

סיכום - לינארית 1

28 בינואר 2010

מרצה: יבגני סטרשוב
מתרגלת: גילי שול

אין המרצה או המתרגלת קשורים לסיכום זה בשום דרך.

הערות יתקבלו בברכה - noga.rotman@gmail.com

תוכן עניינים

0.1	מבוא והגדרות בסיסיות	3
1	שדות	6
1.1	המציין של השדה	7
1.2	שדה המרוכבים - $\mathbb{C}$	10
2	מרחבים וקטורים	14
2.1	הגדרת המרחב והרבה דוגמאות	14
2.2	תלות ואי תלות לינארית	16
2.3	בסיס, מימד והקשרים ביניהם	19
2.4	תת מרחבים	24
2.5	תרגולים	31
3	המטריצה	39
3.1	העתקות לינאריות	39
3.2	המטריצה - הגדרות בסיסיות	41
3.3	גרעין ודמות של העתקות לינאריות - <i>Image, Kernal</i>	46
3.4	כפל (הרכבה) של העתקות לינאריות	50
3.5	העתקה הופכית	52
3.6	מטריצת מעבר בסיסים	55
3.7	מערכת משוואות	61
3.8	דירוג מטריצות - <i>The Gaussian Elimination</i>	70
3.9	דטרמיננטה של מטריצה	72
3.10	מינור של מטריצה והמטריצה המצורפת	83
3.11	הדרגה של העתקה לינארית	92
3.12	תרגולים	96

0.1 מבוא והגדרות בסיסיות

0.1.1 פרטי המרצה

18.10.2009

יבגני סטרשוב, שפרינצק 107. שעות קבלה - יום א' 13:00-14:00, טלפון 02-6584793¹.

ספר מומלץ - *G. Shilov - Linear Algebra*

0.1.2 הבעיה הבסיסית באלגברה לינארית -

נניח ונתונה לנו מערכת משוואות כלשהיא:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

נסמן את מערכת המשוואות הזו להיות *.

נניח שהמקדמים $a_{11}, a_{1,2}, \dots, a_{nn}$ וכמו כן $b_1, b_2, \dots, b_n$ ידועים.

נשאל:

1. אם הפתרון של * קיים?
2. אם קיים פתרון, האם הוא יחיד?
3. אם הפתרון אינו יחיד, מה ניתן לומר על קבוצת הפתרונות?

דוגמא:

ניקח $m = 1, n = 1$ וכמו כן $a, b \in \mathbb{R}$. אזי נקבל את המשוואה הבאה:

$$ax = b$$

נחפש את קבוצת הפתרונות של המשוואה.

1. אם $a \neq 0$ אזי $x = \frac{b}{a}$, וזהו פתרון יחיד.
2. אם $a = 0, b \neq 0$, אזי הפתרון אינו קיים.
3. אם $a = 0, b = 0$ אזי $\mathbb{R}$ היא קבוצת הפתרונות.

0.1.3 השדה ואקסיומות השדה

הגדרה 0.1 קבוצה $\mathbb{F}$ נקראת שדה (*field*) או שדה מספרים (*field of numbers*)

אם פעולות חיבור וכפל מוגדרות בקבוצה זו,

ומתקיימות אקסיומות חיבור וכפל.

¹"אתם יכולים להתקשר כל הזמן - אני לא מבטיח שאני אענה"

הגדרה 0.2 אקסיומות חיבור:

1. עבור כל אלמנטים α, β של $\mathbb{F}$ אלמנט $\alpha + \beta$ קיים ב- $\mathbb{F}$ ואלמנט זה יחיד.
2. קומטטיביות - עבור כל שני אלמנטים α, β של $\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
3. אסוציאטיביות - עבור כל אלמנטים α, β, γ של $\mathbb{F}$ מתקיים $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
4. קיים בשדה $\mathbb{F}$ אלמנט 0 כך שעבור כל אלמנט α של $\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha + 0 = \alpha$.
5. עבור כל אלמנט α של $\mathbb{F}$ שקיים פתרון γ של משוואה $\alpha + \gamma = 0$, ופתרון זה יחיד.

הגדרה 0.3 אקסיומות הכפל:

6. עבור כל שני אלמנטים α, β של $\mathbb{F}$ קיים אלמנט $\alpha \cdot \beta$ בשדה והוא יחיד.
7. עבור שני אלמנטים α, β של $\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
8. עבור אלמנטים α, β, γ של $\mathbb{F}$ מתקיים $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
9. קיים אלמנט 1 ב- $\mathbb{F}$ כך שעבור כל אלמנט α של $\mathbb{F}$ מתקיים $1 \cdot \alpha = \alpha$ וגם $1 \neq 0$.
10. קיום איבר הופכי - עבור כל אלמנט $\alpha \neq 0$ של $\mathbb{F}$ קיים אלמנט γ של $\mathbb{F}$ כך שמתקיים $\alpha \cdot \gamma = 1$.
11. חוק הפילוג - דיסטריביוטיביות: לכל אלמנטים α, β, γ ב- $\mathbb{F}$ מתקיים: $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.

דוגמא:

ניקח $F = \{N, E\}$

$$N + N = N$$

$$N + E = E$$

$$E + E = N$$

$$E + N = E$$

$$N + E = E$$

$$N \cdot N = N$$

$$N \cdot E = N$$

$$E \cdot E = E$$

$$E \cdot N = N$$

נטען כי זהו שדה!

נבדוק כי מתקיימות אקסיומות השדה, והן אכן מתקיימות! לדוגמא:

$$(N + E) + E \stackrel{?}{=} N + (E + E) = N$$

טענה 0.4 $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ זהו שדה!

הגדרה 0.5 שדה של מספרים מרוכבים (*field of complex numbers*) $\mathbb{C} = \{a + Ib \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

נגדיר את פעולת החיבור בצורה הבאה:

$$(a_1 + iIb_1) + (a_2 + Ib_2) := a_1 + a_2 + I(b_1 + b_2)$$

את פעולת הכפל נגדיר בצורה הבאה:

$$(a_1 + Ib_1) \cdot (a_2 + Ib_2) := (a_1a_2 - b_1b_2) + I(a_1b_2 + b_1a_2)$$

טענה 0.6 $\mathbb{C}$ הוא שדה!

מדוע?

נביט באיבר i .

$$i = 0 + I \cdot 1$$

$$i \cdot i = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = -1 + I \cdot 0$$

נשים לב שמספרים מהסוג $a + I \cdot 0$ הם כמו ממשיים: $i^2 = -1$.

הגדרה 0.7 שדה איזומורפי (*Isomorphic Field*)

ניקח $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}'$ שני שדות.

בנוסף נניח כי קיימת התאמה חד חד ערכית ועל בין $\mathbb{F}$ לבין $\mathbb{F}'$ כך שמתקיים:

$$\alpha \leftrightarrow \alpha', \alpha' \in \mathbb{F}', \alpha \in \mathbb{F}$$

$$\text{ואם } \beta \leftrightarrow \beta', \beta' \in \mathbb{F}', \beta \in \mathbb{F}$$

$$\text{אזי } \alpha \cdot \beta \leftrightarrow \alpha' \cdot \beta', \alpha + \beta \leftrightarrow \alpha' + \beta'$$

כעת, נביט במערכת המשוואות הבאה ובמטריצה שלה^{2 3}

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}, (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

0.1.4 מעט על מטריצות

הגדרה 0.8⁴ נניח $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{F}$

כאשר $\mathbb{F}$ הוא שדה נתון.

$$\text{אוסף כל האלמנטים} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

נקרא מטריצה $m \times n$ של אלמנטים בשדה $\mathbb{F}$.

²מיד נגדיר מטריצה, אל דאגה

³החישוב בסוף - זוהי הדטרמיננטה! ניתקל בה הרבה בהמשך...

⁴אין לזה קשר לסרטים - ניסיתי למצוא אבל לא הצלחתי! יבגני לכיתה

הגדרה 1.1 עבור שני איברים $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ נגדיר:

$$\alpha -_F \beta = \alpha + \gamma$$

כאשר γ הוא הפתרון של המשוואה:

$$\beta +_F \gamma = 0$$

וזו תקרא פעולת החיסור.

הגדרה 1.2 עבור שני איברים $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ($\beta \neq 0_F$) נגדיר:

$$\alpha \div_F \beta = \alpha \cdot_F \gamma$$

כאשר γ הוא הפתרון של המשוואה:

$$\beta \cdot_F \gamma = 1_F$$

וזו תקרא פעולת החילוק.

משפט 1.3 איבר 0_F הוא יחיד בשדה $\mathbb{F}$.

איבר 1_F הוא יחיד בשדה $\mathbb{F}$.

הוכחה: נוכיח את שני המשפטים באותה הצורה - נתחיל עם המשפט הראשון:

תחילה, נניח בשלילה כי קיימים שני אפסים $0, 0' \in \mathbb{F}$.

כעת, עבור שני איברים כלשהם $a, b \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$* = \begin{cases} a +_F 0_F = a \\ 0'_F +_F b = b \end{cases}$$

כעת, נציב ב-* $b = 0_F, a = 0'_F$ ונקבל:

$$* \begin{cases} 0'_F + 0_F = 0'_F \\ 0'_F +_F 0_F = 0_F \end{cases}$$

כלומר קיבלנו $0'_F = 0_F$, כפי שרצינו.

באותה שיטה נוכיח את המשפט השני -

נניח בשלילה כי קיימים שני איברים שונים $1_F, 1'_F \in \mathbb{F}$.

כעת, עבור שני איברים כלשהם $a, b \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$* \begin{cases} a_F \cdot 1'_F = a \\ 1_F \cdot_F b = b \end{cases}$$

כעת, נציב ב-* $b = 1'_F, a = 1_F$ ונקבל:

$$* \begin{cases} 1_F \cdot_F 1'_F = 1_F \\ 1_F \cdot_F 1'_F = 1'_F \end{cases}$$

כלומר קיבלנו $1'_F = 1_F$, כפי שרצינו.

■

1.0.5 סימונים

נסמן:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

עבור $n \in \mathbb{N}$ נסמן $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

עבור $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ב- a $[a]_n$ שארית המתקבלת על ידי חילוק של a ב- n .

לדוגמא: $[15]_4 = 3$, $[31]_{10} = 1$.

1.1 המציין של השדה

הגדרה 1.4 יהיו $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

נאמר $a \equiv b \pmod{n}$ אם מתקיים:

$$a = b + k \cdot n, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

דוגמא:

$$15 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$15 = 3 \cdot 4 + 3$$

הגדרה 1.5 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

הגדרה 1.6 נגדיר ב- $\mathbb{Z}_n$ פעולות חיבור וכפל עבור שני איברים כלשהם $a, b \in \mathbb{Z}_n$ בצורה הבאה:

$$a +_n b := [a + b]_n = [b + a]_n = b +_n a$$

$$a \cdot_n b := [a \cdot b]_n = [b \cdot a]_n = b \cdot_n a$$

משפט 1.7 לכל $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{Z}_n, \cdot_n, +_n)$

מקיים את כל התכונות של השדה, פרט (אולי) לקיום הופכי לכפל.

הוכחה: אקסיומות החיבור:

$$1. \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}_n; a +_n b = [a + b]_n$$

$$[a + b]_n \in \mathbb{Z}_n \text{ היא שארית, ולכן } [a + b]_n$$

$$2. \quad a +_n b = [a + b]_n = [b + a]_n = b +_n a$$

$$3. \quad a \leq \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \text{ כאשר } a +_n 0 = [a]_n = a$$

$$4. \quad (a +_n b) +_n c \stackrel{?}{=} a +_n (b +_n c)$$

כאשר האגף השמאלי שווה $[(a +_n b) + c]_n = [[a + b]_n + c]_n$

נביט לרגע בשתי טענות עזר:

טענה 1.8 במידה ומתקיים $a = a' \pmod{n}$, $b = b' \pmod{n}$ אזי מתקיים: $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

$$a + b \equiv a' + b' \pmod{n} \Rightarrow [a + b]_n = [a' + b']_n$$

$$a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod{n} \Rightarrow [a \cdot b]_n = [a' \cdot b']_n$$

הוכחה: (לא הוכחה פורמלית, רק רעיון כללי):

$$a = a' + kn, b = b' + mn \Rightarrow a + b = a' + b' + (k + m)n \Rightarrow a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$$

■

טענה 1.9 אם $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ אזי מתקיים $[a]_n = a \pmod{n}$ כעת,

$$[a + b]_n \stackrel{\text{claim 2}}{\equiv} (a + b) \pmod{n}, c \equiv c \pmod{n} \stackrel{\text{claim 1}}{\Rightarrow} [a + b]_n + c \equiv (a + b) + c \pmod{n}$$

$$= [[a + b]_n + c]_n = [a + b + c]_n = [a + [b + c]_n]_n = a +_n (b +_n c)$$

5. קיום איבר נגדי ביחס לחיבור:

נניח ש- $a = 0$, אזי $-a = 0$.

נניח ש- $a \in [1, 2, \dots, n-1]$, אזי $-a = n - a$.

אקסיומות הכפל נבדקות באותה הצורה.

25.10.2009

■

משפט 1.10 כאשר n הוא מספר ראשוני,

$(\mathbb{Z}_{n-1}, +_{n-1}, \cdot_{n-1})$ הוא שדה.

הוכחה: ניקח $1 \leq l \leq n-1$, ונרצה להראות כי l^{-1} קיים בקבוצה $\mathbb{Z}_n$.

נתבונן בקבוצה $\{0 \cdot_n l, 1 \cdot_n l, \dots, (n-1) \cdot_n l\}$. מספיק להראות כי כל האיברים בקבוצה זו הם שונים אחד מהשני.

מדוע?

אם זה נכון, אזי קיים P כך שמתקיים $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $P \cdot_n l = 1$, אזי $l^{-1} = P$.

נניח שמתקיים $k \cdot_n l = m \cdot_n l, 0 \leq k < m \leq (n-1)$.

אזי:

$$\frac{(m-k)l}{n} = j, j \in \mathbb{Z}$$

⁵*, ואז $k \cdot l = m \cdot l - j \cdot n$. אבל, * לא יכול להיות, מכיוון ש- n מספר ראשוני (ושני המספרים k, m קטנים מ- n). ■

משפט 1.11 נניח ש- n הוא אינו מספר ראשוני. אזי:

⁵שהרי כפל במודולו מתבצע בצורה הבאה:
 $a_n b = a' \cdot_n b' \Rightarrow a \cdot b = a' \cdot b' + j \cdot n$

טענה 1.12 $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ איז שדה. **הוכחה:** ניתן לרשום $n = kl$ $1 \leq k, l \leq n-1$

נניח בשלילה כי $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ הוא שדה.

אזי קיים k^{-1} .

מכיוון שכך, נביט במכפלה הבאה:

$$l = k^{-1} \cdot_n (k \cdot_n l) = k^{-1} \cdot_n [kl]_n = k_n^{-1} [n]_n = 0$$

הגדרה 1.13 המציין של השדה $\mathbb{F}$ - *characteristic* הוא המספר הטבעי k המינימלי שעבורו מתקיים:

$$\underbrace{*1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} + \dots + 1_{\mathbb{F}}}_{k \text{ times}} = 0_{\mathbb{F}}$$

נסמן $\text{char}(\mathbb{F}) = k$

אם $*$ אינו מתקיים עבור כל $k \in \mathbb{N}$, אזי נאמר $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$.

משפט 1.14 אם $\text{char}(\mathbb{F}) = n \neq 0$

אזי n הוא מספר ראשוני.

הוכחה: נניח בשלילה כי n אינו מספר ראשוני.

אזי ניקח $n = kl$ כאשר $1 < k, l < n$.

ניקח:

$$\begin{aligned} \underbrace{(1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} + \dots + 1_{\mathbb{F}})}_{k \text{ times}} \cdot \underbrace{(1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} + \dots + 1_{\mathbb{F}})}_{l \text{ times}} &= \underbrace{(1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} + \dots + 1_{\mathbb{F}})}_{l \text{ times}} + \dots + \underbrace{(1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} + \dots + 1_{\mathbb{F}})}_{l \text{ times}} \\ &= \underbrace{(1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} + \dots + 1_{\mathbb{F}})}_{n \text{ times}} = 0 \end{aligned}$$

$$\underbrace{(1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} + \dots + 1_{\mathbb{F}})}_{l \text{ times}} = 0 \text{ או } \underbrace{(1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} + \dots + 1_{\mathbb{F}})}_{k \text{ times}} = 0$$

אבל זה לא יכול להיות, כי הגדרנו את n להיות המספר המינימלי עבורו המשוואה הזו שווה לאפס, בסתירה!

משפט 1.15 יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי, q מספר האיברים בשדה $\mathbb{F}$.

טענה 1.16 עבור $a \in \mathbb{F}$, $a \neq 0_{\mathbb{F}}$:

$$a^{-1} = \begin{cases} 1_{\mathbb{F}} & q = 2 \\ a^{q-2} & q > 2 \end{cases}$$

הוכחה: נניח כי $q = 2$.

אזי $\mathbb{F} = \{0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}}\}$, $a = 1_{\mathbb{F}}$.

אזי $a^{-1} = 1_{\mathbb{F}}$, וסיימנו.

נניח כי $q > 2$. אזי נתבונן בקבוצה:

$B = \{a_1, a_2, \dots, a_{q-1}\}$. קבוצה זו כוללת את כל האיברים של $\mathbb{F}$ פרט ל- $0_{\mathbb{F}}$.

$a \neq 0_{\mathbb{F}}$, ולכן נוכל לבנות קבוצה $\{aa_1, aa_2, \dots, aa_{q-1}\}$.

קבוצה זו כוללת את אותם איברים כמו קבוצה B . לכן:

$$\prod_{i=1}^{q-1} a_i = \prod_{i=1}^{q-1} (aa_i) = a^{q-1} \left(\prod_{i=1}^{q-1} a_i \right)$$

כמו כן $\prod_{i=1}^{q-1} a_i \neq 0_{\mathbb{F}} \Leftarrow a^{q-1} = 1_{\mathbb{F}}$, כלומר $a^{q-2} = a^{-1}$ כפי שרצינו.

1.2 שדה המרוכבים - $\mathbb{C}$

סעיף זה מתוך תרגול מתאריך 26.10.2009.

1.2.1 הגדרות

הגדרה 1.17 מספר מרוכב הוא זוג סדור (x, y) כאשר $x, y \in \mathbb{R}$ (בהמשך נסמן במקום זאת $(x + iy)$).
על קבוצה זו מגדירים חיבור וכפל בצורה הבאה:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (\text{החיבור השמאלי - במרוכבים, הימני - בממשיים})$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

המרוכבים הם שדה ביחס לפעולות האלו.

$0_{\mathbb{C}}$ של המרוכבים הוא $(0, 0)$.

$1_{\mathbb{C}}$ של המרוכבים הוא $(1, 0)$. נראה שזה נכון:

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 + y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) \quad \checkmark$$

הנגדי ל- (x, y) : $(-x, -y)$.

ההופכי ל- (x, y) אינו $(0, 0)$, אלא $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ נראה שזה נכון:

$$(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-xy}{x^2+y^2} + \frac{yx}{x^2+y^2}\right) = (1, 0) \quad \checkmark$$

נסמן $\mathbb{R} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ונתבונן בהעתקה $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \alpha(x) = (x, 0)$. מה נוכל לומר על ההעתקה הזו?

ההעתקה היא חח"ע, תמונתה היא $\mathbb{R}$, והיא מכבדת את החיבור והכפל, כלומר מתקיים:

$$\alpha \cdot (x_1 + x_2) = \alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2 \Rightarrow (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0)$$

$$\alpha \cdot (x_1 \cdot x_2) = \alpha \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot x_2 \Rightarrow (x_1 \cdot x_2, 0) = (x_1, 0) \cdot (x_2, 0)$$

לכן, אפשר לזהות את $\mathbb{R}$ כתת קבוצה של $\mathbb{C}$ עם אותן הפעולות -

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, כלומר - $\mathbb{R}$ הוא תת שדה של $\mathbb{C}$.

נשים לב כי:

$$(1, 0)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

$$(0, 1) = i, \quad i^2 = -1$$

מזהים עבור $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x, y) \Leftrightarrow x + yi$$

$$(x_1, y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 y_1) i$$

הגדרה 1.18 אם $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, אזי מסמנים את "החלק האמיתי" ו"החלק המדומה" בצורה הבאה:

$$\operatorname{Re}(z) = x; \quad \operatorname{Im}(z) = y$$

וכמו כן, מסמנים את הגודל: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, והצמוד: $\bar{z} = (x, -y) = x - yi$.

1.2.2 משמעות גיאומטרית

אם $(x, y) \neq (0, 0)$, אזי יש אפשרות נוספת להציג אותו -

באמצעות המרחק מראשית הצירים r והזווית עם הכיוון החיובי θ .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

הזווית θ נקבעת עד כדי 2π .

הגדרה 1.19 הצגה בצורה (x, y) נקראת הצגה קרטזית.

הגדרה 1.20 הצגה בצורה (r, θ) נקראת הצגה קוטבית/פולרית.

איך עוברים בין ההצגות השונות?

$$\text{אם נתונים } (r, \theta): \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$\text{אם נתונים } (x, y): \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{y}{x} = \tan \theta$$

נשים לב כי $\tan$ היא פונקציה מחזורית.

דוגמאות:

1. נתון $1 + i$, דהיינו $(1, 1)$. מהי הצורה הקרטזית?

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\theta = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

2. נתון $1 - i$. אזי:

$$\theta = \frac{-\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$$

3. נתון $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. אזי:

$$r = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

⁶מדוע? כל 2π (או כפולה שלו) נגיע לאותה הנקודה.

בצורה קוטבית (פולרית):

חיבור:

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

כפל:

$$z_1 = (r_1, \theta_1), z_2 = (r_2, \theta_2) \cdot z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2, \theta_1 + \theta_2)$$

בצורה קרטזית:

נסמן:

$$z_1 = (r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1)$$

$$z_2 = (r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2), r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1))$$

$$= (r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2), r_1 \cdot r_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

אם נסמן $z_1 \cdot z_2 = (r, \theta)$ אזי $r = r_1 \cdot r_2$, $\theta = \theta_1 + \theta_2$

נוכל להגדיר: $z^0 = (1, 0)$ ובאינדוקציה z^{n+1} .

אם כך, בצורה קוטבית נקבל:

$$z = (r, \theta_1), z^n = (r^n, n\theta)$$

לדוגמא:

בצורה קרטזית - $z = 1 + i$

בצורה קוטבית - $z = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

$$z^6 = \left(\sqrt{2}^6, \frac{6\pi}{4} \right) = \left(8, \frac{3\pi}{2} \right) = -8i$$

הגדרה 1.21 אם $z \in \mathbb{C}$ ו- $n \in \mathbb{N}$,

אז שורש של z מסדר n הוא מספר מרוכב w כך ש- $w^n = z$.

מסקנה 1.22 אם ההצגה הקוטבית של z היא (r, θ) ,

w הוא שורש מסדר n של z בעל הצגה קוטבית (l, α) ,

אז $l^n = r$, $n\alpha = \theta + 2\pi k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$.

הגדרה זו שקולה לכך ש- $l = \sqrt[n]{r}$,

וכמו כן $\alpha = \frac{\theta + 2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

מסקנה 1.23 אם $z \neq 0$ אזי ל- $z = (r, \theta)$ יש בדיוק n שורשים מסדר n .

ההצגות הקוטביות הן $(\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + 2\pi \cdot \frac{k}{n}) = (\sqrt[n]{r}, \frac{\theta + 2\pi k}{n})$ כאשר $k = 0, 1, \dots, n-1$.

מסקנה 1.24 מדיון בכיתה - באקסיומות השדה, אין צורך לדרוש יחידות לגבי האיבר הנייטרלי לחיבור - היחידות נובעת ישירות מההגדרה ומשאר האקסיומות.

מסקנה 1.25 גם לכפל אין צורך לדרוש את יחידות האיבר הנייטרלי.

מסקנה 1.26 באקסיומות השדה אין צורך לדרוש יחידות עבור האיבר הנגדי ועבור האיבר ההופכי.

2 מרחבים וקטורים

2.1 הגדרת המרחב והרבה דוגמאות

הגדרה 2.1 נאמר שקבוצה V הוא מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, אם מוגדרים עבור איברי V פעולות חיבור וכפל על איברים של $\mathbb{F}$ (סקלרים), כך שמתקיימות האקסיומות הבאות: אקסיומות החיבור:⁷

$$1. \forall \gamma_1, \gamma_2 \in V; \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_1 \text{ כאשר } \gamma \text{ הוא וקטור (סגירות לחיבור).}$$

$$2. \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_1$$

$$3. \gamma_1 + (\gamma_2 + \gamma_3) = (\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3$$

$$4. \forall \gamma \in V \exists 0_V \in V \ 0_V + \gamma = \gamma$$

$$5. \text{לכל } \gamma \in V \text{ קיים } -\gamma \text{ כך ש: } \gamma + (-\gamma) = 0_V$$

אקסיומות הכפל:

$$1. \forall d \in \mathbb{F} \ \gamma \in V, \ d \cdot \gamma \in V \text{ (סגירות לכפל בסקלר).}$$

$$2. \forall \gamma \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \ \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

$$3. \forall \gamma_1, \gamma_2 \in V, \alpha \in \mathbb{F}, \ \alpha \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) = \alpha \cdot \gamma_1 + \alpha \cdot \gamma_2$$

$$4. \forall \gamma \in V, \ 1_{\mathbb{F}} \cdot \gamma = \gamma$$

$$5. \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \gamma \in V; \ \gamma \cdot (\alpha + \beta) = \gamma \cdot \alpha + \gamma \cdot \beta$$

28.10.2009

לדוגמא:

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \\ (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &:= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ d(x_1, \dots, x_n) &:= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \ \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

טענה 2.2 V הוא מרחב וקטורי.

דוגמא נוספת:

יהי $\mathbb{F}$ שדה כלשהוא.

$$\begin{aligned} V &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}\} \\ (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &:= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ d(x_1, \dots, x_n) &:= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \ \alpha \in \mathbb{F} \end{aligned}$$

טענה 2.3 V הוא מרחב וקטורי.

דוגמא שלישית:

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= \mathbb{R}, \ V = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha + \beta + \gamma = 0, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \\ (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) &:= (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2) \\ \tau(\alpha, \beta, \gamma) &:= (\tau\alpha, \tau\beta, \tau\gamma), \ \tau \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

⁷חמש אקסיומות אלו הן ההגדרה לחבורה אבלית.

טענה 2.4 גם זהו מרחב וקטורי (מושאר לקורא הנמרץ).

בהמשך לדוגמא מעלה - נניח שמגדירים פעולת כפל ב- V בעזרת:

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \gamma_1 \gamma_2)$$

אזי מתקיים גם $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0$,

אבל לא נובע מזה כי $\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0$!

לכן לא מגדירים פעולת כפל.

דוגמא רביעית:

יהיה מרחב וקטורי P מעל שדה $\mathbb{F}$ כלשהוא,

כאשר P היא קבוצת כל הפולינומים מעל השדה $\mathbb{F}$ במשתנה t .

פולינום במשתנה t מעל שדה $\mathbb{F}$ הוא ביטוי מהצורה:

$$P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0; \quad a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{F}$$

כאשר פעולת החיבור מוגדרת בצורה הבאה:

$$q_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_0, \quad n \geq m, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}, \quad b_1, \dots, b_m \in \mathbb{F}$$

$$P_n(t) + q_m(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + (a_m + b_m) t^m + \dots + (a_0 + b_0)$$

את פעולת הכפל בסקלר נגדיר בצורה הבאה:

$$\alpha \in \mathbb{F}, \quad (\alpha \cdot p_n(t)) = \alpha a_n t^n + \alpha a_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha a_0$$

טענה 2.5 P הוא מרחב וקטורי.

דוגמא חמישית:

$$V = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{F} = \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\alpha \square (x_1, x_2) := (\alpha^2 x_1, \alpha^2 x_2); \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

טענה 2.6 V אינו מרחב וקטורי.

הוכחה: נראה כי דיסטריביוטיביות לא מתקיימת במקרה הזה.

$$(\alpha + \beta) \square (x_1, x_2) = ((\alpha + \beta)^2 x_1, (\alpha + \beta)^2 x_2)$$

$$\beta \square (x_1, x_2) = (\beta^2 x_1, \beta^2 x_2)$$

$$\alpha \square (\beta \square (x_1, x_2)) = (\alpha^2 \beta^2 x_1, \alpha^2 \beta^2 x_2)$$

כלומר אין שיוויון, ולכן האקסיומה לא מתקיימת. ■

דוגמא שיטית:

$$V = \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{F}, x_2 \in \mathbb{F}\}, \mathbb{F} \text{ is, the, field}$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha \square (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2); \alpha \in \mathbb{R}$$

טענה 2.7 V אינו מרחב וקטורי.

הוכחה: ניקח $\alpha = 1_{\mathbb{F}}$, נראה כי $1_{\mathbb{F}}v \neq v$.

$$1_{\mathbb{F}} \square (x_1, x_2) = (x_1 x_2, 0) \neq (x_1, x_2) \text{ וסיימנו!}$$

דוגמא שביעית ואחרונה:

$$V = \mathbb{R}_+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}, \mathbb{F} = \mathbb{R}$$

$$x \boxplus y := x \cdot y$$

$$\alpha \square y := y^\alpha; \alpha \in \mathbb{R}$$

טענה 2.8 V הוא מרחב וקטורי!

הוכחה: נוכיח את כל האקסיומות:

חיבור:

$$1. x \boxplus y = xy > 0 \text{ מכיוון } x, y > 0 \text{ נוכל להסיק כי } xy \in \mathbb{R}_+$$

$$2. x \boxplus y = xy = yx = y \boxplus x$$

$$3. x \boxplus (y \boxplus z) = x \boxplus yz = xyz = xy \boxplus z = (x \boxplus y) \boxplus z$$

$$4. x \boxplus 0_V = x \Rightarrow 0_V = 1 \Rightarrow x \boxplus 1 = x \cdot 1 = x$$

$$5. x \boxplus (-x) = 1 \Rightarrow -x = \frac{1}{x}$$

כפל:

$$1. x^\alpha \in \mathbb{R} \text{ ו} x > 0, \alpha \in \mathbb{R} \text{ נוכיח להסיק כי } x^\alpha \in \mathbb{R}_+$$

$$2. 1_{\mathbb{F}} \square x = x^1 = x$$

$$3. \alpha \square (\beta \square x) = \alpha \square x^\beta = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \square x$$

$$4. (\alpha + \beta) \square x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \boxplus x^\beta = \alpha \square x + \beta \square x$$

$$5. \alpha \square (x \boxplus y) = \alpha \square xy = (xy)^\alpha = x^\alpha \boxplus y^\alpha = \alpha \square x \boxplus \alpha \square y$$

2.2 תלות ואי תלות לינארית

הגדרה 2.9 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

נאמר שקבוצה $K = \{v_1, \dots, v_k\}$ כאשר $\phi \neq K$ היא תלויה לינארית,

אם קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ סקלרים כך שקיים לפחות אחד α_i עבורו $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq k$,

$$\text{עבורם } \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$$

⁸כלומר, לפחות אחד מהסקלרים אינו אפס.

הערה 2.10 אם הקבוצה K כוללת את הוקטור 0_V , אזי K תלויה לינארית.

מדוע? נגיד ש- $v_1 = 0$, אזי ניקח $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

אזי מתקיים $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$.

דוגמא:

$$V = P; K = \left\{ \overbrace{1-t}^{v_1}; \overbrace{t(1-t)}^{v_2}; \overbrace{-1+t^2}^{v_3} \right\}$$

חיבור שלהם יתן אפס, ולכן הקבוצה K תלויה לינארית במרחב P .

1.11.2009

הערה 2.11 נסמן - הקבוצה הריקה $\{\phi\}$ היא בלתי תלויה לינארית (בת"ל).

הגדרה 2.12 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

קבוצה סופית $K = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ היא בלתי תלויה לינארית אם מתקיים

$$\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n = 0$$

דוגמא:

$$V = \mathbb{R}^2, \mathbb{F} = \mathbb{R}$$

נניח שהקבוצה $K = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ תלויה לינארית,

$$\vec{v}_1 \neq 0, \vec{v}_2 = 0$$

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = 0_V$$

$$\alpha_1 \neq 0$$

$$\vec{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{v}_2$$

כלומר, שני הוקטורים הללו על אותו הישר.

נניח שהקבוצה $K = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

אזי שני הוקטורים לא יהיו על אותו הישר.

דוגמא:

$$V = \mathbb{R}^3, \mathbb{F} = \mathbb{R}$$

אזי $K = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, $\vec{v}_1 \neq 0, \vec{v}_2 \neq 0, \vec{v}_3 \neq 0$, תלויה לינארית. אזי:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = 0, \alpha_1 \neq 0$$

$$\vec{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{v}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \vec{v}_3$$

ואז הוקטורים $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ על אותו המישור.

הגדרה 2.13 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

וקטור $v \in V$ נקרא צירוף לינארי של וקטורים $v_1, \dots, v_n$ אם מתקיים:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}, v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

משפט 2.14 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

תהי $K \subset V$ קבוצה סופית, $K \neq \emptyset$.

וכמו כן תהי $K' \subset K, K' \neq \emptyset$, קבוצה תלויה לינארית.

אזי K גם כן תלויה לינארית.

הוכחה: $K' = \{v_1, \dots, v_k\}$

מתקיים $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$

כאשר לא כל הסקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ הם אפס.

$K = \{u_1, \dots, u_n\}, K' \subset K$

קיימים $u_1, \dots, u_k$ כך שמתקיים:

$$u_{i_1} = v_1, \dots, u_{i_k} = v_k$$

נבחר סקלרים $\beta_1, \dots, \beta_n$ כך שמתקיים:

$\beta_{i_1} = \alpha_1, \dots, \beta_{i_k} = \alpha_k$, ואחרים שווים לאפס. אזי, יתקיים:

$$\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n = 0_V$$

ולא כל $\beta_1, \dots, \beta_n$ שווים לאפס, ולכן K תלויה לינארית (לפי ההגדרה).

משפט 2.15 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

תהי $K \subset V, \{v_1, \dots, v_n\} = K, v_1 \neq 0, \dots, v_n \neq 0$.

שני התנאים הבאים שקולים:

א. קבוצה K היא תלויה לינארית.

ב. קיים $k, 2 \leq k \leq n$, כך שוקטור v_k הוא צירוף לינארי של $v_1, \dots, v_{k-1}$.

הוכחה: ב' $\Rightarrow$ א':

נניח ש- k הוא המספר המינימלי שעבורו מתקיים:

$$1. \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

$$2. 2 \leq k \leq n$$

$$3. \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ הם לא כולם אפס.}$$

כמו כן ידוע כי $\alpha_k \neq 0$.

מדוע $\alpha_k \neq 0$? נניח בשלילה כי $\alpha_k = 0$.

אזי מתקיים:

$$1. \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} = 0$$

$$2. \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \text{ לא כולם אפס.}$$

אם $2 \leq k-1 \leq n$ יש לנו סתירה, שהרי אז k אינו המינימלי המקיים את התנאים 1-3.

לדוגמא:

$$\text{נניח } k=2, \alpha_2=0$$

אזי $\alpha_1 v_1 = 0, \alpha_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = 0, \alpha_1 = 0$, וזה לא יכול להיות לפי ההגדרה שלנו.

מ-1 ומכך ש- $\alpha_k \neq 0$ נובע:

$$v_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} v_{k-1}$$

⁹ זהו משפט שסיביר מאוד שיופיע במבחן לפי יבגני!!

¹⁰ מעתה, כשנסמן n וקטורים הכולנה היא לקבוצה סופית.

(פשוט העברנו אגפים וחילקנו ב- α_k).

כלומר v_k הוא צירוף לינארי של $v_1, \dots, v_{k-1}$, כפי שרצינו.
ב'א':

מתקיים $2 \leq k \leq n, v_k = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{k-1} v_{k-1}$

לכן הקבוצה $\{v_1, \dots, v_k\}$ תלויה לינארית.

$\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset K \Leftarrow$ ולכן על פי 2.14

K היא קבוצה תלויה לינארית.

2.3 בסיס, מימד והקשרים ביניהם

2.3.1 בסיס של מרחב וקטורי

הגדרה 2.16 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

קבוצה B תקרא בסיס של המרחב הוקטורי V אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $B \subset V$.

2. B היא קבוצה בלתי תלויה לינארית.

3. כל וקטור $v \in V$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים מ- B ¹¹.

הגדרה 2.17 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$,

ויהי B בסיס למרחב V .

אם B היא קבוצה סופית (בעל מספר סופי של וקטורים),

V יקרא מרחב וקטורי בעל מימד סופי.

דוגמא:

P - מרחב הפולינומים במשתנה t .

$B = \{1, t, t^2, \dots\}$ בסיס ל- P .

B אינה קבוצה סופית, ולכן P אינו מרחב בעל מימד סופי.

דוגמא נוספת:

מרחב וקטורי $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

$B = \{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\}$ קבוצה בה n וקטורים,

ולכן $\mathbb{R}^n$ הוא מרחב וקטורי בעל מימד סופי.

4.11.2009

טענה 2.18 יהי V מרחב וקטורי בעל מימד סופי, B בסיס ל- V ,

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $\alpha \in \mathbb{F}$

אזי v מגדיר את $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ באופן יחיד. **הוכחה:** נניח בשלילה כי הטענה אינה נכונה.

אזי גם $v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$, $\beta_i \in \mathbb{F}$

$0_V = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) v_i$,

$0_V = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n$

$v_1, \dots, v_n$ היא קבוצה בלתי תלויה לינארית (כי קבוצה זו היא בסיס).

אזי $\alpha_i - \beta_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq n$. אזי $\alpha_i = \beta_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.

¹¹הערת הכותבת - שימו לב שבעצם ההגדרה הזו שקולה לעובדה שבסיס הוא הקבוצה הבלתי תלויה לינארית הגדולה ביותר במרחב הוקטורי - כל וקטור שיתווסף אליה יהיה תלוי לינארית באחרים.

משפט 2.19 יהי V מרחב וקטורי בעל מימד סופי,

$$U = \{u_1, \dots, u_m\} \subset V \text{ קבוצה בלתי תלויה לינארית.}$$

במקרה זה ניתן להשלים את U לבסיס ב- V ,

$$u_{m+1}, \dots, u_{m+p} \subset V \text{ כלומר קיימים}$$

כך שהקבוצה $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_{m+p}\}$ היא בסיס ל- V .

הוכחה: יהי $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס במרחב V .

$$S^{(0)} = \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\} \text{ קבוצה זו היא תלויה לינארית}^{12}.$$

אזי, קיים $1 \leq i \leq n$ כך שוקטור v_i הוא צירוף לינארי של $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_{i-1}$.¹³

"נזרוק" את הוקטור הבעייתי ונקבל את הקבוצה $S^{(1)} = \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$.

אם $S^{(1)}$ היא בלתי תלויה לינארית, אז המשפט הוכח¹⁴, וסיימנו.

אם לא -

נחזור על התהליך עד ש"ניפטר" מכל הוקטורים התלויים לינארית,

עד שנקבל קבוצה בלתי תלויה לינארית.

למה 2.20 יהי V מרחב וקטורי בעל מימד סופי,

$$S = \{v_1, \dots, v_n\}, \text{ כל וקטור ב-} V \text{ הוא צירוף לינארי של הוקטורים ב-} \{v_1, \dots, v_n\}^{15}.$$

כמו כן, $L = \{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ בלתי תלויה לינארית.

$$\text{אזי } n \geq m.$$

הוכחה: תהי קבוצה $S^{(m)} = \{u_m, v_1, \dots, v_n\}$.

קבוצה $S^{(m)}$ היא תלויה לינארית, כי הרי u_m הוא צ"ל של $v_1, \dots, v_n$.

אזי, קיים $1 \leq i \leq n$ כך שוקטור v_i הוא צ"ל של קודמיו.

$$\text{נגדיר } S^{(m-1)} = \{u_{m-1}, u_m, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$$

וקטור u_{m-1} הוא צ"ל של וקטורים $v_1, \dots, v_n$,

והוקטור v_i הוא צ"ל של הוקטורים הקודמים לו, כלומר $u_m, v_1, \dots, v_{i-1}$

לכן u_{m-1} הוא צ"ל של הוקטורים $u_m, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$.¹⁶

ומכאן נובע כי $S^{(m-1)}$ תלויה לינארית.

כעת נעשה את אותו התהליך עבור $S^{(m-1)}$ -

כלומר מהתלות הלינארית אנו מסיקים כי קיים $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$

כך שהוקטור v_j הוא צירוף לינארי של קודמיו.

$$\text{נגדיר } S^{(m-2)} = \{u_{m-2}, u_{m-1}, u_m, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\}$$

מהתהליך שעשינו לפני כן, גם קבוצה זו ת"ל,

¹² כל וקטור ב- V הוא צירוף לינארי של איברי הבסיס, כולל הוקטורים $u_1, \dots, u_m$.
¹³ $1 \leq k \leq m$ אינו צירוף לינארי של קודמיו, כי הקבוצה $\{u_1, \dots, u_m\}$ היא בלתי תלויה לינארית.
¹⁴ שהרי כל וקטור במרחב הוא בעצם צירוף לינארי של $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$. מצד שני v_i הוא צירוף לינארי של $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_{i-1}$. מכאן נובע שכל וקטור במרחב V הוא צירוף לינארי של וקטורים מקבוצה $S^{(1)}$.
¹⁵ נשים לב שאין זה אומר ש- $S^{(1)}$ הוא בסיס, כי לא אמרנו דבר על תלות לינארית בין הוקטורים.
¹⁶ מדוע? כאמור v_i תלוי לינארית בוקטורים $u_m, v_1, \dots, v_{i-1}$. כלומר, נוכל "ליצור" אותו מהוקטורים הללו, ולכן נוכל להוריד אותו מהקבוצה של הוקטורים היוצרים את u_{m-1} (איברי S), בצירוף u_m , בו כאמור v_{i-1} תלוי לינארית. ההוכחה עד החלק הזה מראה שבעצם נוכל להחליף בין הוקטורים ולקבל קבוצה תלויה לינארית. לכן, למרבה ההפתעה, חלק מהממצים מלמדים את הטענה הזו כ"למת ההחלפה". העובדה כי $n \geq m$ מופיעה כמשפט נפרד ע"י מרצים אלו.

וכן הלאה...

נניח בשלילה כי $m > n$.

כלומר, אם נמשיך עם התהליך,

בסופו של דבר "נעזף" את כל הוקטורים v_i ,

ונשאר עם הקבוצה $S^{(k)} = \{u_k, \dots, u_m\}$.

לפי התהליך שראינו מעלה,

זוהי קבוצה ת"ל.

אבל, הנחת הלמה היא שקבוצה זו בת"ל,

לכן הגענו לסתירה!

כלומר $n \geq m$, כפי שרצינו להראות.

8.11.2009

משפט 2.21 יהי V מרחב וקטורי בעל מימד סופי,

ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ בסיס ב- V ,

וגם $B' = \{u_1, \dots, u_m\}$ בסיס ב- V ,

אזי $n = m$.

כלומר בכל בסיס ב- V ישנו אותו מספר איברים.¹⁷

דוגמא:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

אזי יהיו:

$$B = \{(1, 0), (0, 1)\} \quad B' = \{(1, -1), (1, 1)\}$$

שני בסיסים שונים.

קל לראות כי הוקטורים בלתי תלויים לינארית. **הוכחה:** מכיוון ו- B בסיס,

כל וקטור במרחב V הוא צירוף לינארי של הוקטורים מקבוצה B .

הקבוצה B' בלתי תלויה לינארית.

מהלמה 2.20 שהוכחנו, $n \geq m$.

באותה הצורה, מכיוון ו- B' בסיס,

כל וקטור במרחב V הוא צירוף לינארי של הוקטורים מקבוצה B' .

קבוצה B היא בלתי תלויה לינארית.

מהלמה 2.20 שהוכחנו, $m \geq n$.

ולכן, בסה"כ $m = n$, כמתבקש.

¹⁷ גם זה משפט מאוד קריטי שעלול להופיע במבחן!

2.3.2 מימד של מרחב וקטורי

הגדרה 2.22 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

נגדיר את המימד של המרחב הווקטורי (*dimension of a vector space*) להיות:

1. אם $V = \phi$, אזי $\dim V = 0$.

2. אם V בעל מימד סופי, $\dim V = n$,

כאשר n הוא מספר האיברים בבסיס של V .

3. אם V אינו בעל מימד סופי, אזי $\dim V = \infty$.

טענה 2.23 יהי V מרחב וקטורי, $n > 0$, $\dim V = n$.

$$U = \{u_1, \dots, u_{n+1}\} \subset V$$

אזי הקבוצה U תלויה לינארית.

הוכחה: נניח בשלילה כי הטענה אינה נכונה,

כלומר U בלתי תלויה לינארית.

לפי המשפט 2.19 שהוכחנו,

ניתן להשלים את U לבסיס B ,

כל שמספר האיברים ב- B יהיה גדול מ- $n+1$.

זוהי סתירה להגדרת המימד! ולכן סיימנו.

משפט 2.24 יהי V מרחב וקטורי, $\dim V = n$.

$$U = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$$

אזי שני התנאים הבאים הם שקולים:

א. U בסיס למרחב הווקטורי V .

ב. U קבוצה בלתי תלויה לינארית.

הוכחה: א' $\Rightarrow$ ב'

לפי ההגדרה של הבסיס.

ב' $\Rightarrow$ א'

נניח בשלילה כי U אינה בסיס.

אזי לפי משפט 2.19,

ניתן להשלים את U לבסיס עם מספר איברים $n <$

בסתירה להנחה כי $\dim V = n$!

2.3.3 איזומורפיזם

הגדרה 2.25 העתקה בין קבוצה A לקבוצה B ,

היא פעולה המעבירה איברים של A לאיברים של B .

הגדרה 2.26 T היא העתקה חח"ע, אם:

$$T(v_1) \neq T(v_2) \Leftarrow v_1 \neq v_2$$

הגדרה 2.27 T היא העתקה על W ,

אם לכל $w \in W$ קיים $v \in V$ כך ש- $T(v) = w$.

הגדרה 2.28 יהיו V, W שני מרחבים וקטוריים מעל אותו השדה $\mathbb{F}$.

תהי T העתקה מ- V ל- W , כלומר $T: V \rightarrow W$.

אם T היא חח"ע ועל, ובנוסף,

עבור כל $v_1, v_2 \in V, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$,

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$$

אזי V, W יקראו מרחבים איזומורפיים,

ו- T נקרא איזומורפיזם בין V לבין W .

משפט 2.29 יהיו V, W מרחבים וקטוריים איזומורפיים בעלי מימד סופי.

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V .

כמו כן תהי T העתקה $T: V \rightarrow W$ כאשר T איזומורפיזם.

אזי:

$$1. \quad T(B) := \{T(v_1), \dots, T(v_n)\} \text{ הוא בסיס ל-} W.$$

$$2. \quad \dim V = \dim W.$$

הוכחה: מספיק להראות שהקבוצה $T(B) = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ היא תלויה לינארית ב- W .

מדוע זה יספיק לנו?

ניקח $w \in W$. קיים $v \in V$ כך שמתקיים $w = T(v)$.

$v_1, \dots, v_n$ כאמור בסיס, ולכן נוכל לכתוב $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$,

אזי מתקיים:

$$w = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)$$

ומהתכונות של T הביטוי הזה שווה ל- $\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n)$

כלומר כל וקטור $w \in W$ הוא צ"ל של הוקטורים $T(v_1), \dots, T(v_n)$, וסיימנו.

נניח בשלילה כי הקבוצה $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ היא תלויה לינארית.

אזי קיימים $\beta_1, \dots, \beta_n$ כאשר לא כולם אפס, כך ש-

$$0_W = \beta_1 T(v_1) + \dots + \beta_n T(v_n)$$

$$\Rightarrow 0_W = T(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) \stackrel{?}{=} \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n = 0_V$$

.

זה אומר שקבוצה $\{v_1, \dots, v_n\}$ היא תלויה לינארית,

אבל זו סתירה כי $\{v_1, \dots, v_n\}$ היא בסיס ב- V , בסתירה.

■

משפט 2.30 ¹⁸ יהי V מרחב וקטורי בעל מימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$.

כמו כן $\dim V = n$.

אזי V איזומורפי למרחב וקטורי $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}\}$.

הוכחה: ניקח בסיס ל- V $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.

לכן קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ סקלרים ב- $\mathbb{F}$ כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

נביט בהעתקה $T: V \rightarrow \mathbb{F}^n$, $T(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

נוכיח כי היא איזומורפיזם, כלומר נוכיח את שלושת התנאים:

1. T היא העתקה חד חד ערכית:

נביט בוקטורים $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, $u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$.

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \dots, \beta_n) \Leftrightarrow v \neq u$, כי וקטור מגדיר איברים של שדה בצירוף לינארי באופן יחיד.

2. T היא העתקה על $\mathbb{F}^n$ (כי אם $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{F}^n$ אזי קיים $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ במרחב V).

3. נוכיח כי T מקיימת $T(\alpha v + \beta u) = \alpha T(v) + \beta T(u)$.

ניקח שוב את הוקטורים u, v כפי שהם מופיעים מעלה. כעת

$$\begin{aligned} \alpha v + \beta u &= \alpha(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + \beta(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)v_n \\ T(\alpha v + \beta u) &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1, \dots, \alpha\alpha_n + \beta\beta_n) \in \mathbb{F}^n \\ &= \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \beta(\beta_1, \dots, \beta_n) = \alpha T(v) + \beta T(u) \end{aligned}$$

ולכן הוכחנו את כל התנאים, ולכן T איזומורפיזם. ■

2.4 תת מרחבים

הגדרה 2.31 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

$\Omega \subset V$.

אם לכל $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \in \Omega$ (כלומר מקיים סגירות וכפל בסקלר),

אזי Ω נקרא תת מרחב של V .

טענה 2.32 Ω הוא מרחב וקטורי בעצמו.

הוכחה: מושארת כתרגיל. ■

טענה 2.33 $0_V \in \Omega$.

הוכחה: נניח ש- $\omega \in \Omega$.

אזי גם $\omega \in V$ כעת, עבור $\beta = -1$, $\alpha = 1$:

$\alpha\omega + \beta\omega = \omega + (-\omega) = 0_V \in \Omega$ מסגירות לחיבור ולכפל בסקלר. ■

דוגמאות:

¹⁸עוד משפט מאוד פופלרי שמופיע בבחינות, על פי יבגני

1. V הוא תת מרחב של המרחב הוקטורי V (של עצמו).

2. נניח ש- $n \leq m$. נגדיר

$$\Omega = \{v | v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n); \alpha_1, \dots, \alpha_m = 0; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

אזי Ω הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^n$.

3. גם הקבוצה הריקה ϕ היא תת מרחב.

4.

$$\Omega(t) = \{p(t) | p(t) \in P(t), p(t) = p(-t)\}$$

$P(t)$ הוא מרחב וקטורי של כל הפולינומים במשתנה t מעל שדה $\mathbb{R}$.
אזי ניתן לבדוק ולמצוא כי $\Omega(t)$ הוא תת מרחב של $P(t)$.

הגדרה 2.34 יהיו K, I קבוצות.

נביט ב- $\{\omega_d\}_{d \in I}$ כאשר $\omega_d \subset K$.

נגדיר:

$$\bigcap_{d \in I} \omega_d := \{\omega | \forall d \in I \ \omega \in \omega_d\}$$

דוגמא לסימונים מעלה:

1.

$$I = \{1, 2\}, K = \mathbb{R}^2$$

2.

$$I = \left[\frac{1}{2}, 1\right], \omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq d^2, x, y \in \mathbb{R}\}$$

משפט 2.35 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

יהי $\{\omega_d\}_{d \in I}$ אוסף תת המרחבים של V ,

כלומר, כל $\omega_1, \dots, \omega_d \subset V$ הוא תת מרחב של V לכל $d \in I$.

אזי $\Omega = \bigcap_{d \in I} \omega_d$ הוא תת מרחב של V .

הוכחה: Ω היא תת קבוצה של V מהגדרתה.

תחילה, נשים לב כי כל תת מרחב וקטורי ω_d כולל את 0_V .

יהיו $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$. אזי ω_1, ω_2 שייכים לכל ω_d לכל $d \in I$.

לכן ω_d הוא תת מרחב עבור כל $d \in I$.

לכן $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \in \omega_d$ עבור כל $d \in I$,

ולכן $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \in \Omega$ וסיימנו (הוכחנו סגירות וכפל בסקלר).

15.11.2009

Span 2.4.1

הגדרה 2.36 יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

תהי קבוצה כלשהי $\Omega \subset V$,

ויהי $\{\omega_d\}_{d \in V}$ אוסף כל תת המרחבים של V שכוללים את הקבוצה Ω .

כלומר, $\forall d \in I \quad \Omega \subset \omega_d$.

אזי, $Span(\Omega)$ יוגדר להיות $\bigcap_{d \in I} \omega_d$.

הערה 2.37 האוסף $\{\omega_d\}_{d \in I}$ כולל את V .

הערה 2.38 $Span(\Omega)$ הוא תת מרחב של V .

הערה 2.39 ניתן לומר כי $Span(\Omega)$ הוא תת המרחב המינימלי הכולל את הקבוצה Ω .

משפט 2.40 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$,

ותהי $\Omega \subset V$ קבוצה.

נגדיר את K להיות קבוצה הבנויה מהצ"ל של הוקטורים מ- Ω .

אזי $Span(\Omega) = K$.

דוגמא:

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}^3, \quad \Omega = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \\ Span(\Omega) &= \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ K &= \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

משפט 2.41 יהי V מרחב וקטורי בעל מימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$

ותהי Ω קבוצה ב- V .

תהי K הקבוצה של כל הצירופים הלינארים של וקטורים מ- Ω ,

אזי $Span(\Omega) = K$.

הוכחה: נראה הכלה דו כיוונית:

K הינו תת מרחב של V (מקיים סגירות לחיבור וכפל בסקלר כי הוא מכיל את כל הצ"ל),

הכולל את הקבוצה Ω .

כמו כן $Span(\Omega)$ הוא תת המרחב המינימלי הכולל את Ω ,

ולכן $Span(\Omega) \subset K$.

מצד שני, $Span(\Omega)$ הוא תת מרחב הכולל את Ω ,

לכן $Span(\Omega)$ מכיל את את הצ"ל הבנויים מוקטורים של הקבוצה Ω ¹⁹.

לכן $Span(\Omega) \supset K$.

לכן בסה"כ משני הצדדים $Span(\Omega) = K$.

נסמן:

¹⁹מההגדרה של תת מרחב, הוא מקיים סגירות לחיבור וכפל בסקלר - כלומר כל הצ"ל נמצאים בו

2.42 הגדרה

$$\cup_{d \in I} \omega_d := \{w | \exists k \in I \ w \in \omega_k\}$$

$$W_1 \cup W_2 = \{w | w \in W_1 \text{ or } w \in W_2\}$$

משפט 2.43 יהי V מרחב וקטורי,

ויהיו $W_1, W_2 \subset V$ תתי מרחבים של V .

אזי כל וקטור מהקבוצה $\text{Span}(W_1 \cup W_2)$

ניתן להצגה כ- $w^{(1)} + w^{(2)}$ כאשר $w^{(1)} \in W_1, w^{(2)} \in W_2$.

הוכחה: לפי המשפט הקודם, $\text{Span}(W_1 \cup W_2)$ היא קבוצה

הבנויה מכל הצ"ל של הוקטורים מ- $W_1 \cup W_2$.

אם $w \in \text{Span}(W_1 \cup W_2)$ נוכל לרשום:

$$w = \alpha_1 w_1^{(1)} + \dots + \alpha_m w_m^{(1)} + \beta_1 w_1^{(2)} + \dots + \beta_k w_k^{(2)}$$

כאשר,

$$w_1^{(1)}, \dots, w_m^{(1)} \in W_1, w_1^{(2)}, \dots, w_k^{(2)} \in W_2$$

W_1 הוא תת מרחב, ולכן:

$$w^{(1)} := \alpha_1 w_1^{(1)} + \dots + \alpha_m w_m^{(1)} \in W_1$$

וכנ"ל עבור W_2 :

$$w^{(2)} := \beta_1 w_1^{(2)} + \dots + \beta_k w_k^{(2)} \in W_2$$

ולכן בסה"כ נוכל לרשום:

$$w = w^{(1)} + w^{(2)}; w^{(1)} \in W_1, w^{(2)} \in W_2$$

■

סימון:

יהיו W_1, W_2 שני תתי מרחבים של V . אזי

$$W_1 + W_2 = \text{Span}(W_1 \cup W_2)$$

2.4.2 המשלים של תת מרחב

הגדרה 2.44 יהי V מרחב וקטורי כלשהוא,

ויהיו U, W תתי מרחבים של V .

נאמר כי U הוא המשלים של W ב- V

אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

$$1. U \cap W = \{0\}$$

$$2. V = \text{Span}(U \cup W) = U + W$$

1.

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, \\ W &= \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad U = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ W \cap U &= \{(0, 0)\} = \{0_v\} \\ V &= \text{Span}(W \cup U) \end{aligned}$$

2. יהי $P(t) = V$ מרחב כל הפולינומים במשתנה t .

$$\begin{aligned} W &= \{p(t) \mid p(t) \in P(t), p(t) = p(-t)\} \\ U &= \{p(t) \mid p(t) \in P(t), p(t) = -p(t)\} \\ W \cap U &= \{0\} \\ \text{Span}(W \cup U) &= P(t) \end{aligned}$$

מדוע האחרון מתקיים?

$$\begin{aligned} p(t) \in P(t) &\Rightarrow p(t) = a_{2n}t^{2n} + a_{2n-1}t^{2n-1} + \dots + a_0 \\ p(t) &= b_{2m-1}t^{2m-1} + b_{2m-2}t^{2m-2} + \dots + b_1t + b_0 \\ p(t) &= \tilde{p}(t) + \tilde{\tilde{p}}(t) \\ \tilde{p}(t) &= a_{2n}t^{2n} + a_{2n-2}t^{2n-2} + \dots + a_0 \\ \tilde{\tilde{p}} &= a_{2n-1}t^{2n-1} + \dots + a_1t \end{aligned}$$

כלומר, מעלה הראינו כי כל פולינום מורכב מאלמנט מ- W ואלמנט מ- U (פונקציה זוגית ואי זוגית). כל פולינום שייך ל- $\text{Span}(U \cup W)$, וכמו כן כל אלמנט של $\text{Span}(U \cup W)$ הוא פולינום מ- $P(t)$. אזי, $P(t) = \text{Span}(U \cup W)$.

2.4.3 דיון נוסף בתת מרחבים

משפט 2.45 יהי V מרחב וקטורי בעל מימד סופי, $\dim V = n$.

יהי W תת מרחב של V .

אזי W הוא מרחב וקטורי בעל מימד סופי,

ומתקיים $\dim W \leq n$.

הוכחה: אם $W = \{0_V\}$ אזי $\dim W = 0$ מההגדרה,

וסיימנו.

אחרת, נניח כי $W \neq \{0_V\}$.

אזי, קיים וקטור $v_1 \neq 0_v$, $v_1 \in W$.

נגדיר $W_1 = \text{Span}\{v_1\}$.

אם $W = W_1$ המושפט הוכח - שהרי אז $\dim W = 1$.

אם $W \neq W_1$,

אז קיים $v_2 \in W$, $v_2 \notin W_1 = \text{Span}\{v_1\}$,

ולכן קבוצה $\{v_1, v_2\}$ אינה תלויה לינארית.

נגדיר $W_2 = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ -

אם $W = W_2$ אז המשפט הוכח.

אם $W \neq W_2$,

אז קיים $v_3 \in W$ $v_3 \notin W_2$,

ונגדיר $W_3 = \text{Span}\{v_3, v_2, v_1\}$, כאשר קבוצת הוקטורים היא בת"ל.

התהליך הזה יסתיים אחרי $n \geq$ צעדים,

אחרת נקבל קבוצה $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ שהיא בלתי תלויה לינארית,

וזה סתירה לכך כי המימד של V הוא n .

18.11.2009

משפט 2.46 יהי V מ"ו בעל מימד סופי, $\dim V = n$,

יהי $W \subseteq V$ תת מרחב של V , $\dim W = m$.

אזי קיים בסיס ב- V $\{w_1, w_2, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$

כך שהקבוצה $\{w_1, \dots, w_m\}$ היא בסיס ב- W .

הוכחה: $\{w_1, \dots, w_m\}$ היא קבוצה בלתי תלויה לינארית ב- W .

ממשפט 2.19, ניתן להרחיב אותו לבסיס של V .

עולה השאלה:

יהי W תת מרחב של V , V בעל מימד סופי, $\dim V = \dim W = n$.

האם יכול להיות ש- $W \neq V$?

טענה 2.47 $V = W$.

הוכחה: נניח השלילה כי טענה אינה מתקיימת,

כלומר $V \neq W$.

אזי קיים וקטור $v^* \in V$ כך ש- $v^* \notin W$,

וכמו כן $v^* \notin W$.

נניח שהקבוצה $\{w_1, \dots, w_n\}$ היא בסיס ב- W .

v^* אינו ב- W , ועל כן אינו תלוי לינארית באיברי הבסיס $\{w_1, \dots, w_n\}$,

לכן הקבוצה $\{w_1, \dots, w_n, v^*\}$ אינה תלויה לינארית במרחב V ,

וזה סתירה לכך ש- $\dim V = n$ (יש במרחב קבוצה בת"ל בגודל $n+1$).

2.4.4 משפט המימדים 1

משפט 2.48 יהי V מ"ו²⁰.

יהיו M, N תת מרחבים של V בעלי מימד סופי.

$$\dim(M + N) = \dim M + \dim N - \dim(M \cap N)$$

כאשר לפי ההגדרה $M + N = \text{sp}(M \cup N)$.

²⁰לא משנה אם V הוא בעל מימד סופי או אינסופי.

הוכחה: $N \cap M$ הוא תת מרחב בעל מימד סופי (ממשפט קודם).

נניח כי הקבוצה $\{z_1, \dots, z_k\}$ היא בסיס של $N \cap M$.

אזי, על פי משפט 2.19 קיים בסיס $\{x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_k\}$ לת"מ M ,

וכמו כן, קיים בסיס לת"מ N $\{y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_k\}$.

תחילה, נוכיח כי

$$sp\{x_1, \dots, x_m\} \cap N = 0_F$$

נניח בשלילה כי $sp\{x_1, \dots, x_m\} \cap N \neq 0_F$,

אזי קיים וקטור $v^* \in sp\{x_1, \dots, x_m\} \cap N$ כך ש:

$$v^* \in sp\{x_1, \dots, x_m\} \cap N \subset M \cap N \Rightarrow v^* \in M \cap N$$

מהגדרתו, $v^* = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m$,

כאשר $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ הם סקלרים בשדה כך שלא כולם 0.

בנוסף מכיוון ו- $v^* \in M \cap N$, $v^* = \beta_1 z_1 + \dots + \beta_k z_k$,

כאשר $\beta_1, \dots, \beta_k$ הם סקלרים בשדה כך שלא כולם 0.

נחסר את שני הביטויים ונקבל:

$$0_V = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m - \beta_1 z_1 - \dots - \beta_k z_k$$

אזי הקבוצה $\{x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_k\}$ היא תלויה לינארית,

וזו סתירה כי הקבוצה הזו היא בסיס של M .

כעת, נוכיח כי הקבוצה $\{x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_k, y_1, \dots, y_n\}$ היא קבוצה בת"ל.

נניח כי מתקיים עבור סקלרים כלשהם:

$$0_V = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m + \beta_1 z_1 + \dots + \beta_k z_k + \gamma_1 y_1 + \dots + \gamma_n y_n$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$-\alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_m x_m = \beta_1 z_1 + \dots + \beta_k z_k + \gamma_1 y_1 + \dots + \gamma_n y_n$$

כעת, צד שמאל הוא ב- $sp\{x_1, \dots, x_m\}$.

כמו כן, צד ימין הוא ב- N . לכן, מכיוון והוכחנו כי $sp\{x_1, \dots, x_m\} \cap N = 0_F$, נקבל:

$$0_V = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m$$

$$\beta_1 z_1 + \dots + \beta_k z_k + \gamma_1 y_1 + \dots + \gamma_n y_n = 0_V$$

לכן, מכיוון ושתי הקבוצות הם צ"ל של בסיסים,

נקבל כי $\alpha_1, \dots, \alpha_m = 0$,

וכמו כן $\beta_1, \dots, \beta_k, \gamma_1, \dots, \gamma_n = 0$.

כלומר, קיבלנו כי הקבוצה $\{x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_k, y_1, \dots, y_n\}$ בת"ל,

ומכילה את הבסיסים מ- M ו- N , ולכן היא בסיס ל- $sp(M \cup N) = sp(N + M)$.

ולכן, לבסוף:

$$\dim(M + N) = m + k + n = (m + k) + (n + k) - k = \dim M + \dim N - \dim(N \cap M)$$

■

2.5 תרגולים

9.11.2009

הגדרה 2.49 יהי $\mathbb{F}$ שדה. קבוצה V נקראת מ"ז מעל $\mathbb{F}$ אם:

א. ב- V מוגדרת פעולה שנסמנה ב $+$ המקיימת:

קשירות, קומוטטיביות, אסוציאטיביות, קיום איבר נייטרלי לחיבור שיסומן 0_V ולכל איבר קיים איבר נגדי.

ב. לכל $a \in \mathbb{F}$ ו- $v \in V$ מוגדר איבר יחיד של V , המסומן ב- $a \cdot v$ ונקרא המכפלה של a ב- v המקיימים:

$$1. \forall a \in \mathbb{F}, \forall v, u \in V \quad a \cdot (v + u) = a \cdot v + a \cdot u$$

$$2. \forall a, b \in \mathbb{F}, \forall v \in V \quad (a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$$

$$3. 1_F v = v$$

איברי $\mathbb{F}$ נקראים סקלרים.

איברי V נקראים וקטורים.

לא מוגדר כפל בין וקטורים.

דוגמאות:

1. נתון שדה F . נגדיר:

$$F^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in F\}$$

נגדיר פעולות חיבור וכפל:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$a \cdot (a_1, \dots, a_n) = (aa_1, \dots, aa_n)$$

2.

תחילה, קצת על פונקציות:

יהיו A, B קבוצות.

פונקציה $f: A \rightarrow B$ היא התאמה שמתאימה לכל איבר של A איבר יחיד ב- B .

A נקראת תחום ההגדרה של f , ו- B נקראת הטווח של f .

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & x \neq 1, 2 \\ -1 & x = 2 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

נסמן ב- $Fun(A, B)$ את כל הפונקציות מ- A ל- B .

כמו כן, $g = h$ אם $\forall a \in A \quad g(a) = h(a)$.

נתון שדה F . נתונה קבוצה $A \neq \emptyset$, $V = Fun(A, F)$.

למשל: $A = \{x, y\}$, $F = \mathbb{Z}_2$. אזי $f_1(x) = 0, f_1(y) = 0, f_2(x) = 1, f_2(y) = 0, f_3(x) = 0, f_3(y) = 1, f_4(x) = 1, f_4(y) = 1$.

$$Fun(A, \mathbb{Z}_2) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

בהנתן $g, h \in Fun(A, F)$

$$N \cap M \neq N, N \cap M \subset N$$

כאשר $N \cap M \neq N, N \cap M \subset N$

נרצה להגדיר את $g + h$ באופן הבא:

$$\forall a \in A \quad (g + h)(a) = g(a) + h(a) \in F$$

נרצה להגדיר את $c \cdot g$ באופן הבא:

$$(c \cdot g)(a) = c \cdot g(a)$$

אזי במקרה שלנו:

$$(f_2 + f_3)(x) = f_2(x) + f_3(x) = 1 + 0 = 1 = f_4(x)$$

$$(f_2 + f_3)(y) = f_2(y) + f_3(y) = 0 + 1 = 1 = f_4(y)$$

לא בדקנו שזהו אכן מרחב וקטורי - קל להוכיח זאת:

$$\forall a \in A \quad f(a) = 0$$

3. יהי L שדה, ויהי $F \subseteq L$ תת שדה.

L הוא מרחב וקטורי מעל F .

החיבור הוא החיבור הרגיל ב- L .

גם הכפל הוא הכפל הרגיל ב- L , שמצומצם למכפלות מהצורה $a \cdot v$ כאשר $a \in F, v \in L$.

טענה 2.50 יהי F שדה, ויהי V מרחב וקטורי מעל F . אזי

$$\forall v \in V, \quad 0_F \cdot v = 0_V$$

הוכחה: $0_F \cdot v = (0_F + 0_F) \cdot v = 0_F \cdot v + 0_F \cdot v$

נחבר $(0_F v) - (0_F v)$ לשני האגפים ונקבל:

$$0_F v + (-(0_F \cdot v)) = (0_F \cdot v - 0_F \cdot v) = (-0_F \cdot v)$$

ואז צד שמאל שווה ל- 0_V , צד ימין שווה ל- $0_F V$.

טענה 2.51 $(-1_F) \cdot v = -v$.

הוכחה: בתרגיל.

תתי מרחבים

הגדרה 2.52 יהי V מ"ו.

קבוצה $U \subseteq V$ תקרא תת מרחב של V

אם היא מקיימת את האקסיומות של מ"ו מעל F ,

כאשר הפעולות הן אותן הפעולות של V .

מסקנה 2.53 אם U הוא תת מרחב, אז הוא סגור לחיבור ולכפל בסקלר (מאקסיומות הקשירות).

טענה 2.54 יהי V מרחב וקטורי. $U \subseteq V$ קבוצה.

אזי U תת מרחב אם ורק אם U קבוצה לא ריקה, סגורה לחיבור ולכפל בסקלר.

הוכחה: נשים לב כי הוכחה זו לא מלאה, לקורא החרוץ נשארת המשימה להשלמה.

כיוון $\Leftarrow$ ברור.

נוכיח את $\Rightarrow$. קשירות לחיבור נתונה. קומוטטיביות ואסוציאטיביות ישירות מההגדרה.

קיום איבר נייטרלי לחיבור - נבחר $u \in U$. מסגירות לכפל בסקלר הנתונה לנו:

$$0_V = 0_F \cdot u \in U$$

קיום איבר נגדי - יהי $u \in U$. אזי מסגירות לכפל בסקלר ומהטענה 2.51:

$$-u = (-1_F) \cdot u \in U$$

האקסיומות של הכפל מתקיימות מיידית.

דוגמאות לתתי מרחבים:

1. יהי V מרחב וקטורי. $\{0\}$, V הם תתי מרחבים.

2. יהי $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$, תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

3. לא תת מרחב - $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 1\}$. מדוע? $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W$.
 $3x_1 - 2y_1 + z_1 = 1, 3x_2 - 2y_2 + z_2 = 1$

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \stackrel{?}{\in} W$$

$$3(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \stackrel{!}{=} 2$$

ולכן אין סגירות לחיבור.

4. לא תת מרחב - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)(x+2) = 0\}$ - לדוגמא $(1, 0, 0) + (2, 0, 0) = (3, 0, 0) \notin W$.

5. $U = \{f \in \text{Fun}(A, F) \mid \forall b \subseteq B, f(b) = 0\}$, $\phi \neq B \subseteq A, V = \text{Fun}(A, F)$.
 נוכיח כי זהו תת מרחב!
 $f_1, f_2 \in U \Rightarrow (f_1 + f_2)(b) = f_1(b) + f_2(b) = 0_F + 0_F = 0_F$
 $c \in F, (cf_1)(b) = c \cdot (f_1(b)) = c \cdot 0_F = 0_F$
 סגירות לכפל בסקלר.

W_1, W_2 תת מרחבים. האם $W_1 \cap W_2$ הוא תת מרחב? כן!

הקבוצה אינה ריקה כי האפס בטוח נמצא בה. סגירות לחיבור וכפל בסקלר גם מתקיימים (שוב מושאר לקורא החרוץ).

האם $W_1 \cup W_2$ הוא תת מרחב? לא!

לא בהכרח יש סגירות לחיבור.

16.11.2009

מרחב הפולינומים

יהי F שדה.

תרגול

הגדרה 2.55 $F_n[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר n =

אוסף כל הביטויים הפורמליים מהצורה

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

כאשר $a_i \in F$ לכל $0 \leq i \leq n$.

שני פולינומים ב- $F_n[x]$ הם שווים אם כל המקדמים שווים.

הדרגה/מעלה של פולינום $f \in F_n[x]$ מסומנת ב- $\deg(f)$,

והיא שווה ל- i המקסימלי עבורו $a_i \neq 0$.

$$\deg(0) = -1 \text{ או } -\infty$$

פעולת החיבור תוגדר כך:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=1}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$$

פעולת הכפל בסקלר תוגדר כך:

$$c \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^n c a_i x^i$$

איבר האפס:

$$\sum_{i=0}^n 0 \cdot x_i$$

אם $f \in F_n[x]$ נוכל לחשוב עליו גם כפולינום ב- $F_{n+1}[x]$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$f(x) = 0 \cdot x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

דהיינו - $F_n[x] \subseteq F_{n+1}[x]$.

הגדרה 2.56 נגדיר את מרחב הפולינומים:

$$F[x] = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n[x]$$

בכל פולינומים המקדמים מתאפסים החל ממקום מסוים.

אם $f, g \in F[x]$ אז קיימים n, m כך ש- $f \in F_n[x], g \in F_m[x]$.

נניח $n \leq m$, אז $f, g \in F_m[x]$,

ונחבר את f ו- g ב- $F_m[x]$.

כל פולינום הוא פונקציה מ- F ל- F .

הערה 2.57 אזהרה! שני פולינומים שונים יכולים להגדיר את אותה הפונקציה.

לדוגמא:

$F = \mathbb{Z}_2$, ונגדיר את שני הפולינומים הבאים:

$$f(x) = x^2 + x, \quad g(x) = 0$$

נשים לב כי f, g שונים כפולינומים.

אבל, הם מגדירים את אותה הפונקציה $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

Span

הגדרה 2.58 יהי V מ"ו.

תהי $A \subseteq V$ תת קבוצה.

$$sp(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in F, v_i \in A \right\}$$

אוסף כל הציורפים הלינאריים (הסופיים) של איברים מ- A .

כמו כן, נגדיר:

$$sp(\phi) = \{0\}$$

נזכיר בקצרה מספר טענות שהוכחו בכיתה:

- $sp(A)$ הוא תת מרחב של V המכיל את A .
- זהו תת מרחב המינימלי המכיל את A , כלומר אם U תת מרחב ו- $A \subseteq U$, אזי $sp(A) \subseteq U$.

טענה 2.59 יהיו $v_1, \dots, v_n \in V$ ויהי $a \in F/\{0\}$,

אזי

$$sp(v_1, \dots, v_n) = sp(av_1, v_2, \dots, v_n)$$

הוכחה: נוכיח הכלה דו כיוונית.

נתחיל ב- $\supseteq$:

$$sp(av_1, v_2, \dots, v_n) \ni c_1 av_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

אבל בוודאי מתקיים²²:

$$sp(v_1, v_2, \dots, v_n) \ni c_1 av_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

נוכיח $\subseteq$:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \in sp(v_1, \dots, v_n) = c_1 a^{-1} av_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

■

וזה בוודאי איבר ב- $sp(av_1, v_2, \dots, v_n)$.

טענה 2.60 יהי V מ"ו, ויהיו $A, B \subseteq V$ תת קבוצות.

אם $A \subseteq sp(B)$ וגם $B \subseteq sp(A)$

אז $sp(A) = sp(B)$.

הוכחה: $sp(A)$, $sp(B)$ הם התת מרחבים המינימליים המכילים את A, B בהתאמה.

$sp(A) \subseteq sp(B)$ ולכן $A \subseteq sp(B)$

$sp(B) \subseteq sp(A)$ ולכן $B \subseteq sp(A)$

ומשתי ההכלות בסה"כ נקבל שיוויון.

■

²²פשוט נבחר את הסקלר של v_1 להיות $a \cdot c_1$

תרגיל:

$$? \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{sp} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ ב-}\mathbb{R}^3 \text{ האם}$$

למעשה, אנו שואלים אם קיימים $x, y, z \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$x \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר קיבלנו את מערכת המשוואות הבאה:

$$6x + 5y + z = 0$$

$$5x + 3y = 1$$

$$2x + 4y = 0$$

נשים לב שכאן אין חשיבות ליחידות הפתרון.

תלות לינארית

הגדרה 2.61 יהי V מ"ו מעל שדה F .

יהיו $v_1, \dots, v_n \in V$

$v_1, \dots, v_n$ יקראו תלויים לינארית (ת"ל)

אם קיימים סקלרים $a_1, \dots, a_n \in F$

לא כולם אפס, המקיימים:

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$$

משפט 2.62 יהי V מ"ו, $v_1, \dots, v_n \in V$

אזי $v_1, \dots, v_n$ ת"ל אמ"מ

אחר מהם הוא צירוף לינארי של האחרים.

משפט 2.63 יהי V מ"ו, $v_1, \dots, v_n \in V$,

$v_1, \dots, v_n$ ת"ל אמ"מ

אחד מהם הוא צ"ל של קודמיו.

אם רוצים להוכיח ש- $v_1, \dots, v_n$ הם בת"ל, אז מראים:

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

ϕ היא בת"ל.

טענה 2.64 יהי V מ"ו, $v_1, \dots, v_n \in V$, $a \in F$, $a \neq 0$.

אזי $v_1, \dots, v_n$ ת"ל אמ"מ $av_1, v_2, \dots, v_n$ ת"ל.

הוכחה: $v_1, \dots, v_n \Leftarrow$ ת"ל, כלומר קיים צ"ל לא טריוויאלי ששווה 0:

$$\sum_{i=1}^n c_i v_i = 0 \text{ כאשר } c_{i_0} \neq 0 \text{ עבור } c_{i_0} \neq 0.$$

נשים לב כי:

$$\sum_{i=1}^n c_i v_i = c_1 a^{-1} a v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

וזהו צ"ל לא טריוויאלי כי אם $i_0 \geq 2$ אז ברור,

$$\text{ואם } i_0 = 1 \text{ אז } c_1 a^{-1} a \neq 0.$$

$$\Rightarrow a v_1, v_2, \dots, v_n \text{ ת"ל.}$$

אזי קיים צ"ל לא טריוויאלי ששווה 0:

$$c_1 a v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$$

$$\text{וקיים } 1 \leq i_0 \leq n \text{ כך ש-} c_{i_0} \neq 0.$$

זהו גם צ"ל לא טריוויאלי של $v_1, \dots, v_n$ כי:

$$\text{אם } 2 \leq i_0 \text{ אז ברור,}$$

$$\text{ואם } i_0 \text{ אז } c_1 a \neq 0.$$

תרגיל:

$$\text{האם } \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ת"ל?}$$

$$\text{שוב נכתוב משוואה ונשווה אותה ל-} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

אם יש למשוואה פתרון לא טריוויאלי אז הם תלויים לינארית.

אם הפתרון היחיד הוא $x = y = z = 0$ אז הם בלתי תלויים לינארית.

30.11.2009

עוד קצת על הנושא הקודם:

תרגיל

תרגול

יהי $\mathbb{F}$ שדה, V מ"ז מעל $\mathbb{F}$.

נניח שקיימים תתי מרחבים ממש $V_1, \dots, V_m \subsetneq V$ כך ש- $\cup_{i=1}^m V_i = V$.

אזי $\mathbb{F}$ שדה סופי.

הוכחה

נניח תחילה כי $V_1 \not\subseteq \cup_{i=2}^m V_i$.

נבחר $v_2 \in V/V_1$, $v_1 \in V_1/\cup_{i=1}^m V_i$.

נביט בקבוצה $T = \{v_2 + a v_1 \mid a \in \mathbb{F}\}$.

נראה כי מספר האיברים ב- $\mathbb{F}$ שווה למספר האיברים ב- T .

נתבונן בהעתקה:

$$f : \mathbb{F} \rightarrow T$$

$$f(a) = v_2 + a v_1$$

f היא בוודאי על, מהגדרתה.

נראה ש- f חח"ע. נניח $f(a) = f(b)$. אזי:

$$\begin{aligned} v_2 + av_1 &= v_2 + bv_1 \\ \Rightarrow av_1 &= bv_1 \\ \Rightarrow (a-b)v_1 &= 0 \Rightarrow v_1 \neq 0 \end{aligned}$$

לכן $a = b$ ולכן $a - b = 0$.

לכן, מספיק להוכיח כי T סופית.

$$T = T \cap V = T \cap (\cup_{i=1}^m V_i) = \cup_{i=1}^m (T \cap V_i)$$

$T \cap V_1 = \phi$ - מדוע?

אם $w \in T \cap V_1$ אז:

$$\begin{aligned} w &= v_2 + av_1 \in V_1 \\ v_2 + \alpha v_1 &= v' \\ v_2 &= v' - \alpha v_1 \in V_1 \end{aligned}$$

והגענו לסתירה.

נראה שלכל $2 \leq i \leq m$ מתקיים $|T \cap V_i| \leq 1$ (כאשר ה- $||$ משמעו - מספר האיברים).

נניח בשלילה כי $w_1, w_2 \in T \cap V_i$. אזי:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_2 + av_1 \in V_i \\ w_2 &= v_2 + bv_1 \in V_i \\ V_i \ni w_1 - w_2 &= (a-b)v_1 \end{aligned}$$

אם $a \neq b$ אז נקבל:

$$v_1 = \frac{w_1 - w_2}{a - b} \in V_1 \cap V_i$$

בסתירה להגדרת V_1 .

קיבלנו כי T סופית, ולכן $\mathbb{F}$ סופית, ו- $|\mathbb{F}| \leq m$.

ללא ההנחה הנוספת - ההוכחה באינדוקציה על m :

אם $m = 1$ אין מה להוכיח, כי לא ייתכן גם $V_1 \subsetneq V$ וגם $V_1 = V$.

נניח כי $m > 1$ וכי הטענה הוכחה לטבעיים קטנים יותר.

אם $V_1 \subseteq \cup_{i=2}^m V_i$, אזי קבוצות $V_2, \dots, V_m$ מקיימות $\cup_{i=2}^m V_i = V$,

ולכן נוכל להשתמש בהנחת האינדוקציה לגביהן.

ואם $V_1 \not\subseteq \cup_{i=2}^m V_i$ אז הוכחנו כבר.

3 המטריצה

3.1 העתקות לינאריות

22.11.2009

הגדרה 3.1 יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$.

$A: V \rightarrow W$ תקרא העתקה לינארית מ- V ל- W , אם יתקיימו שני התנאים הבאים:²³

$$\forall v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2 \Leftarrow Av_1 \neq Av_2$$

$$\forall v_1, v_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F} \quad A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2$$

דוגמאות:

1.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, \quad V = \mathbb{R}^2, \quad W = \mathbb{R}^2$$

$$A(x, y) = (y, x)$$

$$\stackrel{=Av_1}{(y_1, x_1)} \neq \stackrel{=Av_2}{(y_2, x_2)} \Rightarrow \stackrel{v_1 \neq v_2}{(x_1, y_1)} \neq (x_2, y_2)$$

$$A(\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2)) = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

$$= (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1(y_1, x_1) + \alpha_2(y_2, x_2)$$

$$= \alpha_1 A(x_1, y_1) + \alpha_2 A(x_2, y_2)$$

כלומר, הוכחנו את כל התנאים, ולכן A היא העתקה לינארית.

2.

$$A(x, y) = (x^2, y^2)$$

נטען כי A אינה העתקה לינארית! נוכיח זאת:

$$A(\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2)) = ((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^2)$$

$$= \alpha_1^2(x_1^2, y_1^2) + \alpha_2^2(x_2^2, y_2^2) + 2\alpha_1\alpha_2(x_1x_2, y_1y_2)$$

ומצד שני:

$$\alpha_1 A(x_1, y_1) + \alpha_2 A(x_2, y_2) = \alpha_1(x_1^2, y_1^2) + \alpha_2(x_2^2, y_2^2)$$

קל לראות כי אין שיוויון בין שני הביטויים, ועל כן אין זו העתקה לינארית!

23

הגדרה 3.2 ישנו גם קריטריון שקול שנלמד בשנים אחרות - בכל מקרה, המטרה היא להראות כי סגירות לחיבור וכפל בסקלר נשמרת, וכמו כן כי ההעתקה היא **חד ערכית** (לא חד חד ערכית - שני דברים שונים לגמרי!)

.3

$$V = \mathbb{R}^2, \quad W = \mathbb{R}^2$$

$$A(x, y) = (e^x, e^y)$$

גם זו אינה העתקה לינארית!

.4. $V = P(t)$, כאשר $P(t)$ הוא מרחב כל הפולינומים במשתנה t ,

$$P(t) = \{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 | n \geq 0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

$$D(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0) = a_n n t^{n-1} + a_{n-1} (n-1) t^{n-2} + \dots + a_1$$

$$D\left(\sum_{j=0}^n a_j t^j\right) = \sum_{j=0}^n a_j j t^{j-1}$$

דהיינו, D היא העתקת הגזירה - והיא אכן העתקה לינארית. נראה דוגמאות:

$$p_1(t) = 2t^2 + 3t + 1, \quad p_2(t) = 4t + 2$$

$$5p_1(t) = 10t^2 + 15t + 5, \quad 2p_2(t) = 8t + 4$$

$$D(5p_1(t) + 2p_2(t)) \stackrel{?}{=} 5Dp_1(t) + 2Dp_2(t)$$

$$D(10t^2 + 23t + 9) \stackrel{?}{=} 5(4t + 3) + 2 \cdot 4$$

$$20t + 23 = 20t + 15 + 8$$

.5

$$V = W = P(t)$$

הפעם נביט בהעתקת האינטגרציה:

$$I\left(\sum_{j=0}^n a_j t^j\right) = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j+1} t^{j+1}$$

זוהי גם העתקה לינארית! נוכיח:

$$I\left(\alpha \sum_{j=0}^n a_j t^j + \beta \sum_{k=0}^m b_k t^k\right), \quad n \geq m :$$

$$I\left(\sum_{j=0}^m (\alpha a_j + \beta b_j) t^j + \sum_{j=m+1}^n \alpha a_j t^j\right) = I\left(\sum_{j=0}^n A_j t^j\right); \quad A_j = \begin{cases} \alpha a_j + \beta b_j & 0 \leq j \leq m \\ \alpha a_j & m < j \leq n \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j+1} t^{j+1} = \sum_{j=0}^m \frac{\alpha a_j + \beta b_j}{j+1} t^{j+1} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\alpha a_j}{j+1} t^{j+1}$$

$$\alpha I\left(\sum_{j=0}^n a_j t^j\right) + \beta I\left(\sum_{k=0}^m b_k t^k\right) = \sum_{j=0}^n \frac{\alpha a_j}{j+1} t^{j+1} + \sum_{k=0}^m \frac{\beta b_k}{k+1} t^{k+1}$$

וקיבלנו שיוויון, כמתבקש.

.6

$$V = \mathbb{R}^2, \quad W = \mathbb{R}^2$$

$$A(x, y) = (x + y, x - y)$$

בהגדרות אלה, A היא העתקה לינארית.

3.1.1 $hom_{\mathbb{F}}(V, W)$

הגדרה 3.3 יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. אזי קבוצת כל ההעתקות הלינאריות ממ"ו V למ"ו W יסומנו ב- $hom_{\mathbb{F}}(V, W)$.

משפט 3.4 יהיו $A, B \in hom_{\mathbb{F}}(V, W)$. נגדיר את הפעולות הבאות על $hom_{\mathbb{F}}(V, W)$:

$$\begin{aligned}\forall v \in V \quad (A + B)v &:= Av + Bv \\ \forall v \in V \quad (-A)v &:= -Av \\ \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall v \in V \quad (\alpha A)v &= \alpha Av \\ \forall v \in V \quad \hat{0} \cdot v &= 0_w\end{aligned}$$

עם הפעולות הללו, $hom_{\mathbb{F}}(V, W)$ מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: נבדוק שאם $A + B \in hom_{\mathbb{F}}(V, W) \Leftarrow A, B \in hom_{\mathbb{F}}(V, W)$

$$\begin{aligned}(A + B)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + B(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \\ &= \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 + \alpha_1 Bv_1 + \alpha_2 Bv_2 = \alpha_1 (Av_1 + Bv_1) + \alpha_2 (Av_2 + Bv_2) \\ &= \alpha_1 (A + B)v_1 + \alpha_2 (A + B)v_2\end{aligned}$$

הוכחנו סגירות לחיבור ולכפל בסקלר, ולכן $A + B$ היא העתקה לינארית. כעת:

$$\begin{aligned}(A + B)v_1 &\neq (A + B)v_2 \\ \Updownarrow \\ Av_1 + Bv_2 &\neq Av_2 + Bv_2 \\ \Updownarrow? \\ v_1 &\neq v_2\end{aligned}$$

נניח שזה לא נכון, אזי:

$$v_1 = v_2 \Rightarrow Av_1 = Av_2, Bv_1 = Bv_2 \Rightarrow Av_1 + Bv_1 = Av_2 + Bv_2$$

■

את שאר האקסיומות ניתן להוכיח בקלות.

3.2 המטריצה - הגדרות בסיסיות

הגדרה 3.5 יהיו V, W מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ בעלי מימד סופי,

$$\text{ונסמן } \dim V = n, \dim W = m$$

כמו כן, נבחר בסיס ב- V , ו- $\{w_1, \dots, w_m\}$ בסיס ב- W .

תהי $A \in hom_{\mathbb{F}}(V, W)$

$$\begin{aligned}Av_1 &= a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \dots + a_{1m}w_m \\ Av_2 &= a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{2m}w_m \\ &\vdots \\ Av_n &= a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \dots + a_{nm}w_m\end{aligned}$$

כאשר $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, a_{ij} \in \mathbb{F}$ אזי

$$[A] = \begin{pmatrix} Av_1 = a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \dots + a_{1m}w_m \\ Av_2 = a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{2m}w_m \\ \vdots \\ Av_n = a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \dots + a_{nm}w_m \end{pmatrix}$$

אוסף זה יקרא המטריצה של העתקה A .

דוגמאות:

.1

$$V = \mathbb{R}^2 = W$$

$$A(x, y) = (y, x)$$

ונבחר את הבסיסים שלהם להיות $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

$$Av_1 = A(1, 0) = (0, 1) = 0 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1)$$

$$Av_2 = A(0, 1) = (1, 0) = 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1)$$

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.2

$$V = \mathbb{R}^2 = W$$

$$A(x, y) = (x + y, x - y)$$

$$A(1, 0) = (1 + 0, 1 - 0) = (1, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1)$$

$$A(0, 1) = (0 + 1, 0 - 1) = (1, -1) = 1 \cdot (1, 0) - 1 \cdot (0, 1)$$

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

25.11.2009

3. מרחב הפולינומים והעתקת הגזירה:

$$V = P_n(t) = \left\{ p(t) \mid p(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = P_{n-1}(t)$$

$$\{1, t, t^2, \dots, t^n\} \text{ basis in } V$$

$$\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\} \text{ basis in } W$$

$$0 = D1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots + 0 \cdot t^{n-1}$$

$$1 = Dt = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + \dots + 0 \cdot t^{n-1}$$

$$2t = Dt^2 = 0 \cdot 1 + 2t + 0 \cdot t^2 + \dots + 0 \cdot t^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$nt^{n-1} = Dt^n = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots + nt^{n-1}$$

$$[D] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & n \end{pmatrix}$$

כאשר יש $n+1$ שורות ו- n עמודות.

4. מרחב הפולינומים והעתקת האינטגרציה:

$$V = P_n(t), W = P_{n+1}(t)$$

$$I \left(\sum_{k=0}^n d_k t^k \right) = \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{k+1} t^{k+1}$$

$$\{1, t, t^2, \dots, t^n\} \text{ basis in } V$$

$$\{1, t, t^2, \dots, t^{n+1}\} \text{ basis in } W$$

$$t = I1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots + 0 \cdot t^{n+1}$$

$$\frac{t^2}{2} = It = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t^2 + \dots + 0 \cdot t^{n+1}$$

$$\frac{t^3}{3} = It^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t^3 + \dots + 0 \cdot t^{n+1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{t^{n+1}}{n+1} = It^n = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots + \frac{1}{n+1} t^{n+1}$$

$$[I] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

כאשר מספר השורות הוא $n+1$ ומספר עמודות הוא $n+2$.

הגדרה 3.6 נרצה להפוך כל מטריצות מסוג זה:

$$M_{n \times m}(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{F} \right\}$$

למרחב וקטורי.

אזי, ניקח מטריצות ונגדיר עליהן פעולות חיבור וכפל בסקלר:

$$[A], [B] \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$$

$$[A] = (a_{ij}) \ 1 \leq i \leq n, \ [B] = (b_{ij}) \ 1 \leq j \leq m$$

$$[A] + [B] = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\alpha \in \mathbb{F}, \ \alpha[A] = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$[0] = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

משפט 3.7 $M_{n \times m}(\mathbb{F})$ מרחב וקטורי,

וכמו כן $\dim(M_{n \times m}(\mathbb{F})) = n \cdot m$.

הוכחה: החלק הראשון של המשפט הוא פשוט הוכחת אקסיומות המ"ו -

הושאר כתרגיל (לא מסובך).

נוכיח את החלק השני:

נגדיר:

$$1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m, \ e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, הכל אפסים מלבד במקום ה- i, j , בו יש אחד (נקרא גם בסיס שבלייה).

נוכיח כי הקבוצה $\{e_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ היא בסיס ב- $M_{n \times m}(\mathbb{F})$.

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{F}, \ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} e_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{ij} = 0; \ \forall i, j$$

■

משפט 3.8 יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.

$\dim V = n, \ \dim W = m$

נגדיר העתקה $\mu: \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \rightarrow M_{n \times m}(\mathbb{F})$:

$$\forall A \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W), \mu(A) := [A]$$

אזי, μ היא איזומורפיזם,

כלומר היא חח"ע ועל.

הוכחה: נוכיח תחילה כי ההעתקה היא חח"ע:

נניח בשלילה כי קיימים $A, \tilde{A}$ כך ש $A \neq \tilde{A}$,

$$\text{אבל } [A] = [\tilde{A}].$$

יהי $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ב- V , ו- $\{w_1, \dots, w_m\}$ בסיס ב- W .

ניקח $v \in V$, אזי הוא צ"ל של איברים הבסיס - $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ אזי:

$$Av = \sum_{j=1}^n \alpha_j Av_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{k=1}^m a_{jk} w_k$$

$$\tilde{A}v = \sum_{j=1}^n \alpha_j \tilde{A}v_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{k=1}^m a_{jk} w_k$$

$$\Rightarrow Av = \tilde{A}v, \forall v \in V \Rightarrow A = \tilde{A}$$

כפי שרצינו.

כעת, נוכיח כי ההעתקה היא על:

תהי $[A] \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$. נגדיר העתקה A ע"י התנאי:

$$Av_k = \sum_{j=1}^m a_{kj} w_j$$

ניתן לבדוק כי כל A כנ"ל היא העתקה לינארית, מושאר כתרגיל.

כעת, נוכיח כי μ היא לינארית:

$$\mu(\alpha A + \beta B) = \alpha \mu(A) + \beta \mu(B)$$

$$[A] = (a_{kj}), [B] = (b_{kj})$$

$$(\alpha A + \beta B)v_k = \alpha Av_k + \beta Bv_k = \alpha \sum_{j=1}^m a_{kj} w_j + \beta \sum_{j=1}^m b_{kj} w_j = \sum_{j=1}^m (\alpha a_{kj} + \beta b_{kj}) w_j$$

$$[\alpha A + \beta B] = (\alpha a_{kj} + \beta b_{kj}) =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \cdots & \alpha a_{1m} + \beta b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} + \beta b_{n1} & \cdots & \alpha a_{nm} + \beta b_{nm} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \alpha [A] + \beta [B]$$

כלומר, הוכחנו כי μ היא לינארית.

מסקנה ישירה מכך היא כי μ היא על, כנדרש (כי המימדים זהים).

■

מסקנה 3.9

$$\dim(\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)) = n \cdot m$$

3.3 גרעין ודמות של העתקות לינאריות - Image, Kernal

תהי $A \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ אזי

הגדרה 3.10 הדמות של ההעתקה לינארית יוגדר להיות:

$$\text{Im}A = \{w | w \in W, \exists v \in V, Av = w\}$$

הגדרה 3.11 הגרעין של ההעתקה לינארית יוגדר להיות:

$$\text{Ker}A = \{v | v \in V, Av = 0_W\}$$

דוגמא:

$$V = \mathbb{P}_5(t) = \{a_5 t^5 + a_4 t^4 + \dots + a_1 t + a_0, a_5, \dots, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \mathbb{P}_5(t)$$

D – differentiation operator

$$\text{Im}(D) = \mathbb{P}_4(t)$$

$\text{Ker}(D) = \text{the set of constant polynomials}$

כלומר, העתקת הגזירה - הקרנל יהיה כל הפולינומים הקבועים

(שהרי גזירה של פולינום קבוע תהיה 0) -

אלו בעצם מספרים קבועים.

דוגמא נוספת:

$$V = \mathbb{R}^2 = W$$

$$A(x, y) = (x + y, x - y)$$

$$\text{Im}A = \mathbb{R}^2$$

$$\text{Ker}A = \{(x, y) | x + y = 0, x - y = 0\} = \{(0, 0)\}$$

29.11.2009

משפט 3.12 תהי A העתקה לינארית ממ"ו V למ"ו W , כאשר:

$$\text{Im}A = \{w | w \in W, w = Av\}$$

$$\text{Ker}A = \{v | v \in V, Av = 0_W\}$$

אזי, $\text{Im}A$ הוא תת מרחב של W ,

וכמו כן, $\text{Ker}A$ הוא תת מרחב של V .

הוכחה: נזכור כי על מנת להוכיח כי קבוצה היא תת מרחב,

עלינו להראות כי הקבוצה אינה ריקה,

וכמו כן כי מתקיימות סגירות לחיבור ולכפל בסקלר. כעת:

$$0_W \in \text{Im} A \text{ (כי מתקיים } A0_V = 0_W),$$

לכן הקבוצה $\text{Im} A$ אינה ריקה.

בנוסף,

$$w_1, w_2 \in \text{Im} A \Rightarrow w_1 = Av_1, w_2 = Av_2$$

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 = A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש- A היא העתקה לינארית.

כלומר, קיים וקטור $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V$ כך ש:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = Av \Rightarrow \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in \text{Im} A$$

ולכן $\text{Im} A$ הוא תת מרחב של W .

נוכיח כי $\text{Ker} A$ הוא תת מרחב של V :

תחילה, נשים לב כי $\text{Ker} A$ אינה קבוצה ריקה, כי $0_V \in \text{Ker} A$ ($A0_V = 0_W$).

כעת, ניקח $v_1, v_2 \in \text{Ker} A$, אזי:

$$A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 = \alpha_1 0_W + \alpha_2 0_W$$

$$0_W \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \text{Ker} A$$

■

וזה הכל.

משפט 3.13 יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$,

וכמו כן $A : V \xrightarrow{A} W$ העתקה לינארית.

אזי שני התנאים הבאים הם שקולים:

$$א. \text{Ker} A = \{0_V\}$$

ב. העתקה A היא העתקה חד חד ערכית.

הוכחה: א' $\Leftarrow$ ב':

נרצה להוכיח:

$$v_1, v_2 \in V, Av_1 = Av_2 \stackrel{?}{\Rightarrow} v_1 = v_2$$

אזי, ניקח שני וקטורים כלשהם המקיימים $A(v_1 - v_2) = 0_W$. לכן:

$$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \text{Ker} A$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V \Rightarrow v_1 = v_2$$

ב' $\Leftarrow$ א':

נניח כי A העתקה חד חד ערכית.

אזי, אם

$$Av = 0_W, A0_V = 0_W \Rightarrow v = 0_V$$

$$\Rightarrow v \in \text{Ker} A \Rightarrow v = 0_V \Rightarrow \text{Ker} A = \{0_V\}$$

■

וזהו.

משפט 3.14 יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$,

וכמו כן $A : V \xrightarrow{A} W$ העתקה לינארית.

$$Ker A = \{0_V\}$$

וכמו כן $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ קבוצה בלתי תלויה לינארית.

אזי הקבוצה $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ גם היא בלתי תלויה לינארית.

הוכחה:

$$\begin{aligned} \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 + \dots + \alpha_n Av_n &= 0_W \\ \Rightarrow A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) &= 0_W \\ \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n &\in Ker A \\ \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n &= 0_V \\ \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n &= 0 \end{aligned}$$

וזהו. ■

3.3.1 משפט המימדים 2

משפט 3.15 ²⁴ יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$,

$$dim V = n, \quad n \geq 0$$

וכמו כן $A : V \xrightarrow{A} W$ העתקה לינארית.

אזי, $Im A, Ker A$ הם מרחבים וקטורים בעלי מימד סופי.

יתרה מזו,

$$dim V = dim Ker A + dim Im A$$

הוכחה: ממשפט קודם,

$Ker A$ הוא תת מרחב של V ,

שהוא מ"ו בעל מימד n ,

$$dim Ker A \leq n$$

נבחר בסיס ל- $Ker A$ - $\{v_1, \dots, v_m\}$.

אזי ממשפט קודם 2.19, ניתן להשלים אותו לבסיס $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ של V .

מספיק להראות כי הקבוצה $\{Av_{m+1}, \dots, Av_n\}$ היא בסיס של $Im A$.

$$w \in Im A \Rightarrow w = Av,$$

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

$$\begin{aligned} w &= A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = A \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i + \sum_{i=m+1}^n \alpha_i v_i \right) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^m \alpha_i Av_i}_{=0_W} + \sum_{i=m+1}^n \alpha_i Av_i \end{aligned}$$

²⁴עוד משפט בעל סיכוי גבוה להופיע במבחן...

אם $w \in \text{Im} A$, אזי w הוא צ"ל של וקטורי $Av_{m+1}, Av_{m+2}, \dots, Av_n$.
נביט ב- $\{Av_{m+1}, Av_{m+2}, \dots, Av_n\}$ - נוכיח כי היא בת"ל.

$$\begin{aligned}\beta_{m+1}Av_{m+1} + \beta_{m+2}Av_{m+2} + \dots + \beta_n Av_n &= 0_W \\ \Rightarrow A(\beta_{m+1}v_{m+1} + \dots + \beta_n v_n) &= 0_W \\ \Rightarrow \beta_{m+1}v_{m+1} + \dots + \beta_n v_n &\in \text{Ker} A\end{aligned}$$

לכן נוכל לבטא את האיבר הזה כצ"ל של איברי הבסיס המקורי של $\text{Ker} A$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \beta_{m+1}v_{m+1} + \dots + \beta_n v_n &= \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_m v_m \\ \Rightarrow \beta_{m+1}v_{m+1} + \dots + \beta_n v_n - \gamma_1 v_1 - \dots - \gamma_m v_m &= 0_V \\ \Rightarrow \beta_{m+1} = \dots = \beta_n = \gamma_1 = \dots = \gamma_m &= 0\end{aligned}$$

כאשר הגרירה אחרונה נובעת מכך שהקבוצה היא בת"ל (צ"ל של איברי הבסיס של V),
לכן הקבוצה $\{Av_{m+1}, \dots, Av_n\}$ היא בת"ל, והנוסחא נכונה. ■

מסקנה 3.16 יהי V מ"ו בכל מימד סופי,

וכמו כן $A : V \xrightarrow{A} W$ העתקה לינארית.

אזי שני התנאים הבאים שקולים:

א. A היא חד חד ערכית.

ב. $\dim \text{Im} A = \dim V$.

דוגמאות:

1.

$$\begin{aligned}A : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ A(x, y, z) &= 3x + 2y + z\end{aligned}$$

נשאל - מהו $\dim \text{Ker} A$?

$\text{Im} A$ הוא תת מרחב של $\mathbb{R}$, וכמו כן $\text{Im} A \neq \{0\}$, לכן $\dim \text{Im} A = 1$.

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow 3 = \dim \text{Im} A + \dim \text{Ker} A \Rightarrow \dim \text{Ker} A = 2$$

2.

$$\begin{aligned}A : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \text{Projection Operator } A - (x, y, z) &= (x, y) \\ V = \mathbb{R}^3, \dim V &= 3 \\ \text{Ker} A &= \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ \Rightarrow \dim \text{Ker} A &= 1 \\ \dim \text{Im} A &= 2\end{aligned}$$

3.4 כפל (הרכבה) של העתקות לינאריות

3.17 הגדרה יהיו V, W, U מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$,

ויהיו $V \xrightarrow{B} W \xrightarrow{A} U$ העתקות לינאריות.

אזי ההעתקה $C = A \circ B : V \xrightarrow{C} U$ תוגדר כך:

$$Cv = (A \circ B)v = A(Bv)$$

ותקרא כפל של של ההעתקות הלינאריות A ו- B .

משפט 3.18 היא העתקה לינארית.

הוכחה: נוכיח את האקסיומות:

$$\begin{aligned} C(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= A \circ B(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = A(B(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) \\ &= A(\alpha_1 Bv_1 + \alpha_2 Bv_2) = \alpha_1 A(Bv_1) + \alpha_2 A(Bv_2) = \alpha_1 Cv_1 + \alpha_2 Cv_2 \\ (A \circ B)v_1 &\neq (A \circ B)v_2 \stackrel{?}{\Rightarrow} v_1 \neq v_2 \\ (A \circ B)v_1 &\neq (A \circ B)v_2 \Rightarrow A(Bv_1) \neq A(Bv_2) \stackrel{A \text{ Linear}}{\Rightarrow} Bv_1 \neq Bv_2 \stackrel{B \text{ Linear}}{\Rightarrow} v_1 \neq v_2 \end{aligned}$$

■

משפט 3.19 יהיו V, W, U מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$,

וכמו כן $\dim V = m; \dim W = n; \dim U = k$.

בנוסף ניקח $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V ,

$\{w_1, \dots, w_m\}$ בסיס ל- W ,

$\{u_1, \dots, u_k\}$ בסיס ל- U .

יהיו $V \xrightarrow{B} W \xrightarrow{A} U$ העתקות לינאריות,

ו- $C = A \circ B : V \xrightarrow{C} U$.

$$\begin{aligned}
Bv_1 &= b_{11}w_1 + b_{21}w_2 + \dots + b_{n1}w_m \\
Bv_2 &= b_{12}w_1 + b_{22}w_2 + \dots + b_{n2}w_m \\
&\vdots \\
Bv_n &= b_{1n}w_1 + b_{2n}w_2 + \dots + b_{nn}w_m \\
[B] &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad m \times n \\
Aw_1 &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{k1}u_k \\
Aw_2 &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{k2}u_k \\
&\vdots \\
Aw_m &= a_{1m}u_1 + a_{2m}u_2 + \dots + a_{km}u_k \\
[A] &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{km} \end{pmatrix} \quad k \times m \\
Cv_1 &= c_{11}u_1 + c_{21}u_2 + \dots + c_{k1}u_k \\
Cv_2 &= c_{12}u_1 + c_{22}u_2 + \dots + c_{k2}u_k \\
&\vdots \\
Cv_n &= c_{1n}u_1 + c_{2n}u_2 + \dots + c_{kn}u_k \\
[C] &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{pmatrix} \quad k \times n
\end{aligned}$$

אזי, מתקיים:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^m a_{il}b_{lj} \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq n$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
cv_j &= \sum_{i=1}^k c_{ij}u_i \\
cv_j &= A(Bv_j) = A \sum_{l=1}^m b_{lj}w_l = \sum_{l=1}^m b_{lj}Aw_l = \sum_{l=1}^m b_{lj} \sum_{i=1}^k a_{il}u_i \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^k c_{ij}u_i = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{l=1}^m a_{il}b_{lj} \right) u_i
\end{aligned}$$

■

3.20 הגדרה

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{km} \end{pmatrix} \quad k \times m$$

$$[B] = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

מטריצה $[C]$ מסדר $k \times n$ נקראת כפל של A ו- B ,

$$[C] = [A] \cdot [B],$$

אם מתקיים

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^m a_{il} b_{lj} \quad 1 \leq i \leq k \quad 1 \leq j \leq n$$

3.4.1 חוק האסוציאטיביות עבור מטריצות

משפט 3.21 תהי $[A]$ מטריצה מסדר $n \times m$,

$[B]$ מטריצה מסדר $m \times k$,

$[C]$ מטריצה מסדר $k \times r$,

כולן מעל אותו שדה $\mathbb{F}$.

אז,

$$[A] \cdot ([B] \cdot [C]) = ([A] [B]) [C]$$

הוכחה:

$$[A] = (a_{ij}), [B] = (b_{js}), [C] = (c_{sl})$$

$$[A] ([B] [C]) = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \underbrace{\left(\sum_{s=1}^k b_{js} c_{sl} \right)}_{([B][C])_{jl}} \right)}_{([A]([B][C]))_{il}} = \left(\sum_{s=1}^k \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{js} \right)}_{([A][B])_{is}} c_{sl} \right)$$

■

6.12.2009

3.5 העתקה הופכית

הגדרה 3.22 תהי $A : V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

העתקה לינארית S תקרא הופכית להעתקה A ,

אם מתקיימים התנאים הבאים:

1.

$$V \xrightarrow{A} W \xrightarrow{S} V$$

דהיינו $S \circ A = I_V$ (כאשר I_V היא העתקת הזהות - כלומר $I_V v = v$ $\forall v \in V$).

2.

$$W \xrightarrow{S} V \xrightarrow{A} W$$

דהיינו $A \circ S = I_W$.

הגדרה 3.23 העתקה A תקרא הפיכה,

אם קיימת לה העתקה הופכית.

משפט 3.24 תהי $V \xrightarrow{A} W$ העתקה לינארית.

נניח כ- R, S הן העתקות הפכיות ל- A , דהיינו:

$$V \xrightarrow{A} W \xrightarrow{S} V, A \circ S = I_V$$

$$W \xrightarrow{S} V \xrightarrow{A} W, S \circ A = I_W$$

$$V \xrightarrow{A} W \xrightarrow{R} V, A \circ R = I_V$$

$$W \xrightarrow{R} V \xrightarrow{A} W, R \circ A = I_W$$

אזי $S = R$, דהיינו ההעתקה ההופכית היא יחידה.

הוכחה:

$$R = R \circ I_W = R \circ (A \circ S) = (R \circ A) \circ S = I_W \circ S = S$$

■

משפט 3.25 תהי A העתקה לינארית ממרחב V למרחב W ,

כאשר V, W מ"ו מעל השדה $\mathbb{F}$.

אזי, שני התנאים הבאים שקולים:

א. ההעתקה A הפיכה.

ב. A הוא איזומורפיזם.

הוכחה: א' $\Rightarrow$ ב'

$$V \xrightarrow{A} W \xrightarrow{S} V, A \circ S = I_V;$$

$$W \xrightarrow{S} V \xrightarrow{A} W, S \circ A = I_W$$

נוכיח כי ההעתקה חח"ע:

יהיו שני וקטורים $v_1, v_2 \in V$, עבורם $Av_1 = Av_2$.

²⁵עוד משפט לבחינה

אזי, מתקיים $S(Av_1) = S(Av_2)$.

אבל $S \circ A = I_V$, ולכן $v_1 = v_2$,

כלומר, A היא חח"ע.

כעת נוכיח כי היא על:

יהי $w \in W$. אזי:

$$A \circ (Sw) = (A \circ S)w = I_W w = w$$

כלומר, קיים וקטור $v = Sw \in V$ כך שמתקיים $Av = w$,

ולכן ההעתקה היא על, וסיימנו.

ב' $\leq$ א'

$V \xrightarrow{A} W$, כאשר העתקה A היא איזומורפיזם.

אזי היא חח"ע ועל.

יהי $w \in W$ - מכיוון A על קיים $v \in V$ כך ש- $Av = w$.

כמו כן, ניתן לומר כי v הוא יחיד (מחד חד ערכיות).

נגדיר העתקה $V \xrightarrow{S} W$ בצורה הבאה:

$$Sw = v \Rightarrow Av = w = A \circ (Sw) \Rightarrow A \circ S = I_W$$

כמו כן,

$$Av = w \Rightarrow Sw = v = S(Av) \Rightarrow S \circ A = I_V$$

כעת, נבדוק אם ההעתקה לינארית:

$$w_1, w_2 \in W, Av_1 = w_1, Av_2 = w_2$$

$$A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2$$

$$S(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = S \circ A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 Sw_1 + \alpha_2 Sw_2$$

■

ולכן ההעתקה לינארית, וסיימנו.

דוגמאות:

- φ זווית נתונה.
נרצה להגדיר העתקה לינארית שמעבירה כל וקטור במישור לזווית $-\varphi$ -
ונחפש לה העתקה הופכית.

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$R^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- נתונה העתקה לינארית במישור, המוגדרת בעזרת המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
האם קיימת העתקה הופכית להעתקה זו?
נשתמש במשפט שהוכחנו - נראה שלא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אזי לא קיבלנו בסיס, ולכן זהו אינו איזומורפיזם,
ולכן לפי המשפט לא קיימת העתקה הופכית להעתקה זו.

3.6 מטריצת מעבר בסיסים

הגדרה 3.26 יהי V מ"ו בעל מימד n ,

ויהיו $\{v'_1, \dots, v'_n\}, \{v_1, \dots, v_n\}$ שני בסיסים ל- V .

אזי, נוכל להציג את איברי בסיס אחד כצ"ל של איברי הבסיס השני, דהיינו:

$$v'_1 = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \dots + \alpha_{1n}v_n$$

$$v'_2 = \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \dots + \alpha_{2n}v_n$$

$\vdots$

$$v'_n = \alpha_{n1}v_1 + \alpha_{n2}v_2 + \dots + \alpha_{nn}v_n$$

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר $[A]$ תקרא מטריצת מעבר מבסיס לבסיס.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[A] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

9.12.2009

משפט 3.27 יהי V מרחב וקטורי, $\dim V = n$, ויהיו לו שני בסיסים:

$$\hat{B} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n\}, B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

כמו כן, יהי $v \in V$ כך ש-

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B$$

$$v = \hat{\alpha}_1 \hat{v}_1 + \hat{\alpha}_2 \hat{v}_2 + \dots + \hat{\alpha}_n \hat{v}_n \Rightarrow v = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{pmatrix}_{\hat{B}}$$

$$v_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \hat{v}_i, \quad i \leq j \leq n$$

$$[P] = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

אזי, מתקיים:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{pmatrix}_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B$$

הוכחה:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{k=1}^n P_{ik} \hat{v}_k$$

$$v = \sum_{k=1}^n \hat{\alpha}_k \hat{v}_k$$

$$\hat{\alpha}_k = \sum_{i=1}^n P_{ki} \alpha_i \quad i \leq k \leq n$$

$$\begin{aligned}
V &= \mathbb{R}^2 \\
|v_1| &= |\hat{v}_1| = |v_2| = |\hat{v}_2| = |v| \\
B &= \{v_1, v_2\}; \hat{B} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2\} \\
v &= 0v_1 - v_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B \\
v &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{v}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{v}_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{\hat{B}} \\
v_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{v}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{v}_2 \\
v_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{v}_2 \\
[P] &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3.6.1 טרנספורמציה מבסיס לבסיס

משפט 3.28 יהי V מרחב וקטורי, $\dim V = n$, ויהיו לו שני בסיסים:

$$\hat{B} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n\}, B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

נגדיר העתקה לינארית P בצורה הבאה:

$$P\hat{v}_j = v_j \quad i \leq j \leq n$$

אזי:

$$A\hat{v}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\hat{v}_i \Rightarrow [A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

כלומר, קיבלנו:

$$v_j = P\hat{v}_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}\hat{v}_i \Rightarrow [P] = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

למה 3.29 יהי V מ"ו בעל מימד סופי, וכמו כן:

$$A \in \text{hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$$

כאשר A מעבירה בסיס $\{v_1, \dots, v_n\}$ של V

לבסיס $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ של V .

אזי, A היא איזומורפיזם.

הוכחה: תחילה, נשים לב כי מכיוון ו- $A \in \text{hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$,

אזי היא בהכרח על.

כעת, נותר לנו להוכיח כי היא חח"ע -

ממשפט קודם, תנאי זה שקול לכך שבקרנל של ההעתקה יהיה רק וקטור האפס.

נראה זאת, ונסיים:

$$\ker A = \{v \mid Av = 0_v\}$$

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

$$A_i \left(\sum \alpha_i v_i \right) = \sum \alpha_i A v_i = 0_V \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

■

כאשר המעבר האחרון הוא כי הקבוצה v_i היא בסיס.

מסקנה 3.30 P , טרנספורמציה מבסיס לבסיס, היא איזומורפיזם.

מסקנה 3.31 קיימת ל- P העתקה הופכית P^{-1} , דהיינו:

$$P \circ P^{-1} = P^{-1} \circ P = I_V$$

3.6.2 המטריצה ההופכית

הגדרה 3.32 יהיו:

$$[P] \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$$

$$[P^{-1}] \cdot [P] = [P] \cdot [P^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אזי $[P^{-1}]$ תקרא המטריצה ההופכית ל- $[P]$.

$$[P] = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{טענה 3.33 אם}$$

אזי ניתן לומר שקיימת $[P^{-1}]$.

הוכחה: $[P]$ היא מטריצה של העתקה לינארית P ,

לכן P^{-1} (ההעתקה הלינארית ההופכית) קיימת.

נגדיר את $[P^{-1}]$ להיות המטריצה של ההעתקה P^{-1} .

■

משפט 3.34 יהי V מ"ז בעל מימד n ,

ותהי $A \in \text{hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$,

וכמו כן יהיו ל- V שני בסיסים:

$$\hat{B} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n\}, B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$Av_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i \Rightarrow [A]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A\hat{v}_j = \sum_{i=1}^n \hat{a}_{ij}\hat{v}_i \Rightarrow [A]_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \cdots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \hat{a}_{n2} & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$v_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}\hat{v}_i \Rightarrow [P] = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

אזי, יתקיים:

$$[A]_{\hat{B}} = [P] \cdot [A]_B \cdot [P^{-1}]$$

הוכחה:

$$Av_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i = \sum_{i=1}^n a_j \sum_{k=1}^n P_{ji}\hat{v}_k$$

מצד שני, Av_j שווה גם ל:

$$A \left(\sum_{i=1}^n P_{ij}\hat{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n P_{ij}A\hat{v}_i = \sum_{i=1}^n P_{ij} \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ki}\hat{v}_k$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \hat{a}_{ki}P_{ij} \right) \hat{v}_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n P_{ik}a_{ij} \right) \hat{v}_k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \hat{a}_{ki}P_{ij} = \sum_{i=1}^n P_{ki}a_{ij}$$

$$\Rightarrow [A]_{\hat{B}} [P] = [P] [A]_B$$

$$\Rightarrow [A]_{\hat{B}} = [P] [A]_B [P^{-1}]$$

■

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$B = \{v_1, v_2\}; \hat{B} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}$$

כאשר A תהיה ההעתקה שמסובבת את הוקטור ב-45 מעלות בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון). אזי:

$$Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}v_2$$

$$Av_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}v_2$$

$$\Rightarrow [A]_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$A\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{v}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{v}_2$$

$$A\hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{v}_2$$

$$\Rightarrow [A]_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$v_1 = 0\hat{v}_1 - 1\hat{v}_2$$

$$v_2 = -1\hat{v}_1 + 0\hat{v}_2$$

$$\Rightarrow [P] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [P^{-1}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

וכך אכן מתקיים

$$[A]_{\hat{B}} = [P] \cdot [A]_B [P^{-1}]$$

נביט במערכת המשוואות הבאה (נסמנה ב-*):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

כאשר $a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$, ניתן לכתוב:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

וכמו כן:

$$Ax = b$$

כאשר המשוואה האחרונה ו- $*$ הן שקולות.

$$\mathbb{F}^n = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right\} \quad \text{אבחנה: הינו מרחב וקטורי.}$$

אזי, נוכל להגדיר העתקה לינארית T_A כך ש: $T_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ בצורה הבאה:

$$T_A v := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

כאשר $V = \mathbb{F}^n$, $W = \mathbb{F}^m$.

טענה 3.35 ניקח את הבסיסים הבאים:

$$\begin{aligned} B_V = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \quad e_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \hat{B}_W = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_m\}, \quad \hat{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \hat{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אזי $[A]$ היא המטריצה של ההעתקה הלינארית T_A ביחס לבסיסים $\hat{B}_W, B_V$.

הוכחה:

$$T_A e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = a_{11}\hat{e}_1 + a_{21}\hat{e}_2 + \dots + a_{m1}\hat{e}_m$$

$$\vdots$$

$$T_A e_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = a_{1n}\hat{e}_1 + a_{2n}\hat{e}_2 + \dots + a_{mn}\hat{e}_m$$

■

הערה 3.36 קבוצות הפתרונות של המשוואה היא:

$$T_A^{-1}(b) = \{v | v \in \mathbb{F}^n, T_A v = b\}$$

הערה 3.37 $b \in \text{Im} T_A \Leftrightarrow$ למערכת $Ax = b$ קיים פתרון.

הערה 3.38 $\text{Ker} T_A$ הינה קבוצת הפתרונות של המשוואה $Ax = 0$.

משוואה כזו נקראת משוואה הומוגנית.

המשוואה $Ax = b$ כאשר $b \neq 0$ נקראת משוואה אי הומוגנית.

הערה 3.39 קבוצת הפתרונות של המשוואה האי הומוגנית אינה מרחב וקטורי,

כי במקרה זה 0 אינו פתרון של המשוואה, ואז אינו חלק מקבוצת הפתרונות.

משפט 3.40 ²⁶תהי $Ax = b$ מערכת משוואות ליניאריות.

בנוסף, נניח כי $b \in \text{Im} T_A$, דהיינו, קיים פתרון למערכת.

וכמו כן, יהי $s \in \mathbb{F}^n$ פתרון כך ש- $As = b$.

אזי קבוצת הפתרונות $T_A^{-1}(b)$ תהיה שווה ל:

$$T_A^{-1}(b) = s + \text{ker} T_A := \{v | v = s + \tilde{v}, \tilde{v} \in \text{ker} T_A\}$$

הוכחה: נניח כי $v \in T_A^{-1}(b)$, אזי, מתקיים:

$$T_A(v - s) = T_A v - T_A s = b - b = 0$$

$$\Rightarrow v - s \in \text{ker} T_A \Rightarrow v \in s + \text{ker} T_A$$

נעת, נניח כי $v \in \text{ker} T_A$, אזי, נראה שמתקיים $s + v \in T_A^{-1}(b)$. נעשה זאת:

$$T_A(s + v) = T_A s + T_A v = b + 0 = b$$

וזהו.

■

²⁶עוד אחד למבחן, עפ"י סטרויב.

דוגמא:

מערכת אי הומוגנית	מערכת הומוגנית
$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$ $x_1 = t, \quad x_2 = -\frac{t}{3} + \frac{1}{3}$ $T_A^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -\frac{t}{3} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ $= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -\frac{t}{3} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \ker T_A$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$ $x_1 = t, \quad x_2 = -\frac{t}{3}$ $T_A^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -\frac{t}{3} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \ker T_A$

משפט 3.41 התנאים הבאים הם שקולים:

א. למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.

ב. $\ker T_A = \{0\}$, $b \in \text{Im} T_A$.

הוכחה: תחילה נוכיח א'=>ב'

תחילה, נניח כי וקטור v הוא הפתרון.

אזי מתקיים $Av = T_A v = b$, לכן $b \in \text{Im} T_A$.

כעת נבדוק שאכן $\ker T_A = \{0\}$:

נניח כי $u \in \ker T_A$. אזי $A(v + u) = b$.

כלומר הוקטור $v + u$ הוא גם פתרון של המערכת $Ax = b$.

אבל, נתון כי הפתרון הוא יחיד, לכן:

$$v = v + u \Rightarrow u = 0$$

כעת נוכיח את ב'=>א':

$b \in \text{Im} T_A$, אזי קיים למערכת פתרון, כלומר קיים v כך ש- $Av = b$.

נניח בשלילה כי $\tilde{v}$ הוא גם פתרון של $Ax = b$.

כלומר, מתקיים $A\tilde{v} = b$. אזי:

$$A(v - \tilde{v}) = 0 \Rightarrow v - \tilde{v} \in \ker T_A \Rightarrow v - \tilde{v} = 0 \Rightarrow v = \tilde{v}$$

כלומר הפתרון v הוא יחיד, כפי שרצינו להראות.

נגדיר סימנים:

תהי מערכת משוואות:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

נבטא אותה בעזרת המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

נגדיר את הה"ל $T_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, $T_A v = Av$, וכן:

$$\check{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \check{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \check{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \check{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

כאשר $\check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_n, \check{b} \in \mathbb{F}^m$.

3.42 הגדרה

$$[A|\check{b}] := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

3.43 הגדרה

$$\begin{aligned} \text{rank}_C([A]) &= \dim \{ \text{span} \{ \check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_n \} \} \\ \text{rank}_C([A|\check{b}]) &= \dim \{ \text{span} \{ \check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_n, \check{b} \} \} \end{aligned}$$

המשמעות של הצד הימני - פשוט ניקח את מספר הוקטורים הבלתי תלויים לינארית.

rank_R הוא אותו הדבר רק עבור השורות (Row).

נגדיר כעת מספר נוסחאות, אותן נפרק לאחר מכן למשפטים, ונוכיח בהמשך:

	$[A] x = \check{b}$	$[A] x = 0 \quad (\check{b} = 0)$
$\text{rank}_C([A]) \neq \text{rank}([A \check{b}])$	אין פתרונות	אפשרות זו אינה קיימת
$\text{rank}_C([A]) = \text{rank}([A \check{b}]) = n$	קיים פתרון יחיד	קיים פתרון יחיד $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (הטריויאלי)
$\text{rank}_C([A]) = \text{rank}([A \check{b}]) < n$	פתרון קיים ואינו יחיד	קיימים פתרונות שונים מהפתרון הטריויאלי

משפט 3.44 תחת סימונים אלו, מתקיים:²⁷

$$\dim \{ \text{Vector Space of the solutions for } Ax = 0 \} = n - \text{rank}_C([A]) = n - \dim \{ \text{span} \{ \check{a}_1, \dots, \check{a}_n \} \}$$

הוכחה:

$$\ker T_A \equiv \text{Vector Space of the solutions for } Ax = 0$$

כאשר $T_A v := [A] v$, $v \in \mathbb{F}^n$, $T_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ כעת ממשפט המימדים:

$$n = \dim \ker T_A + \dim \text{Im} T_A$$

לכן מספיק להראות שמתקיים:

$$\text{Im} T_A = \text{span} \{ \check{a}_1, \dots, \check{a}_n \}$$

$$\exists v : T_A v = u \quad v \in \mathbb{F}^n \Leftrightarrow u \in \text{Im} T_A$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{F}^n \text{ היא בסיס למרחב } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ הקבוצה}$$

$$v = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נחשב את $T_A v$:

$$\begin{aligned} u = T_A v &= c_1 T_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 T_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_n T_A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= c_1 [A] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 [A] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_n [A] \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= c_1 \check{a}_1 + c_2 \check{a}_2 + \dots + c_n \check{a}_n \Rightarrow \text{Im} T_A = \text{span} \{ \check{a}_1, \dots, \check{a}_n \} \end{aligned}$$

■

²⁷אינטואיטיבית - מדוע הוא נכון?

אם אחד התנאי השני בטבלה מתקיים - זה נכון.

מצד שני, אם קיים פתרון נוסף, אזי התנאי השלישי בטבלה מתקיים, וגם זה נכון.

דוגמא:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 4x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix}; \dim(\text{Space of the solutions}) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad n = 3$$

$$\dim \left\{ \text{span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{קיים פתרון יחיד } [A]x = 0 \Leftrightarrow \text{למערכת } \Leftrightarrow \text{rank}_C([A]) = n \quad \textbf{מסקנה 3.45}$$

הוכחה: $\Leftrightarrow \text{rank}_C[A] = n$ המימד של מרחב הפתרונות של $[A]x = 0$ הוא אפס.

$$\Leftrightarrow \text{מרחב הוקטורי של הפתרונות של } [A]x = 0 \text{ הוא } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{ וסיימנו.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{למערכת } [A]x = 0 \text{ קיים פתרון שאינו } \textbf{מסקנה 3.46} \Leftrightarrow \text{rank}_C[A] < n$$

מרחב הפתרונות של $[A]x = x$ גדול מ-0 $n - \text{rank}_C[A] = 0$.

3.7.1 משפט קרונקר קפלי

משפט 3.47 שני התנאים הבאים הם שקולים:

א. קיים פתרון למערכת $[A]x = \check{b}$.

ב. $rank_C([A]) = rank_C([A|\check{b}])$.

הוכחה: א' $\Rightarrow$ ב'

$$\text{ניקח פתרון למערכת } [A]x = \check{b} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} [A] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n \end{pmatrix} = c_1\check{a}_1 + c_2\check{a}_2 + \dots + c_n\check{a}_n = \check{b} \end{aligned}$$

כלומר $\check{b}$ הוא צירוף לינארי של $\check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_n$,

ולכן הקבוצה $\{\check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_n, \check{b}\}$ היא תלויה לינארית,

ולכן $\dim \{span \{\check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_n, \check{b}\}\} = \dim \{span \{\check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_n\}\}$

כפי שרצינו.

ב' $\Rightarrow$ א'

נגדיר את המרחבים הוקטורים הבאים:

$$V = span \{\check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_n, \check{b}\}, \quad W = span \{\check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_n\}$$

W הוא תת מרחב של V , לכן ממשפט 2.19 ניתן לבחור בסיס ל- V $\{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_k\}$,

כך שהקבוצה $\{w_1, \dots, w_m\}$ הוא בסיס ל- W .

אבל, $\dim V = \dim W$ (מההנחה), ולכן $k = m$,

כלומר $\{w_1, \dots, w_m\}$ הוא בסיס משותף של V, W .

אם כן, b הוא צ"ל של הוקטורים $\{w_1, \dots, w_m\}$. מצד שני:

$$w_1, \dots, w_m \in span \{\check{a}_1, \dots, \check{a}_n\}$$

ולכן $w_1, \dots, w_m$ הם צירוף לינארי של $\check{a}_1, \dots, \check{a}_n$.

ולכן בסה"כ $\check{b}$ הוא צ"ל של $\check{a}_1, \dots, \check{a}_n$, ולכן נוכל לכתוב:

$$\check{b} = c_1\check{a}_1 + c_2\check{a}_2 + \dots + c_n\check{a}_n$$

כלומר, הסקלרים c_i הם הפתרון שחיפשנו!

■

משפט 3.48 פתרון המערכת $[A]x = \check{b}$ הוא יחיד אם"מ

$$\text{rank}_C [A] = \text{rank}_C [A|\check{b}] = n$$

הוכחה: יהיו $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$, $\check{x} = \begin{pmatrix} \check{x}_1 \\ \check{x}_2 \\ \vdots \\ \check{x}_n \end{pmatrix}$ פתרונות למערכת, כלומר מתקיים:

$$[A]\tilde{x} = \check{b}, [A]\check{x} = \check{b}$$

אזי $\tilde{x} - \check{x}$ הוא פתרון של המערכת $[A]x = 0$.

לפי המסקנות ממשפט קודם,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dim(\text{Span}(\check{a}_1, \dots, \check{a}_n)) = n$$

יש פתרון יחיד $[A]x = 0$

אזי $\tilde{x} - \check{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ וזהו פתרון יחיד.

23.12.2009

דוגמא:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{rank}_C \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 = \text{rank}_C \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$n = 2; r = 2$$

$$x_2 = x_3 = t, x_1 = 1 - 3t$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 3t \\ t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{F}$$

נסמן את וקטורי העמודה שלה:

$$\check{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \check{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \check{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

וכמו כן, נסמן את וקטורי השורה שלה:

$$\hat{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \hat{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, \hat{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

אז:

$$\dim(sp(\check{a}_1, \dots, \check{a}_n)) \equiv \text{rank}_C[A] = \dim(sp(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m)) = \text{rank}_R[A]$$

כלומר, דרגת השורות שווה לדרגת העמודות.

הוכחה: נבחר $\hat{a}_{l_1}, \dots, \hat{a}_{l_k}$ כך שהקבוצה $\{\hat{a}_{l_1}, \dots, \hat{a}_{l_k}\}$ כאשר $1 \leq l_1, \dots, l_k \leq m$

היא בסיס למרחב $sp\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m\}$.

נגדיר את המטריצה $[\hat{A}]$ בצורה הבאה:

$$[\hat{A}] = \begin{pmatrix} \hat{a}_{l_1} \\ \vdots \\ \hat{a}_{l_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{l_1 1} & a_{l_1 2} & \cdots & a_{l_1 n} \\ a_{l_2 1} & a_{l_2 2} & \cdots & a_{l_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l_k 1} & a_{l_k 2} & \cdots & a_{l_k n} \end{pmatrix}$$

$$[\hat{A}]x = 0, [A]x = 0$$

הן מערכות שקולות -

כי הרי "זרקנו" את המשוואות שתלויות לינארית, כלומר הן לא נותנות לנו שום פתרון נוסף....

לכן $\text{rank}_R[\hat{A}] = \text{rank}_R[A] = k$ וכמו כן:

$$\dim(\text{Space of Solutions for } [\hat{A}]x = 0) = \dim(\text{Space of Solutions for } [A]x = 0)$$

$$\Rightarrow n - \text{rank}_C[\hat{A}] = n - \text{rank}_C[A]$$

$$\Rightarrow \text{rank}_C[\hat{A}] = \text{rank}_C[A]$$

לפי הגדרת $[\hat{A}]$, כל וקטור עמודה הוא ב- $\mathbb{F}^k$, ולכן $\text{rank}_C[\hat{A}] \leq k$,

כי אולי לא כל וקטורי העמודה בת"ל אחד בשני.

²⁸עוד אחת למבחן...

כעת:

$$\Rightarrow \text{rank}_C [\hat{A}] = \text{rank}_C [A] \leq k = \text{rank}_R [A]$$

$$\Rightarrow \text{rank}_C [A] \leq \text{rank}_R [A]$$

וזה מתקיים עבור כל מטריצה $[A]$.

ניישם זאת עבור המטריצה הבאה:

$$[A]^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}_C \left([\hat{A}]^T \right) \leq \text{rank}_C \left([A]^T \right)$$

$$\Rightarrow \text{rank}_R ([A]) \leq \text{rank}_C [A]$$

■

ולכן קיבלנו אי שיוויון חלש משני הצדדים, ולכן בסה"כ - הצדדים שווים זה לזה!

הגדרה 3.50 בהמשך למשפט הקודם - המספר:

$$\text{rank} [A] := \text{rank}_R [A] = \text{rank}_C [A]$$

יקרא הדרגה (rank) של המטריצה $[A]$.

3.8 דירוג מטריצות - The Gaussian Elimination

תהי נתונה מערכת משוואות:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

נרצה להגיע למצב הבא:

$$x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1$$

$$x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2$$

$$\vdots$$

$$x_k + \tilde{a}_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + \tilde{a}_{kn}x_n = \tilde{b}_k$$

כאשר $k < n$.

בהצגה מטריציאלית:

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \cdots & \cdots & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \tilde{a}_{23} & \cdots & \cdots & \tilde{b}_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \tilde{a}_{kn} & \tilde{b}_k \end{pmatrix}$$

נשים לב שהצורה הסופית אינה בהכרח אלכסון - יכול להיות ונקבל צורת מדרגות.

את התהליך הזה אנו עושים על ידי ביצוע פעולות אלמנטריות.

קיימות שלוש כאלו:

1. כפל או חילוק שורה בסקלר שונה מאפס.

2. החלפת סדר השורות

3. הוספת כפולה של שורה בסקלר לשורה אחרת.

R_i ייצג את השורה עליה בוצעה הפעולה.

אם נקבל שורה שהיא צירוף לינארית של אחרת - נוריד אותה.

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי הדרגה של המטריצה המדורגת הינה 2.

הדרגה שווה לדרגת המטריצה המקורית, ולכן יש למטריצה פתרון.

כעת נפתור את מערכת המשוואות החדשה:

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 0x_4 = -1$$

$$x_2 - x_3 - x_4 = -1$$

$$x_3 = t_1, \quad x_4 = t_2$$

$$x_1 = 4(-1 + t_1 + t_2) - 2t_1 - 1 = 2t_1 + 4t_2 - 5$$

$$x_2 = -1 + t_1 + t_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 2t_1 + 4t_2 - 5 \\ -1 + t_1 + t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

דוגמא נוספת:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$$

$$7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8$$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_1, R_1 \leftarrow R_3} \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1} \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 10 & 12 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 4R_1} \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 10 & 12 \\ 0 & 11 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן ה- rank לא שווה, ולכן אין פתרון!

27.12.2009

3.9 דטרמיננטה של מטריצה

הגדרה 3.51 תהי $[A]$ מטריצה ריבועית בגודל $n \times n$:

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{F}$$

אזי הדטרמיננטה של $[A]$ תחושב בצורה הבאה:

$$\det [A] = \sum_{\pi \in S(n)} (-1)^{\vartheta(\pi)} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

במהלך השיעור הקרוב נבין את כל הסימונים המופיעים מעלה.

3.9.1 תמורות (פרמוטציות)

הגדרה 3.52 תמורה הינה העתקה חח"ע ועל המקיימת:

$$\{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\pi} \{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)\}$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \pi(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$$

ונסמן:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

נשים לב - זוהי אינה מטריצה, כי אם פשוט הסבר לאן התמורה מעבירה כל איבר.

דוגמאות

$$\{1, 2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{1, 2, 3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

טענה 3.53 ללא הוכחה:

עבור קבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ ישנן $n!$ תמורות.

הגדרה 3.54 כפל תמורות יוגדר בצורה הבאה:

$$\sigma\pi = \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\pi} \{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)\} \xrightarrow{\sigma} \{\sigma\pi(1), \sigma\pi(2), \dots, \sigma\pi(n)\}$$

כאשר π, σ הן שתי תמורות של $\{1, 2, \dots, n\}$.

דוגמא

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{1, 2, 3\} \xrightarrow{\pi} \{2, 1, 3\} \xrightarrow{\sigma} \{2, 3, 1\}$$

$$\sigma\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

הגדרה 3.55 התמורה:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

תקרא התמורה הטריויאלית של $\{1, 2, \dots, n\}$.

כמו כן, מתקיים:

$$\pi = \pi\epsilon = \epsilon\pi$$

הגדרה 3.56 נביט בתמורה π :

$$\{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\pi} \{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)\}$$

עבור $j = \{1, 2, \dots, n\}$ נגדיר $\pi^{-1}(j) = k$ כאשר $\pi(k) = j$.

אזי התמורה π^{-1} תקרא התמורה ההפכית ל- π .

דוגמא

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \pi : \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \Rightarrow \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

הגדרה 3.57 עבור $\{1, 2, \dots, n\}$,

$S(n)$ תוגדר להיות הקבוצה של כל התמורות של $\{1, 2, \dots, n\}$.

עבור $S(n)$ מתקיים:

א. כפל אסוציאטיבי.

ב. תמורות הופכיות לכל התמורות ב- $S(n)$.

ג. תמורה טריויאלית $\epsilon : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

הערה:

קבוצה עם התכונות הללו נקראת חבורה.

אזי, הקבוצה $S(n)$ היא חבורה (group).

הגדרה 3.58 טרנספוזיציה הינה תמורה τ המקיימת:

$$\{1, 2, \dots, p-1, p, p+1, \dots, q-1, q, q+1, \dots, n\} \xrightarrow{\tau} \{1, 2, \dots, p-1, q, p+1, \dots, q-1, p, q+1, \dots, n\}$$

כלומר, היא רק מחליפה בין q ל- p .

$$\tau = (pq)$$

הערה:

נשים לב כי מהגדרתה, כל טרנספוזיציה הופכית לעצמה (כי אנחנו מחליפים רק בין שני איברים),

$$\tau \cdot \tau = \epsilon$$

דוגמא

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1, 2)$$

משפט 3.59²⁹ ניתן להציג כל תמורה של $\{1, 2, \dots, n\}$ ככפל של טרנספוזיציות.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה:

מקרה הבסיס הוא עבור $\{1, 2\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 2)(1, 2)$$

נניח שהטענה מתקיימת עבור $\{1, 2, \dots, n-1\}$, נוכיח עבור $\{1, 2, \dots, n\}$.

נניח π היא תמורה של $\{1, 2, \dots, n\}$. אזי ישנן שתי אפשרויות:

$$1. \pi(n) = n$$

$$2. \pi(n) = k, k \neq n$$

אם אפשרות 1 מתקיימת, ניתן לחשוב על π כעל תמורה של הקבוצה $\{1, 2, \dots, n-1\}$.

אזי, לפי הנחת האינדוקציה, π הוא כפל של טרנספוזיציות.

אם אפשרות 2 מתקיימת, כלומר $\pi(n) = k$.

$$\text{אזי נגדיר } \tau = (kn), \text{ כלומר } \tau(n) = k, \tau(k) = n,$$

אזי לפי הגדרת כפל של תמורות:

$$\tau(\pi(n)) = \tau(k) = n$$

כלומר, ניתן לחשוב על $\tau\pi$ כעל תמורה של הקבוצה $\{1, 2, \dots, n-1\}$

$$\tau\pi = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_s$$

$$\Rightarrow \pi = \tau \cdot \tau \cdot \pi = \tau \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_s$$

וסיימנו. ■

²⁹לא יופיע במבחן

$$\begin{aligned}\pi &= \{1, 2, 3\} \xrightarrow{\pi} \{3, 2, 1\} \\ \tau \cdot \tau_1 : \{1, 2, 3\} &\xrightarrow{\tau_1} \{1, 3, 2\} \xrightarrow{\tau} \{3, 2, 1\} \\ \Rightarrow \pi &= \tau \cdot \tau_1\end{aligned}$$

הגדרה 3.60 תהי π תמורה כלשהיא של הקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$.

מהמשפט הקודם, נוכל לבטא את π בצורה:

$$\pi = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_s$$

אזי הזוגיות של התמורה π תוגדר להיות:

$$\vartheta(\pi) := (-1)^s$$

משפט 3.61 ³⁰ תהי $\pi \in S(n)$, וכמו כן:

$$\begin{aligned}\pi &= \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_s \\ \pi &= \tau'_1 \cdot \tau'_2 \cdot \dots \cdot \tau'_m\end{aligned}$$

כאשר $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s, \tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_m$ הן טרנספוזיציות.

אזי $(-1)^s = (-1)^m$, כלומר הזוגיות היא יחידה.

הוכחה: נשתמש בדטרמיננטה של ון דר מונדה המוגדרת להיות:

$$V(t_1, \dots, t_n) := \prod_{0 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j)$$

$$V(t_1, t_2, t_3, t_4) = (t_1 - t_2)(t_1 - t_3)(t_1 - t_4)(t_2 - t_3)(t_2 - t_4)(t_3 - t_4)$$

$$\pi V(t_1, \dots, t_n) := V(t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)})$$

אזי, ישנן שתי אפשרויות - מתקיימת אחת משתי האופציות:

$$1. V(t_{\pi(1)}, t_{\pi(2)}, \dots, t_{\pi(n)}) = V(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$2. V(t_{\pi(1)}, t_{\pi(2)}, \dots, t_{\pi(n)}) = -V(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

+ או - מתקבלים בלי שום קשר להצגה של π להצגה של π ככפל של טרנספורמציות.

מספיק להראות שמתקיים:

$$(kl)V(t_1, t_2, \dots, t_n) = -V(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

עבור $1 \leq k < l \leq n$,

כלומר הטרנספוזיציה המחליפה בין האיבר k -ה לאיבר l -ה.

זה מתקיים מההגדרה של הטרנספוזיציה.

לכן נקבל כי

$$\pi V = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_n V(t_1, t_2, \dots, t_n) = (-1)^s V(t_1, t_2, \dots, t_n),$$

$$\pi V = \tau'_1 \cdot \tau'_2 \cdot \dots \cdot \tau'_m V(t_1, \dots, t_n) = (-1)^m V(t_1, \dots, t_n)$$

ומכאן:

$$(-1)^s = (-1)^m$$

■

הגדרה 3.62

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{F}$$

הדטרמיננטה של המטריצה A תוגדר להיות:

$$\det A = \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

כאשר:

$$\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^s, \quad \pi = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_s$$

הערה:

נזקקנו למשפט הקודם על מנת לוודא שהדטרמיננטה מוגדרת היטב.

דוגמאות

.1

$$A = a_{11} \quad (n = 1) \\ \det A = a_{11}$$

.2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \operatorname{sgn} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} = 1, \quad \operatorname{sgn} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = -1 \\ \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

.3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ S(3) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=1} \right\} \\ \det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

משפט 3.63 יהיו:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{F}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{a}_{ij} \in \mathbb{F}$$

אזי, יתקיים:

$$\det A = \det A^T$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \det A^T &= \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi) \tilde{a}_{1\pi(1)} \tilde{a}_{2\pi(2)} \cdots \tilde{a}_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n} \\ k_1 &\xrightarrow{\pi} 1 \\ k_2 &\xrightarrow{\pi} 2 \\ &\vdots \\ k_n &\xrightarrow{\pi} n \\ &\Rightarrow a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n} = a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} \\ &= a_{1\pi^{-1}(1)} a_{2\pi^{-1}(2)} \cdots a_{n\pi^{-1}(n)} \\ \det A^T &= \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi^{-1}(1)} a_{2\pi^{-1}(2)} \cdots a_{n\pi^{-1}(n)} \\ \operatorname{sgn}(\pi) &= \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) \\ \Rightarrow \det A^T &= \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) a_{1\pi^{-1}(1)} a_{2\pi^{-1}(2)} \cdots a_{n\pi^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\pi^{-1} \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) a_{1\pi^{-1}(1)} a_{2\pi^{-1}(2)} \cdots a_{n\pi^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

■

משפט 3.64 יהיו:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\tilde{a}_{ij})$$

כלומר $\tilde{A}$ המטריצה המתקבלת מהמטריצה A על ידי חילוף שתי שורות.

אזי מתקיים:

$$\det \tilde{A} = -\det A$$

מסקנה 3.65 אם למטריצה A ישנן שתי שורות זהות, אזי

$$\det A = 0$$

נוכיח את המשפט: **הוכחה:**

$$\begin{aligned} \det \tilde{A} &= \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{k-1\pi(k-1)} a_{m\pi(m)} a_{k+1\pi(k+1)} \cdots a_{m-1\pi(m-1)} a_{k\pi(k)} a_{m+1\pi(m+1)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ (k, m) &= \tau : k \leftrightarrow m, \tau(k) = m; \tau(m) = k. \\ \Rightarrow \det \tilde{A} &= \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{k-1\pi(k-1)} a_{m\pi(\tau(m))} a_{k+1\pi(k+1)} \cdots a_{m-1\pi(m-1)} a_{k\pi(\tau(k))} a_{m+1\pi(m+1)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(\tau)} \cdots a_{n\pi(\tau(n))} \\ \varsigma &= \pi\tau; \operatorname{sgn}(\varsigma) = -\operatorname{sgn}(\pi) = - \sum_{\varsigma \in S(n)} \operatorname{sgn}(\varsigma) a_{1\varsigma(1)} \cdots a_{n\varsigma(n)} = -\det A \end{aligned}$$

■

טענה 3.66 אם למטריצה A יש שני עמודות זהות,

אזי

$$\det A = 0$$

הוכחה: ממשפט קודם ל- A^T יש שתי שורות זהות,

$$\det A^T = 0$$

ולכן מהמשפט הקודם מתקיים $\det A = \det A^T$.

■

מסקנה 3.67 אם למטריצה $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$

קיימות שתי שורות זהות או שתי עמודות זהות, אזי

$$\det A = 0$$

3.1.2010

משפט 3.68 מתקיים:

$$\det \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{k-1} \\ \sum_{j=1}^m \lambda_j \hat{b}_j \\ \hat{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \det \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{k-1} \\ \hat{b}_j \\ \hat{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_l = (a_{l1}, \dots, a_{ln}), \quad 1 \leq l \leq n, \quad l \neq k$$

$$\hat{b}_j = (b_{j1}, \dots, b_{jn}), \quad 1 \leq j \leq m$$

כאשר כל הסקלרים שייכים לאותו שדה $\mathbb{F}$.

כמו כן:

$$\det \left(\check{a}_1, \dots, \check{a}_{k-1}, \sum_{j=1}^m \lambda_j \check{b}_j, \check{a}_{k+1}, \dots, \check{a}_n \right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \det (\check{a}_1, \dots, \check{a}_{k-1}, \check{b}_j, \check{a}_{k+1}, \dots, \check{a}_n)$$

כאשר

$$\check{a}_l = \begin{pmatrix} a_{1l} \\ \vdots \\ a_{nl} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq l \leq n, \quad l \neq k, \quad \check{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq m$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{k-1} \\ \sum_{j=1}^m \lambda_j \hat{b}_j \\ \hat{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix} &= \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdot \dots \cdot a_{k-1\pi(k-1)} \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \hat{b}_{j\pi(k)} \right) a_{k+1\pi(k+1)} \cdot \dots \cdot a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdot \dots \cdot a_{k-1\pi(k-1)} \cdot b_{j\pi(k)} \cdot a_{k+1\pi(k+1)} \cdot \dots \cdot a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(k-1)1} & \dots & a_{(k-1)n} \\ b_j & \dots & b_{jn} \\ a_{(k+1)n} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \det \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{k-1} \\ \hat{b}_j \\ \hat{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

סיימנו עבור השורות. כעת נוכיח עבור העמודות:

$$\det \left(\check{a}_1, \dots, \check{a}_{k-1} \sum_{j=1}^m \lambda_j \check{b}_j, \check{a}_{k+1}, \dots, \check{a}_n \right) = \det \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{k-1} \\ \sum_{j=1}^m \lambda_j \hat{b}_j \\ \hat{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \det \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{k-1} \\ \hat{b}_j \\ \hat{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix} \\ = \sum_{j=1}^m \lambda_j \det (\check{a}_1, \dots, \check{a}_{k-1} \check{b}_j, \check{a}_{k+1}, \dots, \check{a}_n)$$

דרך נוספת - פשוט לעשות טרנספוזיציה -

ראינו במשפט קודם כי $\det A = \det A^T$,

ואז זה מתקבל ישירות מהסעיף הקודם!

■

3.9.2 משפט קרמר³¹

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$\vdots$

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$A = (\check{a}_1, \dots, \check{a}_n)$$

$$\check{a}_l = \begin{pmatrix} a_{1l} \\ \vdots \\ a_{nl} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq l \leq n, \quad \check{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq m$$

$$\forall 1 \leq i \leq n : x_i \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר $\det A \neq 0$ אזי:

$$x_i = \frac{\det (\check{a}_1, \dots, \check{a}_{i-1}, \check{b}, \check{a}_{i+1}, \dots, \check{a}_n)}{\det A}$$

עבור $1 \leq i \leq n$.

³¹למבחן!!

הוכחה: נביט במערכת שלנו:

$$\begin{aligned}\check{a}_1 x_1 + \dots + \check{a}_n x_n &= \check{b} \\ \det(\check{a}_1, \dots, \check{a}_{i-1}, \check{b}, \check{a}_{i+1}, \dots, \check{a}_n) &= \det\left(\check{a}_1, \dots, \check{a}_{i-1}, \sum_{j=1}^n x_j \check{a}_j, \check{a}_{i+1}, \dots, \check{a}_n\right) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \det(\check{a}_1, \dots, \check{a}_{i-1}, \check{a}_j, \check{a}_{i+1}, \dots, \check{a}_n) \\ \det(\check{a}_1, \dots, \check{a}_{i-1}, \check{a}_j, \check{a}_{i+1}, \dots, \check{a}_n) &= \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \det(\check{a}_1, \dots, \check{a}_n) & j = i \end{cases} \\ \det(\check{a}_1, \dots, \check{a}_{i-1}, \check{b}, \check{a}_{i+1}, \dots, \check{a}_n) &= x_i \det(\check{a}_1, \dots, \check{a}_n)\end{aligned}$$

כאשר השיוויון השורה הכמעט אחרונה נובע מכך,

שם שתי שורות במטריצה הן זהות, ראינו במשפט קודם כי אז הדטרמיננטה היא 0. ■

דוגמא לשימוש במשפט קרמר

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= -1 \\ x_1 &= \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{5}{-1} = -5 \\ x_2 &= \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-4}{-1} = 4\end{aligned}$$

3.9.3 חישוב דטרמיננטות

משפט 3.69

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

אז:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{k-i}$$

נוסחא זו נקראת "חישוב דטרמיננטה לפי השורה ה- i " -

למעשה "העפנו" את השורה ה- i ואת העמודה ה- k .

.1

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{31} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

.2

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-j} a_{jk}$$

הוכחה:

$$A = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix}, \hat{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) = \sum_{k=1}^n a_{1k} \hat{e}_k$$

$$\hat{e}_k = \begin{pmatrix} 0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^{k^{th}}, 0, \dots, 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} \hat{e}_k \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{1k} \det \begin{pmatrix} \hat{e}_k \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{1k} \det \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k} & a_{2k+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

אם נראה שהביטוי מעלה שווה לביטוי הבא, סיימנו:

$$(-1)^{k-1} \det \begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

נוכיח עבור המקרה הפרטי $i = 1$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

כעת, זה נכון לכל i - כי אנחנו מוסיפים את $(-1)^{k-i}$,

שמבטיח שהסימן יהיה נכון.

■

3.10 מינור של מטריצה והמטריצה המצורפת**הגדרה 3.70** תהי מטריצה $A \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ויהיו $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

ונסמן:

$$A(i_1, \dots, i_k | j_1, \dots, j_k) := \det \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

 $A(i_1, \dots, i_k | j_1, \dots, j_k)$ נקרא המינור של המטריצה A מסדר k .נשים לב כי $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k$ לא חייבים להיות מספרים עוקבים.**דוגמאות:**

.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

נחפש את המינור:

$$A(1, 2 | 2, 4) = \det \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(1, 3, 4 | 2, 4, 5) = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

הגדרה 3.71 תהי מטריצה $A \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A(i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r)$ הוא מינור של המטריצה A מסדר r .

נניח כי $A(i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r) \neq 0$,

וכמו כן נניח שכל מינור מסדר $r+1 \leq r$ הוא 0.

במקרה זה, נגיד כי $A(i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r)$ הוא מינור בסיסי.

נשים לב - המינור הבסיסי אינו בהכרח יחיד.

דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A(1, 2, 3 | 1, 2, 3) = 0 \Rightarrow \text{Not Basic!}$$

$$A(1, 3 | 1, 2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Basic!}$$

$$A(1, 3 | a, 3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{also Basic!}$$

$$A(1, 2) = 2 \neq 0$$

משפט 3.72 תהי מטריצה $A \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$,

ויהי $A(i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r)$ מינור בסיסי עבור המטריצה A .

נסמן:

$$\check{a}_{j_1} = \begin{pmatrix} a_{1j_1} \\ a_{2j_1} \\ \vdots \\ a_{nj_1} \end{pmatrix}, \dots, \check{a}_{j_r} = \begin{pmatrix} a_{1j_r} \\ a_{2j_r} \\ \vdots \\ a_{nj_r} \end{pmatrix}$$

במקרה כזה, כל עמודה של המטריצה A ,

הינה צירוף לינארי של $\check{a}_{j_1}, \check{a}_{j_2}, \dots, \check{a}_{j_r}$.

דוגמא:

למשל עבור המטריצה בדוגמא הקודמת:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הוכחה: נביט במטריצה:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rm} \\ \hline \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & a_{nr+1} & \cdots & a_{nm} \end{array} \right)$$

נניח כי $A(1, 2, \dots, r | 1, 2, \dots, r)$ הוא מינור בסיסי, דהיינו:

$$1. A(1, 2, \dots, r | 1, 2, \dots, r) \neq 0$$

2. כל מינור מסדר $r <$ מתאפס.

כעת נביט בדטרמיננטה הבאה:

$$D = \det \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & a_{2s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kr} & a_{ks} \end{array} \right), \quad 1 \leq s \leq m, \quad 1 \leq k \leq n$$

נטען כי $D = 0$ מדוע?

אם $s \leq r$, לכן ישנן שתי עמודות זהות, ולכן $D = 0$.

אחרת $s > r$, ואז $D = 0$ כי המינור הוא מדרגה r .

כעת, נפתח את הדטרמיננטה לפי השורה האחרונה ונקבל:

$$0 = D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + a_{k3}A_{k3} + \dots + a_{kr}A_{kr} + a_{ks}A_{ks}$$

המספרים $A_{k1}, \dots, A_{kr}, A_{ks}$ אינם תלויים ב- k .

אזי, נגדיר:

$$c_1 = A_{k1}, \dots, c_r = A_{kr}, c_s = A_{ks} \\ \Rightarrow 0 = c_1 a_{k1} + c_2 a_{k2} + \dots + c_r a_{kr} + c_s a_{ks}$$

עבור $1 \leq k \leq n$.

נשים לב ש- $c_s \neq 0$ (כי הוא המינור הבסיסי), לכן נוכל לכתוב:

$$a_{ks} = \lambda_1 a_{k1} + \dots + \lambda_r a_{kr}$$

כלומר:

$$\begin{aligned} a_{1s} &= \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_r a_{1r} \\ a_{2s} &= \lambda_1 a_{21} + \dots + \lambda_r a_{2r} \\ &\vdots \\ a_{ns} &= \lambda_1 a_{n1} + \dots + \lambda_r a_{nr} \\ \Rightarrow \check{a}_s &= \lambda_1 \check{a}_1 + \dots + \lambda_r \check{a}_r, \quad 1 \leq s \leq m \end{aligned}$$

כעת, נשים לב כי אין חשיבות למיקום של הבסיסי.

מדוע? נוכל להשתמש בפעולות האלמנטריות ע"מ לשנות את המיקום של העמודות והשורות ולהגיע למקרה שכבר הוכחנו.

לדוגמא, אם המינור הוא $A(1,3|2,3)$, נבצע את התהליך ונקבל:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{34} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{21} & a_{24} \\ a_{22} & a_{23} & a_{31} & a_{34} \end{pmatrix}$$

■

מסקנה 3.73 $\text{rank} A = \dim \text{Span}(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) = r$

כאשר r הוא הסדר של המינור הבסיסי.

מסקנה 3.74 אם A מטריצה ריבועית מסדר n , אזי:

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rank} A < n$$

מסקנה 3.75 כאשר $\det A = 0$,

קיימת לפחות שורה (או עמודה) שהיא צ"ל של כל השורות (עמודות) אחרות.

13.01.2010

משפט 3.76 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$,

אשר מימדו n , ותהי העתקה $A \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$.

אזי, שני התנאים הבאים שקולים:

א. ההעתקה A הפיכה.

ב. $\det([A]) \neq 0$.

הוכחה: א' $\Rightarrow$ ב'

נזכיר שראינו ששני התנאים הבאים הם שקולים:

1. ההעתקה A הפיכה.

2. A היא איזומורפיזם.

אזי, עבור כל וקטור שרירותי w ממרחב V ,

קיים וקטור $v \in V$ יחיד כך שמתקיים:

$$(*) \quad Av = w$$

דהיינו הפתרון של $(*)$ הוא יחיד.

יהי $\{e_1, \dots, e_n\}$ בסיס למרחב הוקטורי V . אזי, נוכל לסמן:

$$v = \sum_{j=1}^n v_j e_j; \quad w = \sum_{j=1}^n w_j e_j$$

$$\Rightarrow Av = \sum_{j=1}^n v_j A e_j$$

$$\Rightarrow A e_j = \sum_{k=1}^n v_j \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k = w = \sum_{k=1}^n w_k e_k$$

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{kj} v_j = w_k, \quad 1 \leq k \leq n$$

$$(**) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

המשוואה (*) שקולה למערכת המשוואות (**),

לכן קיים פתרון יחיד עבור מערכת המשוואות (**),

ולכן נסמן:

$$n = \text{rank}[A] \Rightarrow \det[A] \neq 0$$

ב'<='א'

למשוואה (**) ישנו פתרון יחיד. אזי נסמן:

$$v := \sum_{j=1}^n v_j e_j \in V; \quad w = \sum_{j=1}^n w_j e_j \in V$$

(**) שקולה למשוואה:

$$(*) \quad Av = w$$

למשוואה (*) קיים פתרון יחיד.

הפתרון קיים, ולכן A היא העתקה על.

הפתרון יחיד, ולכן A היא העתקה חד חד ערכית.

לכן בסה"כ A היא איזומורפיזם,

וממשפט קודם נובע כי היא הפיכה.

■

מסקנה 3.77 תהי $[A]$ מטריצה $n \times n$.

כמו כן $\det[A] \neq 0$.

אזי $[A]^{-1}$ קיימת.

3.10.1 נוסחא לחישוב המטריצה ההפכית

משפט 3.78 תהי $[A]$ מטריצה $n \times n$.

וכמו כן $\det [A] \neq 0$, דהיינו A הפיכה.

נסמן $[B] = [A]^{-1} = (b_{ij})$, $[A] = (a_{ij})$.

אזי

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det [A]}$$

נדון בהמשך במשמעות הנוסחא הזו (המטריצה המצורפת).

הוכחה:

$$[B] \cdot [A] = [E], \quad [E] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$\sum_{k=1}^n b_{ik} a_{k1} = 0j = 1$$

$$\sum_{k=1}^n b_{ik} a_{k2} = 0j = 2$$

.....

$$\sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} = 1j = i$$

.....

$$\sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kn} = 0j = n$$

$$\Rightarrow a_{11}b_{i1} + a_{21}b_{i2} + \dots + a_{n1}b_{in} = 0$$

$$a_{12}b_{i1} + a_{22}b_{i2} + \dots + a_{n2}b_{in} = 0$$

.....

$$a_{1i}b_{i1} + a_{2i}b_{i2} + \dots + a_{ni}b_{in} = 1$$

.....

$$a_{1n}b_{i1} + a_{2n}b_{i2} + \dots + a_{nn}b_{in} = 0$$

נשתמש במשפט קרמר:

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{j-11} & 0 & a_{j+11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{j-12} & 0 & a_{j+12} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{j-1i} & 1 & a_{j+1i} & \cdots & a_{ni} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{j-1n} & 0 & a_{j+1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(A^T)} = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j-i1} & a_{j-i2} & \cdots & a_{j-ii} & \cdots & a_{j-in} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{j+11} & a_{j+12} & \cdots & a_{j+1i} & \cdots & a_{j+1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det([A])} \\
 &= (-1)^{j-1} \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j-11} & a_{j-12} & \cdots & a_{j-1i} & \cdots & a_{j-1n} \\ a_{j+11} & a_{j+12} & \cdots & a_{j+1i} & \cdots & a_{j+1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det([A])} \\
 &= (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j-11} & a_{j-12} & \cdots & a_{j-1n} \\ a_{j+11} & a_{j+12} & \cdots & a_{j+1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det([A])}
 \end{aligned}$$

כאשר הדטרמיננטה מעלה היא ללא השורה ה- j והעמודה ה- i ,

וסיימנו.

■

דוגמא

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
 \det A &= ad - bc \neq 0; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
 b_{11} &= (-1)^{1+1} \frac{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{d}{\det A} \\
 b_{12} &= (-1)^{1+2} \frac{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}{\det A} = -\frac{b}{\det A} \\
 b_{21} &= (-1)^{2+1} \frac{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}{\det A} = -\frac{c}{\det A} \\
 b_{22} &= (-1)^{2+2} \frac{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A} \\
 \Rightarrow A^{-1}A &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} ad - bc & db - bd \\ -ac + ac & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3.10.2 נוסחא לחישוב דטרמיננטה של כפל מטריצות

משפט 3.79 כפילות הדטרמיננטה:

יהיו A, B מטריצות $n \times n$. אזי:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

הוכחה: נסמן $AB = C$. אזי:

$$\begin{aligned} \det(C) &= \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi) c_{1\pi(1)} \cdot \dots \cdot c_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sgn}(\pi) \left(\sum_{i_1=1}^n a_{ai_1} b_{i_1\pi(1)} \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{i_n=1}^n a_{ni_n} b_{i_n\pi(n)} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \left(a_{1i_1} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} \cdot \sum_{\pi \in S(n)} b_{i_1\pi(1)} \cdot \dots \cdot b_{i_n\pi(n)} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n a_{1i_1} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} \det \begin{pmatrix} b_{i_1 1} & \dots & b_{i_1 n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_n 1} & \dots & b_{i_n n} \end{pmatrix} \quad 1 \leq i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n \leq n \\ \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in S(n)} a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \det \begin{pmatrix} b_{\sigma(1)1} & \dots & b_{\sigma(1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\sigma(i_n)1} & \dots & b_{\sigma(i_n)n} \end{pmatrix} \\ &= \sum \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)} \det(B) = \det(A) \cdot \det(B) \end{aligned}$$

■

מסקנה 3.80 כאשר A היא מטריצה $n \times n$ והפיכה, מתקיים:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= E \\ \underbrace{\det(A^{-1}A)}_{\det(A^{-1}) \cdot \det(A)} &= \det E = 1 \end{aligned}$$

■

3.10.3 המטריצה המצורפת

תחילה, הערת הכותבת -

הנושא הזה נדון בשם הזה בתרגול בלבד.

פרופ' סטרנבוך בחר שלא לדון בו בשם הזה,

מכיוון וככל הנראה לא משתמשים בזה הרבה, והוא פחד שזה טיפה יסבך אותנו.

עם זאת, מכיוון והוא היה חלק מתרגיל 13, מצאתי לנכון לשים כאן את החומר כאן,

ולא בחומרי התרגול בסוף הפרק.

הגדרה 3.81 נתונה מטריצה $A \in M_n(F)$

המטריצה המצורפת ל- A ($Adjoint =$) היא המטריצה $(b_{ij}) = B = Adj(A) \in M_n(F)$

כאשר:

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{j,i})$$

כאשר $M_{j,i}$ הוא המינור של A ,

כאשר הורדנו את השורה ה- j והשורה ה- i .

המשפט המרכזי בנוגע למטריצה המצורפת:

משפט 3.82 לכל מטריצה $A \in M_n(F)$ מתקיים:

$$A \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = \det(A) \cdot I$$

מסקנה 3.83 מצאנו דרך נוספת לחשב את המטריצה ההופכית,

והיא הנוסחה 3.78:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{\det(A)}$$

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad Adj(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ואם A הופכית:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

תרגיל:

הוכיחו:

יהיו $A, B \in M_n(F)$ מטריצות הפיכות. אזי:

$$\text{Adj}(AB) = \text{Adj}(A) \cdot \text{Adj}(B)$$

הוכחה: מספיק להראות כי:

$$\text{Adj}(AB) \cdot AB = \text{Adj}(B) \cdot \text{Adj}(A) \cdot AB$$

כי פשוט נכפול בהופכיות ונגיע לשיוויון המקורי.

כעת, נשתמש במשפט המרכזי ובכופליות הדטרמיננטה.

בנוסף נזכור כי $\det$ היא סקלר, ולכן נוכל "להזיז" אותם. לכן:

$$\begin{aligned} \text{Adj}(AB) \cdot AB &= \det(AB) \cdot I = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) \\ &= \text{Adj}(B) (\text{Adj}(A) \cdot A) \cdot B = \text{Adj}(B) (\det(A) \cdot A^{-1} \cdot A) \cdot B \\ &= \text{Adj}(B) (\det(A) \cdot I) \cdot B = \det(A) \cdot I \cdot (\text{Adj}(B) \cdot B) = \det(A) \det(B) \\ &= \text{Adj}(A) \cdot A \cdot \text{Adj}(B) \cdot B = \text{Adj}(A) \cdot \text{Adj}(B) \cdot AB \end{aligned}$$

■

3.11 הדרגה של העתקה לינארית

17.1.2010

3.84 הגדרה יהיו V, W מ"ו מעל אותו השדה,

ותהי $A : V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

אזי הדרגה של ההעתקה הלינארית A תוגדר להיות:

$$\text{rank}(A) = \dim \text{Im} A$$

משפט 3.85 תהי $A : V \rightarrow W$ העתקה לינארית כנ"ל,

ונסמן $\dim V = n, \dim W = m$.

נבחר $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V ו- $\{w_1, \dots, w_m\}$ בסיס ל- W .

נסמן:

$$Av_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \rightarrow [A] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

אזי:

$$\text{rank} A = \text{rank} [A]$$

הוכחה:

$$Av_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m$$

$\vdots$

$$Av_2 = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_n$$

נגדיר העתקה לינארית T בעזרת המשוואות הנ"ל:

$$Span\{Av_1, \dots, Av_n\} \xrightarrow{T} Span\{\check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_n\}$$

כאשר

$$\check{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \check{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

כלומר, המשוואות בהתחלה מגדירות איזומורפיזם,

בין המרחב $Span\{Av_1, \dots, Av_n\}$ ובין המרחב $Span\{\check{a}_1, \dots, \check{a}_n\}$.

מדוע זהו איזומורפיזם?

ניתן לראות כי ההצגה היא יחידה,

לדוגמא בהנתן $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$ הם מגדירים בצורה יחידה את Av_1 .

ולכן T היא חח"ע.

בנוסף, היא על כי לכל $\check{a}_i$ עבור כל i יש מקור.

לכן:

$$\dim(Span\{Av_1, \dots, Av_n\}) = \dim(Span\{\check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_n\})$$

וזהו. ■

3.11.1 משפט סילבסטר

משפט 3.86 יהיו V, W, U מרחבים וקטוריים בעלי מימד סופי,

כך ש:

$$\dim V = n; \dim W = m; \dim U = l$$

ויהיו שתי העתקות לינאריות:

$$V \xrightarrow{A} W \xrightarrow{B} U$$

אזי:

א.

$$\text{rank}(BA) \leq \min(\text{rank}(B), \text{rank}(A))$$

ב.

$$\dim(\text{Ker}(BA)) \leq \dim(\text{Ker}(B)) + \dim(\text{Ker}(A))$$

ג.

$$\text{rank}(B) + \text{rank}(A) - m \leq \text{rank}(BA)$$

הוכחה: א.

$$\text{rank}(BA) = \dim(\text{Im}(BA)) = \dim(B(AV)) \leq \dim(AV) = \text{rank}(A)$$

$$Av \subseteq W \Rightarrow B(AV) \subseteq BW$$

$$\dim(B(AV)) \leq \dim(BW) \Rightarrow \dim(\text{Im}(BA)) \leq \dim(\text{Im}B)$$

$$\Rightarrow \text{rank}(BA) \leq \text{rank}(B)$$

$$\Rightarrow \text{rank}(BA) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$

ב. סטרחוב הביא ביאור להוכחת ב. מהשיעור הקודם.

20.01.2010

שילבתי בין השניים:

תהי $A|_{\text{Ker}BA}$ העתקה לינארית המתקבלת על ידי צמצום של A ל- $\text{Ker}BA$.

$$\dim(\text{Ker}(BA)) = \dim(\text{Im}(A|_{\text{Ker}(BA)})) + \dim(\text{Ker}(A|_{\text{Ker}(BA)}))$$

תחילה נוכיח למה:

למה 3.87

$$\text{Ker}A = \text{Ker}(A|_{\text{Ker}(BA)})$$

הוכחה: ע"מ להוכיח הלמה, עלינו להראות כי:

$$v \in \text{Ker}(A|_{\text{Ker}(BA)}) \Leftrightarrow \begin{cases} v \in \text{Ker}(BA) \\ Av = 0 \end{cases}$$

נעשה זאת:

$$v \in \text{Ker}(A) \Rightarrow Av = 0 \Rightarrow B(Av) = B(0) = 0$$

$$v \in \text{Ker}(A|_{\text{Ker}(BA)}) \Rightarrow \begin{cases} v \in \text{Ker}(BA) \\ Av = 0 \end{cases} \Rightarrow v \in \text{Ker} A$$

■

נמשיך בהוכחת המשפט:

$$\text{Im} A|_{\text{Ker}(BA)} \subseteq \text{Ker} B$$

מדוע? נראה זאת:

$$\begin{aligned} w \in \text{Im} A|_{\text{Ker}(BA)} &\Rightarrow w = Av^*, \quad v^* \in \text{Ker}(BA) \\ Bw &= BAv^* = 0 \end{aligned}$$

אזי קיבלנו:

$$\dim(\text{Im} A|_{\text{Ker}(BA)}) \leq \dim(\text{Ker} B)$$

אזי מכאן ומן הלמה נוכל להסיק כי:

$$\dim(\text{Ker}(BA)) \leq \dim(\text{Ker} B) + \dim(\text{Ker} A)$$

ג. לבסוף, נטען כי:

$$\text{rank}(BA) \geq \text{rank}(B) + \text{rank}(A) - m$$

מדוע? ידוע לנו (ממשפט המימדים):

$$\begin{aligned} n &= \dim(\text{Im} A) + \dim(\text{Ker} A) \\ m &= \dim(\text{Im} B) + \dim(\text{Ker} B) \\ n &= \dim(\text{Im}(BA)) + \dim(\text{Ker}(BA)) \end{aligned}$$

כעת:

$$\begin{aligned} n &= \text{rank}(A) + \dim(\text{Ker} A) \\ m &= \text{rank}(B) + \dim(\text{Ker} B) \\ n &= \text{rank}(BA) + \dim(\text{Ker}(BA)) \\ \Rightarrow \text{rank}(BA) &= n - \dim(\text{Ker}(BA)) \end{aligned}$$

מצד שני, אנו יודעים כי:

$$\dim(\text{Ker}(BA)) \leq \dim(\text{Ker}(B)) + \dim(\text{Ker}(A))$$

לכן:

$$\begin{aligned} \text{rank}(BA) &\geq n - \dim(\text{Ker}(B)) - \dim(\text{Ker}(A)) \\ &= n - (n - \text{rank}(A)) - (m - \text{rank}(B)) \\ &= \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - m \end{aligned}$$

■

וסיימנו!

מסקנה ממשפט סילבסטר:

משפט 3.88

$$[A] : m \times l, [B] = n \times m$$

אזי:

$$\begin{aligned} \text{rank}([B] \cdot [A]) &\leq \min(\text{rank}([B]), \text{rank}[A]) \\ \text{rank}([B] \cdot [A]) &\geq \text{rank}([B]) + \text{rank}([A]) - m \end{aligned}$$

הוכחה: לא ניתנה הוכחה פורמלית -

נבנה שתי העתקות המתאימות למטריצות הנ"ל.

אזי, ממשפט סילבסטר, וממשפט 3.85,

המשפט נכון ישירות.

משפט 3.89 יהיו:

$$A \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$$

$$B \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$$

וכמו כן B היא העתקה לינארית הפיכה. אזי:

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA) = \text{rank}(A)$$

הוכחה:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A \cdot B \cdot B^{-1}) \stackrel{\text{Sylvester}}{\leq} \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$$

$$\Rightarrow \text{rank}(AB) = \text{rank}(A)$$

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B^{-1} \cdot B \cdot A) \leq \text{rank}(BA) \leq \text{rank}(A)$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(BA)$$

3.12 תרגולים

העתקות לינאריות

30.11.2009

הגדרה 3.90 יהי F שדה, V, W מ"ו מעל F .

$T : V \rightarrow W$ נקראת העתקה לינארית אם מתקיימים:

$$1. T(v + u) = T(v) + T(u) \quad v, u \in V$$

$$2. T(av) = a \cdot T(v) \quad v \in V, a \in F$$

דוגמאות:

תרגול

1.

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x \\ 3y \end{pmatrix}$$

זוהי העתקה לינארית!

2.

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y+z \end{pmatrix}$$

זוהי אינה העתקה לינארית.

3. יהי F שדה,

$$T: F[x] \rightarrow \text{Fun}(F, F)$$

$$T(p(x)) = p(x)$$

כל פולינום מגדיר פונקציה - אם F סופי, T אינה חח"ע.

משפט 3.91 יהי F שדה, ויהיו V, W מ"ו מעל F .

יהי $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V , ויהיו $w_1, \dots, w_n \in W$ כלשהם.

אזי קיימת העתקה לינארית יחידה $T: V \rightarrow W$ המקיימת:

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad T(v_i) = w_i$$

הגדרה 3.92 יהי F שדה, V מ"ו מממד n מעל F .

נניח $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס ל- V , ויהי $v \in V$.

$$[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in F^n \quad \text{היחידה המקיימת} \quad v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

$[v]_B$ נקרא וקטור הייצוג של v לפי בסיס B ,

או וקטור הקואורדינטות של v לפי בסיס B .

דוגמא:

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [v]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

דוגמא נוספת:

$$V = Q_2[x]$$

$$B = (x^2 + 3, 5x, 2x^2 + 1) \quad v = 2x + 5$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$$

מטריצת הייצוג של העתקה לינארית

הגדרה 3.93 יהי F שדה, ויהיו V, W מ"ו מעל F ,

וכמו כן יהי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V ,

ו- $C = (u_1, \dots, u_m)$ בסיס של W ,

ותהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

מטריצת הייצוג של T לפי הבסיסים B ו- C היא המטריצה:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(v_1)]_C & [T(v_2)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

והיא בעלת n עמודות ו- m שורות.

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

$$B_1 = e^3, C_1 = e^2$$

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$C_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$[T]_{C_1}^{B_1} \Rightarrow T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{C_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{C_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{C_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{C_1}^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{C_1}^{B_2} \Rightarrow T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{C_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{C_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{C_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{C_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{C_2}^{B_2} \Rightarrow T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{C_2} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{C_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{C_2} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{C_2}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} & 0 & 1\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל

נניח V, W מ"ו מממד סופי מעל שדה F .

יהי C בסיס ל- W .

תהי $T: V \rightarrow W$ ה"ל שאינה חח"ע.

הראו שקיים בסיס B של V כך שהעמודה האחרונה ב- $[T]_C^B$ היא עמודת אפסים.

הוכחה

$\text{Ker}(T) \neq \{\phi\}$ לכן

נבחר $v_n \in \text{Ker}(T)$, $v_n \neq 0$, כלומר $T(v_n) = 0$.

נשלים את v_n לבסיס ל- V - ונקרא לו $B = (v_1, \dots, v_n)$. כעת:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} \text{something} & \dots & \dots & [T(v_n)]_C = 0 \end{pmatrix}$$

זהירות - עבור העתקה $T : V \rightarrow W$ אם אין ב- $[T]_C^B$ עמודת אפסים, לא אומר ש- T חח"ע!

תרגיל נוסף

יהי V מ"ו מממד סופי מעל שדה F .

יהי $W \subseteq V$ תת מרחב.

הראו כי קיימת ה"ל $T : V \rightarrow V$ כך ש- $\text{Ker}(T) = W$.

הוכחה

נבחר בסיס ל- W - $(v_1, \dots, v_k)$.

נשלים אותו לבסיס של V - $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$.

קיימת העתקה לינארית יחידה המקיימת:

$$1 \leq i \leq k \quad T(v_i) = 0$$

$$k+1 \leq i \leq n \quad T(v_i) = v_i$$

נראה כי $\text{Ker}(T) = W$:

$$v_1, \dots, v_k \in \text{Ker}(T)$$

$$\Rightarrow W = \text{sp}(v_1, \dots, v_k) \subseteq \text{Ker}(T)$$

נראה הכלה לכיוון השני:

נניח ש- $v \in \text{Ker}(T)$. הוא צ"ל של אברי הבסיס,

$$T(\sum \dots) = \sum_{i=1}^n a_i T(v_i) = \sum_{i=k+1}^n a_i v_i = \sum_{i=k+1}^n a_i v_i = v$$

v_i בת"ל ולכן המקדמים הם אפסים.

כלומר

$$v = \sum a_i v_i \in W$$

כפי שרצינו.

7.12.2009

העתקות לינאריות

3.94 הגדרה תהי $T : V \rightarrow W$ היא

תרגול

$$\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$$

$$\text{ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

3.95 למה $\text{Im}(T)$ הוא תת מרחב של W ,

$\text{ker}(T)$ הוא תת מרחב של V .

משפט 3.96 יהיו V, W מ"ו מממד סופי,

ותהי $T : V \rightarrow W$ ה"ל. אז:

$$\dim \text{ker}(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim V$$

מטריצת הייצוג של ה"ל

תהי $T : V \rightarrow W$ ה"ל, ויהיו $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V , $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ בסיס ל- W . אזי מטריצת הייצוג של ה"ל תהיה:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \end{pmatrix}$$

כפל מטריצה בוקטור עמודה

תהי:

$$M_{m \times n}(F) \ni A = (a_{ij})$$

כאשר m הוא מספר השורות, n הוא מספר העמודות,

ויהי:

$$v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in F^n$$

כאשר מספר העמודות במטריצה = אורך וקטור העמודה.

אזי:

$$A \cdot v \in F^m$$

הקואורדינטה ה- i של $A \cdot v$ הינה:

$$(A \cdot v)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j$$

לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix}$$

טענה 3.97 תהי $T : V \rightarrow W$ ה"ל,

ויהיו $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V , C בסיס ל- W ,

ויהי $v \in V$. אזי

$$[T(v)]_C = [T]_C^B \cdot [v]_B$$

מדוע הטענה נכונה עבור $v_i = v \in B$ (אחד איברי הבסיס)?

באגף שמאל רשום:

$$[T(v_i)]_C$$

והיא העמוד ה- i במטריצה $[T]_C^B$.

באגף שמאל רשום:

$$[T]_C^B \cdot [v_i]_B = [T]_C^B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

כאשר ה-1 נמצא בשורה ה- i ,

ולכן בסה"כ נקבל את העמודה במטריצה $[T]_C^B$.

כפל שתי מטריצות

כאשר m הן העמודות, n הן השורות. $(a_{ij}) = A \in M_{n \times m}(F)$

$B \in M_{m \times l}(F)$ כאשר l הן העמודות, m הן השורות.

מספר העמודות של A = מספר השורות של B .

אזי, המכפלה AB היא המטריצה:

$$(c_{ij}) = C \in M_{n \times l}(F)$$

כאשר l הוא מספר העמודות, n מספר השורות,

והיא מוגדרת ע"י:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk}$$

דוגמאות:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

$$(3, -1, 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 - 1 - 8 = -6$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} (3, -1, 4) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מסקנות מהדוגמאות:

1. הכפל אינו קמוטטיבי.

2. כפל מטריצות שונות מ-0 יכול לצאת מטריצת האפס.

טענה 3.98 תהי $T : V \rightarrow W$ ה"ל,

ותהי $S : W \rightarrow U$ ה"ל גם כן,

ויהיו: B בסיס ל- V , C בסיס ל- W , ו- D בסיס ל- U .

אז:

$$[S \circ T]_D^B = [S]_D^C \cdot [T]_C^B$$

$$S \circ T : V \rightarrow U$$

מקרה פרטי: מטריצת מעבר בסיס

הגדרה 3.99 יהי V מ"ו ממימד סופי.

והיו B, B' שני בסיסים ל- V .

אז, מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס B' היא המטריצה:

$$[Id]_{B'}^B$$

מסקנה 3.100

$$[Id]_{B'}^B \cdot [Id]_B^{B'} = [Id]_B^{B'} \cdot [Id]_{B'}^B = I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

הוכחה: לפי המשפט מעלה:

$$[Id]_{B'}^B \cdot [Id]_B^{B'} = [Id \circ Id]_{B'}^{B'} = [Id]_{B'}^{B'} = I$$

וכנ"ל לגבי הביטוי האמצעי במסקנה. ■

דוגמא:

$$V = \mathbb{R}, B = (e_1, e_2, e_3), B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), T = Id$$

$$[Id_V]_B^{B'} = ([T(v_1)]_{B'}, [T(v_2)]_{B'}, [T(v_3)]_{B'}) = [T(v_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T(e_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T(e_2)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, [T(e_3)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [Id_V]_{B'}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

טענה 3.101 תהי $T : V \rightarrow W$ ה"ל,

ויהיו B, B' בסיסים ל- V ,

C, C' בסיסים ל- W .

אז:

$$[T]_{C'}^{B'} = [Id_W]_{C'}^C \cdot [T]_C^B \cdot [Id_V]_B^{B'}$$

הוכחה: זו בעצם מסקנה ממשפט ההרכבה מעלה:

$$[T]_{C'}^{B'} = [Id_W \circ T \circ Id_V]_{C'}^{B'} = [Id_W]_{C'}^C \cdot [T]_C^B \cdot [Id_V]_B^{B'}$$

■

תהי $T : V \rightarrow W$ ה"ל.

הגדרה 3.102 נקראת מונומורפיזם אם T חח"ע.

הגדרה 3.103 נקראת אפימורפיזם אם T על.

הגדרה 3.104 נקראת איזומורפיזם אם T חח"ע ועל.

לדוגמא:

נתונה סדרה אינסופית $a_0, a_1, a_2, \dots$ המקיימת:

$$a_1 = 1, a_0 = 0, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

תנו נוסחא לאיבר הכללי.

פתרון:

$$\begin{aligned}
 T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} y \\ 5y - 6x \end{pmatrix} \\
 T\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
 T^2 &= \left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_2 \\ 5a_2 - 6a_1 \end{pmatrix} \\
 T^n &= \left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
 v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

כאשר v_1, v_2 הם בסיס ל- $\mathbb{R}^2$. כעת:

$$\begin{aligned}
 T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, [T]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, B' = (v_1, v_2) \\
 [T^n]_{B'} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \\
 [T^n]_{B'} &= ([T]_{B'})^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \\
 B &= (e_1, e_2) \\
 [T^n]_B &= [Id]_B^{B'} \cdot [T^n]_{B'} \cdot [Id]_{B'}^B \\
 [Id]_B^{B'} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, [Id]_{B'}^B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 [T^n]_B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n & -2^n \\ -2 \cdot 3^n & 3^n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & -2^n - 3^n \\ 6 \cdot 2^n - 6 \cdot 3^n & -2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n = -2^{n+1} + 3^{n+1} \end{pmatrix} = * \\
 T^n\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}, T^n\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
 T^n\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= (*) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 3^n \\ -2^{n+1} + 3^{n+1} \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow a_n &= -2^n + 3^n
 \end{aligned}$$

7.12.2009

תרגול

פתרון מערכת משוואות לינאריות באמצעות שיטת החילוף של גאוס

נתונה מערכת של m משוואות ב- n נעלמים:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

כאשר $x_i, a_{ij}, b_j \in \mathbb{F}$ הנעלמים.

הגדרה 3.105 אם $b_1 = \dots = b_m = 0$ אזי המערכת נקרא מערכת משוואות הומוגנית.

הגדרה 3.106 מטריצת המקדמים המצומצמת מוגדרת להיות המטריצה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

מטריצת המקדמים המורחבת מוגדרת להיות המטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

הגדרה 3.107 שתי מערכות משוואות לינאריות ב- n משתנים

מעל אותו השדה $\mathbb{F}$ נקראות שקולות

אם יש להן בדיוק אותן פתרונות ב- $\mathbb{F}^n$.

הפעולות האלמנטריות

נסמן את המשוואות ב- $R_1, \dots, R_m$.

הפעולות האלמנטריות הבאות מעבירות אותנו

ממערכת משוואות נתונה למערכת משוואות שקולה:

1. $R_i \leftrightarrow R_j$ החלפת שתי משוואות (בעצם חילוף בין שתי שורות).

2. $cR_i \rightarrow R_i$ כאמור $\mathbb{F} \ni c \neq 0$ (כפל שורה בסקלר $c \neq 0$).

3. $R_i \leftarrow R_i + cR_j$, $j \neq i$, $c \in \mathbb{F}$ (החלפת השורה R_i ועוד c כפול השורה R_j).
במטריצה - הוספה של c פעמים השורה R_j לשורה R_i .

הגדרה 3.108 מטריצה $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ נקראת מדורגת,

אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. כל שורות האפסים, אם יש כאלה, הן בתחתית המטריצה.

2. נניח ש- r השורות הראשונות שונות משורות האפסים. נסמן:

a_{1,j_1} = האיבר הראשון $\neq 0$ בשורה 1.

:

a_{r,j_r} = האיבר הראשון $\neq 0$ בשורה r

אז מתקיים $j_1 < j_2 < \dots < j_r$.

האיברים a_{ij} נקראים האיברים המובילים.

הגדרה 3.109 מטריצה נקראת מדורגת בצורה קנונית אם גם:

3. על איבר מוביל הוא 1.

4. על איבר מוביל הוא היחידה השונה מאפס בעמודתו.

אלגוריתם להפיכת מטריצה $A = (a_{ij})$ למטריצה מדורגת שבה האיברים המובילים שווים ל-1

נשים לב - זהו אלגוריתם לפי שורה, בניגוד לאלגוריתם לפי עמודה שלמדנו בשיעור.

התוצאה הסופית, עם זאת, תהיה אותה התוצאה.

1. מצא את העמודה הראשונה עם איבר $\neq 0$. נסמן עמודה זו ב- j_1 .

2. החלף בין השורות כך שהאיבר השונה מאפס יופיע בשורה הראשונה בעמודה ה- j_1 , כלומר נקבל $a_{1,j_1} \neq 0$.

3. הכפל את השורה הראשונה בהופכי $(a_{1,j_1})^{-1}$. כלומר, נקבל $a_{1,j_1} = 1$.

4. בעזרת $a_{1,j_1} = 1$, אפס את כל האיברים מתחת ל- a_{1,j_1} . כלומר, לכל $i > 1$: $R_i \leftarrow R_i - a_{i,j_1}R_1$.

5. חזור על הצעדים 1, 2, 3, 4 עם תת המטריצה המורכבת מכל השורות חוץ מהשורה הראשונה.

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad j_1 = 1$$

שלבים 1 - 3 מתקיימים כבר, ניגש לשלב 4:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{array} \right), \quad R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, \quad R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$$

נחזור על הפעולות על המטריצה ללא השורה הראשונה (הימנית התחתונה):

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{array} \right), \quad R_2 \leftarrow \frac{1}{4}R_2 \\ & \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right), \quad R_3 \leftarrow R_3 - 5R_2 \\ & j_3 = 4 \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad R_3 \leftarrow 2R_3 \end{aligned}$$

אלגוריתם להפיכת מטריצה מדורגת עם מקדמים מובילים $= 1$ למטריצה קנונית

1. נשתמש ב- $a_{1,jr} = 1$ כדי לאפס את האיברים מעליו, כלומר $R_i \leftarrow R_i - 1_{i,jr} R_r$ $i < r$

2. חזור על 1 עבור העמודות $j_2, \dots, j_r$

המשך הדוגמא

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{2} R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), R_1 \leftarrow R_1 + 3R_2$$

במערכת משוואות שאינה הומוגנית נקבל מתחת ל"מדרגות" אפסים,

ועמודת פתרונות משמאל.

אם אחד מה- b_i הוא מקדם מוביל, אז אין פתרון למערכת המשוואות - כי המשמעות היא שקיבלנו שורת אפסים השווה למספר שאינו אפס, וברור כי זהו משפט שקר. נחזור לדוגמא:

המשוואה ה- i היא $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$,

ואין $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ המקיימים משוואה זו.

הגדרה 3.110 המטריצה החדשה מייצגת מערכת משוואות שקולה.

המשתנים המתאימים למקדמים המובילים נקראים משתנים תלויים שאר המשתנים נקראים משתנים חופשיים.

למשל אם $\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ מייצגת מערכת משוואות הומוגנית,

אז x_1, x_3, x_4 משתנים תלויים, ו- x_2 משתנה חופשי.

עבור כל בחירה של ערכים למשתנים החופשיים.

דוגמא

נניח שיש לנו מערכת משוואות הומוגנית עם מטריצה מדורגת קנונית:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

מערכת המשוואות השקולה הינה:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 + 7x_6 = 0 \\ x_5 + 4x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 5x_4 \\ x_3 = -3x_4 - 7x_6 \\ x_5 = -4x_6 \end{cases}$$

x_1, x_3, x_5 משתנים תלויים,

x_2, x_4, x_6 משתנים חופשיים.

כל בחירה של x_2, x_4, x_6 אפשר להשלים את x_1, x_3, x_5 באופן יחיד לקבלת פתרון.

למשל נציב $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. נקבל $x_1 = -2, x_3 = 0, x_5 = 0$.

ולכן $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא פתרון.

נציב $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ונקבל $x_1 = 0, x_3 = -7, x_5 = -4$.

ולכן $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ פתרון.

טענה 3.111 קבוצת הפתרונות של מערכת המשוואות הומוגנית

היא תת מרחב של $\mathbb{F}^n$.

הוכחה: זהו הגרעין של מטריצת המקדמים המצומצמת.

■

21.12.2009

המשך - פתרון מערכת משוואות

תהי:

תרגול

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

מערכת משוואות לינארית של m משוואות ב- n נעלמים,

כאשר $a_{ij}, b_j \in \mathbb{F}$

בכתיבה מטריציונית נסמן:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ואז המערכת היא בעצם:

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

המערכת ההומוגנית המתאימה היא:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

נגדיר העתקה לינארית $T_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ ע"י:

$$T_A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

אז T_A היא ה"ל וקבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית היא בדיוק $\ker(T_A)$.

אם $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \notin \text{Im}(T_A)$ אז למערכת הלא הומוגנית אין פתרון.

אם $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \text{Im}(T_A)$ אז למערכת הזו יש פתרון.

טענה 3.112 יהי $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ פתרון כלשהו של המערכת הלא הומוגנית.

אז אוסף כל הפתרונות של המערכת הוא $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} + \ker(T_A)$.

דרך הפתרון

נתבונן במטריצה המורחבת:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

נדרג אותה (דירוג ע"י פעולות אלמנטריות של שורות).

ע"י דירוג עוברים למוריצה שמתאימה למערכת משוואות שקולה.

נגיע לצורה קנונית של מטריצה.

יש שתי אפשרויות:

א. בעמודה האחרונה יש מקדם מוביל - אז אין פתרון למערכת,

כי המשוואה המתאימה לשורה של המקדם המוביל היא:

$$0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = 1$$

ואין פתרון למערכת הזו.

ב. בעמודה האחרונה אין מקדם מוביל -

לכן כל מקדם מוביל מתאים למשתנה (לפי העמודה שהוא נמצא בה).

משתנים אלו יקראו משתנים תלויים. שאר המשתנים יקראו משתנים חופשיים.

אם יש r שורות $0 \neq$ במטריצה המדורגת,

אז יש r משתנים תלויים. נסמנם ב- $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$.

נחזור למערכת משוואות:

אם אנחנו בצורה קנונית, אז על ידי העברת אגפים נבטא כל משתנה תלוי בעזרת המשתנים החופשיים.

נקבל כך פתרון כללי של המערכת.

דוגמא

$$x_1 + x_2 + x_5 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_5 = 2$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_4 + 3x_5 = 3$$

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_5 = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1, R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

כמה שורות $0 \neq$ 3.

מי הם המשתנים התלויים? x_1, x_2, x_4

מי הם המשתנים החופשיים? x_3, x_5

נחזור למערכת משוואות:

$$x_1 + x_5 = 1$$

$$x_2 = 0$$

$$x_4 = 0$$

נעביר אגפים:

$$x_1 = -x_5 + 1$$

$$x_2 = 0$$

$$x_4 = 0$$

כעת כל משתנה תלוי מתואר באמצעות המשתנים החופשיים.

נציב $x_3 = s$, $x_5 = t$, ונקבל שקבוצת הפתרונות היא:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \\ s \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \cdot s - t \\ 0+0 \cdot s + 0 \cdot t \\ 0+1 \cdot s + 0 \cdot t \\ 0+0 \cdot s + 0 \cdot t \\ 0+0 \cdot s + 1 \cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{כאשר } s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ הוא } \ker(T_A) \text{ - הפתרון למערכת ההומוגנית.}$$

טענה 3.113 אם $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ שני פתרונות של המערכת הלא הומוגנית,

אזי $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית.

הוכחה:

$$A \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

הגדרה 3.114 תת מרחב אפייני זהו קבוצה של איברים מהצורה

$$V \supseteq v_0 + W$$

כאשר $v_0 \in V$ תת מרחב של V .

טענה 3.115 אם $v_1 \in v_0 + W$ אז $v_1 + W = v_0 + W$.

$$v_0 + W = \{v_0 + w | w \in W\}$$

מטריצות אלמנטריות

נסמן ב- e פעולת שורה אלמנטרית,

וב- $e(A)$ את התוצאה של יישום הפעולה e על המטריצה A .

הגדרה 3.116 $e(I)$ נקראות מטריצות אלמנטריות.

טענה 3.117 תהי $A \in M_{m \times n}(F)$ ו- e פעולת שורה אלמנטרית.

נסמן ב- I_m את מטריצת היחידה מסדר $m \times m$. אזי:

$$e(A) = e(I) \cdot A$$

דוגמאות

1.

$$e = R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$e(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$e(I)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \end{pmatrix}$$

2.

$$e = R_2 \leftarrow -6R_2$$

$$e(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1$$

$$e(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אם לדוגמא בשביל לדרג את המטריצה A

ביצענו את הפעולות האלמנטריות e_1, e_2, e_3 ,

והגענו למטריצה B , זה אומר ש-

$$B = e_3(e_2(e_1(A)))$$

נקבל:

$$\begin{aligned} B &= e_3(e_2(e_1(A))) = e_3(I) \cdot e_2(e_1(A)) = e_3(I) \cdot e_2(I) \cdot e_1(A) \\ &= e_3(I) \cdot e_2(I) \cdot e_1(I)A = e_3(I) \cdot e_2(e_1(I)) \cdot A = e_3(e_2(e_1(I))) \cdot A \end{aligned}$$

למשל, בשביל לדרג את המטריצה בדוגמא הראשונה,

ביצענו את הפעולות:

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1, R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1 \quad R_4 \leftarrow R_4 - R_2, R_1 \leftarrow R_1 - R_2$$

אם עושים את הפעולות האלו על מטריצת היחידה מקבלים:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ובאמת אם נכפול את המטריצה המקורית A במטריצה מעלה נקבל את הצורה הקנונית (חוץ מהעמודה האחרונה).

28.12.2009

יריעות אפיניות (ישריות)

הגדרה 3.118 יהי V מרחב וקטורי.

תרגול

יריעה אפינית (=ישריה) ב- V היא קבוצה מהצורה:

$$v_0 + W = \{v_0 + w | w \in W\}$$

כאשר $v_0 \in V$ ו- W תת מרחב של V .

תרגיל

יהי V מ"ו, ותהי $v_0 + W$ יריעה אפינית.

הוכיחו כי לכל $u_0 \in v_0 + W$ מתקיים:

$$u_0 + W = v_0 + W$$

הוכחה: $u_0 \in v_0 + W$,

ולכן קיים $w_0 \in W$ כך ש- $u_0 = v_0 + w_0$ $(u_0 - v_0 = w_0 \in W, v_0 - u_0 = -w_0 \in W)$

נוכיח הכלה דו כיוונית.

$$:u_0 + W \subseteq v_0 + W$$

יהי $u_0 + w \in u_0 + W$.

$$u_0 + w = v_0 + (u_0 - v_0 + w) \in v_0 + W$$

$$:u_0 + W \supseteq v_0 + W$$

יהי $v_0 + w \in v_0 + W$

$$v_0 + w = u_0 + (v_0 - u_0 + w) \in u_0 + W$$

■

.

תרגיל 2

יהי V מ"ו.

יהיו $v_0 + W_0$ ו- $v_1 + W_1$ שתי יריעות אפניות.

נניח ש- $v_0 + W_0 = v_1 + W_1$.

אזי $W_0 = W_1$. הוכחה:

$$v_0 = v_0 + 0 \in v_0 + W_0 = v_1 + W_1$$

לכן קיים $w_1 \in W_1$ כך ש:

$$v_0 = v_1 + w_1 \Rightarrow v_0 + v_1 = w_1 \in W_1$$

מצד שני:

$$v_1 = v_1 + 0 \in v_1 + W_1 = v_0 + W_0$$

לכן קיים $w_0 \in W_0$ כך ש- $v_1 = v_0 + w_0$, לכן $v_1 - v_0 \in W_0$.

ולכן $v_0 - v_1 \in W_0 \cap W_1$.

נראה הכלה דו כיוונית.

$$W_0 \subseteq W_1$$

יהי $w \in W_0$. אזי:

$$v_0 + w \in v_0 + W_0 = v_1 + W_1$$

ולכן קיים $w' \in W_1$ כך ש:

$$\begin{aligned} v_0 + w &= v_1 + w' \\ w &= v_1 - v_0 + w' \in W_1 \end{aligned}$$

■

הכיוון השני זהה לכיוון הראשון.

בחזרה למערכת משוואות

תזכורת:

בהנתן $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, נגדיר:

$$T_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$$

ע"י:

$$T_A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^m$$

אם E הוא הבסיס הסטנדרטי ל- $\mathbb{F}^m$,

ו- E' הוא הבסיס הסטנדרטי ל- $\mathbb{F}^n$, אז:

$$[T_A]_E^{E'} = A$$

הגדרה 3.119 מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ נקראת הפיכה,

אם קיימת $B \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש:

$$BA = AB = I_n$$

תרגיל

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$.

אם $B, C \in M_n(\mathbb{F})$ מקיימות $BA = AC = I_n$ אז $B = C$. הוכחה:

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C$$

■

ועוד תרגיל

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$.

אזי קיימת ל- A הופכית משמאל אמ"מ T_A חח"ע. הוכחה: אם קיימת הופכית משמאל $B \in M_n(F)$ אז $BA = I_n$.

$$[T_B]_E^E = B, [T_A]_E^E = A$$

$$[T_B \circ T_A]_E^E = BA = I_n$$

$$\Rightarrow T_B \circ T_A = Id_{F^n}$$

ולכן T_A היא חח"ע (הוכחנו בתרגיל קודם).

בכיוון השני - נניח T_A חח"ע. אז קיימת לה הופכית משמאל S , כלומר:

$$S \circ T_A = Id_{F^n}$$

$$\Rightarrow [S]_E^E \cdot [T_A]_E^E = [S \circ T_A]_E^E = [Id_{F^n}]_E^E = I_n$$

ולכן

$$[S]_E^E \cdot A = I_n$$

■

ולכן יש ל- A מטריצה הופכית משמאל.

תרגיל דומה

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$.

אזי קיימת ל- A הופכית מימין אמ"מ T_A על.

תזכורת:

V מ"ו מממד סופי,

אזי $T : V \rightarrow V$ היא חח"ע אמ"מ היא על.

זה נובע ממשפט המימדים.

מסקנה 3.120 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$.

אזי קיימת ל- A הופכית מימין אמ"מ קיימת ל- A הופכית משמאל. ובמקרה זה ראינו שההופכית מימין שווה להופכית משמאל.

הבהרה:

נתונה $A \in M_n(\mathbb{F})$.

נניח $B \in M_n(\mathbb{F})$ היא הופכית משמאל, ומתקיים $BA = I_n$. ראינו שזה אומר שהיא הופכית מימין, נסמנה ב- C .

$$BA = AC = I_n$$

ראינו מעלה כי במקרה זה $B = C$, ובעצם:

$$BA = AB = I_n$$

מסקנה 3.121 אם ל- A יש הופכית אזי היא יחידה, ונסמנה ב- A^{-1} .

דרגה של מטריצה

הגדרה 3.122 תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

דרגת השורות של A שווה למימד של התת מרחב של F^n

הנפרס ע"י m השורות של A ,

כלומר המספר המקסימלי של השורות בת"ל מבין השורות.

דרגת העמודות של A שווה למימד של התת מרחב של F^m

הנפרש ע"י n העמודות של A ,

כלומר המספר המקסימלי של העמודות בת"ל מבין העמודות.

טענה 3.123 תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ אזי דרגת השורות שווה לדרגת העמודות ומסומנת ב- $\text{rank}(A)$.

טענה 3.124 $T: V \rightarrow W$ ויהיו $v_1, \dots, v_n$ בסיס ל- V ,

ויהי $w_1, \dots, w_m$ בסיס ל- W ,

אזי $\text{Im}(T) = \text{sp}(T(v_1), \dots, T(v_m))$

הוכחה: $T(v_1), \dots, T(v_m) \in \text{Im}(T)$

ולכן $\text{sp}(T(v_1), \dots, T(v_m)) \subseteq \text{Im}(T)$.

כיוון שני -

נניח $w \in \text{Im}(T)$,

אזי קיים $v \in V$ כך ש- $w = T(v)$. אזי:

$$v = \sum_{i=1}^m a_i v_i$$

$$w = T(v) = T\left(\sum_{i=1}^m a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^m a_i T(v_i) \in \text{sp}(T(v_1), \dots, T(v_m))$$

וסיימנו!

טענה 3.125 מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ היא הפיכה אם"מ $\text{rank}(A) = n$. במקרה זה נאמר שהדרגה מלאה.

הוכחה: A הפיכה $\Leftrightarrow T_A$ הפיכה $\Leftrightarrow T_A$ היא על $\Leftrightarrow \dim \text{Im}(T_A) = n \Leftrightarrow T_A(e_1), \dots, T_A(e_n)$ בת"ל $\Leftrightarrow$ העמודות של A :

$$c_1 = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, c_n = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הן בת"ל $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$

טענה 3.126 תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

פעולות אלמנטריות על שורות אינן משנות את $\text{rank}(A)$.

הוכחה: פעולות אלמנטריות על שורות A אינן משנות את span השורות, ולכן בוודאי לא את מימד מרחב השורות.

טענה 3.127 תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

כפל במטריצה הפיכה $B \in M_m(\mathbb{F})$ משמאל אינו משנה את דרגת A .

הוכחה: נסמן את עמודות A ב- $c_1, \dots, c_n$,

$$A = (c_1, \dots, c_n)$$

$B \in M_m(\mathbb{F})$ היא הפיכה, לכן:

$$BA = (Bc_1, \dots, Bc_n)$$

$c_{i_1}, \dots, c_{i_k}$ בת"ל $\Leftrightarrow Bc_{i_1}, \dots, Bc_{i_k}$ (כי B הפיכה ולכן T_B חח"ע),

ולכן המספר המקסימלי של עמודות בת"ל זהה ב- A וב- BA :

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(BA)$$

עוד קצת על פעולות אלמנטריות על שורות

בתרגול הקודם ראינו:

אם e פעולה אלמנטרית על שורות,

$$e(A) = e(\text{Im}) \cdot A, \text{ אז } A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$$

הערה:

פעולות אלמנטריות שורות הן פעולות הפיכות,

לכן מטריצות של פעולות אלמנטריות הן הפיכות.

אם e_1, e_2 הן פעולות הופכיות זו לזו, אז:

$$e_2(e_1(A)) = A = e_1(e_2(A))$$

ואם נציב $A = I_m$ נקבל:

$$e_2(I_m) e_1(I_m) = e_2(e_1(I_m)) = I_m = e_1(e_2(I_m)) = e_1(I_m) e_2(I_m)$$

ולכן $e_2(I_m), e_1(I_m)$ מטריצות הפיכות זו לזו.

אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה אז $\text{rank}(A) = n$,

ואז כאשר נדרג את A לצורה קנונית היא תהפוך למטריצת היחידה.

כלומר, קיימות פעולות אלמנטריות על שורות כך ש:

$$e_k(\dots(e_2(e_1(A)))) = I_n = \underbrace{e_k(\dots(e_2(e_1(I_n))))}_{A^{-1}} \cdot A$$

אלגוריתם לבדיקה האם $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה, ומציאת ההופכי

1. רושמים $B \in M_{n \times 2n}(\mathbb{F}), B = (A|I)$.

2. מדרגים את A לקבלת מטריצה קנונית, ומבצעים את הפעולות לכל אורך שורות B .

יש שתי אפשרויות:

- בדירוג A מתקבלת שורות אפסים בצד שמאל - אזי A אינה הפיכה.

- בסוף הדירוג של A מתקבלת I_n בצד שמאל, ואז המטריצה הרשומה בצד ימין היא A^{-1} .

04.01.2010

תמורות

הגדרה 3.128 תמורה של הקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$

היא העתקה חח"ע ועל של הקבוצה על עצמה.

את התמורות מסמנים בדרך"כ בעזרת האותיות: σ, τ, π

הגדרה 3.129 אוסף על התמורות על הקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ מסומן ב- S_n או $S_{(n)}$.

מספר התמורות על $\{1, 2, \dots, n\}$ הוא $n!$.

הגדרה 3.130 הסימן של התמורה יסומן ב- $\{1, 2, \dots, n\}$.

אם נרצה, נוכל גם לכתוב במפורש:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

הגדרה 3.131 זוג מספרים $1 \leq k, l \leq n$ נקרא היפוך בתמורה σ אם בכתיבה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

הם מופיעים בשורה התחתונה בסדר הפוך מבשורה העליונה.

הגדרה 3.132 התמורה σ נקראת זוגית או אי זוגית בהתאם למספר ההיפוכים בה -

אם הוא זוגי, התמורה תקרא זוגית, אם הוא אי זוגי - היא תקרא אי זוגית.

קיימת דרך גרפית נוחה לקביעת מספר ההיפוכה בתמורה הנתונה:

מחברים בקו כל מספר בשורה העליונה עם אותו המספר בשורה התחתונה.

מספר החיתוכים של הקווים הוא מספר ההיפוכים.

יש גם דרך אלגברית למצוא את מספר ההיפוכים:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} \frac{i - j}{\sigma(i) - \sigma(j)} = \frac{\prod_{j < i} (i - j)}{\prod_{j < i} (\sigma(i) - \sigma(j))}$$

הגדרה 3.133 טרנספוזיציה τ הינה תמורה המחליפה את $i \neq j$,

ומשאירה את כל השאר במקום. דהיינו:

$$\tau(k) = \begin{cases} k & k \neq i, j \\ i & k = j \\ j & k = i \end{cases}$$

אם $\sigma \in S_n$ אז אפשר לכתוב את σ כמכפלה של טרנספוזיציות.

הגדרה 3.134 הגדרה שקולה ל- $\operatorname{sgn}(\sigma)$:

אם $\sigma = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k$ כאשר τ_i טרנספוזיציה, אז:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$$

טענה 3.135 אם $\sigma, \tau \in S_n$ תמורות, אז:

$$\operatorname{sgn}(\sigma \cdot \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$$

נעבור לדון בדטרמיננטות -

נשים לב כי הנושא הזה מוגבל למטריצות ריבועיות בלבד!

דטרמיננטות

הגדרה 3.136 נתונה מטריצה $(a_{ij}) = A \in M_n(\mathbb{F})$.

הדטרמיננטה של A הינה הסקלר:

$$|A| = \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

כלומר, הדטרמיננטה של מטריצה מגודל $n \times n$ הינה סכום של $n!$ מחוברים,

אשר כל אחד מהם הוא מכפלה של n איברים מהמטריצה,

אחד (ורק אחד) מכל שורה ומכל עמודה של המטריצה.

לכל מחובר נוסתנים סימן $+$ או $-$ בהתאם לתשובה לשאלה -

האם התמורה המתאימה למחובר היא זוגית או אי זוגית.

נשים לב - הדטרמיננטה של תמורת הזהות הינה תמיד +1.

דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\sigma 1 : \tau(1) = 2, \tau(2) = 1 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma 1) = -1$$

$$\sigma 2 : \tau(1) = 1, \tau(2) = 2 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma 2) = +1$$

$$\det(A) = +1 \cdot ad + (-1) \cdot bc = ad - bc$$

טענה 3.137 נתונה מטריצה $(a_{ij}) = A \in M_n(\mathbb{F})$

נסמן את שורותיה ב- $R_1, \dots, R_n$

אזי הדטרמיננטה של מטריצה $n \times n$ מקיימת את התכונות הבאות:

א.

$$\det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{i-1} \\ R_i + R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{i-1} \\ R_i \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{i-1} \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

לדוגמא:

$$\det \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} e & f \\ c & d \end{pmatrix}$$

עם זאת, נשים לב כי בדרך כלל $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

ב.

$$\det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{i-1} \\ tR_i \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = t \cdot \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{i-1} \\ R_i \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

כמו כן:

$$\det(tA) = t^n \cdot \det(A)$$

ג. דטרמיננטה של מטריצה שיש בה שתי שורות שוות היא 0.

$$\det(I) = 1$$

מסקנה 3.138 מה קורה כאשר עושים פעולות אלמנטריות על המטריצה?

א. החלפת שתי שורות במטריצה הופכת את סימן הדטרמיננטה.

ב. דטרמיננטה של מטריצה שיש בה שורת אפסים היא 0.

ג. הוספת כפולה של אחת מהשורות המטריצה לשורה אחרת,

אינה משנה את ערך הדטרמיננטה. נוכיח זאת:

$$\det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{i-1} \\ R_i + cR_j \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

הוכחה:

$$\det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{i-1} \\ R_i + cR_j \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + c \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{i-1} \\ R_i \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}}_{=0}$$

כעת, נוכל לחשב את הדטרמיננטה על ידי דירוג.

אנו יודעים איך כל פעולה אלמנטרית משפיעה על הדטרמיננטה,

ובסוף נגיע למטריצת היחידה בה $\det = 1$,

או לדטרמיננטה עם שורת אפסים בה $\det = 0$.

■

לדוגמא:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} &= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot 1 = -2 \end{aligned}$$

טענה 3.140 מטריצה $A \in M_n(F)$ הפיכה אם ורק אם $\det A \neq 0$.

הוכחה: לא פורמלית -

ראינו כי פעולות אלמנטריות לא משנו את ה"אפסיות" של הדטרמיננטה.

אם בתום תהליך הדירוג נישאר עם מטריצה עם שורת אפסים -

אזי המטריצה אינה הפיכה (ראינו בעבר - אינה מדרגה מלאה) -

וכמו כן ראינו כי במקרה כזה הדטרמיננטה היא אפס.

מצד שני, אם בתום התהליך נישאר עם מטריצת היחידה -

אזי היא הפיכה (כי פעולות אלמנטריות הביאו אותנו לכאן),

וכמו כן הדטרמיננטה אינה אפס.

■

טענה 3.141 הדטרמיננטה של מטריצה A שווה לדטרמיננטה של המטריצה המשוכללת, או A^t (transpose).

מסקנה 3.142 כל התכונות לשורות מתקיימות גם לעמודות!

מטריצה משולשית

הגדרה 3.143 $(a_{ij}) = A \in M_n(F)$ נקראת משולשית עליונה, אם כל האיברים מתחת לאלכסון הראשי שווים לאפס. כלומר, לכל $j < i$ $a_{ij} = 0$. בצורה דומה מוגדרת גם מטריצה משולשית תחתונה.

טענה 3.144 אם $A = (a_{ij})$ משולשית עליונה, אזי הדטרמיננטה שלה היא מכפלת איברי האלכסון, כלומר:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

הוכחה: תחילה - טענה עזר:

טענה 3.145 עבור $\sigma \in S_n$, וכמו כן $\sigma \neq Id$, אזי קיים $1 \leq i \leq n$ כך ש- $\sigma(i) < i$. **הוכחה:** נניח בשלילה שלא קיים כזה - כלומר שלכל $1 \leq i \leq n$ $i \leq \sigma(i)$. נתבונן באינדקס הראשון i_0 עבורו $\sigma(i_0) \neq i_0$ (קיים כזה כי $\sigma \neq Id$). אזי בהכרח לכל $1 \leq j \leq n$ $\sigma(j) \neq i_0$, כי: אם $j < i_0 \Leftarrow j \neq i_0 \Rightarrow \sigma(j) = j \neq i_0$ (כי i_0 הוא הראשון עבורו $\sigma(i) \neq i$). אם $j = i_0 \Leftarrow j = i_0 \Rightarrow \sigma(j) \neq i_0$ (לא זהות). אם $j > i_0 \Leftarrow j > i_0 \Rightarrow \sigma(j) \geq j > i_0$ (לפי ההנחה). אבל אז, משמע שלא מתקבל האיבר i_0 , ולכן σ אינה על, בסתירה להגדרת תמורה.

נוכיח כעת את הטענה:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn} + \sum_{\sigma \in S_n, \sigma \neq Id} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

אבל האיבר האחרון שווה אפס לפי טענת העזר - כי לכל תמורה קיים אינדקס i עבורו $\sigma(i) < i$, ואז $a_{i_0\sigma(i_0)} = 0$ - כי האיברים מתחת לאלכסון הם אפס.

מסקנה 3.146 לצורך חישוב דטרמיננטה של מטריצה,

מספיק לדרג אותה עד למשולשית -

ואז כופלים את התוצאה עד כה באלכסון של המשולשית.

דוגמאות לתרגול הקודם:

11.01.2010

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \leftarrow R_5 - R_4, R_4 \leftarrow R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

תרגול

קיבלנו שתי שורות זהות, כלומר $\det(A) = 0$.

2.

$$M_n(F) \ni A = \begin{pmatrix} a & & a \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix}$$

פתרון אפשרי - נדגים על המקרה בו $n = 4$:

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & a & a & a \\ b & b & a & a \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2, \dots} \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = B$$

חיסרנו מכל שורה את השורה מתחתיה -

וקיבלנו מטריצה משולשית תחתונה.

כך אפשר לעשות לכל n , לקבל מטריצה משולשית תחתונה,

ואז לכפול את איברי האלכסון, כפי שראינו בשיעור שעבר. בסה"כ:

$$\det(A) = \det(B) = (a-b)^{n-1} a$$

3. תהי $(a_{ij}) = A \in M_n(F)$,

מטריצה המקיימת $a_{ij} + a_{ji} = 0$.

כמו כן, n אי זוגי, ו- $\text{char } F \neq 2$.

מהי $\det(A)$?

נשים לב כי מתקיים $A^t = -A$.

לכן:

$$\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A) =$$

$$2\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$$

טענה 3.147 הדטרמיננטה היא כפלית, כלומר:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

מסקנה 3.148 אם $A \in M_n(F)$ הפיכה, אזי:

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$$

כמו כן:

$$1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot (\det(A^{-1}))$$

פיתוח דטרמיננטה לפי שורה ולפי עמודה

הגדרה 3.149 תהי נתונה מטריצה $(a_{ij}) = A \in M_n(F)$.

המינור k, l הוא המטריצה המתקבלת מ- A

ע"י מחיקת השורה k והעמודה l .

נסמן את המינור ב- $A_{k,l}$. נשים לב כי $A_{k,l} \in M_{n-1}F$.

משפט 3.150 פיתוח לפי השורה i :

לכל שורה $1 \leq i \leq n$ מתקיים:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

משפט 3.151 פיתוח לפי העמודה j :

לכל עמודה $1 \leq j \leq n$ מתקיים:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

פיתוח לפי השורה הראשונה:

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

פיתוח לפי השורה השנייה:

$$\det(A) = -4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - 6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

פיתוח לפי עמודה ראשונה:

$$\det(A) = 1 \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

דוגמא נוספת - מטריצה ואן דר מונדה:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

בתרגיל הוכחנו:

$$\det(W) = \prod (x_j - x_i), \quad i < j$$

הוכחה: באינדוקציה על n .

בסיס - עבור $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = x_2 - x_1$$

עבור $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

נאפס את העמודה הראשונה ונפתח לפיה:

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 - x_1 \\ 1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

■

נוסחת קרמר לפתרון מערכת משוואות

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ תהי } A \text{ מערכת משוואות ב-} n \text{ נעלמים מעל } \mathbb{F}.$$

נניח ש- $\det(A) \neq 0$.

אזי, למערכת יש פתרון אחד בדיוק (כפי שראינו בעבר).

$$\text{הפתרון של המערכת יהיה נתון ע"י: } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}, \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1^{spot} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

כאשר A_k היא המטריצה המתקבלת מ- A ,

ע"י החלפת העמודה ה- k בעמודות הפתרון - $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

דוגמא:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

תרגיל:

היה $\det(A) = \pm 1, A \in M_n(\mathbb{Z})$.

הוכיחו כי לכל $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n$ קיים $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n$ כך ש- $Ax = b$.

(כלומר - הפתרון בשלמים). **הוכחה:** לפי נוסחאת קרמר, אנו יודעים כי הפתרון היחיד של המערכת הוא:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

אבל $\det(A_i) \in \mathbb{Z}$ ולכן $A_i \in M_n(\mathbb{F})$.

כיון ש- $\det(A) = \pm 1 \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \mathbb{Z}$.

■

18.01.2010

השלמות...

טענה 3.152 נתונה מטריצה $A \in M_{m \times n}(F)$

נגדיר $T_A : F^n \rightarrow F^m$ ע"י $T_A(x) = A \cdot (x)$

אז:

$$\text{Im}(T_A) = \text{span}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

כאשר $c_1, \dots, c_n$ הן עמודות המטריצה A .

הוכחה: נראה הכלה דו צדדית:

בכיוון הראשון:

לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $c_i \in \text{Im} A$.

כיון ש:

$$T_A(e_i) = A \cdot e_i = c_i$$

לכן:

$$\text{span}\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \subseteq \text{Im}(T_A)$$

בכיוון השני:

נניח $y \in \text{Im}(T_A)$.

אזי קיים $x \in F^n$ כך ש- $T_A(x) = Ax = y$.

דהיינו יש לו מקור.

אזי:

$$\begin{aligned} y = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^n x_i c_i = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i \end{pmatrix} \in \text{span} \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \end{aligned}$$

כלומר:

$$\text{span} \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \supseteq \text{Im}(T_A)$$

ומהכלה הדו כיוונית:

$$\text{span} \{c_1, c_2, \dots, c_n\} = \text{Im}(T_A)$$

■

מטריצות דומות

הגדרה 3.153 מטריצות $A, B \in M_n(F)$ תקראנה דומות,

אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(F)$ כך ש- $B = P^{-1}AP$.

טענה 3.154 למטריצות דומות יש אותו ה- rank ואותה הדטרמיננטה.

הוכחה: לדטרמיננטה: **הוכחה:** אם $B = P^{-1}AP$, אז:

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = (\det(P))^{-1} \cdot \det(A) \cdot \det(P) = (\det(P))^{-1} \cdot \det(P) \cdot \det(A) = \det(A)$$

■

ל- rank :

טענה 3.155 כפל של A כנ"ל במטריצה ההפיכה P ,

אינה משנה את דרגת המטריצה.

הוכחה: לא פורמלית -

ראינו כי מטריצה הפיכה שקולה לכפל של מטריצות אלמנטריות:

בכפל משמאל שקול לפעולות אלמנטריות על שורות, מימין על העמודות,

או לבצע על A^t .

■

■

1...זהו D: