

הקדמה

"מה זו מתמטיקה בדידה ומדוע אנחנו חייבים ללמוד אותה?" זו שאלה שמעלים רבים מתלמידי שנה א' במדעי המחשב ובמתמטיקה. קשה לתת תשובות של ממש על השאלה "במה עוסק תחום מסוים של המתמטיקה?" התשובה האמיתית היא "למדו ותדעו", והתשובות הנפוצות הן בעיקר התחכמויות בנוסח "גיאומטריה היא מה שעושים חוקרי הגיאומטריה". השאלה כשלעצמה היא בוודאי שאלה של טעם, ועל מנת להשיב לשואלים בדברי טעם, הבה ננסה לענות עליה בקצרה.

מהי מתמטיקה בדידה: נפתח בחצייה הראשון של השאלה: מהי מתמטיקה בדידה או כפי שהיא נקראת לפעמים מתמטיקה דיסקרטית? אין הכוונה לענף חשאי של המתמטיקה הידוע רק למסדר קטן של מתמטיקאים. ודאי כולכם זוכרים מימי בית הספר היסודי את אותם בדידים שבעזרתם למדתם לספור ולחבר. פירוש המילה **בדיד** או **דיסקרטי** (Discrete) הוא דבר מה שבנוי מחלקים נפרדים. המתמטיקה הבדידה עוסקת אם כן בעצמים בודדים, כמו קבוצה של כלבים וחתולים או המספרים הטבעיים. זאת בניגוד למתמטיקה הרציפה העוסקת במספרים הממשיים הרציפים. המספרים הטבעיים מהווים יחידות בדידות, כאשר ההפרש בין כל שניים קבוע. ואילו המספרים הממשיים המתארים את העולם הרציף אינם מקיימים זאת, כי בין כל שני מספרים ממשיים יש מספר ממשי נוסף. לגבי הממשיים אי אפשר לומר מי הנקודה הבאה בתור - הם רציפים.

אולם המתמטיקה הבדידה אינה מצטמצמת רק למספרים הטבעיים. היא כוללת תחומים חשובים כמו קומבינטוריקה, תורת המספרים האלמנטרית, תורת הגרפים ולוגיקה. כך למשל, נעסוק כאן בשאלות כגון: בכמה דרכים אפשר למלא טופס לוטו, האם אפשר לצבוע תמיד מפה בארבעה צבעים בלבד כך שכל שתי מדינות הגובלות זו בזו צבועות בצבעים שונים, ועוד.

מדוע לומדים מתמטיקה בדידה: ואשר לחצייה השני של השאלה שהוצגה בפתחה: מדוע חייבים ללמוד מתמטיקה בדידה? ננסה להסביר מדוע למעשה כל תוכנית לימודים אוניברסיטאית רצינית במדעי המחשב כוללת לימודי מתמטיקה בדידה (יש תוכניות לימודים תקפות ומכובדות לא פחות שבהן תכני הקורס הזה מובאים במסגרת קורסים אחרים, אך בהחלט אינן פוסחות עליהם).

כדי לענות תשובה ספציפית, אנו נשתמש כמודל בתוכניות הלימודים לשנה א' במוסדות שבהם אנחנו מלמדים, כפי שהן מקובלות בשינויים קלים, זה מספר שנים. איש לא יערער מן הסתם על כך שההכשרה הבסיסית של מדעני מחשבים כוללת קורסים כגון מבוא למדעי המחשב או מבני נתונים, אך אנו מתרכזים בקורסים המתמטיים. ההשכלה המתמטית הנדרשת מתלמידי שנה א' כוללת קורסים באנליזה מתמטית (מקצועות הקרויים גם חשבון אינפיניטסימלי או חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי), קורסים באלגברה (כרגיל אלגברה ליניארית ולפעמים גם אלגברה מופשטת) וקורס במתמטיקה בדידה.

לכל אחד ממקצועות היסוד במתמטיקה יש, לדעתנו, תפקיד מרכזי בחינוכם המדעי של מדעני המחשב לעתיד. לקורסים באנליזה תפקיד כפול:

- א. להראות איך להפוך מושגים אינטואיטיביים, כגון רציפות של פונקציות, להגדרות פורמליות מדויקות שניתן לעבוד איתן.
- ב. לפתח אצל התלמידים את היכולות האנליטיות.

גם לקורסים באלגברה תפקידים דומים: הצגת כוחו הגדול של המבנה המתמטי הפורמלי והסדור, ופיתוח הטכניקות האלגבריות אצל הלומדים. ההשכלה הזאת מהווה "דוגמת מעבדה" לאופני חשיבה חיוניים למדעני המחשב.

הקורס במתמטיקה בדידה נועד לפתח מערכת כישורים בעיקר בכיוון של פתרון בעיות. בניגוד לקורסים באלגברה ובאנליזה, נושאי הלימוד פשוטים וקונקרטיים. אין כמעט בעיות מושגיות כמו אלה הנובעות ממושגי האינסוף, שכן כמעט כל הדיון נסב על מערכות סופיות. הרבה מן השאלות הנדונות כאן הופיעו במקורן כחידות, ואנו מקווים שהספר הזה משמר את החדווה שבפתרון חידות. במידה לא מועטה של צדק ניתן לומר שהתחום של מתמטיקה בדידה מנסה לחשוף ולברר את הכלים העיקריים המשמשים לפתרון חידות, ולהקנותם באופן שיטתי לתלמידים. די קשה להמציא טריקים חדשים, אבל כפי שטוענת אמרה מתמטית ידועה: "מהו ההבדל בין טריק לשיטה? טריק שמשמשים בו שלוש פעמים הופך לשיטה". ניסיוננו בהוראת המקצוע אומר שאכן ניתן להקנות הרבה מן הכלים האלה לתלמידים, ובוה לשפר את יכולתם בפתרון בעיות חדשות המתעוררות בלימודיהם או בקריירה המקצועית שלהם.

על הנושאים שיוצגו בספר: מלבד פיתוח הכלים העצמיים שלה, מתקשרת המתמטיקה הבדידה גם לתחומים אחרים. כך למשל, השיטות לפתרון נוסחאות נסיגה המוצגות בפרק 6, מתבססות על מושגי יסוד באלגברה ליניארית, ומצריכות גם פתרון של משוואות פולינומיות. בקורסים באנליזה מתמטית תופס מושג הגבול מקום מרכזי. בספר הזה אנחנו מעשירים את החומר הנלמד בקורסי האנליזה ומעניקים לקוראים כלים כמותיים יותר לניתוח אסימפטוטי של סדרות ופונקציות. חומר זה הוא אבן יסוד בהשכלתם של מדעני המחשב: אחד הכישורים החשובים ביותר שעליהם לפתח הוא ההבנה של קצב הגידול של משאבי החישוב הנדרשים לבעיה נתונה כשהקלט לבעיה גדל. פרק 7 מוקדש להקניה של שיטות ואינטואיציה בנושא זה. פרק 8 מסביר מושגי יסוד בהסתברות ואת הקשר שלהם למתמטיקה הבדידה. ואילו פרק 9 קושר בין תורת החבורות – משטחי היסוד של האלגברה – למתמטיקה בדידה, ובפרט לבעיות מניה.

עד כה התרכזנו בנושאים המתקדמים יותר שבספר, אולם חשוב להזכיר גם את הפרקים הראשונים המכסים חומר בסיסי בשטח זה. הספר פותח בשלושה פרקי מבוא על תורת הקבוצות, לוגיקה מתמטית ואינדוקציה מתמטית. בין היתר אנחנו מציגים שם את השיטות המרכזיות הנהוגות להוכחת משפטים במתמטיקה, ובהן הוכחה באינדוקציה והוכחה בדרך השלילה. אולם גם בפרקים בסיסיים אלה אפשר למצוא נושאים מתקדמים יותר. כך למשל, בפרק העוסק בתורת הקבוצות יש דיון בקבוצות סדורות חלקית, ובפרק העוסק באינדוקציה יש דיון בהרחבות של עקרון האינדוקציה לקבוצות סדורות חלקית. במוסדות רבים מוקנה רוב הידע הבסיסי המופיע בפרקים אלה בקורסים אחרים, והלימודים שם יתחילו מן הסתם בפרקים 4 ו-5 העוסקים בקומבינטוריקה ובתורת הגרפים בהתאמה, שהם אושיות היסוד של המתמטיקה הבדידה.

ניסינו לפנות למגוון רחב של קהלים, החל בתלמידי תיכון המתעניינים במתמטיקה ועד לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה. על מנת לעודד את התלמידים המתקדמים יותר, כללנו בספר גם חומר אודות התפתחויות מתקדמות יותר, בתקווה שיגרו את דמיונם וימשכו אותם

להמשיך ולהתפתח בשטח מקסים זה. כך מופיעים בספר גם תרגילים רבים ברמות קושי שונות. בכוננתנו לפרסם בבוא העת חוברת פתרונות.

מתמטיקה היא תחום בעל היסטוריה ארוכה. בין האנשים שתרמו לפיתוח החומר המופיע בספר יש כמה וכמה דמויות מרתקות. על מנת לקרב את הקוראים לדמויות מופת אלה, כללנו גם סיכומים היסטוריים קצרים על חלק מהחוקרים המרכזיים המוזכרים כאן.

הערה למורים: הניסיון שלנו ליצור ספר שיענה על הצרכים השונים במוסדות השונים הוביל לשפע כמותי, אולי מוגזם. אין זה אפשרי בשום אופן ללמד את כל הספר במסגרת קורס סמסטריאלי אחד. חלקים ממנו יכולים לשמש בהחלט גם בסיס לקורס מתקדם יותר לתואר בוגר. ניתן להשתמש בפרקים המתאימים כחומר נוסף לקורסים באלגברה ובהסתברות. ואילו הפרקים הראשונים העוסקים בתורת הקבוצות ובלוגיקה יכולים לשמש כעזר לקורס מתאים במוסדות שבהם נלמד חומר זה בקורס נפרד, בעוד שבמוסדות אחרים ידלגו מן הסתם על פרקים אלה. האפשרויות רבות, אנו נודה מאוד על הערותיכם, וננסה לכלול אותן במהדורות הבאות.

ועוד הערה: התאמצנו מאוד בניסיון לנפות את הספר משגיאות, אך איננו משלים את עצמנו. ברור לנו שנותרו טעויות. נודה מאוד לקוראים שידווחו לנו על טעויות בדואר אלקטרוני: michalp@mta.ac.il. נשמח להזכיר בגרסאות העתידיות את הקוראים שיעזרו לנו בעניין זה.

לסיים: ברצוננו להודות לכל אלה שעזרו לנו במלאכה. כמה מחברינו ועמיתינו הואילו לקרוא גרסאות קודמות של הספר. חלקם גם השתמשו בו להוראה וההערות שקיבלנו מהם הועילו מאוד לשפר את רמת הספר שבידיכם. כולם יעמדו על התודה: לור ברטל, רון הולצמן, מיקי טרסי, אלכס לובצקי, ערן לונדון, אהוד פרידגוט.

תודה לאחראים על מערכות המחשב במוסדותינו, דני ברניס וויקטור רומננקו, שסייעו לנו בהתגברות על תקלות מחשב. כמו-כן, תודה לחן-יה מימון על עזרתה בהדפסת גרסאות אין קץ של הספר. תודה מיוחדת לתלמה בן-צבי ולנחום בן-צבי שסייעו מכל הלב להביא את הספר לדפוס. נתי ליניאל מודה לבני משפחתו שעזרו ביצירת הספר, כל אחד על פי דרכו ודרכה.

שני המחברים אוהבים מאוד מתמטיקה בדידה, ואנו מקווים שאהבתנו לתחום הזה והנאתנו ממנו עולים מבין דפי הספר.