \alpha p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

²⁶ אבל לא נתן הוכחה לכך במאמר המקורי. ההוכחה עצמה פורסמה מאוחר יותר במאמר מורחב. כדי לראות את ההוכחה, ראה Peter Pesic, *Abel's Proof: An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvability*, Appendix B

Jim Brown, *Abel and the insolubility of the quintic*, Theorem 6.5

ונניח בשלילה כי $y_1 = y_2$ אזי בהכרח $\alpha - 1 = 0 = \alpha^2 - 1 = \dots = \alpha^{m-1} - 1$ בסתירה להגדרת α ב-(3.6). לכן בהכרח $m \leq 5$. נשים לב שקיימות כמובן משוואות ממעלה חמישית עם שורשים זהים, אבל במקרה כזה אכן תהיה להם נוסחאת פתרון פשוטה יותר. אבל מתעלם ממקרה זה במאמרו הזה. כעת, אם נסתכל על הסכום של השורשים נקבל:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_m = mp + (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + \alpha + 1) R^{\frac{1}{m}} + \dots + p_{m-1} (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + \alpha + 1) R^{\frac{m-1}{m}} \quad (3.8)$$

וממשוואה (3.6) נקבל הצבה מפורשת ל- $p, R^{\frac{1}{m}}, \dots, p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$ כפונקציות רציונאליות של השורשים:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{m} (y_1 + y_2 + \dots + y_m) \\ R^{\frac{1}{m}} &= \frac{1}{m} (y_1 + \alpha^{m-1} y_2 + \dots + \alpha y_m) \\ &\vdots \\ p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} &= \frac{1}{m} (y_1 + \alpha y_2 + \dots + \alpha^{m-1} y_m) \end{aligned} \quad (3.9)$$

כעת אבל מבקש שנבחן את הכמויות האלו, לדוגמה עבור R נקבל על ידי העלאה בחזקה:

$$R = S + v^{\frac{1}{n}} + S_2 v^{\frac{2}{n}} + \dots + S_{n-1} v^{\frac{n-1}{n}}$$

ועל ידי אותה הוכחה כמו שעשינו עם y נקבל ש- $v^{\frac{1}{n}}, S, S_2, \dots$ הן פונקציות רציונאליות של הערכים השורשים של R , שהן בתורן פונקציות רציונאליות של השורשים $y_1, \dots, y_m$ ולכן $v^{\frac{1}{n}}, S, S_2, \dots$ גם כן, מהרכבה. ועל כן נסיק מכך שכל הפונקציות הלא רציונאליות (הכוונה כאן לפונקציות שאינן פונקציות רציונאליות, בלשונו של אבל) המתארות את y הן פונקציות רציונאליות של שורשי המשוואה.

לאחר כל החישובים האלו, מתחיל השלב האחרון בהוכחה בשלילה של אבל. נסתכל כעת על הפונקציה הלא-רציונאלית מהצורה $R^{\frac{1}{m}}$. R הוא פונקציה רציונאלית של a, b, c, d, e - המקדמים. נסמן $R^{\frac{1}{m}} = r$ כאשר r היא פונקציה רציונאלית של השורשים, לפי משוואה (3.8). ו- R היא פונקציה סימטרית של האיברים האלו (ופירושו שנוכל לבצע תמורה על המשתנים מבלי לשנות את R). היות שאנחנו מחפשים פתרון כללי נוכל להניח כי השורשים הם משתנים בלתי-תלויים. קיימות $5! = 120$ תמורות אפשריות על השורשים, ולכן r מקבל m ערכים שונים, והמספר הזה צריך לחלק את $5!$ לפי משפט לגראנז'. היות ש- m ראשוני לפי ההנחה, $p \in \{2, 3, 5\}$. כעת אבל משתמש במשפט של קושי הקובע כי "מספר הערכים שפונקציה ב- n משתנים יכולה לקבל תחת תמורה של המשתנים לא יכול להיות נמוך מהראשוני הגדול ביותר $p \leq n$ מבלי להיות שווה ל- 2^{28} " (אבל מצטט כאן משפט של קושי ממאמר שהוא קרא ב-*Journal de l'ecole polytechnique, vol. 17*, משפט שנכתב כפיתוח לעבודתו של רופיני). לכן מספר הערכים בהכרח 2 או 5. נחלק למקרים.

ראשית, אם $m = 5$ אזי r מקבל 5 ערכים שונים וניתן לכתבו בצורה:

$$R^{\frac{1}{5}} = r = p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4 \quad (3.10)$$

כאשר p, p_1, p_2, p_3, p_4 פונקציות סימטריות של y_i . מהיות כך, ניתן להחליף את y_1 ו- y_2 , לדוגמה:

$$= \alpha p + \alpha p_1 y_2 + \alpha p_2 y_2^2 + \alpha p_3 y_2^3 + \alpha p_4 y_2^4$$

Augustin Cauchy, *Memoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquerir*, 1815, Oeuvres²⁸
Complete d'Augustin Cauchy, (Paris: Gaunthier-villars, 1905), series II, 1:62-90

כאשר $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. אבל למשוואה הזו אין פתרונות (אבל מתכוון כי אין לה פתרונות ממשיים) ולכן $m = 2$. [אבל לא נותן הוכחה במאמר לזהות הזו. במאמרו השני מ-1826 הוא פרט יותר ופישט את הטיעון הזה, כמו רבים אחרים. הטיעון הוא כדלקמן: נחזור אחורה לתוצאת שהשגנו כבר. נניח ונבטא את אחד משורשי y_1 כמו ב-(3.7), קרי $y_1 = p + R^{\frac{1}{5}} + p_2 R^{\frac{2}{5}} + p_3 R^{\frac{3}{5}} + p_4 R^{\frac{4}{5}}$, נקבל $R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot (y_1 + \alpha^4 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^2 y_4 + \alpha y_5)$ כמו שקיבלנו ב-(3.9) עבור $m = 5$. נשים לב שזה בלתי אפשרי, שכן אגף-שמאל מקבל חמישה ערכים (שהם חמשת ערכי השורש החמישי) ואגף ימין מקבל 120 ערכים (הם התמורות האפשריות על חמשת השורשים). לכן בהכרח $m \neq 5$.²⁹ נגדיר $R^{\frac{1}{2}} = r$ ו- r מקבל בדיוק שני ערכים שונים, ששונים בסימן. ולכן לפי משפט של קושי (מאותו מאמר שאבל ציטט קודם) מתקיים כי:

$$R^{\frac{1}{2}} = r = v(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \cdots (y_4 - y_5) = vS^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

ו- v היא פונקציה סימטרית. כעת נסתכל על הפונקציה הלא-רציונאלית מהצורה:

$$\left(p + p_1 R^{\frac{1}{v}} + p_2 R_1^{\frac{1}{v}} + \dots \right)^{\frac{1}{m}}$$

כאשר p, p_i, R, R_1 וכדומה הן פונקציות רציונאליות במקדמים, שהם סימטריים בשורשים. בנוסף $v = 2$ ולכן $R = v^2 S$ אזי $R_i = v_i^2 S$. את הביטוי בשורה הקודמת ניתן לכתוב בתור:

$$\left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} r &= \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{m}} \\ r_1 &= \left(p - p_1 S^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

אם נכפיל נקבל:

$$r \cdot r_1 = (p^2 - p_1^2 S)^{\frac{1}{m}}$$

אם $r \cdot r_1$ אינה פונקציה סימטרית, אזי $m = 2$ (שכן אחרת הוא היה שווה 5, ממשפט קושי המצוטט), אבל מכאן נובע כי r מקבל 4 ערכים שונים, וזה בלתי אפשרי. לכן מדובר בפונקציה סימטרית. נקרא לפונקציה הסימטרית הזו $v = r \cdot r_1$ ונקבל:

$$r + r_1 = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{m}} + v \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{m}} = z$$

הפונקציה הזו מקבלת m ערכים שונים, ולכן m בהכרח שווה ל-5 כי הראינו כבר ש- $m \neq 2$ ו- m ראשוני. לכן נקבל, באותו אופן כמו משוואה (3.9):

$$z = q + q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3 + q_4 y^4 = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{m}} + v \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{m}}$$

²⁹באותו מאמר מ-1826 אבל גם נתן פירוט מלא יותר והסבר לטיעון הנוכחי, ניתן לקרוא אותו ב-Peter Pesic, **Abel's Proof: An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvability**, The MIT Press (2007) Appendix A, pp.164-165.

כאשר q, q_i פונקציות סימטריות בשורשים, ולכן פונקציות רציונאליות של המקדמים. כעת נביא את המשוואה לצורה של y כפונקציה של z והמקדמים. מאותו נימוק כמו שהיה במשוואה (3.7) נוכל לכתוב את זה בצורה:

$$y = P + R^{\frac{1}{5}} + P_2 R^{\frac{2}{5}} + P_3 R^{\frac{3}{5}} + P_4 R^{\frac{4}{5}} \quad (3.13)$$

כאשר P, R וכדומה ניתנות לכתיבה בצורה $p + p_1 S^{\frac{1}{2}}$ (3.12). מביטוי זה של y שקיבלנו, נקבל כי:

$$R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} (y_1 + \alpha^4 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^2 y_4 + \alpha y_5) = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}}$$

כאשר $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. קיבלנו את (3.9), רק שבהכרח $m = 5$, עם עוד שוויון נוסף. אגף שמאל של המשוואה מקבל 120 ערכים שונים (על ידי כל התמורות האפשריות על (y_i) , ואגף ימין מקבל רק 10 (שתי אפשרויות בגלל השורש הריבועי, כפול חמש אפשרויות מהשורש החמישי). פירושו ש- y לא יכול להיות בצורה שמצאנו, אך הוכחנו ש- y חייב להיות בהכרח בצורה זו, אם המשוואה המקורית פתירה. מכאן אבל מסיק כי "בלתי אפשרי לפתור על ידי רדיקלים משוואה כללית ממעלה חמישית". מכאן נובע ישירות שגם בלתי אפשרי לפתור על ידי רדיקלים משוואה כללית ממעלה גבוהה מחמש (על ידי כפל ב- x למשל).

4 השפעת המאמרים

מאמרו של רופיני, אף-על-פי שבתחילה לא עורר הדים רבים, הוביל לכתיבת מאמר של קושי בתחום התמורות, מאמר שהכליל תוצאות של רופיני ובכך קידם את תורת החבורות. במאמרו קושי פיתח את הסימנים המקובלים לתמורות כיום. לדוגמה, הסימון $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ לתמורה שמזיזה כל איבר בסדר יחיד, והגדרת מושג הדרגה של חילוף, וגם נותן הוכחה מופשטת יותר למה שהיום מוכר כ-"משפט לגראנז'", על חלוקת סדר של תת-חבורה בסדר החבורה³⁰.

בעת קריאת המאמרים קל להבין את החשדנות וחוסר-ההתקבלות שלהם. ההוכחה של אבל מורכבת בעיקר מחישובים אלגבריים ארוכים שטיבם אינו ברור ומהותם לא מוסברת אלא רק בדיעבד, במאמר הראשון של אבל מ-1924 (שתרגומו הובא כאן) ניכר החסכון והצמצום בהסברים, שנבע מכך שהמחבר הדפיס את המאמר על חשבון. במאמר השני משנת 1826 רב הפירוט ביחס למאמר הקודם, אך עדיין יש חלקים שבהם הוא חסר. החלקים המהותיים העיקריים בהוכחה של אבל הם משפט קושי בחבורות, שפורסם זמן מועט לפני פרסום המאמר, והסידור הנכון של הנוסחאות, שהוכח במאמר מאוחר יותר. ההוכחה של רופיני מסורבלת אף יותר, ארוכה, והחישובים האלגבריים בה (שכוללים חישוב אפשרויות רבות של תמורות ומכפלתן) לא היו ברורים כלל לקורא, שכן הרבה מהתכונות של תמורות הוכחו אף הן באותו מאמר. לא לשווא פרסם רופיני שש גרסאות של הוכחתו במהלך חייו, דבר זה נבע מניסיון של שנים לפשט את הוכחתו עוד ועוד עד שתהיה מספיק נהירה לקהילייה המתמטיקאית³¹. המאמרים של רופיני, ובעיקר של אבל נתנו את הטון בגישה לפתירות משוואות פולינומאליות. בעוד רק פחות מדור לפנייהם, לגראנז' טען שקיים פתרון ויש לחפש, הם הוכיחו אי-פתירות למשוואה כללית. כתביו של אבל הכינו את הקהילה המתמטית לקבל את כתביו הכלליים יותר של גלואה בנושא, כתבים שהכילו הפשטה רבה ודרשו והשלמה, ומעבר לצורה ריגורוזית לפני שהיו יכולים להתקבל על ידי הקהילה המתמטית (עבודה שהושלמה רק בסוף המאה ה-19 על ידי היינריך ובר ואמיל ארטיין³²). ההוכחה של אבל אכן מראה שלא קיימת שיטה כללית לפתרון משוואה ממעלה חמישית על ידי רדיקלים, אך לא מספקת הסבר כללי למדוע כך הדבר, הסבר שניתן עשרים שנה אחריו על ידי תורת-גלואה של אווריסט גלואה. אמנם, כתביו של אבל לא נגעו לחבורות כשלעצמן, כמו כתביו של גלואה, אך לולא הם ייתכן שכתביו של גלואה היו נזנחים ולא נחקרים במלואם. ההיסטוריון של המתמטיקה האנס ווסינג אף כתב:

Henrik Kragh Sørensen, **Niels Henrik Abel and the theory of equations**, Appendix of progress report,³⁰ Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet, Aarhus (1999) pp. 42

R G Ayoub, **Paolo Ruffini's Contributions to the Quintic**, Archive for - למסנקות דומות הגיע גם ריימונד איב - History of Exact Science 23 (1980), pp. 271

Henrik Kragh Sørensen, **Niels Henrik Abel and the theory of equations**, Appendix of progress report,³² Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet, Aarhus (1999) pp. 122

"אבל היה ככל הנראה האדם היחיד שהיה מסוג להבין ישר את עבודותיו של גלואה, אך לצערנו אבל מת לפני שגלואה התחיל לכתוב מה מעבודותיו"³³

5 סיכום

לסיכום, משפט אבל-רופיני פתר את אחת השאלות הפתוחות המרכזיות והחשובות במתמטיקה של תחילת המאה ה-19 והצליח להוביל את הקהילה המתמטית מתקווה למציאת פתרון, לעיסוק בתנאים של מתי משוואה פתירה על ידי רדיקלים ולמה. בדרך להוכחת המשפט התפתחה והלכה למעשה נולדה תורת החבורות כפי שהיא מוכרת כיום, וכך הוכנה הקרקע לקראת המהפך של תורת גלואה והבנה דרך אלגברה מופשטת את התנאים בהם משוואה פתירה.

הוכחתם של אבל, ובעיקר רופיני עצמו, אמנם נשכחו מעט מהתודעה המתמטית הכללית על חשבון הוכחתו של גלואה אך כשם שגודלה של ספינה נמדד על ידי כמות המים שהיא דוחפת, כך חשיבותו של משפט נמדד באמצעות תרומתו, השפעתו וכמה הוא קידם את המתמטיקה בכלל, ובמקרה של משפט אבל-רופיני, ניתן לראות כי התרומה הייתה רבה.

6 ביבליוגרפיה

- Peter Pesic, **Abel's Proof: An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvability**, The MIT Press (2007)
- Henrik Kragh Sørensen, **Niels Henrik Abel and the theory of equations**, Appendix of progress report, Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet, Aarhus (1999)
- J J O'Connor and E F Robertson, **Paolo Ruffini Biography**, on MacTutor, School of mathematics and statistics, University of St Andrews, Scotland - <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Ruffini.html>
- Jim Brown, **Abel and the insolubility of the quintic** - <http://www.math.caltech.edu/~jimlb/abel.pdf>
- R G Ayoub, **Paolo Ruffini's Contributions to the Quintic**, Archive for History of Exact Science 23 (1980) 253-277

Hans-Ludwig Wußing, **Evariste Galois**, In *Biographien bedeutender Mathematiker*, Ch. 6 pp. 397,³³
Quoted in Henrik Kragh Sørensen, **Niels Henrik Abel and the theory of equations**, pp. 123