סיכום - אינפי 2

19 ביוני 2010

מרצה: צביק איתמר,
בעזרת סיכומים משיעוריו של נועם ברגר

מתרגלים: ינאי ג' , איב גודין

אין המרצה או המתרגלים קשורים לסיכום זה בשום דרך.
סוכם ע"י נגה רוטמן בשעות לא הגיוניות בעליל, ולכן יכול להיות והנתונים לא תמיד מדוייקים...
אינני לוקחת אחריות על מה שכתוב מטה. השימוש באחריות הקורא בלבד.

הערות יתקבלו בברכה - $noga.rotman@gmail.com$

תוכן עניינים

1 קירובים פולינומיאלים

21.02.2010

1.0.1 מוטיבציה

נרצה לחשב, לדוגמא, מהו e^{π}.

כיצד נעשה זאת? נמצא קירוב!

זאת ע"י פולינום המקורב לפונקציה המבוקשת, שאותו קל לפתור.

זו גם השיטה בה משתמש המחשבון.

1.1 קירוב מסדר n

תהי f פונקציה כלשהיא הגזירה n פעמים בנקודה a.

למדנו באינפי 1 כי המשוואה לקירוב מסדר ראשון,

הקירוב הלינארי, הינה:

$$l(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

בצורה דומה, הקירוב הריבועי יהיה:

$$q(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(x-a)^2}{2}$$

וכן הלאה...

הנקודה הנתונה ע"י הפונקציה קשה לאיתור -

אולם כאמור הקירובים הם פונקציות פולינומיאליות,

ולכן בעזרתם קל יותר למצוא את הערך.

נשאל:

מהו הפולינום הקרוב יותר לערך הפונקציה?

מהו סדר הגודל של הטעות?

נביט בכל הקווים הישרים העוברים $(a, f(a))$:

כל המשוואות שלהם הן מהצורה:

$$y = f(a) + n(x-a)$$

כאשר n הוא שיפוע כלשהוא.

כמובן שבגרף המשיק, n הינו השיפוע של הגרף המקורי בנקודה.

כעת:

$$\lim_{x\to a}[f(x) - f(a) - n(x-a)] = 0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a}[f(x) - f(a) - n(x-a)] = 0$$

הגדרה 1.1 פונקציה f המוגדרת בסביבה של a הינה גזירה (=דיפרנציאבילית) שם,

אמ"מ קיים $n \in \mathbb{R}$ בעל התכונה:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)-n(x-a)}{x-a}\right]=0$$

במקרה זה, המשוואה של הקירוב הריבועי תקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-q(a)}{(x-a)^2}=0$$

וכך הלאה.

באופן דומה, נרצה פולינום מסדר n המקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n}=0$$

לדוגמא:

$$\begin{aligned}
&p(x)=\pi+ex-\sqrt{2}x^2+ln5\cdot x^3\\
&p'(x)=e+\sqrt{2}\cdot 2x+ln5\cdot 3x^2\\
&p''(x)=-\sqrt{2}\cdot 2\cdot 1+ln5\cdot 3\cdot 2x\\
&p'''(x)=ln5\cdot 3\cdot 2\cdot 1\\
\Rightarrow &p(0)=\pi,\ p'(0)=e,\ p''(x)=-\sqrt{2}\cdot 2\cdot 1,\ p'''(0)=ln5\cdot 3\cdot 2\cdot 1\\
\Rightarrow &p(x)=\frac{p(0)}{0!}+\frac{p'(0)\cdot x}{1!}+\frac{p''(0)\cdot x^2}{2!}+\frac{p'''(0)\cdot x^3}{3!}
\end{aligned}$$

תרגיל:

הוכיחו באינדוקציה:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{p^{(i)}(0)}{i!}\cdot x^i,\ n=deg(p)$$

תרגיל נוסף:

הוכיחו, שוב באינדוקציה:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{p^{(i)}(a)\cdot(x-a)^i}{i!}$$

1.2 פולינום טיילור

הגדרה 1.2 תהי f פונקציה בעלת נגזרות מסדר $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ בנקודה n.
הפולינום:

$$T_n(x)=\frac{f(a)}{0!}+\frac{f'(a)\cdot(x-a)}{1!}+...+\frac{f^{(i)}(a)\cdot(x-a)^i}{i!}+...+\frac{f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n}{n!}$$

נקרא **פולינום טיילור מסדר** n של הפונקציה f ב־a.
נסמנו גם ב־ T_nf.

הערה 1.3 $f^{(i)},\ i=0,...,n-1$ מוגדרת בסביבה של a.

הערה 1.4 פולינום טיילור מסדר n איננו בהכרח מסדר n, אלא:

$$degT_n(x)\le n$$

הערה 1.5 פולינום טיילור הוא הפולינום היחידי עם דרגה $\ge n$ המקיים:

$$T_n^{(j)}f(a)=f^{(j)}(a)\,,\ j=0,...,n$$

הערה 1.6

$$T_n^{(j)}f=T_{n-j}f^{(j)},\ j=0,...,n$$

דוגמאות:

.1

$$\begin{aligned}&a=0,\ f(x)=exp(x)=e^x\\&f^{(i)}(x)=f(x)=e^x\\&f^{(i)}(0)=e^0=1\\\Rightarrow&T_n(x)=1+1\cdot x+\frac{1\cdot x^2}{2!}+...+\frac{1\cdot x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}&a=0,\ f(x)=cos(x)\\&f^{(1)}(x)=sin(x)\,,\ f^{(2)}(x)=-cos(-x)\,,\ f^{(3)}(x)=sin(x)\,,\ f^{(4)}(x)=sin(x)\\\Rightarrow&T_0(x)=1,\ T_1(x)=1+\frac{0\cdot x}{1!}=1,\ T_2(x)=1-\frac{x^2}{2!},\ T_3(x)=1-\frac{x^2}{2!}\\&g(x)=sin(x)\\&T_0g(x)=0,\ T_1g(x)=x,\ T_2g(x)=x,\ T_3g(x)=x-\frac{x^3}{3!}\end{aligned}$$

משפט 1.7 תהי f מוגדרת בקטע I,

בעלת נגזרות מסדר $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ב־$a \in I$.

אזי, מתקיים:

$$\underset{x \to a}{lim} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

הוכחה: באינדוקציה על n:

בסיס האינדוקציה - $n = 1$: במקרה זה, לפי ההנחה, f גזירה ב־a, כלומר:

$$\underset{a}{lim} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$$

לכן מתקיים:

$$\underset{a}{lim} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \underset{a}{lim} \frac{f(x) - T_1 f(x)}{x-a} = 0$$

הנחת האינדוקציה: נניח נכונות עבור $n - 1 \geq 1$.

צעד האינדוקציה: נראה נכונות הטענה עבור n.

תחילה - $n \geq 2$, לכן, לפי ההנחה, f גזירה בסביבה של a.

לפי כלל לופיטל:

$$\underset{a}{lim} \frac{f(x) - T_n f(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n} \underset{a}{lim} \frac{f'(x) - T'_n f(x)}{(x-a)^{n-1}}$$

לפי הערה 1.6:

$$\frac{1}{n} \underset{a}{lim} \frac{f'(x) - T'_n f(x)}{(x-a)^{n-1}} = \frac{1}{n} \underset{a}{lim} \frac{f'(x) - T_{n-1} f'(x)}{(x-a)^{n-1}}$$

ולכן, לפי הנחת האינדוקציה עבור f':

$$\underset{a}{lim} \frac{f'(x) - T_{n-1} f'(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$$

לכן, מנכונות עיקרון האינדוקציה, הטענה נכונה. ■

משפט 1.8 תהי f מוגדרת בקטע I,

בעלת נגזרות מסדר $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ב־$a \in I$.

יהי $p(x)$ פולינום עם $degp(x) \leq n$ אשר מקיים:

$$\underset{a}{lim} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^n} = 0$$

אזי $p(x) = T_n f(x)$.

הוכחה: יהיו $p(x)\ ,\ q(x)$ פולינומים בעלי דרגה $\leq n$, אשר מקיימים:

$$\underset{a}{lim} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^n} = 0 = \underset{a}{lim} \frac{f(x) - q(x)}{(x-a)^n} = 0$$

נגדיר $R(x) := p(x) - q(x)$ פולינום עם דרגה $\leq n$.

נותר להראות שפולינום כזה המקיים:

$$\underset{a}{lim}\frac{R(x)}{(x-a)^n}=0$$

הינו פולינום האפס.

נראה זאת באינדוקציה על n:

בסיס האינדוקציה - $n=0$ - $R(x)=b_0\in\mathbb{R}$. במקרה זה:

$$\underset{a}{lim}\frac{R(x)}{(x-a)^0}=\underset{a}{lim}R(x)=R(a)=b_0=0$$

וזאת בשל רציפות הפולינום.

נניח כי המשפט נכון עבור $n\geq 0$ ונראה נכונות עבור $n+1$:

יהי $R(x)=b_0+b_1(x-a)+...+b_{n+1}(x-a)^{n+1}$.

אזי, לפי אריתמטיקה של גבולות:

$$\underset{a}{lim}\left[(x-a)^{n+1}\frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}}\right]=\underset{a}{lim}R(x)=R(a)=b_0=0$$

מכיון ו-$b_0=0$ נוכל לרשום $R(x)=(x-a)\sum_{i=1}^{n+1}b(x-a)^{i-1}$. מכאן:

$$\underset{a}{lim}\frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}}=\underset{a}{lim}\frac{\sum_{i=1}^{n+1}b_i(x-a)^{i-1}}{(x-a)^n}$$

$\sum_{i=1}^{n+1}b_i(x-a)^{i-1}$ הינו פולינום מדרגה $\geq n$,

ולכן, לפי הנחת האינדוקציה:

$$\underset{a}{lim}\frac{\sum_{i=1}^{n+1}b_i(x-a)^{i-1}}{(x-a)^n}=0$$

ולכן, מנכונות עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה. ■

סימון:

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x)$$

24.02.2010 כאשר $R_n(x)$ היא השארית.

הגדרה 1.9 נאמר ש-$f\in C^k(I)$ $(k\in\mathbb{N}\cup\{0\})$,

אמ"מ f בעלת k נגזרות רציפות ב-I.

אם $k=0$ - הפונקציה רציפה ב-I.

נרצה לתת הערכה לשגיאה שנותן הקירוב:

$$\underset{x\to a}{lim}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n}=0$$

אינטואיציה -

קירוב מסדר 0 - ממשפט ערך הביניים לנגזרות (לגראנג'):

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$$

אם אנו יודעים ש־$f'(a)$ חסומה בקטע (a,x), נניח ע"י $|f'| \leq M$, אז

$$|f(x) - f(a)| \leq (x-a)$$

כאשר $f(x)$ הוא ערך הפונקציה,

ו־$f(a)$ הוא פולינום טיילור מסדר 0.

ניתן גם לומר:

אם $m \leq f' \leq M$ ב־(a,x) אז:

$$f(a) + m(x-a) \leq f(x) \leq f(a) + (x-a)$$

קירוב מסדר 1 ־

$$R_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \frac{f''(c)}{2} \cdot (x-a)^2$$

ואז $m \leq f'' \leq M$:

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{m}{2}(x-a)^2 \leq f(x) \leq f(a) + f'(x-a) + \frac{M}{2}(x-a)^2$$

משפט השארית נוסח לגראנג'

משפט 1.10 יהי I קטע, $f \in C^{n+1}(I)$ ו־$a \in I$.

אזי לכל $x \in I$ קיים $\xi \in (a,x)$ כך ש:

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

כאשר $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ תקרא השארית נוסח לגראנג'.

הוכחה: באינדוקציה על n:

בסיס האינדוקציה ־ $n=0$:

במקרה זה, לפי ההנחה, f גזירה ברציפות ב־I, ולכן ממשפט הערך הממוצע של לגראנג',

עבור f בקטע $[a,x]$ קיים $\xi \in (a,x)$ כך ש:

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$$

כמו כן, ממהגדרה $T_0 f(x) = f(a)$, ולכן נעביר אגפים, נציב ונקבל:

$$f(x) = T_0 f(x) + f'(\xi)(x-a)$$

כפי שרצינו.

נניח שהמשפט נכון עבור $n-1 \geq 0$, ונוכיח עבור n:

$n \geq 1$, ולכן, לפי הנחה, f גזירה ב־I.

נפעיל את משפט הערך הממוצע של קושי עבור הפונקציות:

$$f(x) - T_n f(x), \ (x-a)^{n+1}$$

בקטע $[a,x]$, ונקבל שקיים $\eta \in (a,x)$ עבורו:

$$\frac{f(x) - T_n f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f'(\eta) - T_n' f(\eta)}{(n+1)(\eta-a)^n}$$

נשים לב:

$$f'(\eta) - T_n' f(\eta) = f'(\eta) - T_{n-1} f'(\eta)$$

ולפי הנחת האינדוקציה עבור f', קיים $\xi \in (a,\eta)$ שעבורו:

$$f'(\eta) - T_{n-1} f'(\eta) = \frac{1}{n!} f'^{(n)}(\xi)(\eta - a)^n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(\eta - a)^n$$

לכן:

$$\frac{f'(\eta) - T_n' f(\eta)}{(n+1)(\eta - a)^n} = \frac{\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(\eta - a)^n}{(n+1)(\eta - a)^n} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

ואם נחזור להתחלה, בסה"כ קיבלנו:

$$\frac{f(x) - T_n f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Rightarrow f(x) = T_n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

כלומר, הוכחנו את הצעד.

הוכחנו את בסיס האינדוקציה, והראינו בעזרת ההנחה כי צעד האינדוקציה נכון,

ולכן, מנכונות עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה! ■

שימושים:

1. נמצא קירוב מסדר אפס ל-$\sqrt{1.1}$:

$$\begin{aligned} & f(x) = \sqrt{x},\ a = 1,\ x = 1.1 \\ & \left|\sqrt{1.1} - \sqrt{1}\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\right|(1.1 - 1) \leq \frac{1}{2}(1.1 - 1) = 0.05 \\ & 1 - 0.05 \leq \sqrt{1.1} \leq 1 + 0.05 \Rightarrow \sqrt{1.1} = 1 \pm 0.05 \end{aligned}$$

2. נחשב קירוב לינארי ל-$sin(0.1)$:

$$\begin{aligned} & f(x) = sinx,\ a = 0 \\ & x \approx a \Rightarrow sinx \approx x\ \ (= T_1 = 0 + 1(x - 0)) \\ & |sin(0.1) - 0.1| = \left|\frac{sin''(\xi)}{2!}\right| \left|(0.1 - 0)^2\right| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} \end{aligned}$$

נשים לב - $x = T_1,\ sinx = T_2$, ואז:

$$|sin(0.1) - 0.1| = \left|\frac{sin'''(\xi)}{3!}\right| (0.1 - 0)^3 \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1000}$$

הסימון של לנדאו:

"או קטן" -

$$f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0\ \ x \to a$$

" או גדול" -

$$f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \exists k > 0\ \ |f(x)| \leq k\,|g(x)|\,,\ \ x \to a$$

נשים לב:

$$f\left(x\right)-T_{n}\left(x\right)=O\left(x-a\right)^{n+1},\ f\left(x\right)-T_{n}\left(x\right)=o\left(x-a\right)^{n}$$

כלומר:

$$\frac{\left|f\left(x\right)-T_{n}\left(x\right)\right|}{\left(x-a\right)^{n}}\leq\frac{k\left(x-a\right)^{n+1}}{\left(x-a\right)^{n}}$$

25.02.2010 וכאשר $x\to a$, הביטוי מימין שואף לאפס.

משפט 1.11 יהיו $P\left(x\right),\ Q\left(x\right)$ פולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-n,

וכמו כן:

$$\underset{a}{lim}\frac{f\left(x\right)-P\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=0=\underset{a}{lim}\frac{f\left(x\right)-Q\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}$$

אזי $P\left(x\right)=Q\left(x\right)$.

הוכחה:

$$0=\underset{x\to a}{lim}\left[\frac{f\left(x\right)-Q\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}-\frac{f\left(x\right)-P\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}\right]=\underset{x\to a}{lim}\frac{P\left(x\right)-Q\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}$$

יהי $R\left(x\right)=P\left(x\right)-Q\left(x\right)$, וכמו כן $degR\left(x\right)\leq n$.

אם כך נשאר להראות כי:

$$\underset{x\to a}{lim}\frac{P\left(x\right)-Q\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=0\Rightarrow R\left(x\right)=0$$

יהי $R\left(x\right)=b_{0}+b_{1}\left(x-a\right)+...+b_{n}\left(x-a\right)^{n}$.

נשים לב:

$$0=\underset{a}{lim}\left[\left(x-a\right)^{j}\frac{R\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}\right],\ j=0,1,2,...,n$$

וכמו כן:

$$0=\underset{x\to a}{lim}R\left(x\right)\overset{R\ Ratzif}{=}R\left(a\right)=b_{0},\ j=n$$

לכן:

$$R\left(x\right)=b_{1}\left(x-a\right)+...+b_{n}\left(x-a\right)^{n}=\left(x-a\right)\left[b_{1}+b_{2}\left(x-a\right)+...+b_{n}\left(x-a\right)^{n-1}\right]$$
$$\frac{R\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=\frac{b_{1}+b_{2}\left(x-a\right)+...+b_{n}\left(x-a\right)^{n-1}}{\left(x-a\right)^{n-1}}$$

כעת אם $j=n-1$:

$$0=\underset{x\to a}{lim}\left(x-a\right)^{n-1}\frac{R\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n-1}}=\underset{x\to a}{lim}\left[b_{1}+b_{2}\left(x-a\right)+...+b_{n}\left(x-a\right)^{n-1}\right]=b_{1}$$

שוב מרציפות, וכו'. ■

שימושון

נשים לב:

$$1+x+x^2+...+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{x-1}-\frac{x^{n+1}}{1-x}\ \ (x\neq 1)$$
$$\frac{1}{1-x}-\left(1+x+x^2+...+x^n\right)=\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

כעת אם נסמן:

$$f(x)=\frac{1}{1-x},\ P(x)=1+x+x^2+...+x^n$$

נקבל, לפי המשפט מעלה:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{R(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{n+1}}{x^n(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-x}=0$$

כלומר:

$$P(x)=T_nf(x)$$

כעת נוכל להזיז משתנה,

ולקבל פולינום טיילור עבור פונקציות נוספות.

לדוגמא

$$f(-x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...+(-1)^n x^n=\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$$

נשים לב - $ln'(x+1)=\frac{1}{x+1}$!

אם היינו רוצים לחשב את פולינום הטיילור של $ln(x+1)$ ידנית,

היינו עושים כך:

$$g(x)=ln(1+x)$$
$$g'(x)=\frac{1}{x+1}$$
$$g''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$$
$$g'''(x)=\frac{-(-1)2(1+x)}{\left[(1+x)^2\right]^2}=\frac{2}{(1+x)^3}$$
$$g''''(x)=\frac{-2\cdot 3(1+x)^2}{\left((1+x)^3\right)^2}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}$$
$$g^n(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$
$$g^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$$
$$\Rightarrow T_ng(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{i!}(x-0)^i$$

03.03.2010

נבצע שינוי משתנה נוסף:

$$f\left(-x^2\right)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^n x^{2n}+\underbrace{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}}_{R(x)}$$

נסמן $a=0$, ואז:

$$\lim_{0}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{x^{2n}\left(1+x^2\right)}=0$$

נשים לב - $\frac{1}{1+x^2}$ היא הנגזרת של $arctan$! לכן:

$$arctanx=\underbrace{c}_{=0}+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+R_{2n+1}(x)$$

הערה 1.12 פולינום טיילור של סכום פונקציות הוא סכום הפולינומים של הפונקציות - זהו אופרטור לינארי!

$$f(x)=T_nf(x)+R_nf(x)$$
$$g(x)=T_ng(x)+R_ng(x)$$

סכום השאריות עדיין ישאף לאפס,

לכן סכום הפולינומים יהיה פולינום טיילור של שתי הפונקציות.

דוגמא:

נביט בחיסור של הפונקציות $\frac{1}{1+x},\ \frac{1}{1-x}$:

עבור n זוגי:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right]=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(1+x^2+x^4+...+x^n\right)+\underbrace{R_x}_{\to 0}$$

הערה 1.13 פולינום טיילור של כפל פונקציות:

$$f(x)\cdot g(x)=T_nf(x)\cdot T_ng(x)+R_x$$

הביטוי הזה יכול להיות פולינום טיילור מסדר $2n$ $(x^n\cdot x^n)$ של $f(x)\cdot g(x)$,

כמובן זאת אם הפונקציה גזירה $2n$ פעמים.

ניתן "להוסיף לשארית" את החזקות הגבוהות,

ואז לקבל פולינום טיילור מסדר n של המכפלה.

לקורא החרוץ נשאר להוכיח - אכן מדובר בפולינום טיילור, כלומר מתקיים:

$$\frac{T_nf(x)\cdot Rg(x)+T_ng(x)\cdot Rf(x)+Rf(x)\cdot Rg(x)}{(x-a)^n}\to 0$$

משפט 1.14 תהי f גזירה n פעמים ב־a, אשר מקיימת:

$$f'(a)=f''(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0,\ f^{(n)}(a)\neq 0$$

אזי אם n זוגי, ל־f יש נקודת קיצון ב־a:

$$0<f^{(n)}(a)\Rightarrow minimum$$
$$0>f^{(n)}(a)\Rightarrow maximum$$

אם n אי זוגי, אזי ל־f **אין** נקודת קיצון ב־a.

הוכחה: יהי $T_n f(x)$ הפולינום מסדר n של הפונקציה:

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_a \frac{f(x)-T_n f(x)}{(x-a)^n} = \lim_a \frac{f(x)-\left[f(a)+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n\right]}{(x-a)^n} \\
&= \lim_a \left[\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} - \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\right] = 0 \\
&\Rightarrow \lim_a \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)
\end{aligned}
$$

אזי, קיימת סביבה בה הסימן של הפונקציה שווה לסימן הגבול.

כלומר, קיים $\delta > 0$ כך ש:

$$|x-a| < \delta \Rightarrow sgn\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} = sgn f^{(n)}(a)$$

כאשר n זוגי, המכנה תמיד חיובי, ולכן:

$$sgn\left(f(x)-f(a)\right) = sgn f^{(n)}(a)$$

אם $0 < f^{(n)}(a)$, אם

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x)-f(a) > 0 \Rightarrow f(x) > f(a)$$

ולכן ל־f יש נקודת מינימום מקומי ב־a.

בצורה דומה, אם $0 > f^{(n)}(a)$, ל־f יש מקסימום מקומי ב־a.

אם n אי זוגי, אזי משמאל לנקודה:

$$
\begin{aligned}
& a-\delta < x < a \Rightarrow (x-a) < 0 \Rightarrow (x-a)^n < 0 \\
& \Rightarrow sgn f^{(n)}(a) = -sgn\left(f(x)-f(a)\right) = sgn\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} \\
& \Rightarrow -sgn f^{(n)}(a) = sgn\left(f(x)-f(a)\right)
\end{aligned}
$$

ומימין לנקודה:

$$a < x < a+\delta \Rightarrow sgn f^{(n)}(a) = sgn\left(f(x)-f(a)\right)$$

לכן f מונוטונית בנקודה a ־ עולה לפניה ויורדת אחריה, או להפך ־

ומכיוון שכך, אין לה נקודה קיצון שם. ■

1.3 פולינום האינטרפולציה של לגראנג'

הרעיון מאחורי פולינום טיילור -

קירוב של x באמצעות קירוב מסדר I של נקודה a.

כעת, נביט ביותר מנקודה אחת -

עבור $x_0 < x_1$ ו־y_0, y_1:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = \frac{y_0(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)} + \frac{y_1(x - x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{y_0(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

נקבל פולינום העובר דרך שתי הנקודות ממעלה 1:

$$y = \frac{y_0(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + \frac{y_1(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

עבור שלוש נקודות $x_0 < x_1 < x_2$ ו־y_1, y_2, y_3:

$$y = \frac{y_0(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{y_1(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{y_2(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

וזהו פולינום העובר דרך 3 נקודות ממעלה 2.

וכן הלאה.

בצורה הזו נגדיר:

הגדרה 1.15 יהיו $x_0 < x_1 < ... < x_n,$ ו־$y_0, y_1, ..., y_n$ כולם ב־$\mathbb{R}$.

אזי, פולינום לגראנג' יסומן להיות:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\prod_{i \neq j=0}^{n}(x - x_j)}{\prod_{i \neq j=0}^{n}(x_i - x_j)} \in \mathbb{R}_n[x]$$

ומתקיים:

$$L_n(x_i) = y_i$$

טענה 1.16 (כרגע ללא הוכחה) פולינום זה הינו היחיד מדרגה n המקיים זאת!

משפט 1.17 יהי I קטע ו־$f \in C^{n+1}(I)$.

יהיו $a < x_0 < x_1 < ... < x_n < b$ ב־I.

יהי $L_n(x)$ פולינום האינטרפולציה של לגראנג' מסדר n,

$$L_n(x_i) = f(x_i), \ i = 0, ..., n$$

אזי לכל $x \in (a, b)$ קיים $\xi \in (a, b)$ עבורה:

$$f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

04.03.2010

בנייה אחרת של פולינום האינטרפולציה:

נרצה לבנות פולינום, כך שבהינתן $x_0 < x_1 < ... < x_n$ ו־$y_0, ..., y_n$ יקיים:

$$q(x_i) = y_i$$

נבנה בצורה אינדוקטיבית. תחילה, נגדיר:

$$q(x_0) = y_0$$

כעת, נניח כי הגדרנו:

$$q(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, ..., k$$

נסמן:

$$q_{k+1}(x) = q_k(x) + c \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_k)$$

אזי מספיק לבחור c כך ש:

$$q_{k+1}(x_{k+1}) = y_{k+1} \Rightarrow c = \frac{y_{k+1} - q_k(x_{k+1})}{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_k)}$$

ולאחר שפיתחנו מעלה את האינטואיציה,

ניגש להוכיח את המשפט המקורי לפולינום האינטרפולציה: **הוכחה:** תהי

$$\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - c \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

לכל $x \in (a, b)$, $x \neq x_0, ..., x_n$, ניתן לבחור $c = c(x)$ עם $\varphi(x) = 0$.

טענה 1.18 אם נקבע לרגע את x (ולכן את הבחירה של $c = c(x)$).

מתברר ש־φ מתאפסת ב־$x_0, ..., x_n$.

φ גזירה מסדר $n+1$ ב־I.

לכן נוכל להפעיל את משפט רול $n+1$ פעמים ל־φ ב־(a, b):

$$x_0 < t_0' < x_1 < .... < x_{n-1} < t_{n-1}' < x_n$$

עם $\varphi'(t_i') = 0$.

נפעיל שוב את רול ב־φ' ונקבל:

$$t'_0 < t_0^2 < t_1' < ... < t_{n-2}' < t_{n-2}^2 < t_{n-1}'$$

עם $\varphi''\left(t_i^2\right) = 0,\ i = 0, ..., n-2$.

אם נמשיך ונגזור n פעמים,

נקבל נקודה יחידה[1] $t \in (x_0, x_n)$ ששונה מ־$x_0, ..., x_n$ לפי הבניה שלנו המקיימת $\varphi^{(n)}(t) = 0$.

בהנתן $x \in (a, b)$, $x \neq x_1, ..., x_n$, אם בחרנו $c = c(x)$ עבורו $\varphi(x) = 0$,

אז נוכל להפעיל שוב את רול ל־$\varphi^{(n)}$ ב־(x, t),

ונקבל שקיים $\xi \in (x, t)$ כך ש:

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)!$$

נעשה טוויסט למשפט שכבר עשינו -

לפעמים קוראים למשפט זה *Generalized Rolle* - משפט רול המוכלל,

כי הוא מעין הרחבה למשפט רול מאינפי 1.

משפט 1.19 תהי $f \in C^{(n)}(I)$.

אם f מתאפסת ב-$n+1$ נקודות שונות בקטע I,[2]

אזי $f^{(n)}$ מתאפסת בקטע הפתוח הקטן ביותר,

אשר "מכיל" את הכל האפסים של f.

הוכחה: באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}$:

בסיס האינדוקציה - $n=1$ -

ישירות ממשפט רול המקורי.

נניח נכונות עבור $n-1$, ונסיק נכונות עבור n -

תהי $f \in C^{(n)}(I)$, ויהיו $x_0 < x_1 < ... < x_n$ שהם $n+1$ אפסים שונים של f ב-I.

נפעיל את משפט רול לכל אחד מהקטעים $[x_i, x_{i+1}]\,,\ i=0,...,n-1$,

ונקבל $t_i \in [x_i, x_{i+1}]\,,\ i=0,...,n-1$ אפסים של f'.

כמו כן $f' \in C^{(n-1)}(I)$ ובעלת n אפסים שונים.

לכן, לפי הנחת האינדוקציה, הנגזרת ה-$n-1$-אית של f',

דהיינו $f^{(n)}$ מתאפסת בקטע (t_0, t_{n-1}),

ומכאן המסקנה! ■

מסקנה 1.20 אם $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ $(degp(x) \le n)$,

ומתאפס ב-$n+1$ נקודות שונות,

אזי $p(x) \equiv 0$.

הוכחה: שוב באינדוקציה על $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

בסיס האינדוקציה עבור $n=0$:

$$p(x) \in \mathbb{R}_0[x]\,,\ p(x) \equiv a_0 \in \mathbb{R}$$

אם קיים $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי:

$$a_0 = p(x_0) = 0$$

לכן $p(x) \equiv 0$.

נניח נכונות עבור $n-1$.

יהי $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, ויהיו $x_0 < x_1 < ... < x_n$ אפסים שונים של p.

לפי המשפט הקודם, $p'(x) \in R_{n-1}[x]$ מתאפס ב-n נקודות שונות,

לכן לפי הנחת האינדוקציה $p'(x) \equiv 0$, לכן, לפי משפט הערך הממוצע $p(x) \equiv a$. אבל:

$$a = p(x_1) = 0 \Rightarrow p(x) \equiv 0$$

■

נחזור כעת טיפה אחורה -

ובעזרת הניתוח האחרון נוכיח את יחידות פולינום האינטרפולציה.

[1] ראינו שבכל פעם שגזרנו "איבדנו" נקודת אפס

[2] כלומר יש לה $n+1$ שורשים.

משפט 1.21 תהי $f \in C^{(n+1)}(I)$,
ויהיו $x_0 < x_1 < ... < x_n$ ב־I,
ויהיו $L_n(t)$ פולינום האינטרפולציה מסר n המקיים:

$$L_n(x_i) = f(x_i)\,,\ \ i = 0,..,n$$

אזי לכל $x \in I$ קיים $\xi \in I$ המקיים:

$$f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(\xi) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

הוכחה: נתבונן בפונקציה:

$$\varphi(t) := f(t) - L_n(t) - c \cdot (t - x_0) \cdot (t - x_1) \cdot ... \cdot (t - x_n)$$

כאשר עבור $x \in I$ נתון מראש, נבחר $i = 0, ..., n$ $x_i \neq x \in \mathbb{R},$ עם $\varphi(x) = 0$.
נשים לב ־ $\varphi \in C^{(n+1)}(I)$, וכמו כן היא מתאפסת ב־$x, x_0, x_1, ..., x_n$.
לכן, לפי המשפט הקודם, קיים $\xi \in I$ עבורו:

$$\begin{aligned}
&0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) + 0 - (n+1)! \cdot c \\
&\Rightarrow c := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Rightarrow \varphi(t) = f(t) - L_n(t) - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (t - x_0) \cdot ... \cdot (t - x_n) \\
&\Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (t - x_0) \cdot ... \cdot (t - x_n)
\end{aligned}$$

כפי שרצינו! ■

נחזור אף יותר אחורה ־
וניתן הוכחה נוספת לצורת לגראנג':

משפט 1.22 תהי $f \in C^{(n+1)}(I)$,
ולכל $a, b \in I$ קיים $\xi \in (a, b)$ כך שם:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)(b - a)^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(b - a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

הוכחה: נתבונן ב:

$$f(b) = f(t) + f'(t)(b - a) + \frac{f''(t)(b - t)^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n+1)}(t)(b - t)^n}{n!} + \underbrace{R_n(b, t)}_{S(t)}$$

נשים לב:

$$\begin{aligned}
&t = bR_n(b, b) = 0 \\
&t = aR_n(b, a) \Rightarrow That's\ what\ we're\ looking\ for
\end{aligned}$$

נגזור את השיוויון לפי המשתנה t. למשל:

$$\begin{aligned}
&\frac{df(b)}{dt} = 0 \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{f^{(i)}(t)(b - t)^i}{i!}\right) = \frac{1}{i!}\left[f^{(i+1)}(t)(b - t)^i + f^{(i)}(t)(b - t)^{i-1} i(-1)\right] \\
&\Rightarrow 0 = f'(t) + [f'(t) + f''(t)(b - t)] + ... + \left[\frac{-n(b - t)^{n-1}}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(t)(b - t)^n}{n!}\right] + R_n'(b, t) \\
&R_n'(b, t) = \frac{-f^{(n+1)}(b - t)^n}{n!}
\end{aligned}$$

פאוזה קצרה:

אנחנו עדיין לא יודעים את זה,
ולכן אסור להשתמש בזה בהוכחה זו,
אבל בשביל ההמשך, ובשביל האינטואיציה:

$$\int_a^x S'(t) = -\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt}{n!} = S(x) - S(a) = 0 - R_n(b-a)$$

$$\Rightarrow R_n(b,a) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,dt}{n!}$$

זה יהיה רלוונטי אחרי שנלמד אינטגרציה,
ותחת ההנחה כי $f^{(n+1)}$ אינטגרבילית ב־I.

נפעיל את משפט ערך הביניים נוסח קושי עבור $R_n(b,t) = h(t)$,

$(b-t)^{n+1}$ בקטע $[a,b]$.

תחילה, מדוע אנחנו יכולים להפעיל את המשפט?

גזירה מהגדרתה, ובקטע הפתוח אינה מתאפסת.

לכן, נקבל:

$$\frac{R_n(b,b) - R_n(b,a)}{0-(b-a)^{n+1}} = \frac{-f^{(n+!)}(\xi)(b-\xi)^n \frac{1}{n!}}{(n+1)(b-\xi)^n(-1)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

■

הגדרה 1.23 בהנתן פולינום אינטרפולציה,

לכל $x \in (a,b)$ קיים $\xi \in (a,b)$ עבורה השארית של פולינום האינטרפולציה הינה הביטוי:

$$h(x) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(\xi)\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

משפט 1.24 (כרגע ללא הוכחה):

$$|h(x)| \le \frac{M}{4(n+1)}h^{n+1}$$

עבור $x \in (a,b)$, כאשר M היא הנגזרת ה־$n+1$ של הפונקציה.

1.4 שיטת ניוטון רפסון

11.03.2010

המטרה - למצוא שורש של פונקציה בשיטה טובה משיטת החצאים[3].

הרעיון - בכל פעם ניקח משיק , ומההטלה שלו נבחר את הנקודה הבאה.

נשתמש בהנחה סמויה - סדרת הנקודות מתכנסת.

$$\begin{aligned}
&y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\
&y = 0 \Leftrightarrow \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0 = x \\
&T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\
&x_0,\ x_1 = T(x_0),\ x_2 = T(x_1) = T^2(x_0) \ldots \\
&x_n := T^n(x_0)
\end{aligned}$$

משפט 1.25 תהי $f \in C^2(I)$, $r \in I$, $f(r) = 0$.

נניח ש-$f' > 0$ ב-I.

לכל $x_0 \in I$, נגדיר

$$x_n := x_{n-1} - \frac{f(x_n)}{f'(x_{n-1})}$$

אזי:

$$\exists \delta > 0 \ \ |x_0 - r| < \delta \Rightarrow \{x_n\} \subset (r - \delta, r + \delta) \subset I$$

יתר על כן, $x_n \to r$.

הוכחה: ממשפט טיילור ושארית לגראנג' בסביבת x_n, עבור כל $x = r$:

$$0 = f(x_r) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(t_n)}{2}(r - x_r)^2$$

כאשר $t_n \in (x_n, r)$.

הגדרנו:

$$\begin{aligned}
&x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&\Rightarrow x_{n+1} - r = x_n - r - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}
\end{aligned}$$

ומצד שני, לפי טיילור ולגראנג':

$$x_n - r = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{2}\frac{f'''(t_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2$$

על כן, מהירות ההתכנסות:

$$x_n - r = \exists \delta > 0 \ \ |x_0 - r| < \delta \Rightarrow \{x_n\} \subset (r - \delta, r + \delta) \subset I$$

אם $e_n : x_n - r$:

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f'''(t_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2$$

[3] בה חוצים כל חלק לשניים - חיובי ושלילי, עד למציאת האפס.

כעת, נרצה להוסיף הנחות כדי שהביטוי לא ישתולל, כך שהפער יילך ויקטן פרופורציונלית לריבוע [4].

יהי $\eta > 0$ עם:

$$I* = [r-\eta, r+\eta] \subset I$$

ויהיו

$$K := max\left(|f''|\right)_{[r-\eta,r+\eta]}$$
$$k := min\left(|f'|\right)_{[r-\eta,r+\eta]}$$
$$|e_{n+1}| = \frac{1}{2}\frac{|f''(t_n)|}{f'(x_n)}e_n^2 \le \frac{1}{2}\frac{K}{k}e_n^2$$

יהי $\delta > 0$ כך ש־$0 < \delta < \eta$ ו־$\frac{K}{k}\delta < 1$,

ויהי $x_0 \in I$ עם $|e_0| = |x_0 - r| < \delta$. אזי:

$$|e_1| \le \frac{1}{2}\frac{K}{k}|e_0|^2 \le \frac{1}{2}\frac{K}{k}\delta|e_0| < \frac{1}{2}|e_0|$$
$$|e_2| < \frac{1}{2}|e_1| < \frac{1}{2^2}|e_9|$$
$$|e_n| < \frac{1}{2^n}|e_0| \Rightarrow e_n \to 0$$

■

דוגמא

$$f(x) = x^2 - 2$$

נחפש קירוב ל־$\sqrt{2}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2-2}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$$

בהנחה ש־x_n מתכנסת, נשאיף את n משני האגפים לאינסוף ונקבל:

$$\frac{1}{2}l + \frac{1}{l} = l$$
$$\frac{1}{2}l^2 + 1 = l^2$$
$$2 = l^2$$
$$l = \sqrt{2}$$

כעת נציב שתי נקודות כלשהן מסביב לשורש שתיים:

$$x_0 = 2,\ x_1 = \frac{3}{2}$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12} = 1.4166$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{2} + \frac{1}{\frac{17}{2}} = \frac{17}{24} + \frac{12}{17} = \frac{17^2 + 12\cdot 24}{24\cdot 17} = 1.4142156$$

תוך קירוב אחד אנו מגיעים לדיוק טוב יותר מהמחשבון ־ $\sqrt{2} = 1.41421356$.

[4] או בעיברית ־ אנחנו הולכים לחסום את הנגזרות

1.5 תרגולים

2 האינטגרל

2.0.1 שימושים באנליזה - בעיית השטח

$$R \subset \mathbb{R}$$
$$\mu(R) \in \mathbb{R}$$

כאשר μ היא פונקצית המדידה של השטח.

תכונותיה:

1. חיוביות - $\mu \geq 0$.
2. מונוטוניות - $R \subseteq S \Leftarrow \mu(R) \leq \mu(S)$.
3. אדטיביות - יהיו R, S זרים. אזי $\mu = \mu(R) + \mu(S)$.
4. "בסיס מאורך" - $\mu(rectangle)$.

2.1 האינטגרל לפי דרבו

2.1.1 סכומי דרבו

הגדרה 2.1 חלוקה של $[a, b]$ הינה קבוצה סופית סדורה של נקודות $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ כך ש־$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

דוגמאות:

1.

$$P = \{a, b\}$$

2. החלוקה האוניפורמית עם n קטעים:

$$x_0 = a$$
$$x_1 = a + \frac{b-a}{n}$$
$$x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}$$
$$\vdots$$
$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$$
$$\vdots$$
$$x_n = b$$

נסמן ב־$R_{[a,b]}$ את קבוצת הפונקציות המוגדרות וחסומות בקטע $[a, b]$.

הגדרה 2.2 יהיו $f \in R$ ו־P חלוקה של הקטע, ויהיו:

$$M_i := sup\left\{f\left(t\right)|x_{i-1} \leq t \leq x_i\right\}$$
$$m_i := inf\left\{f\left(t\right)|x_{i-1} \leq t \leq x_i\right\}$$

וכמו כן נסמן:

$$U\left(P, f\right) = U\left(P\right) = M_1\left(x_1 - x_0\right) + M_2\left(x_2 - x_1\right) + ... + M_n\left(x_n - x_{n-1}\right)$$
$$L\left(P, f\right) = L\left(P\right) = m_1\left(x_1 - x_0\right) + m_2\left(x_2 - x_1\right) + ... + M_n\left(x_n - x_{n-1}\right)$$
$$\Delta x_i = \left(x_i - x_{i-1}\right)$$

אזי, הסכום $U\left(P\right) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ יקרא הסכום דרבו העליון של f ביחס לחלוקה P,
והסכום $L\left(P\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ יקרא סכום דרבו התחתון של f ביחס לחלוקה P.

נשים לב:

$$L\left(P\right) \leq U\left(P\right)$$

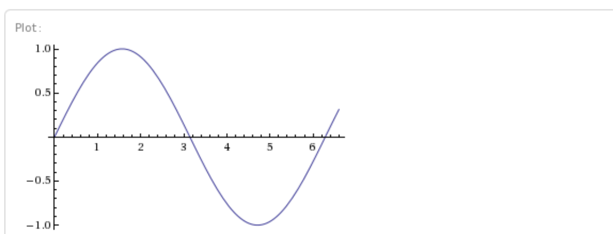
יתר על כן, אם $m \leq f \leq M$ ב־$[a, b]$:

$$m\left(b - a\right) \leq L\left(P\right) \leq U\left(P\right) \leq M\left(b - a\right)$$

השטחים מתחת לצורה x הם שליליים,

והם יכולים "לקזז" את השטחים החיוביים ־

לדוגמא, נביט באינטגרל של מחזור של סינוס:



הוא אפס!

2.1.2 אינטגרביליות דרבו 14.03.2010

נזכר **בלמת החתכים** מהסמסטר הראשון (מסקנה ישירה מלמת השלמות):

למה 2.3 יהיו שתי קבוצות $U \neq \phi \neq L$, $L \leq U$.

$$supL = s \leq i = infU$$

אזי התנאים הבאים שקולים:

$$i \exists! c\ \forall l \in L, u \in U,\ l \leq x \leq u$$
$$ii s = i$$
$$iii \left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists l \in L, u \in U\right):\ u - l < \varepsilon$$

כאשר סימן הקריאה בתנאי הראשון משמעו ־ יחיד.

למה זו כאמור לא נוכיח במסגרת הקורס הזה, אבל נשתמש בה להוכחת הלמה הבאה:

למה 2.4 לכל P,Q חלוקות של $[a,b]$ -

$$L(P) \le U(Q)$$

את הלמה הזו נוכיח לאחר פיתוחים נוספים.

נשים לב שלאחר מכן נוכל להגדיר:

הגדרה 2.5 $f \in R_{[a,b]}$ נקראת אינטגרבילית ב־$[a,b]$

אמ"מ קיים $I \in R$ יחיד עבורו $L(P) \le I \le U(Q)$ לכל P,Q חלוקות של $[a,b]$.

תנאי שקול:

הגדרה 2.6 אמ"מ האינטגרל העליון שווה לאינטגרל התחתון, כלומר:

$$U(f) = inf\left[\mathbb{U}(Q)\right],\ L(f) = sup\left\{\mathbb{L}(P)\right\} \Rightarrow L(f) = U(f)$$

נתחיל - תחילה נביט בשתי הקבוצות:

$$\mathbb{U} = \{U(Q):\ Q\ is\ a\ partition\},\ \mathbb{L} = \{L(P):\ L\ is\ a\ partition\}$$

נשים לב כי הן אינם ריקות.

כעת נוכיח למה אחרת:

למה 2.7 אם Q מתקבלת מ־P ע"י הוספת איבר אחד, אז:

$$\mathbb{L}(P) \le \mathbb{L}(Q) \le U(Q) \le U(P)$$

הוכחה: תהי $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ כך ש־$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$,

קיים אינדקס j כך ש־ $x_{j-1} < y < x_j$.

$$\begin{aligned}\mathbb{L}(P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1, i\ne j}^{n} m_i \Delta x_i + m_j \Delta x_j \\ &= \sum_{i=1, i\ne j}^{n} m_i \Delta x_i + m_j\left[(y - x_{j-1}) + (x_j - y)\right] **\end{aligned}$$

נסמן:

$$\begin{aligned}M' = sup\{f(t):\ x_{j-1} \le t \le y\},\ M'' = sup\{f(t):\ y \le t \le x_j\} \\ m' = inf\{f(t):\ x_{j-1} \le t \le y\},\ m'' = inf\{f(t):\ y \le t \le x_j\}\end{aligned}$$

נשים לב:

$$m_j \le m', m''$$

ולכן:

$$** \leq \sum_{i=1,i\neq j}^{n} m_i \Delta x_i + m' \left(y - x_{j-1}\right) + x'' + m'' \left(x_j - y\right) = \mathbb{L}\left(Q\right)$$

ובסה"כ:

$$\mathbb{L}\left(P\right) \leq \mathbb{L}\left(Q\right)$$

לתלמיד החרוץ מושאר להוכיח:

$$\mathbb{U}\left(P\right) \leq \mathbb{U}\left(Q\right)$$

באותה הדרך בדיוק! ■

מסקנה 2.8 הלמה הראשונה 2.4 מתקיימת. **הוכחה:** באופן כללי - יהיו P, Q חלוקות כלשהן.

נבנה את החלוקה $P \cup Q$.

$Q \subset P \cup Q$, אזי $\mathbb{U}\left(P \cup Q\right) \leq \mathbb{U}\left(Q\right)$

$P \subset P \cup Q$ אזי $\mathbb{L}\left(P\right) \leq \mathbb{L}\left(P \cup Q\right)$, ובסה"כ

$$\mathbb{L}\left(P\right) \leq \mathbb{L}\left(Q\right) \leq U\left(Q\right) \leq U\left(P\right)$$

■

2.1.3 תנאי דרבו לאינטגרביליות

משפט 2.9 תהי $f \in R_{[a,b]}$.

אזי f אינטגרבילית ב־$[a,b]$ אמ"מ

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P\ \mathbb{U}\left(P\right) - \mathbb{L}\left(P\right) < \varepsilon$$

פירוש גיאומטרי:

$$\mathbb{U}\left(P\right) - \mathbb{L}\left(P\right) = \sum_{i=0}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n} \left(M_i - m_i\right) \Delta x_i$$

הוכחה: נתרגם את התנאים של למת החתכים לעולם האינטגרלים:

$$i \exists ! I\ \mathbb{L}\left(P\right) \leq I \leq \mathbb{U}\left(Q\right)$$
$$ii L\left(f\right) = U\left(f\right)$$
$$iii \forall \varepsilon > 0\ \exists Q, P:\ \mathbb{U}\left(Q\right) - \mathbb{L}\left(P\right) < \varepsilon$$

בכיוון הראשון, אם התנאי מתקיים,

מספיק לקחת $Q = P$,

ואז התנאי השלישי של למת החתכים מתקיים (מספיק שיהיו קיימים Q, P כלשהם).

בכיוון השני, נניח ש־f אינטגרבילית.

אזי קיימות (לפי התנאי השלישי של למת החתכים) P', P'' כך ש:

$$\mathbb{U}\left(P'\right) - \mathbb{L}\left(P''\right) < \varepsilon$$

תהי $P = P' \cup P''$. אזח:

$$\begin{aligned}
&P'' \subset P \Rightarrow \mathbb{U}(P) \leq \mathbb{U}(P'') \\
&\Downarrow \\
&\mathbb{L}(P') \leq \mathbb{L}(P) \leq \mathbb{U}(P) \leq \mathbb{U}(P'') \\
&\Uparrow \\
&P' \subset P \Rightarrow \mathbb{L}(P') \leq \mathbb{L}(P)
\end{aligned}$$

■

סימון:

אם f אינטגרבילית ב־$[a,b]$נכתוב $f \in T_{[a,b]}$,

ונסמן ב־$\int_a^b f$ את המספר I האחד והיחיד של ההגדרה.

דוגמאות:

1. פונקציות קבועות ־ כלומר פונקציות מהצורה $f \equiv c$ אינטגרביליות ב־$[a,b]$.
תהי P חלוקה כלשהיא. אזי:

$$\begin{aligned}
&m_i \equiv c \equiv M_i \\
&\mathbb{L}(P) = \sum_{i=0}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n} c \Delta x_i = c \cdot (b-a) \\
&\mathbb{U}(P) = \sum_{i=0}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n} c \Delta x_i = c \cdot (b-a) \\
&\{\mathbb{U}(P)\} = \{c(b-a)\} = \{\mathbb{L}(P)\}
\end{aligned}$$

לכן f אינטגרבילית ו־

$$\int\limits_a^b c = c(b-a)$$

2. תהי $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ פונקצית דיריכלה ב־$[a,b]$.
תהי P חלוקה, $M_i \equiv 1,\ i = 1, ..., n$ בגלל הצפיפות של $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$.
לכן:

$$\mathbb{U}(P) = \sum \Delta x_i = (b-a)$$

מצד שני, בגלל הרציפות של $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$:

$$\mathbb{L}(P) = 0$$

ולכן D איננה אינטגרבילית.

3. תהי f נתונה ע"י $f(x) = \begin{cases} 1 & x = c \\ 0 & x \neq c \end{cases}$ עבור $a < x < b$.
נשים לב: אם $P = \{a, d, e, b\}$ (כלומר c אינו חלק מהחלוקה) כאשר $a < d < c < e < b$, אזי:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{U}(P) = 0(d-a) + d(e-d) + 0(b-e) = e-d \\
&\mathbb{L}(P) = 0 \\
&\mathbb{U}(P) - \mathbb{L}(P) = e-d
\end{aligned}$$

לכן, לכל $\varepsilon > 0$ נבחר e, d כך ש־$e - d < \varepsilon$,
וכך נעמוד בתנאי רימן לאינטגרביליות. נקבל:

$$\int_a^b f = inf\{\mathbb{U}(P)\} = 0$$

4. תהי $f(x) = x^2$ ב־$[0,1]$,
ותהי P החלוקה האוניפורמית של $[0,1]$ עם מחלקים שווים (סדרה של חלוקות) ־ אזי:

$$\mathbb{U}(P_n) = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + ... + \frac{n^2}{n^2}\right]$$
$$\mathbb{L}(P_n) = \frac{1}{n}\left[0 + \frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + ... + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right]$$

בהנתן $\varepsilon > 0$, נבחר n מספיק גדול כך ש־$\varepsilon < \frac{1}{n}$,
ואז נקבל $\mathbb{U}(P_n) - \mathbb{L}(P_n) < \varepsilon$,
ואז אנו עומדים בתנאי רימן, והפונקציה אינטגרבילית, ומתקיים:

$$\int_0^1 t^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{U}(P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n^2}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}$$

לתלמיד הרציני ־ החלף את ה־t^2 ב־t.

2.1.4 משפחות של פונקציות אינטגרביליות

17.03.2010 **נסמן:**[5]

$M[a,b]$ תהיה קבוצת הפונקציות המונוטוניות ב־$[a,b]$.
$C[a,b]$ תהיה קבוצת הפונקציות הרציפות ב־$[a,b]$.

משפט 2.10

$$M, C \subset R$$

או במילים ־ הפונקציות השייכות לקבוצות מעלה הינן אינטגרביליות.

הוכחה: נוכיח תחילה לפונקציות מונוטוניות:

נניח ש־f עולה ב־$[a,b]$ (אחרת ניקח $-f$ ־ בהמשך נוכיח שגם היא אינטגרבילית[6])

תהי P חלוקה, אזי:

$$M_i = f(x_i),\ m_i = f(x_{i-1})$$

נניח ש־P הומוגנית בעלת n חלקים שווים (בהמשך נראה שלכל ε נוכל לספק חלוקה שכזו).

אם כך:

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$
$$U(P) - L(P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)$$
$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{b-a}{n}[f(x_n) - f(x_0)]$$
$$= \frac{b-a}{n}[f(a) - f(b)]$$

[5] בדר"כ בשלב הזה של החומר היינו לומדים פונקציות מדרגות. השנה השתנה הסדר. הידד?
[6] "התלמיד הרציני יבנה הוכחה גם לפונקציה יורדת".

כעת, בהנתן $\varepsilon > 0$ נבחר $n \in \mathbb{N}$ המקיים $n > \frac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{\varepsilon}$,

ונקבל חלוקה P המבטיחה קיום תנאי רימן לאינטגרביליות.

כעת נוכיח עבור פונקציות רציפות:

נניח כי f רציפה ב־$[a,b]$.

ממשפט ויירשטראס, מכיוון ו־f רציפה,

היא מקבלת מקסימום ומינימום בכל קטע סגור[7]. נסמן:

$$M_i = max\left\{f\left(t\right)\right\},\ x_{i-1} \le t \le x_i,\ m_i = min\left\{f\left(t\right)\right\},\ x_{i-1} \le t \le x_i$$

כמו כן, שוב מרציפות f, בקטע סגור $[a,b]$ היא רציפה במ"ש.

לכן, בהינתן $\varepsilon > 0$, קיימת $\delta > 0$ כך ש־

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f\left(x\right) - f\left(y\right)| < \varepsilon$$

לכן, עבור $\varepsilon > 0$ כלשהיא, נגדיר את החלוקה P כך ש:

$$\lambda = max\left\{\Delta x_i\right\}_{i=1,..,n} < \delta$$

כאשר λ הינו פרמטר החלוקה של P.

כלומר, החלוקה שלנו שומרת שכל שתי נקודות עוקבות יקיימו:

$$|x-y| < \delta$$

בנוסף, נבחר δ ו־$n \in N$ כך ש־$\delta n < 1$. אזי:

$$U\left(P\right) - L\left(P\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(M_i - m_i\right)\Delta x_i < n\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i < \varepsilon \cdot n \cdot \delta < \varepsilon$$

שימו לב ־

שתי השורות האחרונות הן תיקון שאני ביצעתי למה שניתן בכיתה ־

עדיין לא נבדק מול אנשים אחרים, אז נא לקחת בערבון מוגבל! ■

2.1.5 תכונות הפונקציות האינטגרביליות

באלגברה לינארית ־

הפונקציות האינטגרביליות ניתנות להגדרה כמרחב וקטורי,

והאינטגרציה ניתנת להתבוננות כהעתקה לינארית מהפונקציות לממשיים.

ואכן, עשינו זאת באלגברה לינארית.

נוכיח כעת את מה שראינו בשיעור הראשון על האינטגרל:

משפט 2.11 יהיו $f,g \in R\left[a,b\right]$[8]. אזי:

1. חיוביות ־ אם $0 \le f \in R\left[a,b\right]$ אזי $0 \le \int_a^b f$.
2. מונוטוניות ־ אם $f \le g$ אזי $\int_a^b f \le \int_a^b g$.
3. לינאריות ־

[7] ולא רק סופרימום (מינימום **או** מקסימום) כמו פונקציה כללית.
[8] לפי מה שהוכחנו מעלה הן חסומות בקטע $[a,b]$.

(א)

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

(ב) יהי $k \in \mathbb{R}$. אזי:

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f$$

הוכחה: 1 הוא מקרה פרטי של 2.

נוכיח את 2:

תהי P חלוקה, וכמו כן $f \leq g$. אזי:

$$\begin{aligned}
&m_i(f) \leq M_i(g) \\
&\Rightarrow L(f,P) = \sum m_i(f)\,\Delta x_i \leq \sum M_i(g)\,\Delta x_i = U(f,p) \\
&\Rightarrow \int_a^b f = sup\left\{L(f,P)\right\} \leq inf\left\{U(g,P)\right\} = \int_a^b g
\end{aligned}$$

נוכיח את 3:

$$\begin{aligned}
&M_i(f) + M_i(g) \geq M_i(f+g) \\
&\left\{f(t)+g(t)\right\} \subset \left\{f(t)\right\} + \left\{g(t)\right\} \\
&\Rightarrow sup\left\{f(t)\right\} + sup\left\{g(t)\right\} \geq sup\left\{f(t)+g(t)\right\} \\
&m_i(f) + m_i(g) \leq m_i(f+g)
\end{aligned}$$

כעת, נזכר כי הוכחנו:

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P)$$

בהנתן $\varepsilon > 0$, נסמן $P = P_1 \cup P_2$ כך ש:

$$\begin{aligned}
&U(f,P_1) - L(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \\
&U(f,P_2) - L(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow \varepsilon \leq L(f+g,P) \leq U(f+g,P) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

אזי P מקיימת את תנאי רימן עבור $f+g$, ולכן $f+g$ אינטגרבילית.

כעת, נוכיח שיוויון בין $\int f + \int g$ לבין $\int f+g$:

לכל P מתקיים:

$$\begin{aligned}
&L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P) \\
&L(g,P) \leq \int_a^b g \leq U(g,P) \\
&L(f+g,P) \leq \int_a^b f+g \leq U(f+g,P)
\end{aligned}$$

עכשיו, נשתמש במשפט מעלה:

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq \int_a^b f+g \leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P)$$

ומצד שני אם נחבר את אי השיוויונות:

$$L(f,P)+L(g,P)\le\int_a^b f+\int_a^b g\le U(f,P)+U(g,P)$$

כיוון שקיים רק מספר אחד ויחיד כזה, מתקיים:

$$\int_a^b f+\int_a^b g=\int_a^b (f+g)$$

■

18.03.2010

משפט 2.12 תהי $f\in R[a,b]$, $m\le f\le M$,

ותהי $g:[m,M]\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי:

$$g\circ f\in R[a,b]$$

הוכחה: נגדיר:

$$h:=g\circ f$$

בהנתן $\varepsilon>0$, לפי תנאי לאינטגרביליות,

עלינו להציג חלוקה P של $[a,b]$ עם

$$U(h,P)-L(h,P)<\varepsilon$$

בהיות g רציפה בקטע $[m,M]$,

היא גם רציפה במ"ש בו.

אזי, בהינתן $\varepsilon>0$ יהי $\delta>0$ עם:

$$\forall x,y\in[m,M]\ \ |x-y|\le\delta\Rightarrow|g(x)-g(y)|<\varepsilon$$

נשים לב ל-$\le$ - יהיה תנאי הכרחי בהמשך.

$f\in R[a,b]$, לכן, לפי תנאי רימן,

קיימת חלוקה P של $[a,b]$ עם:

$$(*)\,U(f,P)-L(f,P)<\delta\varepsilon$$

טענה 2.13

$$U(h,P)-L(h,P)<[(b-a)+(L-l)]\,\varepsilon$$

הוכחה: יהיו:

$$M_i=sup\{f(t)\},\ m_i=inf\{f(t)\},\ x_{i-1}\le t\le x_i$$
$$L_i=sup\{h(t)\},\ l_i=inf\{h(t)\}$$

כאשר l,L מקיימים $l\le h\le L$.

$$g\in B[m,M],\ f\in B[a,b]\Rightarrow h=g\circ f\in B[a,b]$$

נסמן:[9]

$$i \in G \Leftrightarrow M_i - m_i \leq \delta \ i \in G \Rightarrow l_i - L_i < \varepsilon$$
$$i \in B \Leftrightarrow \delta < M_i - m_i$$

כעת:

$$U(h,P) - L(h,P) = \sum_{i=1}^{n} (L_i - l_i)\Delta x_i = \sum_{i \in G} (L_i - l_i)\Delta x_i + \sum_{i \in B} (L_i - l_i)\Delta x_i$$
$$\Rightarrow \sum_{i \in G} (L_i - l_i)\Delta x_i < \varepsilon \sum_{i \in G} \Delta x_i \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon (b-a)$$
$$\Rightarrow (*) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \delta\varepsilon \Rightarrow \delta \sum_{i \in B} \Delta x_i < \sum_{i \in B} (M_i - m_i) < \delta\epsilon$$
$$\Rightarrow \delta \sum_{i \in B} \Delta x_i < \delta\varepsilon \Rightarrow \sum_{i \in B} \Delta x_i < \epsilon \Rightarrow \sum_{i \in B} (L_i - l_i)\Delta x_i \leq \sum_{i \in B} (L - l)\Delta x_i$$
$$\leq (l - L) \sum_{i \in B} \Delta x_i < (L - l)\varepsilon$$
$$\Rightarrow U(h,P) - L(h,P) = \sum_{i \in G} (L_i - l_i)\Delta x_i + \sum_{i \in B} (L_i - l_i)\Delta x_i < \varepsilon (b-a) + (L-l)\varepsilon$$
$$= [(b-a) + (L-l)]\varepsilon$$

■

■

מסקנה 2.14 תהי $f \in R[a,b]$. אזי:

$$f^2 \in R[a,b]$$

מסקנה 2.15 אם גם $g \in R[a,b]$ אז $f \cdot g \in R[a,b]$.

זאת כי ראינו כי:

$$(f+g) \in R[a,b] \Rightarrow \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2} = f \cdot g \in R[a,b]$$

מסקנה 2.16 כמו כן, $|f| \in R[a,b]$

מסקנה 2.17 אם $f > 0$ וחסומה מאפס, אז $\frac{1}{f} \in R[a,b]$.

21.03.2010

המשך המסקנות:

מסקנה 2.18 אם $0 < m \leq g \leq M$, אזי

$$0 < \frac{1}{M} \leq \frac{1}{g} \leq \frac{1}{m}$$

אזי $\frac{1}{g} \in R[a,b]$.

[9] $B = Bound$

למה 2.19 תהי $f \in B\left[a,b\right]$, f רציפה ב־$\left(a,b\right)$.
אזי $f \in R\left[a,b\right]$.

הוכחה: נניח ש־$m \leq f \leq M$.
בהנתן $\varepsilon > 0$ נבחר $a < c < d < b$ המקיימות:

$$\left(M-m\right)\left(c-a\right) < \frac{\varepsilon}{3},\ \left(M-m\right)\left(b-d\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

לאחר בחירה של c,d,
נשים לב ש־f רציפה ב־$\left[c,d\right]$ ולכן אינטגרבילית בו.
לפי קריטריון רימן, תהי Q חלוקה של $\left[c,d\right]$ המקיימת:

$$U\left(Q\right)-L\left(Q\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

אזי נגדיר $P = Q \cup \left\{a,b\right\}$. כעת:

$$U\left(P\right)-L\left(P\right) = \left(M-m\right)\left(c-a\right)+U\left(Q\right)-L\left(Q\right)+\left(M-m\right)\left(b-d\right) < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

■

[10]

מסקנה 2.20 אם $f \in B\left[a,b\right]$ בעלת מספר סופי של נקודות אי רציפות,
אזי $f \in R\left[a,b\right]$.

הגדרה 2.21 אם $P = \left\{a = x_0 < .... < x_n = b\right\}$ חלוקה של $\left[a,b\right]$.
אזי $\lambda\left(P\right) = max\left\{\Delta x_i,\ i = 1,....,n\right\}$ יקרא פרמטר החלוקה.

הערה 2.22 קיימות חלוקות של P עם פרמטר קטן כרצוננו ־
בהנתן $\delta > 0$ מספיק לבנות חלוקה אוניפורמית עם n חלקים, כאשר:

$$\frac{b \cdot a}{n} < \delta$$

הגדרה 2.23 תהי f חסומה, ו־$A \subseteq D_f$.
אזי התנודה של f ב־a תסומן להיות:

$$\omega\left(f,A\right) = M-m$$

כאשר:

$$\begin{aligned} M &:= sup\left\{f\left(t\right),\ f \in A\right\} \\ m &:= inf\left\{f\left(t\right),\ t \in A\right\} \\ \omega\left(f\right) &= \omega\left(w,D_f\right) \end{aligned}$$

[10]כמסקנה, התלמיד הרציני יוכיח את המשפט הבא:
תהי fבקטע $\left[a,b\right]$, ונניח שלכל תת קטע סגור פנימי הפונקציה אינטגרבילית.
אזי הפונקציה אינטגרבילית בכל הקטע.

הערה 2.24 אם $f \in B\left[a,b\right]$ ו־P חלוקה של $\left[a,b\right]$, אזי:

$$U\left(P\right)-L\left(P\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_{i}-m_{i}\right)\Delta x_{i}=\sum_{i=1}^{n}\omega_{i}\Delta x_{i}$$
$$\omega_{i}=\omega\left(f,\left[x_{i-1},x_{i}\right]\right)$$

למה 2.25 תהי $f \in B\left[a,b\right]$, ותהי P חלוקה של $\left[a,b\right]$,

ונניח כי :

$$P'=P\cup\left\{ y\right\}$$

אזי

$$U\left(P\right)-L\left(P\right)\leq U\left(P'\right)-L\left(P'\right)+\omega\lambda\left(P\right)$$

הוכחה: תחת הסימונים מההגדרו מעלה,

קיים j יחיד עם $x_{j-1}<y<x_{j}$.

$$w'=\left(M'-m'\right)\left(y-x_{i}\right)$$
$$w''=\left(M''-m''\right)\left(x_{j}-y\right)$$
$$w_{j}=\left(M_{j}-m_{j}\right)\left(x_{j}-x_{j+1}\right)$$
$$w_{j}-\left(w'+w''\right)\leq\left(\underbrace{M-m}_{\omega(f)}\right)\lambda\left(P\right)$$
$$U\left(P\right)-L\left(P\right)=U\left(P'\right)-L\left(P\right)-\left(w'+w''\right)+w_{j}$$
$$\leq U\left(P\right)-L\left(P\right)+\omega\left(f\right)\lambda\left(P\right)$$

■

משפט 2.26 תהי $f \in B\left[a,b\right]$. אזי התנאים הבאים שקולים:

$$1.\forall\varepsilon>0\ \exists P\ U\left(P\right)-L\left(P\right)<\varepsilon$$
$$2.\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall P\ \lambda\left(P\right)<\delta\Rightarrow U\left(P\right)-L\left(P\right)<\varepsilon$$

הוכחה: $2 \Leftarrow 1$ טריוויאלי

$1 \Leftarrow 2$:

בהנתן $\varepsilon>0$, תהי $Q=\left\{ a=x_{0}<x_{1}<...<x_{l+1}=b\right\}$ חלוקה של $\left[a,b\right]$,

אשר מקיימת לפי 1:

$$U\left(Q\right)-L\left(Q\right)<\varepsilon'<\varepsilon$$

נניח ש־f קבועה, לכן $\omega\neq0$, ונניח ש־$l\geq1$.

תהי $0<\delta=\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{l\omega}$. אזי, תהי P עם $\lambda\left(P\right)<\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{l\omega}$.

נתבונן ב־$P\cup Q$. נשים לב שהוספנו לכל היותר l נקודות ל־P.

$$\begin{aligned}&Q\subset P\cup Q\Rightarrow L\left(Q\right)\leq L\left(P\cup Q\right)\leq U\left(P\cup Q\right)\leq U\left(Q\right)\\&\Rightarrow U\left(P\cup Q\right)-L\left(P\cup Q\right)<\varepsilon'\end{aligned}$$

P מקבלת מ־$P\cup Q$ ע"י השמטה של l נקודות לכל היותר,

לכן לפי הלמה הקודמת[11]:

$$U\left(P\right)-L\left(P\right)\leq U\left(P\cup Q\right)-L\left(P\cup Q\right)+l\omega\lambda\left(P\right)<\varepsilon'+l\omega\lambda\left(P\right)=\varepsilon'+\left(\varepsilon-\varepsilon'\right)=\varepsilon$$

■

הגדרה 2.27 תהי $f\in R\left[a,b\right]$, $a<b$. אזי:

$$\int\limits_b^a f:=-\int\limits_a^b f$$

כמו כן:

$$\int f_a^a:=0$$

ואם $a<c<b$ אזי:

$$\int\limits_a^b f:=\int\limits_a^c f+\int\limits_c^b f$$

נניח כי $|f|\leq M$. אזי יתקיים:

$$\begin{aligned}&a<b\qquad\left|\int\limits_a^b f\right|\leq\int\limits_a^b|f|\leq M\left(b-a\right)\\&b<a\qquad\left|\int\limits_a^b f\right|=\left|-\int\limits_b^a f\right|\leq\int\limits_b^a|f|\leq M\left(a-b\right)=M\left|b-a\right|\end{aligned}$$

כלומר בכל מקרה:

$$\left|\int\limits_a^b f\right|\leq\int\limits_a^b|f|\leq M\left(b-a\right)$$

---

[11] $(P=P\cup Q)$

2.2 האינטגרל לפי רימן

2.2.1 סכומי רימן

הגדרה 2.28 תהי $f \in B\left[a,b\right]$ ו־P חלוקה.

נכנה בשם סכום רימן S של f עבור P ביטוי מהצורה:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

כאשר $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$.

משפט 2.29 תהי $f \in R\left[a,b\right]$.

אזי לכל סדרה P_n של חלוקות עם סדרת פרמטרים $\lambda\left(P_n\right)$ ששואפת ל־0,

ולכל סדרה $\left(S_n\right)$ של סכומי רימן של f עבור P_n בהתאם, אז:

$$S_n \to \int\limits_a^b f$$

2.2.2 אינטגרביליות רימן

11.04.2010

הגדרה 2.30 תהי f מוגדרת ב־$\left[a,b\right]$.

נאמר ש־f אינטגרבילית לפי רימן, אמ"מ קיים מספר $J \in \mathbb{R}$ המקיים:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall S\ \ \left|S - J\right| < \varepsilon$$

כאשר S סכום רימן של f עבור חלוקה P של $\left[a,b\right]$ עבורה $\lambda\left(P\right) < \delta$.

תרגיל: הוכיחו את יחידות המספר J!

למה 2.31 תחת תנאים אלו, f חסומה ב־$\left[a,b\right]$.

הוכחה: נניח כי f עומדת בתנאי ההגדרה ־ כלומר כי קיים J כנ"ל.

אזי, בפרט עבור $\varepsilon = 1$ יהי $\delta > 0$ מתאים,

ויהי S סכום רימן של f עבור חלוקה מסויימת P עבורה $\lambda\left(P\right) < \delta$.

כלומר, יהיו:

$$a = x_0 \leq t_1 \leq x_1 \leq ... \leq t_n \leq x_n = b,\ \ S = \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right)\Delta x_i$$

לכן, מתקיים:

$$-1 < S - J < 1 \Rightarrow -1 + J < S < 1 + J$$

יהי $s_j \in \left[x_{j-1}, x_j\right]$, כאשר $1 \leq j \leq n$. נגדיר:

$$S_j = \sum_{i \neq j} f\left(t_i\right)\Delta x_i + f\left(s_j\right)\Delta x_j$$

נשים לב ־ סכום רימן S_j זה מתאים אף הוא לאותה החלוקה P. על כן, גם הוא מקיים:

$$\begin{aligned}&-1+J<S_j<1+J\Rightarrow\left|S-S_j\right|<2\\&\left|S-S_j\right|=\left|f\left(t_j\right)\Delta x_j-f\left(s_j\right)\Delta x_j\right|\\&\Rightarrow-2+f\left(t_j\right)\Delta x_j<f\left(s_j\right)\Delta x_j<2+f\left(t_j\right)\Delta x_j\\&\frac{-2+f\left(t_j\right)\Delta x_j}{\Delta x_j}<f\left(s_j\right)<\frac{2+f\left(t_j\right)\Delta x_j}{\Delta x_j}\end{aligned}$$

זה נכון לכל הנקודות בקטע $[x_{j-1},x_j]$, לכן הפונקציה חסומה בכל קטע מסוג זה, ולכן היא חסומה ב־$[a,b]$. ■

2.2.3 קריטריון קושי

משפט 2.32 תהי f מוגדרת ב־$[a,b]$. אזי f אינטגרבילית לפי רימן אמ"מ:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall S,S'\ \ \left|S-S'\right|<\varepsilon$$

כאשר S,S' סכומי רימן של f עבור חלוקות שעבורן $\lambda\left(P\right)<\delta$.

הוכחה: בכיוון הראשון, נניח כי f אינטגרבילית לפי רימן.

אזי, בהינתן $\varepsilon'>0$ יהי $\delta>0$ אשר מבטיח את התנאי הבא:

$$\forall S\ \ \left|S-J\right|<\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}$$

עבור סכום רימן כלשהוא של f עבור חלוקה P עם $\lambda\left(P\right)<\delta$.

יהיו S,S' סכומי רימן של f עבור חלוקות עם פרמטר חלוקה גדול מ־δ בהתאם. אזי:

$$\left|S-S'\right|=\left|S-J+J-S'\right|\leq\left|S-J\right|+\left|J-S'\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

בכיוון השני, נניח ש־f מקיימת את תנאי הקריטריון.

נבחר סדרה S_n של סכומי רימן של f עבור סדרה P_n של חלוקות בהתאם המקיימות $\lambda\left(P\right)<\frac{1}{n}$.

בהנתן $\varepsilon>0$, יהי $\delta>0$ אשר מבטיח $\left|S-S'\right|<\varepsilon$.

לכל S,S' סכומי רימן של f עבור חלוקות עם פרמטר חלוקה קטן מ־δ בהתאם,

קיים $N\in\mathbb{N}$ עם $\frac{1}{N}<\delta$, ולכן עבור $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta$.

אזי, בהנתן $N<n,m\in\mathbb{N}$:

$$\left|S_n-S_m\right|<\varepsilon$$

ומכאן ש־S_n הינה סדרת קושי ועל כן היא מתכנסת.

יהי J גבולה. נראה ש־J מקיים את תנאי ההגדרה:

בהנתן $\varepsilon'>0=\frac{\varepsilon}{2}$, יהי $\delta>0$ שמתאים לו לפי הקריטריון.

נבחר אינדקס $m\in\mathbb{N}$ המקיים את שני התנאים הבאים:

$$\begin{aligned}&i\lambda\left(P_m\right)<\delta\\&ii\left|S_m-J\right|<\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

יהי S סכום רימן של f עבור חלוקה P עם $\lambda\left(P\right)<\delta$. אזי:

$$\left|S-J\right|\leq\left|S-S_m\right|+\left|S_m-J\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

■

2.3 המשפט היסודי של האינפי

2.3.1 המשפט היסודי ־ גרסא רשמית

משפט 2.33 תהי f אינטגרבילית ב־$[a,b]$, ותהי:

$$F := \int_a^t f(t)\,dt,\ \ a \le x \le b$$

אזי F רציפה ב־$[a,b]$.

יתר על כן, F גזירה בכל $x \in [a,b]$ בה f רציפה, ומתקיים:

$$F'(x) = f(x)$$

הוכחה: למעשה נוכיח טענה חזקה יותר, ומתוכו תנבע נכונות המשפט מעלה.

יהיו $x, y \in [a,b]$. אזי:

$$|F(y) - F(y)| = \left|\int_a^y f - \int_y^x f\right| = \left|\int_x^y f\right| \le M\,|y-x|$$

כאשר $|f| \le M$ ב־$[a,b]$[12].

לכן, מצאנו כי למעשה F הינה ליפשיץ ב־$[a,b]$, ולכן רציפה במ"ש ב־$[a,b]$, ובפרט רציפה בקטע $[x,y]$.

תהי $c \in [a,b]$, ונניח ש־f רציפה ב־c . עבור $x \ne c$:

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \frac{\int_a^x f - \int_a^c f}{x-c} = \frac{\int_c^x f}{x-c}$$

יספיק לנו להראות:

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c) = 0$$

נעשה זאת:

$$\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)\right| = \left|\frac{\int_c^x f}{x-c} - f(c)\cdot\frac{x-c}{x-c}\right| = \left|\frac{\int_c^x f}{x-c} - f(c)\cdot\frac{\int_c^x 1}{x-c}\right| = \left|\frac{\int_c^x f - \int_c^x f(c)}{x-c}\right|$$
$$= \left|\frac{\int_c^x [f(t)-f(c)]\,dt}{x-c}\right|$$

f רציפה ב־c, ולכן, בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $\delta > 0$ עם:

$$\forall t \in [a,b]\ \ |t-c| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(c)| < \varepsilon$$

ולכן:

$$|x-c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)\right| \le \frac{\varepsilon\,|x-c|}{x-c} = \varepsilon$$

■

[12] החסימות נובעת כמובן מאינטגרביליות הפונקציה

במקרה שבו הפונקציה f רציפה בכל נקודה, יכולנו להוכיח בצורה הבאה:

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$$
$$F'(c)=\lim_{x\to c}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}$$
$$F(x)-F(c)=\int\limits_c^x f(t)\,dt$$
$$c<x\Rightarrow m(x)\le f(t)\le M(x)\Rightarrow\int\limits_c^x m(x)\le\int\limits_c^x f(t)\,dt\le\int\limits_c^x M(x)$$
$$m(x)(x-c)\le\int\limits_c^x f(t)\,dt\le M(x)(x-c)$$
$$m(x)\le\frac{\int_c^x f(t)\,dt}{x-c}\le M(x)$$
$$\Rightarrow f(c)$$

2.3.2 המשפט היסודי - גרסא שימושית למת"פ

משפט 2.34 תהי f רציפה ב$[a,b]$, ותהי G גזירה ב־$[a,b]$ עם $G'=f$, אז:

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt=G(b)-G(a)$$

הוכחה: תהי $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ כמקודם. אז:

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

f רציפה, ולכן F גזירה בכל $[a,b]$!

$$(G-F)'=G'-F'=f-f\equiv 0$$
$$G-F=C\,(constant)\Rightarrow G(b)-G(a)=(F+C)(b)-(F+C)(a)$$
$$=F(b)+C-(F(a)+C)=F(b)-F(a)$$

■

2.3.3 המשפט היסודי - גרסא שימושית לאינפי 2

הגדרה 2.35 נאמר ש־F קדומה של f ב־$[a,b]$

אם F רציפה, גזירה פרט אולי למספר סופי של נקודות ב־$[a,b]$.

ומקיימת $F'=f$ בכל נקודה אחרת.

משפט 2.36 תהי f אינטגרבילית ב־$[a,b]$, ו־F קדומה שלה באותו הקטע. אזי:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

הוכחה: נראה שלכל חלוקה P של $[a,b]$מתקיים:

$$L(P) \le F(b) - F(a) \le U(P)$$

בה"כ ניתן להניח ש־P מכילה את כל אותן הנקודות, אם יש כאלה, במספר סופי, ש־F אינה גזירה בהן.

$$P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$$
$$F(b) - F(a) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + ... + F(x_n) - F(x_{n-1})$$

F רציפה ב־$[x_{i-1}, x_i]$ וגזירה ב־(x_{i-1}, x_i) לכל $1 \le i \le n$,

ולכן, לפי משפט ערך הממוצע, קיימים $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ עם:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i$$

ביטוי אחרון זה הינו סכום רימן של f עבור עבור P. על כן:

$$L(P) \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i \le U(P)$$

ומכאן נכונות הטענה. ■

2.3.4 המשך דיון

משפט 2.37 תהי f רציפה ב־$[a,b]$.

אזי, קיים $c \in (a,b)$ המקיים:

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a)$$

הוכחה: תהי $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. f רציפה. אזי, לפי המשפט היסודי:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \overset{La'grange}{=} F'(c)(b-a) = f(c)(b-a)$$

■

2.4 האינטגרל הלא מסויים ושיטות אינטגרציה

הגדרה 2.38 נאמר ש־F קדומה של f בקטע I
אמ"מ $F' = f$ ב־I.

הגדרה 2.39 נגדיר את האינטגרל הלא מסויים בצורה הבאה:

$$\int f := \{F|F' = f\} = F + C,\ C\ constant$$

דוגמא:

$$\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} lnx + C_1 & x > 0 \\ ln(-x) & x < 0 \end{cases} " = " ln|x| + C$$

נשים לב כי גם במקרה של האינטגרל המסויים מתקיים:

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

$$k \in \mathbb{R}\ \int kf = k\int f$$

נלמד כעת מספר שיטות למציאת פונקציה קדומה:

2.4.1 אינטגרציה לפי הצבה

תחילה, דוגמאות:

$$e^{x^2} + C = \int e^{x^2} 2xdx$$

$$e^{sinx} + C = \int e^{sinx} cosxdx$$

$$e^{lnx} + C = \int e^{lnx}\frac{1}{x}dx$$

$$e^{\sqrt{x}} + C = \int e^{'\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

מהי השיטה?

$$\underset{F(t)+C}{\underset{\uparrow}{F(g(x))}} + C = \underset{=\int f(t)dt,\ t=g(x),\ dt=g'(x)dx}{\underset{\uparrow}{\int f(g(x))\, g'(x)\, dx}}$$

15.04.2010

דוגמאות:

1.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\underset{g'(t)=-sin(t)}{\overset{x=g(t)=cos(t)}{\Longrightarrow}} \int \frac{1}{\sqrt{1-cos^2(t)}} \cdot (-sin(t))\,dt = \int -1dt = -t + C$$

$$t = g^{-1}(x) = -arccos(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -arccosx + C$$

.2

$$\int\sqrt{1-x^2}dx$$
$$\underset{t=arccos(t)}{\overset{x=cos(t)}{\Longrightarrow}}\int\sqrt{1-cos^2\left(t\right)}\cdot\left(-sin\left(t\right)\right)dt=-\int sin^2\left(t\right)dt\ (*)$$
$$\overset{Trig}{\Rightarrow} sin^2\left(t\right)=\frac{1-cos\left(2t\right)}{2}$$
$$(*)=-\int\frac{1-cos\left(2t\right)}{2}dt=-\frac{1}{2}\left[\int 1dt-\int cos\left(2t\right)dt\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}sin\left(2t\right)\right]+C=\frac{1}{2}\left[sin\left(t\right)cos\left(t\right)-t\right]+C$$

18.04.2010

כעת, לאינטגרל המסויים:

משפט 2.40 תהי $g\in C'\left([c,d]\right)$ (כלומר g גזירה ברציפות בקטע זה),

ותהי f רציפה ב־$g\left([c,d]\right)$.

אזי $(f\circ g)\cdot g'$ אינטגרבילית בקטע $[c,d]$ ומתקיים:

$$\int_a^b f\left(x\right)=\int_c^d f\left(g\left(t\right)\right)\cdot g'\left(t\right)dt$$

כאשר $a=g\left(c\right),b=g\left(d\right)$.

דוגמא:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$$
$$\underset{t=arccos(t)}{\overset{x=cos(t)}{\Longrightarrow}}\int_{\pi}^{0}\sqrt{1-cos^2\left(t\right)}\cdot\left(-sin\left(t\right)\right)dt=-\int_0^{\pi}sin^2\left(t\right)dt$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{1-cos\left(2t\right)}{2}dt=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}1dt+\int_0^{\pi}cos\left(2t\right)dt\right]=\frac{1}{2}\left[\pi+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}cos\left(2t\right)\cdot 2dt\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\pi+\frac{1}{2}sin\left(2t\right)|_0^{\pi}\right]=\frac{1}{2}\left[\pi+\frac{1}{2}\left(0-0\right)\right]=\frac{\pi}{2}$$

הוכחה: תחילה, נשאל, מדוע $f\left(g\left(t\right)\right)\cdot g'\left(t\right)$ אינטגרבילית?

g גזירה ברציפות ב־$[c,d]$, ובפרט היא רציפה, ולכן $f\circ g$ רציפה בקטע זה,

ולכן $f\circ g$ אינטגרבילית שם.

מצד שני, g' רציפה ב־$[c,d]$, ולכן היא אינטגרבילית בקטע זה.

ולכן, בסה"כ, אלו שתי פונקציות אינטגרביליות, ולכן הכפל שלהם אינטגרבילי גם כן.

כעת, תהי $F\left(a\right)=\int_a^b f\left(x\right)dx$. F היא קדומה של f, כי f רציפה ב־$[a,b]$, ומתקיים:

$$\forall x\in[a,b]\ \ F'\left(x\right)=f\left(x\right)$$

כעת:

$$\left(f\circ g\right)\cdot g'=\left(F'\circ g\right)\cdot g'\overset{Chain\ rule}{=}\left(F\circ g\right)'$$

נשים ♡ - זוהי פונקציה רציפה,

ולכן $(F\circ g)$ הינה קדומה של $(f\circ g)\cdot g'$. לכן, לפי המשפט היסודי בגרסא השימושית (המעבר הראשון והאחרון):

$$\int\limits_c^d f\left(g\left(t\right)\right)\cdot g'dt=\left(F\circ g\right)|_c^d=F\left(g\left(d\right)\right)-F\left(g\left(c\right)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)=\int\limits_a^b f\left(xdx\right)$$

■

נשים ♡ לטעות נפוצה -

אם f גזירה, אזי f' **אינה בהכרח** אינטגרבילית!

2.4.2 אינטגרציה לפי חלקים

יהיו g,f פונקציות בעלות נגזרות רציפות. אזי:

$$\begin{aligned}&(f\cdot g)'=f'g+fg'\\&\Rightarrow f'g=(f\cdot g)'-fg'\\&\Rightarrow\int f'g=\int(f\cdot g)'-\int f\cdot g=f\cdot g-\int f\cdot g'\end{aligned}$$

דוגמאות:

.1

$$\int\overbrace{e^x}^{f'}\overbrace{x}^{g}dx\Rightarrow f\left(x\right)=e^x,g'\left(x\right)=1\Rightarrow=e^x\cdot x-\int e^x\cdot 1dx=e^x\cdot x-e^x+C$$

.2

$$\begin{aligned}&\int\overbrace{e^x}^{f'}\overbrace{sin\left(x\right)}^{g}dx=e^xsinx-\int\overbrace{e^x}^{f'}\overbrace{cos\left(x\right)}^{g}dx=e^xsin\left(x\right)-\left[e^xcos\left(x\right)-\int e^x\left(-sin\left(x\right)\right)\right]\\&=e^xsin\left(x\right)-e^xcos\left(x\right)-\int e^x\left(-sin\left(x\right)\right)dx\\&\Rightarrow 2\int e^xsin\left(x\right)dx=e^xsin\left(x\right)-e^xcos\left(x\right)\\&\Rightarrow\int e^xsin\left(x\right)dx=\frac{e^xsin\left(x\right)-e^xcos\left(x\right)}{2}+C\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}&\int sin^2\left(t\right)dt=\int\overbrace{sin\left(t\right)}^{f'}\overbrace{sin\left(t\right)}^{g}dt=\left(-cos\left(t\right)\right)\cdot sin\left(t\right)-\int\left(-cos\left(t\right)\right)cos\left(t\right)dt\\&\overset{Trig}{=}-cos\left(t\right)sin\left(t\right)+\int 1dt-sin^2\left(t\right)dt\\&\Rightarrow 2\int sin^2\left(t\right)dt=t-cos\left(t\right)sin\left(t\right)\\&\Rightarrow\int sin^2\left(t\right)dt=\frac{t-cos\left(t\right)sin\left(t\right)}{2}+C\end{aligned}$$

.4

$$\int ln\left(x\right)dx=\int \overbrace{1}^{f'}\cdot \overbrace{ln\left(x\right)}^{g}dx=xln\left(x\right)-\int x\cdot \frac{1}{x}dx=xln\left(x\right)-x+C$$

משפט 2.41 יהי $f\cdot g\in C'\left(\left[a,b\right]\right)$. אזי:

$$\int\limits_{A}^{b} f'\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(x\right)g\left(x\right)|_{a}^{b}-\int\limits_{a}^{b} f\left(x\right)g'\left(x\right)dx$$

הוכחה: תהי $\left(f\cdot g\right)'$ רציפה ב־$\left[a,b\right]$. כנ"ל $f\cdot g'$ ו־$f'\cdot g$. לכן, שלושתן אינטגרביליות ב־$\left[a,b\right]$.
$f\cdot g$ קדומה של $\left(f\cdot g\right)'$, ולכן, מהמשפט היסודי:

$$f\cdot g|_{a}^{b}=\int\limits_{a}^{b}\left(f\cdot g\right)'\left(x\right)dx=\int\left[f'\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g'\left(x\right)\right]dx=\int\limits_{a}^{b} f'\left(x\right)g\left(x\right)dx+\int\limits_{a}^{b} f\left(x\right)g'\left(x\right)dx$$

■

הערה 2.42 f רציפה ב־$\left[a,b\right]$.

2.4.3 האינטגרל הלא מסויים

21.04.2010

הגדרה 2.43 תהי $f\in R\left[a,b\right]$. אזי לכל $c\in\left[a,b\right]$:

$$F_{c}\left(x\right)=\int\limits_{c}^{x} f\left(t\right)dt$$

תקרא אינטגרל לא מסויים של f ב־$\left[a,b\right]$.

נשים ♡־ מלינאריות:

$$F_{c}\left(x\right)=\int\limits_{c}^{x} f=\int\limits_{c}^{a} f+\underbrace{\int\limits_{a}^{x} f}_{F:=F_{a}}$$

אם f רציפה ב־$\left[a,b\right]$, אזי F **גם** קדומה של f ב־$\left[a,b\right]$.

מה ההבדל בין אינטגרל לא מסויים לפונקציה קדומה?

מתוך וויקיפדיה (מכיוון ועד כה לא הצלחתי להבין מה צביק עשה ־ יעודכן בתקווה בהמשך):
האינטגרל המסוים של פונקציה נתונה על פני קטע סופי
הוא מספר השווה לשטח הכלוא בין ציר ה־x לגרף הפונקציה בין קצוות הקטע.
האינטגרל לא מסויים של פונקציה f אינו כפול לקטע ־
זהו אוסף כל הפונקציות הממשיות שנגזרתן שוות ל־f.

במשפט היסודי, אם f רציפה, אזי:

$$F\left(x\right)=F_{a}\left(x\right)=\int\limits_{a}^{x}f$$

מקיימת:

$$F'\left(x\right)=f\left(x\right)$$

כנ"ל לגבי כל $F_{c}\left(x\right)=\int_{c}^{x}$.

2.4.4 עוד קצת עם פולינום טיילור בהקשר הזה

תהי $f\in C^{n}\left[a,b\right]$. הגדרנו את פולינום טיילור $T_{n}f\left(x\right)$ כל ש:

$$f\left(x\right)=T_{n}f\left(x\right)+R_{n}\left(x\right)$$

משפט 2.44 אם $f^{\left(n+1\right)}\in R\left[a,b\right]$, אזי:

$$R_{n}\left(x\right)=\int\limits_{a}^{x}\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(t\right)\cdot\left(x-t\right)^{n}dt}{n!}$$

באחת ההוכחות של פולינום טיילור, ראינו כי:

$$f\left(x\right)=f\left(t\right)+f'\left(t\right)\left(x-t\right)+...+\frac{f^{\left(n\right)}\left(t\right)}{n!}+\underbrace{R\left(x,t\right)}_{=S\left(t\right)}$$

ולכן:

$$\frac{dR_{n}\left(x,t\right)}{dt}=S'\left(t\right)=\frac{-f^{\left(n+1\right)}\left(t\right)}{n!}\cdot\left(x-t\right)^{n}$$

לכן, S קדומה של הביטוי מימין באותו הקטע,

ולכן מהמשפט היסודי:

$$S\left(x\right)-S\left(a\right)=-\int\limits_{a}^{x}\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(t\right)\cdot\left(x-t\right)^{n}}{n!}dt$$

$$S\left(x\right)=0\ \left(\Rightarrow R_{n}\left(x,x\right)\right),\ S\left(a\right)=R_{n}\left(x\right)$$

$$-R_{n}\left(x\right)=-\int\limits_{a}^{x}\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(t\right)\cdot\left(x-t\right)^{n}}{n!}dt$$

2.4.5 עוד כמה נקודות...

דוגמא לפונקציה שיש לה קדומה, אך אינה אינטגרבילית:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^{2}sin\left(\frac{1}{x^{2}}\right) & x\neq0\\0 & x=0\end{cases}$$

f גזירה ב־$\mathbb{R}$. נביט בנגזרת:

$$f'\left(x\right)=\begin{cases}2xsin\left(\frac{1}{x^{2}}\right)+x^{2}cos\left(\frac{1}{x^{2}}\right) & x\neq0\\0 & x=0\end{cases}$$

היא אינה חסומה בסביבה כלשהיא של אפס,

ועל כן איננה איטגרבילית בקטע המכיל את הראשית.

דוגמא לפונקציה שאין לה קדומה: תחילה, נביט בפונקציה $f(x)=[x]$ - פונקציה זו לא מקיימת את הדרישה! יש לה קדומה, אפילו רציפה וגזירה באפס.
נבצע מניפולציה קלה:

$$f(x)=x-[x]$$

פונקציה זו אינה רציפה בכל נקודה בה $x\in\mathbb{Z}$.
בכל קטע סביב נקודה שכזו לא תהיה פונקציה קדומה -
כי היא לא מקיימת את משפט דרבו לערך הביניים של נגזרת.
לכן, פונקציה כזו לא יכולה להיות נגזרת של פונקציה אחרת!
בנוסף, נביט בפונקציית רימן -
יש לה אינטגרל לא מסויים, "פונקציה מצטברת", כמו לכל פונקציה אינטגרבילית.
האינטגרל הלא מסוים הזה גזיר בכל נקודה. אם הוא היה רציף הוא היה פונקציה קדומה.
אבל, פונקציית רימן גם היא אינה מקיימת את משפט ערך הביניים של דרבו לנגזרת,
ולכן היא לא יכול להיות נגזרת של פונקציה בקטע.

2.5 פונקציית מדרגות

הגדרה 2.45 נאמר ש־φ המוגדרת בקטע $[a,b]$ הינה פונקציית מדרגות,
אם קיימת חלוקה $P=\{a=x_0<x_1<....<x_n=b\}$ של $[a,b]$,
וקיימים $c_1,...,c_n\in\mathbb{R}$ כך ש־

$$\varphi|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv c_i$$

נסמן את קבוצת פונקציות המדרגות ב־$S=[a,b]$.
קבוצה זו סגורה לחיבור וכפל בסקלר - ולכן הינה מרחב וקטורי[13].

סוג של משפט, והוכחה "באוויר"

$$S[a,b]\subset R[a,b]$$

מאדטיביות ניתן להוכיח אינטגרביליות בכל תת קטע,
וזה מספיק לאינטגרביליות של הפוונקציה כולה.
בכלל, כל פונקציה המקיימת תכונות טובות "למקוטעין" -
רציפה למקוטעין, גזירה למקוטעין, מונוטוניות למקוטעין - אינטגרבילית.

משפט 2.46 תהי $f\in B[a,b]$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

[13] היא גם סגורה לכפל - ולכן מקיימת מבנה חזק יותר.

.2

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\varphi,\psi\in S\left[a,b\right]\ \ \varphi\leq f\leq\psi\ \ \int\limits_a^b\varphi-\int\limits_a^b\psi<\varepsilon$$

.3

$$\forall\varepsilon>0\ \exists g,h\in R\left[a,b\right]\ \ g\leq f\leq h\ \ \int\limits_a^b h-\int\limits_a^b g<\varepsilon$$

הערה 2.47 אם $f\in B\left[a,b\right]$, אזי לכל חלוקה P של $\left[a,b\right]$
קיימות $\varphi,\psi\in S\left[a,b\right]$ כך ש־$\varphi\leq f\leq\psi$ כך ש:

$$L\left(P\right)=\int\limits_a^b\varphi,\ \ \int\limits_a^b\psi=U\left(P\right)$$

הוכחה: להערה:

$$\psi|_{\left(x_{i-1},x_i\right)}\equiv M_i=sup\left\{f\left(t\right)|x_{i-1}\leq t\leq x_i\right\}$$
$$\varphi|_{\left(x_{i-1},x_i\right)}\equiv m_i=inf\left\{f\left(t\right)|x_{i-1}\leq t\leq x_i\right\}$$
$$\Rightarrow\varphi\left(x_i\right)=f\left(x_i\right)=\psi\left(x_i\right)$$

■

22.04.2010

נוכיח את המשפט: **הוכחה:** $1\Leftarrow2$ ־ נניח ש־$f\in R\left[a,b\right]$. אזי, לפי ההערה, f מקיימת את תנאי 2,
כלומר קיימות φ,ψ כנ"ל כך ש־$L\left(P\right)=\int_a^b\varphi,\ U\left(P\right)=\int_a^b\psi$.
בנוסף, לפי קריטריון האינטגרביליות של רימן, לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P של $\left[a,b\right]$ כך ש:

$$U\left(P\right)-L\left(P\right)<\varepsilon$$

לכן:

$$\int_a^b\psi-\int_a^b\varphi<\varepsilon$$

$2\Leftarrow3$ ־ טריוויאלי, שהרי ראינו כי $S\left[a,b\right]\subset R\left[a,b\right]$

$3\Leftarrow1$ ־ תהי:

$$\int\limits_a^b h:=inf\left\{U\left(h,Q\right)\right\}$$

לכן, בהנתן $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{3}$, קיימת חלוקה P_n המקיימת:

טוב את זה צריך לסדר....

■

25.04.2010

עוד דוגמאות של אינטגרציה בהצבה יוקלדו מאוחר יותר...

2.6 פונקציות רציונליות

מטה מוקלד החומר של צביק בנושא.

עממה, הוא הציג את הנושא הזה בצורה ממש מסובכת.

אנסה להביא בהמשך חלקים מחוברת מת"פ של רות לורנס נאימרק המצויינת להסבר פשוט יותר.

$$R(x) = P_x(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},\ degP < degQ$$
$$P(x) = C \cdot (x-a_1)^{n_1} \cdot ... \cdot (x-a_n)^{n_r} \cdot \left(x^2+2b_1x+c_1\right)^{m_1} \cdot ... \cdot \left(x^2+2b_2x+c_s\right)^{m_s},\ 0 < n_j, m_j > 0$$

כאשר $b_j^2 - c < 0$ (הדיסקרימיננטה) עבור $1 \le j \le s$, $k \ne l$, $a_k \ne a_l$.

כל פונקציה רציונלית מהצורה הזו ניתן להציג כסכום של שברים פשוטים -

כלומר ביטויים מאחת מן הצורות הבאות:

$$1. \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$
$$2. \frac{B_1x+C_1}{(x^2+bx+c)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + ... + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

נראה השימוש בסדרות:

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx,\ n \in \mathbb{N}$$
$$I_{n+1} = \int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx + a^2 + I_n$$
$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \int \underbrace{\frac{x}{(x^2+a^2)^n}}_{f'} \cdot \underbrace{x}_{g} dx$$

וכו', המשך יוקלד בהמשך...

2.7 האינטגרל הלא אמיתי

28.04.2010

נרצה להכליל את מושג האינטגרל ולהגדיר:

1. אינטגרל על קטעים לא חסומים.
2. איטגרל של פונקציות לא חסומות.

2.7.1 אינטגרל על קטעים לא חסומים

הגדרה 2.48 תהי f מוגדרת בקטע $[a,\infty)$ כאשר $a\in\mathbb{R}$.

נניח ש־f אינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כך ש־$a<b\in\mathbb{R}$.

נאמר ש־f אינטגרבילית ב־I אמ"מ קיים הגבול:

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$$

במקרה זה נסמן גבול זה ע"י:

$$\int_a^\infty f$$

כלומר:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)\,dt$$

ונאמר שאינטגרל זה מתכנס.

אחרת, נאמר שהאינטגרל $\int_a^\infty f$ מתבדר.

דוגמאות

.1

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx\Rightarrow\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx=arctan(b)-arctan(0)\underset{b\to\infty}{\to}\frac{\pi}{2}$$

.2

$$\int_0^\infty e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\right)|_0^b=0-\left(-e^0\right)=1$$

.3

$$\int_0^\infty\frac{1}{x}dx\Rightarrow\int_1^\infty\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}ln|_1^b=\infty$$

.4

$$\int_0^\infty sin(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\left(-cos(b)-(-1)\right)$$

גבול זה לא קיים, לכן האינטגרל מתבדר.

2.7.2 תכונות האינטגרל הלא אמיתי

יהיו f ,g איטגרביליות בקטע $I=[a,\infty)$.

1. חיוביות:

$$f\geq 0\Rightarrow\int_a^\infty f\geq 0$$

2. מונוטוניות:

$$f\leq g\Rightarrow\int_a^\infty f\leq\int_a^\infty g$$

3. לינאריות - נשים לב שכאן יש מסקנה מוסתרת של קיום:

$$\int_a^\infty f+g=\int_a^\infty f+\int_a^\infty g$$
$$\forall k\in\mathbb{R}\ \ \int_a^\infty kf=k\int_a^\infty f$$

4. אדטיביות:

$$\forall a<c<\infty\ \ \int_a^\infty f=\int_a^c f+\int_c^\infty f$$

2.7.3 קריטריון קושי

משפט 2.49 תהי f אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ עבור $a<b$ (כאשר a קבוע, ולכל b $a<b$ $f\in R\left[a,b\right]$).
אזי $\int_a^\infty f$ מתכנס אמ"מ

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B\in\mathbb{R}\ \forall b,b'\in\mathbb{R}\ B<b<b'\Rightarrow\left|\int_b^{b'}f\right|<\varepsilon$$

ההוכחה מושארת כתרגיל -

אך נובעת ישירות ממשפט קושי לגבול של פונקציה.

2.7.4 מבחן ההשוואה

משפט 2.50 יהיו f,g אינטגרביליות בכל תת קטע סגור של הקטע $I=[a,\infty)$.
נניח שקיים $0<k\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in I$ $0\leq f\left(x\right)\leq kg\left(x\right)$. אזי:

1. אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, גם $\int_a^\infty f$מתכנס.
2. אם $\int_a^\infty f$ מתבדר, אזי גם $\int_a^\infty g$ מתבדר.

הערה 2.51

$$F\left(b\right):=\int\limits_a^b f\left(t\right)dt$$

עולה (כי $f\geq0$) ולכן $\int_a^\infty f$ מתכנס אמ"מ F חסומה.

הוכחה: ל־1:

$\int_a^\infty g$ מתכנס, ולכן מלינאריות $\int_a^\infty kg$ מתכנס, ולכן:

$$F\left(b\right):=\int\limits_a^b f\left(t\right)dt\leq G\left(b\right):=\int\limits_a^b kg\left(x\right)dx$$

לפי ההערה, מכיוון ש־$\int_a^\infty kg$ מתכנס אזי G חסומה, ולכן F חסומה, ועל כן $\int_a^\infty f$ מתכנסת.

ל־2:

בשלילה, אילו האינטגרל של $\int_a^\infty g$ היה מתכנס,

אזי האינטגרל $\int_a^\infty f$ היה מתכנס, בסתירה להנחה. ■

דוגמאות

1. $e^{-x^2}<e^{-x}$ לכל $a<x$, לכן:

$$\int\limits_1^\infty e^{-x^2}dx\leq\int\limits_1^\infty e^{-x}dx<\infty$$

לכן, לפי מבחן ההשוואה:

$$\int\limits_1^\infty e^{-x^2}dx$$

מתכנס, ולכן גם:

$$\int\limits_1^\infty e^{-x}dx$$

מתכנס גם הוא.

2. נביט ב:

$$f(x)=x^P$$

אם $b>1$:

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx=\begin{cases} lnb & 0<\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha=1 \\ -\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}|_1^b & \alpha\neq 1\end{cases}$$

לכן $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$, $\alpha>0$ מתכנס אמ"מ $\alpha>1$, ובמקרה זה:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx=\frac{1}{\alpha-1}$$

דוגמא מאוד חשובה ומעניינת!

$$\int_0^\infty \frac{sinx}{x}dx$$

כאשר כוונתנו כמובן היא לפונקציה הרציפה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{sinx}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

האינטגרל הנ"ל מתכנס:

$$\int_1^b \frac{sinx}{x}dx \overset{Parts}{=\!=} -\frac{cosx}{x}|_1^b-\int_1^b(-cosx)\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{cosx}{x^2}dx$ מתכנס[14], ולכן:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{sinx}{x}dx=cos(1)-\int_1^\infty \frac{cosx}{x^2}dx$$

ולכן הגבול קיים, ו־$\int_1^\infty \frac{sinx}{x}dx$ מתכנס, ומכאן כי $\int_0^\infty \frac{sinx}{x}dx$ מתכנס.

[14] כמובן שאת זה צריך להוכיח - אולם עדיין לא למדנו. בהמשך יוכח ע"י התכנסות בהחלט ומבחן ההשוואה.

2.7.5 התכנסות בהחלט ובתנאי

הגדרה 2.52 נגיד ש־f $\int_a^\infty$ מתכנס בהחלט אמ"מ $\int_a^\infty |f|$ מתכנס.

משפט 2.53 התכנסות בהחלט $\Leftarrow$ התכנסות.

הוכחה: נוכיח בעזרת תנאי קושי ־

בהנתן $\varepsilon > 0$, קיים $B \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$B < a < b < b' \Rightarrow \left|\int_b^{b'} f\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \int_b^{b'} |f| < \varepsilon$$

אבל אנו יודעים כי:

$$\left|\int_b^{b'} f\right| \le \int_b^{b'} |f| < \varepsilon$$

ומכאן הטענה. ■

הגדרה 2.54 נאמר ש־f אינטגרבילית בתנאי ב־$I = [a, \infty)$ אמ"מ $\int_a^\infty f$ מתכנסת, אבל $\int_a^\infty |f|$ מתבדר.

דוגמא

$$\int_a^\infty \frac{sinx}{x}dx$$

מתכנס בתנאי. מדוע? נראה כי $\int_a^\infty \left|\frac{sinx}{x}\right| dx$ מתבדר.

$-1 \le sinx \le 1$, ולכן לכל $x \in \mathbb{R}$ $sin^2x \le |sinx|$, ולכן:

$$\frac{sin^2x}{x} \le \frac{|sinx|}{x}$$

נזכור, מטריגונומטריה:

$$cos2x = 1 - 2sin^2x$$

ולכן:

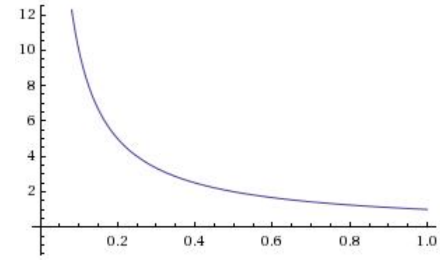
$$sin^2x = \frac{1 - cos2x}{2} \Rightarrow \frac{sin^2x}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{cos2x}{x}\right)$$

$\int_1^\infty \frac{cos2x}{x}dx$ מתכנס, אבל $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ מתבדר, ולכן $\int_1^\infty \frac{sin^2x}{x}dx$ מתבדר,

ומכן, לפי מבחן ההשוואה, $\int_a^\infty \left|\frac{sinx}{x}\right| dx$ מתבדר.

2.7.6 אינטגרל של פונקציה שאינה חסומה 29.04.10

נביט בגרף של הפונקציה $\frac{1}{x}$ בקטע בין 0 ל־1:



השטח אינו חסום, ולכן האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x}$ מתבדר.

לעומת זאת:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

במקרה זה האינטגרל מתכנס!

הגדרה 2.55 תהי f מוגדרת בקטע $I=[a,b)$, ונניח ש־f אינטגרבילית בכל תת קטע סגור של I.

נאמר ש־f אינטגרבילית ב־I אמ"מ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0} \int_{a+\varepsilon}^b f$ קיים.

במקרה זה נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_a^b$ מתכנס, ונסמן באותו סימן את גבולו.

דוגמאות

1.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$$

נשים ♡ - $\frac{1}{x} \le \frac{1}{x^2}$ עבור כל $0<x<1$. אנו יודעים כי $\int_0^1 \frac{1}{x}$, ולכן גם $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ יתבדר, כי הרי הוא גדול מ־$\int_0^1 \frac{1}{x}$.

2.

2.8 הגדרה אנליטית של הפונקציות הטריגונומטריות

02.05.10

2.9 תרגולים

3 טורים

3.1 הגדרות בסיסיות

תהי $X \subset \mathbb{R}$ קבוצה סופית, כלומר $|X| = n \in \mathbb{N}$[15].

נגדיר את הפונקציה x בצורה הבאה:

$$x : [1, n] \xrightarrow{\sim} X,\ \ i \to x(i) = x_i$$

כלומר זוהי פונקציה חח"ע ועל (איזומורפיזם) המעבירה איברים מהקבוצה 1 עד n לאיברים מהקבוצה X אשר יסומנו כנ"ל.

נגדיר את הטור של הקבוצה הזו להיות:

$$\sum_{x \in X} x = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n = (((x_1 + x_2) + x_3) + ... + x_{n-1}) + x_n$$

נראה אילו מניפולציות ניתן לבצע על הטור הזה, כך שסכומו ישמר:

1. נביט בפרמוטציה[16] $\sigma : [1, n] \xrightarrow{\sim} [1, n]$. אזי, מקומטטיביות:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}$$

2. נביט בחלוקה של X לתתי קבוצות כלשהן $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_m$. אזי, מאסוציאטיביות:

$$\sum_{x \in X} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{x \in X_j} x$$

בטורים, מספר האיברים בסדרה יהיה אינסופי.

הגדרה 3.1 בהנתן סדרה x_n, נגדיר את סדרת הסכומיים החלקיים של הסדרה המקורית s_n בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} & s_1 := x_1 \\ & s_2 = x_1 + x_2 \\ & \vdots \\ & s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n \end{aligned}$$

הגדרה 3.2 נאמר שהסדרה x_n סכימה או ניתן לסכימה, כלומר הטור שלה מתכנס, אמ"מ s_n מתכנסת.

במקרה זה נכתוב:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = S,\ \ S = \lim_{n \to \infty} s_n$$

לפעמים נאמר עבור סדרות שאינות סכימות כי הטור שלהן מתבדר.

הערה 3.3 לפעמים נעסוק בסדרות וטורים בהתאם מהצורה:

$$x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$$

---

[15] סימון זה משמעו הגודל של הקבוצה.

[16] פונקציה חח"ע ועל, שהפעולה שלה למעשה היא סידור מחדש איברים בתוך קבוצה.

דוגמאות

1. נביט בטור של הסדרה הקבועה $x_n = 1$.
סדרת הסכומים החלקיים שלה תהיה $s_n = n$.
על כן, הסדרה המקורית אינה סכימה!

2. נביט בטור של הסדרה $x_n = n$. אזי, $s_n := \frac{n(n+1)}{2}$.
על כן הסדרה המקורית אינה סכימה!

3. יהי $q \in \mathbb{R}$, ונביט בסדרה $x_n = q^n$.
סדרת הסכומים החלקיים שלה תהיה $s_n = 1 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
סדרה זו סכימה אמ"מ $-1 < q < 1$. במקרה זה נקבל את הטור הגיאומטרי:

$$\sum_{i=1}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

4. תהי $x_n = \frac{1}{n}$. אזי, הטור שנקבל הינו הטור ההרמוני:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

טור זה מתבדר! את הסיבה לכך נראה בהמשך...

5. לעומת הדוגמא הקודמת, הטור ההרמוני בעל סימנים מתחלפים:

$$x_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n},\ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

מתכנס!

3.1.1 תכונות של טורים מתכנסים

יהיו x_n ו־ y_n שתי סדרות סכימות.

במילים אחרות $\sum x_n$ ו־$\sum y_n$ טורים מתכנסים. אזי:

1. חיוביות:

$$x_n \geq 0 \Rightarrow \sum x_n \geq 0$$

2. מונוטוניות:

$$x_n \leq y_n \Rightarrow \sum x_n \leq \sum y_n$$

3. לינאריות:

$$\forall k, l \in \mathbb{R}\ \sum (kx_n + ly_n) = k \sum x_n + l \sum y_n$$

4. אדטיביות:

$$\forall m = 0, 1, ...\ S = s_m + r_m$$

ההגדרה של r_m ־ מיד.

3.1.2 זנבות ושאריות

הגדרה 3.4 תהי הסדרה x_n. נגדיר סדרה חדשה:

$$x^{(m)} = x_{m+1}, x_{m+2}, ...$$

סדרה זו היא למעשה הזנב של הסדרה המקורית x_n החל מהמקום ה־$m+1$.

משפט 3.5 תהי x_n סדרה. הטור $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ מתכנס אמ"מ לכל m הטור $\sum_{i=m+1}^{\infty}$ מתכנס.

במילים אחרות, x_n סכימה אמ"מ לכל m הזנב $x^{(m)}$ ניתן לסכימה.

בכל אופן במקרה זה נסמן $r_m = \sum_{i=m+1}^{\infty} x_i$, ומתקיים:

$$S = s_m + r_m$$

הוכחה: בכיוון הראשון ־ תהי $x^{(m)} : (x_{m+1}, x_{m+2}, ...)$, ותהי t_n סדרת הסכומים החלקיים של $x^{(m)}$. אזי:

$$s_1 = x_1,\ s_2 = x_1 + x_2 ...\ s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$$
$$t_1 = x_{m+1} = s_{m+1} - s_m,\ t_2 = x_{m+1} + x_{m+2} = s_{m+2} - s_m$$
$$t_n = x_{m+1} + x_{m+2} + ... + x_{m+n} = s_{m+n} - s_m$$

כלומר, הסדרות הנ"ל נבדלות בקבוע! במילים אחרות:

$$t_n = s_{m+n} - s_m$$

כעת, אם $\sum x_n$ מתכנס, אזי s_n מתכנסת, ולכן כל תת סדרה שלה מתכנסת גם כן,

כלומר $s^{(m)} = (s_{m+1}, s_{m+2}, ...)$ מתכנס, ולכן t_n מתכנסת, וגבולה הוא:

$$r_m = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} (s_{m+n} - s_m) \overset{Arithmatics}{=} \lim_{n\to\infty} s_{m+n} - s_m = S - s_m$$

בכיוון השני, נניח שקיים m־זנב שמתכנס, כלומר $\sum_{i=m+1}^{\infty}$ מתכנס.

במילים אחרות, t_n סדרה מתכנסת ל־r_m לכן $s_{m+n} := t_n + \underbrace{s_m}_{constant}$ מתכנסת, ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} s_{m+n} = \lim_{n\to\infty} t_n + s_m = r_m + s_m$$

s_n תת סדרה של s_{m+n}, ולכן s_n מתכנסת ולאותו הגבול S. ■

נביא עכשיו תנאי הכרחי ולא מספיק להתכנסות טור:

משפט 3.6 אם $\sum x_n$ מתכנס, אזי x_n שואפת לאפס.

הוכחה: $\sum x_n$ מתכנס, אזי s_n מתכנסת, ולכן s_{m+1} מתכנסת. אזי:

$$x_{n+1} = s_{n+1} - s_n \Rightarrow x_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

■

3.1.3 קריטריון קושי

משפט 3.7 $\sum x_n$ מתכנס אמ"מ

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}\ \forall n,m\in\mathbb{N}\ N<n<m\Rightarrow|s_m-s_n|<\varepsilon$$

כלומר $|x_{m+1}+...+x_n|<\varepsilon$.

3.1.4 התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

05.05.2010

הגדרה 3.8 תהי x_n סדרה, ו־$\sum x_n$ הטור המתאים לו.
נאמר ש־$\sum x_n$ מתכנס בהחלט אמ"מ $\sum |x_n|$ מתכנס.
אם $\sum x_n$ מתכנס אך לא בהחלט, נאמר שהטור מתכנס בתנאי.

משפט 3.9 התכנסות בהחלט גוררת התכנסות.

הוכחה: נשתמש בקריטריון קושי:
בהנתן $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש:

$$\forall N<n<m\in\mathbb{N}\ \ ||a_{n+1}|+...+|a_m||<\varepsilon$$

ולכן, מאי שיוויון המשולש המוכלל:

$$|a_{n+1}+...+a_m|\le|a_{n+1}|+...+|a_m|<\varepsilon$$

■

3.2 טורים חיוביים

3.2.1 קריטריון ההשוואה

משפט 3.10 יהיו a_n,d_n,c_n סדרות.
אם $|a_n|<c_n$, אזי אם $\sum c_n$ מתכנס, $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
אם $0\le d_n\le a_n$, אזי אם $\sum d_n$ מתבדר, גם $\sum a_n$ מתבדר.

ההוכחה מושארת כתרגיל ־ מתקבלת ישירות לפי תנאי קושי להתכנסות.

דוגמאות

- תהי a_n סדרה עבורה $0\le a_n\le 9,\ \ a_n\in\mathbb{Z}, 0\le a_0\in\mathbb{Z}$.
נתבונן במספר העשרוני $a_0.a_1a_2....$. נוכל לפרש מספר זה כטור הבא:

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+...$$

נשים לב כי לכל $n\ge 1$, $\frac{a_n}{10^n}\le\frac{9}{10^n}$. אזי:

$$s_n=a_0+\frac{a_1}{10}+...+\frac{a_n}{10^n}\le a_0+9\left(\frac{1}{10}+...+\frac{1}{10^n}\right)\le a_0+9\left(\frac{1}{1-10}-1\right)\le a_0+1$$

כי הביטוי בסוגריים הם טור גיאומטרי אינסופי ־ זהו סכומו (לא הוכחנו, אך כרגע נקבל את זה).

- הטור ההרמוני $\sum\frac{1}{n}$ מתבדר:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+...$$

נבחר $n=2^k$. נתבונן ב־s_{2^k}, שהיא תת סדרה של s_k:

$$\underbrace{s_{2^0=1}=1}_{\geq 1},\ \underbrace{s_{2^1=2}=1+\frac{1}{2}}_{\geq 1.5},\ \underbrace{s_{2^2=4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>2}\Rightarrow s_{2^k}\geq 1+k\cdot\frac{1}{2}\overset{k\to\infty}{\to}\infty$$

והיות ו־s_{2^k} היא ת"ס של s_n, גם s_n מתבדרת!

3.2.2 קריטריון ההשוואה הגבולי

משפט 3.11 יהיו a_n,c_n סדרות חיוביות לכל n, וכמו כן $\underset{n\to\infty}{lim}\frac{a_n}{c_n}>0$.

אזי $\sum c_n$ יתכנס אמ"מ $\sum a_n$ יתכנס, וכנ"ל לגבי התבדרות.

הוכחה: נוכיח עבור התכנסות בלבד:

הגבול הנ"ל קיים וחיובי וממשי, ועל כן קיימים $0<p<\frac{a_n}{c_n}<q$ כמעט תמיד אמ"מ $p\cdot c_n<a_n<q\cdot c_n$.

נשים ♡ שההתכנסות של c_n גוררת חסימות של a_n ־ אזי היא סדרה מונוטונית עולה וחסומה, ולכן מתכנסת.

הכיוון השני זהה. ■

מה קורה כאשר $\underset{n\to\infty}{lim}\frac{a_n}{c_n}=0$?

יתקיים רק $a_n<q\cdot c_n$, ולכן נקבל גרירה רק בכיוון אחד ־

אם $\sum c_n$ מתכנס, אזי $\sum a_n$ יתכנס.

דוגמאות

-

$$\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\overset{telescopic}{=}1-\frac{1}{n}\overset{n\to\infty}{\to}1$$

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

- נתבונן ב־$\sum\frac{1}{n^2}$. על פי קריטריון ההשוואה הגבולי, אם נבחר $c_n=\frac{1}{n(n+1)}$:

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}}=\frac{n\left(n+1\right)}{n^2}\overset{n\to\infty}{\to}1$$

כלומר, $\sum\frac{1}{n^2}$ יתכנס. למעשה, זה נכון לכל חזקה של אן הגדולה מאחד.

3.2.3 קריטריון המנה

משפט 3.12 תהי a_n סדרה, כאשר a_n סדרה חיובית.

גרסא ראשונה:

נניח בנוסף כי $\underline{lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l\leq u=\overline{lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

אזי אם $u<1$, $\sum a_n$ מתכנס, ואם $l>1$, אזי $\sum a_n$ מתבדר.

גרסא שניה:

אם $\overline{lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אם $\underline{lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.[17]

דוגמא

- יהי $x\in\mathbb{R}$, וכמו כן $a_n=\left(\frac{x^n}{n!}\right)$. עבור $x=0$:

$$\frac{x^n}{n!}=(1,0,0,0....)\Rightarrow\sum\frac{x^n}{n!}=1$$

עבור $x\neq 0$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right|=\frac{|x|}{n+1}\overset{n\to\infty}{\to}0$$

ולכן הטור $\sum\frac{x^n}{n!}:=E(x)$ מתכנס בהחלט. נשים ♡ - $E(x)=e^x$.

- נסתכל כעת על תת הסדרה של הסדרה הנ"ל, המכילה רק את האיברים הזוגיים:

$$b_n=1,\frac{x^2}{2!},\frac{x^4}{4},...\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}b_n=cosh(x)$$

ותת הסדרה של האיברים האי זוגיים, בהתאמה:

$$c_n=\frac{x}{11},\frac{x^3}{3!},\frac{x^5}{5!},...\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}c_n=sinh(x)$$

ובצורה דומה:

$$x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n!}=cos(x)\,,\ x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=sin(x)$$

כעת נוכיח את הקריטריון: **הוכחה:** נניח ש־$1>u$. יהי $u<q<1$, אזי $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$ נכון כמעט תמיד.

במילים אחרות, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $\mathbb{N}\ni n>N$:

$$a_{n+1}<a_n\cdot q\Leftrightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$$

ואז:

$$a_{n+1}<a_n\cdot 1<a_{n-1}\cdot q^2<...<a_N\cdot q^{n-N}\Rightarrow\underbrace{a_N}_{constant}\cdot\sum_{n=N}^{\infty}q^{n-N}=\sum_{n=N}^{\infty}a_N\cdot q^{n-N}$$

ולכן $\sum_{k=N}^{\infty}a_{N+k}$ מתכנס, ולכן גם $\sum a_n$ מתכנס.

נניח ש־$l>1$. אזי $1<\frac{a_{n+1}}{a_n}$ נכון כמעט תמיד, ולכן $a_n<a_{n+1}$ כמעט תמיד,

ולכן a_n לא שואפת לאפס, ולכן בהכרח הטור $\sum a_n$ אינו מתכנס. ■

[17] אחרת אין לנו מושג.

3.2.4 קריטריון השורש

משפט 3.13 תהי a_n סדרה חיובית, וכמו כן $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < u$.

אזי, אם $u > 1$ אזי $\sum a_n$ מתכנס, וכמו כן אם $u < 1$ אז $\sum a_n$ מתבדר.

הוכחה: יהי $u < q < 1$ אזי $\sqrt[n]{a_n} < q$ כמעט תמיד, ולכן $a_n < q^n$ כמעט תמיד,

והטור הגיאומטרי q^n עבור $q < 1$ מתכנס, ולכן לפי קריטריון ההשוואה גם $\sum a_n$ מתכנס.

יהי $u < p < 1$, אזי $p < \sqrt[n]{a_n}$ נכון באופן שכיח, ולכן $1 < p^n < a_n$ באופן שכיח. ■

3.2.5 קריטריון ההשוואה לאינטגרל

משפט 3.14 תהי $f : [1, \infty)$ חיובית ומונוטונית יורדת, ותהי $a_n := f(n)$.

אזי $\int_1^\infty f$ מתכנס אמ"מ $\sum a_n$ מתכנס.

במקרה של התכנסות נקבל:

$$\int_1^\infty f \le \int -s_n \le \int_n^\infty f$$

דוגמאות

- $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{n}$ מתבדר כי $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ מתבדר.
- $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ מתכנס כי $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס.
- בכלליות, $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס כאשר $\alpha > 1$, כי ראינו שהאינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dc$ מתכנס.
- $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \cdot log(n)}$ מתבדר, כי הרי ראינו ש:

$$\int_2^\infty \frac{1}{n \cdot log(n)} = \lim_{b\to\infty} log(|log(b)|) |_2^\infty = \infty$$

- לעומת זאת, $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \cdot log^2(n)}$ מתכנס, כי ראינו ש:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot log(x)} dx = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{log(b)}\right) |_2^\infty = \frac{1}{log(2)}$$

הוכחה: תחילה, עבור שני הכיוונים, נשים ♡ שמתקיים:

$$a_2 \le \int_1^2 f \le a_1$$

$$a_3 \le \int_2^3 f \le a_2$$

$$\vdots$$

$$a_n \le \int_{n-1}^{n} f \le a_{n-1}$$

$$s_n - a_1 \le \int_1^n f \le s_{n-1}$$

אינטגרלים אלו קיימים בכל תת קטע סגור היות והפונקציה מונוטונית בקטעים אלו ולכן אינטגרבילית שם.

בכיוון הראשון נניח ש־ $\int_1^\infty f$ מתכנס, ולכן:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ s_n - a_1 \le \int_1^n f \le \int_1^\infty f$$

כלומר s_n חסומה, וסיימנו.

בכיוון השני נניח כי $\sum a_n$ מתכנס, אזי $\{s_n\}$ חסומה. נסמן את החסם שלה ב־S, ולכן מהחישוב מעלה:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \int_1^n f \le s_{n-1} \le S$$

ולכן $\int_1^\infty f$ מתכנס. ■

3.2.6 קריטריון העיבוי

06.05.2010

תחילה, דיון קצר:

תהי $a_n = f(n)$, כאשר $f > 0$. כמו כן:

$$a_k = f(k) > f(k+1) = a_{k+1}$$

אזי, נביט בקטע $[k, k+1]$. יתקיים:

$$\int_k^{k+1} a_{k+1} \le \int_k^{k+1} f \le \int_k^{k+1} a_k \Leftrightarrow a_{k+1} \le \int_k^{k+1} a_k$$

לכן, לכל $n < m$:

$$s_m = a_1 + \ldots + a_m$$
$$s_n = a_1 + \ldots + a_n$$
$$s_m - s_n \le \int_n^m f \le s_{m-1} - s_{n-1}$$
$$\Rightarrow \int_{n+1}^{m+1} f \le s_m - s_n \le \int_n^m f \overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \int_{n+1}^{\infty} f \le S - s_n \le \int_n^\infty f$$

משפט 3.15 תהי a_n סדרה חיוביות מונוטונית ויורדת ל־0.
אזי, $\sum a_n$ מתכנס אמ"מ $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס.

דוגמאות

- $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר, כי $\sum 1 = \sum 2^n \cdot \frac{1}{2^n}$ מתבדר.
- $\sum \frac{1}{n^P}$ מתכנס אמ"מ $\sum 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^P}$ מתכנס אמ"מ (טור גיאומטרי) $\frac{1}{2^{P-1}} < a$ אמ"מ $1 < P$.
- $\sum \frac{1}{n \cdot log(n)}$ מתבדר, כי $\sum 2^n \cdot \frac{1}{2^n log(2^n)}$ מתבדר.

הוכחה: תחילה, באופן כללי:

$$s_n := a_1 + a_2 + ... + a_n$$
$$t_k := a_1 + 2a_2 + 4a_4 + ... + 2^k \cdot a_{2^k}$$

כעת, בכיוון הראשון:

$$n \leq 2^k : s_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + ... \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + ... + 2^k a_{2^k} \leq t_k$$

כלומר, $\sum 2^n a_{2^k}$ מתכנס אמ"מ t_k חסומה. אם $\sum 2^n a_{2^k}$ מתכנס:

$$t_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^n a_{2^k}$$

כלומר $\{s_n\}$ חסומה, ולכן גם $\sum a_n$ מתכנס.
בכיוון השני:

$$n > 2^k : s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + .. + a_{2^{k-1}} + (a_{2^{k-1}} + ... + a_{2^k}) \geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + ... + \frac{2^k}{2} \cdot a_{2^k}$$

כלומר t_k תתכנס אם $2s_n$ חסומה.
אבל, $\sum a_n$ מתכנס, ולכן s_n חסומה, ולכן גם $2s_n$ חסומה, ולכן t_k חסומה, ועל כן $\sum 2^n a_{2^k}$ מתכנס, כנדרש. ■

3.2.7 הגדרת e לפי טורים

תהי a_n סדרה חיובית. אזי:

$$\underline{lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{lim}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{lim}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

נסמן:

$$a_n = \begin{cases} q^{n-1} & n \ is \ even \\ q^{n+1} & n \ is \ odd \end{cases}, \ 0 < q < 1$$

אזי:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{q^n}{q^{n+1}} = \frac{1}{q} \\ \frac{q^{n+2}}{q^{n-1}} = q^3 \end{cases}$$

נרצה לבדוק את התכנסות הטור. ננסה תחילה את מבחן המנה:

$$1 < \overline{lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{q}$$

אין הכרעה. ננסה את מבחן השורש:

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} q^{\frac{n-1}{n}} = q \cdot q^{-\frac{1}{n}} & n \ is \ even \\ q^{\frac{n+1}{n}} = q \cdot q^{\frac{1}{n}} & n \ is \ odd \end{cases} \Rightarrow lim\sqrt[n]{a_n} = q < 1$$

ולכן לפי מבחן השורש יש התכנסות!

מסקנה 3.16 נביט בסדרה $a_n = \frac{n^n}{n!}$. אזי:

$$lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = lim\left(\underbrace{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}_{a_{n+1}} \cdot \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{\frac{1}{a_n}}\right) = lim\frac{(n+1)^n}{n^n} = lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

ומכאן נקבל:

$$lim\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e \Rightarrow lim\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = 2$$

כלומר הביטוי $\sqrt[n]{n!}$ מתנהג $\frac{n}{e}$.

הוכחה: יהי $\overline{lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} = M$, כאשר $M = \pm\infty$. אזי:

$$\overline{lim}\sqrt[n]{a_n} \le \overline{lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

אם $M \in \mathbb{R}$, יהי $M < q$. אזי כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ - במילים אחרות, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שאם $n \ge N$ כורר:

$$a_{n+1} < q \cdot a_n,\ a_{N+1} < q \cdot a_N,\ a_{N+2} < q^2 \cdot a_N,\ a_{N+M} < q^m a_N$$

כאשר $N + m = n$. אזי

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{q^{n-N}} \cdot \sqrt[n]{a_N} = q^{\frac{n-N}{n}} \cdot (a_N)^{\frac{1}{n}} = q \cdot \underbrace{\left(q^{-N}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\overset{n\to\infty}{\to}1} \cdot \underbrace{a_N^{\frac{1}{n}}}_{\overset{n\to\infty}{\to}1},\ N \le n$$

$$\overline{lim}\sqrt[n]{a_n} \le q$$

מכיוון ו־q הוא שרירותי עבור $M < q$, ולכן:

$$\overline{lim}\sqrt[n]{a_n} \le M$$

■

3.2.8 קריטריון לייבניץ לטורים עם סימנים מתחלפים

משפט 3.17 תהי x_n סדרה חיובית מונוטונית יורדת לאפס במובן החזק.

אזי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ מתכנס, ומתקיים: $0 < S < x_1$, כאשר S הינו סכום הטור.

כמו כן, מתקיים עבור הזנב ה־m־י:

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$$

ויתר על כך:

$$0 < (-1)^m(S - s_m) < x_{m+1}$$

הוכחה: נגדיר:

$$a_n := s_{2n},\ b_n := s_{2n-1}$$

הערה 3.18 נשים ♡:

$$a_{n+1} - a_n = s_{2n-2} - s_{2n} = s_{2n} + a_{2n+1} - x_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$$

טענה 3.19

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$$

$$0 < b_n - a_n = x_{2n}$$

ולכן כעת, $a_n \to 0$, ולכן גם $a_{2n} \to 0$, ולכן $b_n - a_n \to 0$. כלומר a_n ו־b_n עומדות בתנאי הלמה של קנטור. יהי:

$$a_n = s_{2n} \to S \leftarrow s_{2n-1} = b_n$$

ולכן $s_n \to S$, כי כל האיברים הזוגיים וגם האי זוגיים שואפים ל־S.

■

דוגמא

$\sum (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ מתכנס, וסכומו הינו $ln2$.

אנטי דוגמא

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}}_{\frac{2}{2-1}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}}_{\frac{2}{3-1}} + ... + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}}_{\frac{2}{n-1}}$$

וטור זה מתבדר!

3.2.9 קריטריון דיריכלה

משפט 3.20 תהי a_n סדרה חיובית מונוטונית יורדת לאפס,
ויהי $\sum b_n$ טור חסום (כלומר סדרת הסכומים החלקיים חסומה!)
אזי, הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה: נגדיר:

$$B_0 = 0,\ B_n = b_1 + ... + b_m$$

להגיד ש־$\sum b_n$ חסום שקול לכך ש־B_n חסומה. נסמן את החסם להיות $|B_n| \le B$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + ... + a_n b_n &= a_1 (B_1 - B_0) + a_2 (B_2) + ... + a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= a_1 B_1 + a_2 B_2 - a_2 B_1 + a_3 B_3 - a_3 B_2 + ... + a_n B_n - a_n B_{n-1} \\ &= (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + ... + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n \end{aligned}$$

כעת, מספיק להראות כי הסדרה a_nB_n מתכנסת, וכמו כן $\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k$ מתכנס.
תחילה, ראינו כי B_n סדרה חסומה, ו־a_n סדרה המתכנסת לאפס,
ולכן, לפי משפט שהוכחנו באינפי 1, $a_nB_n \to 0$.
נוכיח את הטענה השניה:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\underbrace{|a_k-a_{k+1}|}_{>0}|B_k| \le B\cdot\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1}) \overset{telescopic}{=} B\cdot(a_1-a_n) \overset{a_n\to 0}{\to} B\cdot a_1$$

כלומר $\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k$ מתכנס בהחלט, ולכן בפרט מתכנס, כנדרש. ■

דוגמא

$\sum\frac{sin(nx)}{n}$ מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$. מדוע?
נסמן $a_n=\frac{1}{n}$, וכמו כן $b_n=sin(nx)$. אזי:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} sin(kx)\right| = \left|\frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right| \le \frac{1}{\left|sin\frac{x}{2}\right|}$$

נשים ♡ שבכדי שהמכנה לא יתאפס, $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

3.2.10 קריטריון אבל

משפט 3.21 תהי a_n סדרה מונוטונית יורדת, ונסמן $a_n\to a$. וכמו כן יהי $\sum b_n$ טור מתכנס.
אזי $\sum a_nb_n$ מתכנס.

הוכחה: נתבונן ב־$\sum b_n!(a_n-a)$.
לכן, לפי קריטריון דריכלה, $\sum(a_n-a)b_n$ מתכנס. כאת:

$$\begin{aligned}&(a_n-a)b_n=a_nb_n-a\cdot b_n\\ &\Rightarrow (a_n-a)b_n+a\cdot b_n=a_nb_n \Rightarrow \sum a_nb_n=\sum(a_n-a)b_n+a\sum b_n\end{aligned}$$

הוכחנו כי $\sum(a_n-a)b_n$ מתכנס, וכמו כן מהנתון $a\sum b_n$ מתכנס,
ולכן מאריתמטיקה של טורים מתכנסים גם $\sum a_nb_n$ מתכנס. ■

3.2.11 חלקים חיובים ושליליים של טור

הגדרה 3.22 תהי a_n סדרה כלשהיא. נביט בטור $\sum a_n$ נגדיר:

$$\begin{aligned}P_n &:= P(a_n)=a_n^+=\frac{|a_n|+a_n}{2}\\ N_n &:= N(a_n)=a_n^-=\frac{|a_n|-a_n}{2}\end{aligned}$$

כאשר נשים ♡ כי $P_n,N_n\ge 0$.

משפט 3.23 הטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אמ"מ $\sum N_n$ ו־$\sum P_n$ מתכנסים,
ובמקרה של התכנסות מתקיים:

$$\underbrace{S}_{=\sum a_n}=\underbrace{P}_{=\sum P_n}-\underbrace{N}_{\sum N_n}$$

הוכחה: בכיוון הראשון, נניח ש־$\sum |a_n|$ מתכנס.
אזי $\sum N_n$ ו־$\sum P_n$ מתכנסים לפי קריטריון ההשוואה.
ולכן, לפי אריתמטיקה של טורים מתכנסים:

$$\sum a_n = \sum (P_n - N_n) = \sum P_n - \sum N_n$$

ומתקיים:

$$S = P - N$$

בכיוון השני, נניח ש־$\sum P_n, \ \sum N_n$ מתכנסים, ואז, שוב לפי אריתמטיקה של טורים מתכנסים:

$$\sum |a_n| = \sum (P_n + N_n) = \sum P_n + \sum N_n$$

כלומר $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, ולכן בפרט מתכנס, כנדרש! ■

3.2.12 טורים בשינוי סדר והכנסת סוגריים

13.05.2010

הגדרה 3.24 נאמר שהסדרה b_n מתקבלת מהסדרה a_n ע"י שינוי סדר,
אמ"מ קיימת תמורה $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש־$b_n = a_{\sigma(n)}$.

משפט 3.25 יהי $\sum a_n$ טור חיובי, ויהי $\sum b_n$ טור המתקבל מהקודם ע"י שינוי סדר.
אזי, $\sum a_n$ מתכנס אמ"מ $\sum b_n$ מתכנס,
ובמקרה של התכנסות שני הסכומים שווים, כלומר $\sum a_n = \sum b_n$.

הוכחה: נגדיר:

$$s_n := a_1 + ... + a_n, \ t_n := b_1 + ... + b_n = a_{\sigma(1)} + ... + a_{\sigma(n)}$$

בהנתן $n \in \mathbb{N}$ יהי $N \in \mathbb{N}$ עם $\sigma(1), ..., \sigma(n) \leq N$. אזי:

$$t_n = a_{\sigma(1)} + ... + a_{\sigma(n)} \leq a_1 + ... + a_N$$

אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $t_n \leq s_n \leq \sum a_n$. כלומר, $\sum a_n$ חסם מלמעלה של t_n.
לכן $\sum b_n$ מתכנס, ומתקיים $\sum b_n \leq \sum a_n$.
הכיוון השני זהה - a_n מתקבלת מ־b_n ע"י שינו סדר באמצעות σ^{-1}, ולכן $\sum b_n \leq \sum a_n$, ומכאן השיוויון. ■

מסקנה 3.26 אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט ו־$\sum b_n$ מתקבל מהראשון ע"י שינוי סדר,
אזי גם $\sum b_n$ מתכנס בהחלט, ומתקיים $\sum a_n = \sum b_n$.

הוכחה: נשתמש בחלקים החיובי והשלילי של הטור, כפי שהגדרנו בשיעור הקודם:

$$a_n = P_n - N_n, \ P_n, N_n \leq 0$$

נזכור כי הוכחנו שאם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אזי גם $\sum P_n, \sum N_n$ מתכנסים אף הם, ומתקיים:

$$\sum a_n = \sum P_n - \sum N_n$$

אזי, עבור $\sum b_n$ יתקיים:

$$\sum b_n = \sum a_{\sigma(n)} = \sum \left(P_{\sigma(n)} - N_{\sigma(n)}\right)$$

כאמור $\sum P_n$ הוא טור חיובי ומתכנס, ולכן מהמשפט הקודם גם $\sum P_{\sigma(n)}$ מתכנס, ולאותו הסכום.

כנ"ל לגבי $\sum N_n$, ולכן גם $\sum N_{\sigma(n)}$ מתכנס, ולאותו הסכום.

ולכן, לפי לינאריות של טורים מתכנסים, נקבל:

$$\sum b_n = \sum P_{\sigma(n)} - \sum N_{\sigma(n)} = \sum P_n - \sum N_n = \sum a_n$$

וכמו כן:

$$\sum |b_n| = \sum \left|a_{n\sigma(n)}\right| = \sum \left(P_{\sigma(n)} + N_{\sigma(n)}\right) = \sum P_{\sigma(n)} + \sum N_{\sigma(n)} = \sum P_n + \sum N_n = \sum (P_n + N_n) = \sum |a_n|$$

■

דוגמא:

כרגע אין, בטח אקח מייזלר בשלב מאוחר יותר...

משפט 3.27 אם $\sum a_n$ מתכנס וסכומו S,

אזי לאותו סכום קיים טור כלשהוא המתקבל מהראשון ע"י הכנסת סוגריים.

הוכחה: נתבונן בטור $\sum b_n$ המתקבל מהראשון ע"י הכנסתת סוגריים,

או במילים אחרות, קיימת סדרה עולה ממש $n_k \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$b_1 = a_1 + ... + a_{n_1}$$
$$b_2 = a_{n_1+1} + ... + a_{n_2}$$
$$\vdots$$
$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + ... + a_{n_k}$$

כלומר:

$$\underbrace{(a_1 + ... + a_{n_1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + ... + a_{n_2})}_{b_2} + ... + \underbrace{(a_{n_{k-1}+1} + ... + a_{n_k})}_{b_k}$$

וכמו כן, נגדיר:

$$t_k := b_1 + ... + b_k = a_1 + ... + a_{n_l} = s_{n_k}$$

כאשר שים לב כי s_{n_k} היא סדרה חלקית של s_n.

אזי $S \overset{k\to\infty}{\to} s_{n_k}$, ולכן t_k גם מתכנסת ל-S,

כלומר הסכום של הטור החדש הוא S, כנדרש. ■

16.05.2010

עוד דוגמאות

- ראינו שהטור $\sum (-1)^{i+1}$ מתבדר, אבל:

$$(1-1) + (1-1) + ...$$

מתכנס! כלומר, הכיוון השני של המשפט שהראינו לגבי הסוגריים אינו נכון!

-

$$ln2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... \Rightarrow s_n$$
$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - ... \Rightarrow t_n$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + ... = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...\right) = \frac{1}{2}ln2$$

ניתן להראות ש-$\frac{1}{2}s_{2n} = t_{3n}$ - מושאר כתרגיל.

משפט רימן:

משפט 3.28 יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי.

אזי לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים סידור מחדש $\sum b_n$ של הטור המקורי עם $\sum b_n = x$.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות, נניח $a_n \neq 0$ לכל n.

הערה 3.29 אם $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי, אזי $\sum P_n$ ו־$\sum N_n$ מתבדרים שניהם -

מדוע? ראשית, ב־a_n אינסוף מופעים של איברים חיובים ושליליים (אחרת הטור המקורי היה עם אותו הסימן כמעט תמיד, ואז היה מתכנס בהחלט).

נזכור ש־$\sum^N a_n = \sum^N P_n - \sum^N N_n$. לכן תחת ההנחה ש־$\sum a_n$ מתכנס, אילו $\sum P_n$ או $\sum N_n$ מתכנס, אזי גם השני מתכנס, ואז היינו מקבלים שגם:

$$\sum |a_n| = \sum P_n + \sum N_n$$

מתכנס, בניגוד להנחה שההתכנסות היא בתנאי. ולכן בהכרח שני הטורים הנ"ל מתבדרים.

נסמן את p_k להיות קבוצה חלקית של P_n בהשמטת האפסים, וכנ"ל q_k קבוצה חלקית של N_n המתקבלת ע"י השמטת האפסים.

נניח ש־$x \geq 0$, ויהי k_1 הראשון אשר מקיים:

$$x < p_1 + p_2 + ... + p_{k_1} = s_1$$

זה אפשרי כי $\sum p_k = \infty$. אזי $0 \leq s_1 - x \leq p_{k_1}$.

יהי l_1 הראשון אשר מקיים:

$$\overbrace{p_1 + ... + p_{k_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{l_1}}^{T_1} < x$$

וזה אפשרי כאמור כי $\sum q_l$ מתבדר. אזי:

$$0 \leq x - T_1 \leq q_{l_1}$$

נמשיך בצורה רקורסיבית ונקבל:

$$\begin{aligned}
&s_2 = p_1 + ... + p_{k_1} - q_1 - ... - q_{l_1} + p_{k_1+1} + ... + p_{k_2} \\
&t_2 = p_1 + ... + p_{k_1} - q_1 - ... - q_{l_1} + p_{k_1+1} + ... + p_{k_2} - q_{l_1+1} + ... + q_{l_2} \\
&x < s_m \Rightarrow 0 \leq s_m - x < p_{k_m} \\
&x > T_m \Rightarrow 0 \leq x - T_m < q_{l_m}
\end{aligned}$$

$\sum a_n$ מתכנס, ולכן $a_n \to 0$, לכן $p_k \to 0$ ו־$q_l \to 0$.

p_{k_m} היא סדרה חלקית של P_k, ו־q_{l_m} ה יא סדרה חלית של N_n, ולכן $q_{l_m} \to 0 \leftarrow p_{k_m}$, ולכן $T_m \to x \leftarrow s_m$.

נבנה את הסדרה הבאה:

$$s_1, T_1, s_2, T_2, ...$$

יהי M_n סכום חלקי כלשהוא של הטור אחרי סידור מחדש.

אזי קיים m עם $T_{m-1} \leq u_n \leq s_m$, או קיים עם m עם $T_m \leq u_n \leq s_m$,

ולכן $M_n \to 0$, כנדרש. ∎

3.3 מכפלת טורים - קונבולוציה

גם נקראת מכפלת קושי. ישנה אנלוגיה למכפלת פולינומים.

משפט 3.30 יהיו $\sum a_n$ ו־$\sum b_n$ שני טורים מתכנסים בהחלט, ויהי c_n הטור המוגדר:

$$c_n = \sum_{i+j=n}^{n} a_i b_j$$

אזי $\sum c_n$ מתכנס, וסכומו:

$$\sum c_n = \left(\sum a_n\right) \cdot \left(\sum b_n\right)$$

הוכחה: נבנה את הסדרה:

$$(a_0 b_0, a_1 b_0, a_0 b_1, a_2 b_0, a_1 b_1, a_0 b_2, ...)$$

נראה כי הטור שמתאים לסדרה זו מתכנס בהחלט:

נתבונן בסכום חלקי כלשהוא של S.

יהי N המקסימום בין האינדקסים i ו־j המופיעים בסכום חלקי זה.

אזי, סכום האיברים המוחלטים שמופיעים בסכום זה חסום מלמעלה ע"י:

$$\sum_{i\in I, j\in J,\ I,J\subseteq N} |a_i b_j| \le \left(\sum^{N} |a_i|\right)\left(\sum^{N} |b_j|\right) = \left(\sum^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum^{\infty} |b_j|\right)$$

לכן, לאחר הכנסת סוגריים נקבל:

$$\sum c_n = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_0) + ...$$

וטור זה הרי מתכנס. כדי להראות לאן הוא מתכנס, נביט סכומים הבאים:

$$a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_0) = \sum d_n$$

תהי t_n סדרת הסכומים החלקיים של טור זה. אזי:

$$t_n = s_n \cdot u_n \to \left(\sum^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum^{\infty} |b_j|\right)$$

כאשר s_n, u_n הם הסכומים החלקיים של $\sum a_n$ ו־$\sum b_n$. ■

20.05.2010

דוגמא

לכל $x \in \mathbb{R}$, הטור:

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

מתכנס בהחלט (ראינו זאת כבר,תוך כדי שימוש בקריטריון המנה).

אנטי דוגמא

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

מתכנס בתנאי!

אם ננסה להפעיל את מכפלת קושי, נקבל:

$$|c_n| = \sum_{k=0} |(-1)| \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}}$$
$$\Rightarrow (n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{\frac{n}{2}+2} = \frac{2}{n+2}$$

כלומר, כל מחובר (ללא הסימן) הוא לפחות $\frac{2}{n+2}$,

כלומר הסכום הינו לפחות

$$2 \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \frac{2(n+1)}{n+1} \leq$$

כלומר האיבר הכללי אינו שואף לאפס, ולכן המכפלה אינה מתכנסת.

4 סדרות וטורי פונקציות

4.1 סדרות של פונקציות

תהי $C^D = \{f : D \to C\}$. בצורה דומה נוכל לסמן:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{[1,n]} = \{x : [1,n] \to \mathbb{R}\} = \{(x_1, ..., x_n)\}$$

תת קבוצה $X \subseteq \mathbb{R}$ סדרה של פונקציות ממשיות ב־x הינה סדרה המקיימת:

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^X,\ n \to f_n,\ f_n : X \to \mathbb{R}$$

כאשר למעשה f_n היא פונקציה של שני משתנים ־ n ו־x.

דוגמאות

- $$f_n\left(x\right) = \frac{1}{n} \cdot x,\ X = \mathbb{R}$$

  מהגרף של $f_1, f_2, ..$ ניתן לראות שהסדרה שואפת לפונקציה הקבועה 0.

- $$g_n\left(x\right) = x^n,\ x = [0,1]$$

  סדרה זו תשאף כל נקודה שאינה 1 ל־0, ובנקודה 1 שואפת ל־1.

- דוגמאות נוספות בגרפים...

הגדרה 4.1 נאמר שסדרת הפונקציות f_n מתכנסת ב־$x \in X$ אמ"מ סדרת המספרים $(f_n\left(x\right))$ מתכנסת.

הגדרה 4.2 נאמר שסדרת הפונקציות f_n מתכנסת נקודתית ב־X,

אמ"מ היא מתכנסת לכל $x \in X$.

במקרה זה ניתן להגדיר את הפונקציה הנקודתית $f : X \to \mathbb{R}$ כאשר:jj

$$\forall x \in X\ f\left(x\right) = \underset{n \to \infty}{lim} f_n\left(x\right)$$

כלומר:

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_{(\varepsilon, X)}\ \forall n \in \mathbb{N}\ N < n \Rightarrow \left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| < \varepsilon$$

23.05.2010

עוד דוגמאות!

- $$f_n\left(x\right) = \frac{1}{x^2 + n},\ X = [0,1]$$

  הפונקציה הגבולית היא פונקציית האפס.

•

$$h_n(x) = \frac{1}{x^n},\ X = [1, \infty)$$

הפונקציה הגבולית תהיה:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

הגדרה 4.3 יהיו f_n, f כמקודם. נאמר שהסדרה f_n מתכנסת במ"ש ל־f אמ"מ:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ N < n \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

דוגמא

•

$$g_n(x) = \frac{1}{x^2 + n},\ g \equiv 0$$

ההתכנסות היא במ"ש ב־ $[0, 1]$. מדוע?

$$\frac{1}{x^2 + n} \leq \frac{1}{n}$$

בהנתן $0 < \varepsilon$, מספיק לבחור $n \in \mathbb{N}$ עם $\varepsilon < N$, מתקיים:

$$\left|\frac{1}{x^2 + n} - 0\right| = \frac{1}{x^2 + n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

הערה 4.4 התכנסות במ"ש $\Leftarrow$ התכנסות נקודתית.

f_n איננה מתכנסת במ"ש ב־X ל־f אמ"מ:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists x \in X\ \exists k \in \mathbb{N}\ N < k \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

במילים אחרות, תנאי שקול ־ קיום תת סדרה x_k ב־X ותת סדרה f_{n_k} ב־f_n כך ש:

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon$$

אנטי דוגמא

נשים ♡ ־ הסדרה $f_n(x) = x^n$ מתכנסת ב $[0, 1]$ ל־0 אך לא במ"ש.

נבחר באופן שרירותי את $\varepsilon = \frac{1}{2}$. ניתן לראות מהגרף כי לא כולו יהיה מתחת לקו זה.

ובצורה פורמלית, עבור הסדרה $x_k = \sqrt[k]{\frac{1}{2}}$:

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| = \left(\sqrt[k]{\frac{1}{2}}\right)^k - 0 \equiv \frac{1}{2} \geq \varepsilon$$

4.1.1 קריטריון קושי להתכנסות במ"ש

משפט 4.5 תהי f_n סדרה של פונקציות המוגדרות ב־X.

אזי f_n מתכנסת במ"ש ב־X לפונקציה גבולית f, גם היא מוגדרת ב־X, אמ"מ:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \ \forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| f_n\left(x\right) - f_m\left(x\right) \right| < \varepsilon$$

הוכחה: הכיוון הקל $\Leftarrow$ מושאר כתרגיל.

$\Rightarrow$ נניח את נכונות הקריטריון.

נשים ♡ ־ לכל $x \in X$ סדרת המספרים $\left(f_n\left(x\right)\right)$ הינה סדרת קושי, ועל כן מתכנסת. נגדיר:

$$f\left(x\right) := \lim_{n \to \infty} f_n\left(x\right) \ \ \forall x \in X$$

נוכיח כי $f_n \to f$ במ"ש ב־X.

בהנתן $\varepsilon > 0$, יהיו $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. אזי לפי הקריטריון יש $N_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \ \ n, m > N \Rightarrow \left| f_n\left(x\right) - f_m\left(x\right) \right| < \varepsilon'$$

באי שיוויון זה נקבע את n, וניתן ל־m לשאוף ל־∞, ונקבל:

$$\forall n > N \Rightarrow \left| f_n\left(x\right) - \lim_{n \to \infty} f_m\left(x\right) \right| = \left| f_n\left(x\right) - f\left(x\right) \right| \leq \varepsilon' < \varepsilon$$

■

4.1.2 התכנסות במ"ש ורציפות

משפט 4.6 נניח ש־f_n סדרה של פונקציות רציפות אשר מתכנסת במ"ש לפונקציה f ב־X.

אזי f רציפה בכל $a \in X$, וכמו כן לכל $a \in X$ מתקיים:

$$f\left(a\right) = \lim_{x \to a} f\left(x\right) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n\left(x\right) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n\left(x\right)$$

הוכחה: עלינו להוכיח:

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in X \ \ \left| y - x \right| < \delta \Rightarrow \left| f\left(x\right) - f\left(y\right) \right| < \varepsilon$$

בהנתן $\varepsilon > 0$, יהי $N \in \mathbb{N}$ עבורו:

$$\forall y \in X \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ N \leq n \Rightarrow \left| f_n\left(y\right) - f\left(y\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

נבונן ב־f_N: מהנתון היא רציפה בכל x, בפרט ב־$x \in X$. לכן, בהנתן ε הנ"ל קיים $\delta_{\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)} > 0$ כך ש:

$$\forall y \in X \ \ \left| y - x \right| < \delta \Rightarrow \left| f_N\left(x\right) - f_N\left(y\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ולכן, נציב את אי השיוויונות הנ"ל ונקבל:

$$\left| x - y \right| < \delta \Rightarrow \left| f\left(y\right) - f\left(x\right) \right| \leq \left| f\left(y\right) - f_N\left(y\right) \right| + \left| f_N\left(y\right) - f_N\left(x\right) \right| + \left| f_N\left(x\right) - f\left(x\right) \right| < \varepsilon$$

השיוויון נובע מהרציפות במ"ש (תרגיל). ■

4.1.3 התכנסות במ"ש ואינטגרציה

משפט 4.7 נניח ש־f_n סדרה של פונקציות אינטגרביליות ב־$[a,b]$,
המתכנסת במ"ש לפונקציה f בקטע זה. אזי, גם f אינטגרבילית ב־$[a,b]$.
יתר על כן, נגדיר:

$$F_n(x) := \int_a^x f_n(t)\,dt,\ \ F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

אזי F_n מתכנסת במ"ש ב־$[a,b]$ ל־F.

הוכחה: תהי $f \in R[a,b]$. מספיק להראות שקיימות $g \le f \le h$ כך ש־$g,h \in R[a,b]$, וכמו כן[18]:

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon$$

לפי ההתכנסות במ"ש, בהנתן $\varepsilon > 0$,יהי $N \in \mathbb{N}$ עבורו:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in [a,b]\ \ N \le n \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

נתבונן ב־f_N. אזי מתקיים:

$$\overbrace{f_N - \frac{\varepsilon}{2}}^{g} < f < \overbrace{f_N + \frac{\varepsilon}{2}}^{h}$$

$f_N \in R[a,b]$, אזי h,g אינטגרביליות גם כן, וכמו כן:

$$\int_a^b \left(f_N + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) - \int_a^b \left(f_N - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) = \varepsilon$$

לכן נוכל להגדיר את F:

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_a^x f_n f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| \overset{arithmatics}{=} \left|\int_a^x (f_n(t) - f(t))\,dt\right|$$
$$\le \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt \le \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt$$

בהנתן $\varepsilon > 0$, לפי ההתכנסות במ"ש, יהי $N \in \mathbb{N}$ מספיק גדול כך ש:

$$\forall t \in X,\ \ n \ge N \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

אזי:

$$n \ge N \Rightarrow |F_n(x) - F(x)| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

■

[18] כפי שצביק אומר ־ "חבר מביא חבר"

דוגמא

•

$$d_m = \lim_{m\to\infty} cos^{2m}\left(n!x\pi\right)$$
$$cos\left(n!x\pi\right) \Rightarrow -1 \le cos\left(n!x\pi\right) \le 1$$
$$0 \le cos^2\left(n!x\pi\right) < 1$$
$$\lim_{m\to\infty}\left[cos^2\left(n!x\pi\right)\right]^m = 0$$
$$\Rightarrow x \notin Q \Rightarrow d_n\left(x\right) = 0 \; d_n\left(x\right) = 1 \Leftrightarrow n!x \in \mathbb{Z}$$

נסמן עבור $q > 0$, $x = \frac{p}{q},\ 0 \le p \le q, p, q \in \mathbb{Z}_+$, ולכן $n!\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$. לכן עבור n נתון יהיו מספר סופי של מקרים!
לכן עבור אותו ה־n $d_n \in R\left[0,1\right]$, וכמו כן:

$$\int_0^1 d_n\left(x\right)dx = 0$$

כמו כן, $d_n\left(x\right) = 0$ לכל $x \notin \mathbb{Z}$, ולכן במקרה זההפונקציה הגבולית $d\left(x\right)$ הינה פונקציית האפס.
עבור n מספיק גדול $\frac{n!}{q} \in \mathbb{Z}$.
למעשה, עבור $n > q$:

$$\frac{n!}{q} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n! \cdot \frac{p}{q} \in \mathbb{N} \Rightarrow d_n\left(x\right) = 1$$

ולכן נקבל כי הפונקציה הגבולית תהיה:

$$D\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} d_n\left(x\right) = \begin{cases} 0 & x \notin Q \\ 1 & x \in Q \end{cases}$$

פונקציה זו איננה אינטגרבילית, שהרי ההתכנסות אינה במ"ש (הפונקציה הגבולית אינה רציפה).

4.1.4 התכנסות במ"ש וגזירות

26.05.2010

דוגמא

• תהי f_n סדרה של פונקציות גזירות. נביט בסדרה:

$$f_n\left(x\right) = \frac{sin\left(nx\right)}{\sqrt{n}} \;\; \lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right) = f\left(x\right) \equiv 0$$

שהרי:

$$\left|\frac{sin\left(nx\right)}{\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

מכיוון ואין כאן תלות ב־x, ב־$\mathbb{R}$ ההתכנסות היא במ"ש!
מה נוכל להגיד על הנגזרות? האם ההתכנסות במ"ש ערובה לגבול הנגזרות:

$$f_n'\left(x\right) = \frac{n}{\sqrt{n}} \cdot cos\left(nx\right) = \sqrt{n} \cdot cos\left(nx\right)$$

כלומר הפונקציות גזירות אולם:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'\left(x\right)$$

אינו קיים! ובעניין זה:

משפט 4.8 תהי f_n סדרה של פונקציות גזירות ברציפות בקטע I.

נניח שקיים $a \in I$ כך ש־$(f_n(a))$ מתכנסת,

וכמו כן כי הסדרה (f'_n) מתכנסת במ"ש ב־I לפונקציה g.

אזי, f_n מתכנסת במ"ש ב־I לפונקציה f המקיימת $f' = g$.

הוכחה: נשים ♡ - לכל $x \in I$, f'_n אינטגרבילית בקטע $[a,x]$, שהרי הנחנו כי $f'n$ רציפה.

אזי, לפי משפט התכנסות במ"ש לאינטגרציה, גם g אינטגרבילית ב־$[a,x]$, ומתקיים:

$$[a,x] \quad \int_a^x f'_n \to \int_a^x g$$

כאשר ההתכנסות היא במ"ש.

אבל, המשפט היסודי מתקיים:

$$\int_a^x f'_n = f_n(x) - f_n(a) \Rightarrow f_n(x) = \int_a^x f'_n(x) + f_n(a)$$

אזי, בצד ימין שתי הסדרות מצד ימין מתכנסות במ"ש ($f_n(a)$ מהנתון מתכנסת, והיא סדרת מספרים בקטע חסום ולכן מתכנסת במ"ש, והאיבר השני $\int_a^x f'_n(x)$ כבר ראינו מעלה כי הוא מתכנס במ"ש),

ולכן, מאריתמטיקה של סדרות מתכנסות (במ"ש), גם f_n מתכנסת (במ"ש) לפונקציה גבולית f, ומתקיים:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_a^x g(x) + f(a)$$

g הינה גבול במ"ש של פונקציות רציפות, ולכן ממשפט שראינו גם היא רציפה.

אזי, מהמשפט היסודי, $\int_a^x g$ גזירה, ומתקיים:

$$f'(x) = g(x)$$

■

4.1.5 משפט ויירשטראס

משפט 4.9 תהי $f \in C^0[0,1]$. אזי קיימת סדרה (B_n) של פולינומים,

אשר מתכנסת במ"ש ב־$[0,1]$ ל־f.

לפני ההוכחה - הכנה קטנה

ראינו בעבר כי:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

$$y = 1-x \Rightarrow 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot (1-x)^{n-k}$$

הוכחה: נגדיר סדרה של פולינומי ברנשטיין:

$$B_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{n}{k}\right) \cdot \binom{n}{k} \cdot (1-x)^{n-k}$$

נוכיח כי $B_n f \to f$ במ"ש ב־$[0,1]$. ■

4.2 טורי פונקציות

30.05.2010

הגדרה 4.10 תהי f_n סדרה של פונקציות בקטע I. נגדיר:

$$s_n(x) := f_0(x) + ... + f_n(x)$$

נכנה את s_n בשם הטור המתאים לסדרה הנ"ל.

הגדרה 4.11 נאמר שהטור מתכנס נקודתית לפונקציה $s(x)$ המוגדרת ב־I

אמ"מ $s_n(x) \to s(x)$ נקודתית ב־I.

הגדרה 4.12 נאמר שהטור מתכנס במ"ש לפונקציה $s(x)$ המוגדרת ב־I

אמ"מ $s_n \to s(x)$ במ"ש ב־I.

דוגמא

$$f_n(x) = x^n,\ I = (-1,1) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = s(x)$$

4.2.1 קריטריון קושי עבור התכנסות במ"ש

משפט 4.13 תהי f_n סדרה של פונקציות ב־I.

$\sum f_n$ מתכנס במ"ש ב־I אמ"מ:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in I\ \forall n, m \in \mathbb{N}\ N < n < m\ \ |f_{n+1}(x) + ... + f_m()| < \varepsilon$$

4.2.2 קריטריון M של ויירשטראס להתכנסות במ"ש

תחילה, דוגמא קצרה ולא מפורמלת:

$$\sum \frac{1}{x^2+n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

משפט 4.14 תהי f_n סדרה של פונקציות ב־I, ותהי M_n סדרה של מספרים חיוביים ב־$\mathbb{R}$.

אם $|f_n(x)| \le M_n$ לכל $x \in I$, ו־$\sum M_n$ מתכנס, אזי $\sum f_n$ מתכנס במ"ש ובהחלט ב־I.

הוכחה: נשתמש בקריטריון קושי (לטורים של מספרים).

$\sum M_n$ מתכנס, ולכן הוא מקיים את קריטריון קושי עבור טורים מתכנסים של מספרים ממשיים.

לכן, בהנתן $\varepsilon > 0$, יהי $N \in \mathbb{N}$ המקיים:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\ N < n < m \Rightarrow |M_{n+1} + ... + M_m| < \varepsilon$$

אזי, לכל $x \in I$ נקבל:

$$N < n < m \Rightarrow \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} f_n(x)\right| \le \sum_{i=n+1}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{i=n+1}^{\infty} M_i \le \varepsilon$$

■

אנטי דוגמא:

•

$$I=[0,1]\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{z^{2}+n}$$

מתכנס נקודתית, אבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n}\cdot\frac{1}{x^{2}+n}\right|$$

מתבדר, "כי זה כמעט הטור ההרמוני" לפי צביק:

$$x\in[0,1]\Rightarrow x^{n}\in[0,1]\Rightarrow x^{2}+n\leq n+1\Rightarrow\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{x^{2}+n}$$

נשים לב כי הטור הראשון מתכנס במידה שווה אך לא בהחלט:

$$\left|\sum(-1)^{n}\cdot\frac{1}{x^{2}+n}-s(x)\right|\leq\frac{1}{x^{2}+(n+1)}\leq\frac{1}{n+1}$$

• התכנסות נקודתית ולא במ"ש - כי הפונקציה הגבולית לא רציפה:

$$I=[0,1]\ \ 1=\sum x^{n}(1-x)=\begin{cases}1 & x\neq1\\ 0 & x=1\end{cases}$$

אזי $\sum(-1)^{n}x^{n}(1-x)$ מתכנס בהחלט ובמ"ש, שהרי:

$$\left|\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}x^{i}(1-x)-s(x)\right|\leq x^{n+1}(1-x)\leq$$

ולרגע של נוסטלגיה - ננתח בעזרת נגזרת!

$$\begin{aligned}&g_{n}(x)=x^{n+1}(1-x)\Rightarrow g_{n}'=(n+1)x^{n}-(n+2)x^{n+1}\\&=x^{n}\left[(n+1)-(n+2)x\right]=0\Leftrightarrow\left\{x=0\ or\quad x=\tfrac{n+1}{n+2}\right.\\&\leq\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}\left(1-\frac{n+1}{n+2}\right)\overset{n\to\infty}{\to}0\end{aligned}$$

נשים ♡ להבדל בין התכנסות במ"ש ובהחלט להתכנסות בהחלט במ"ש!

4.3 טורי חזקות

הגדרה 4.15 תהי c_n סדרה של מספרים ב-$\mathbb{R}$.

הטור $\sum_{n=0}^{N}c_{n}x^{n}$ יקרא טור חזקות.

באופן יותר כללי, נבנה טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}(x-a)^{n}$ טור חזקות.

דוגמאות:

•

$$c_{n}=\frac{1}{n!}\Rightarrow\sum\frac{x^{n}}{n!}$$

מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$.

•

$$c_n = 1 \Rightarrow \sum x^n$$

מתכנס עבור $-1 < x < 1$.

•

$$c_n = n! \Rightarrow \sum n! x^n$$

מתכנס רק עבור $x = 0$.

•

$$c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow \sum (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

מתכנס ב־$-1 < x \leq 1$.

•

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n}$$

מתכנס ב־$-1 \leq x \leq 1$.

למה 4.16 אם הטור $\sum c_n x^n$ מתכנס עבור $r \in \mathbb{R}$,
אזי הוא גם מתכנס עבור כל $x \in \mathbb{R}$ עם $|x| < |r|$.

הוכחה: $\sum c_n r^n$ טור מתכנס של מספרים, לכן $(c_n r^n)$ שואפת לאפס, ולכן בפרט היא חסומה.
יהי $M \in \mathbb{R}$ עם $|c_n r^n| \leq M$ לכל $n = 0, ..., \infty$. אם $r \neq 0$:

$$\sum |c_n x^n| = \sum \left| c_n r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n \right| \leq \sum |c_n r^n| \left|\frac{x}{r}\right|^n \leq \sum M \left|\frac{x}{r}\right|^n < \infty$$

כאשר אי השיוויון האחרון נכון כי $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$ ויש לנו כפולה של טור גיאומטרי, לכן הטור $\sum c_n x^n$ מתכנס בהחלט.
■

4.3.1 על רדיוס ההתכנסות

משפט 4.17 בהנתן טור חזקות מהצורה $\sum c_n x^n$ מתקיים אחד מהבאים:

1. הטור מתכנס לכל מספר ממשי.
2. קיים $0 < R < \infty$ כך שהטור מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$ עם $|x| < R$ ומתבדר עבור $R < |x|$.
3. הטור מתכנס רק עבור $x = 0$.

מסקנה 4.18 על כן, ניתן לדבר על קטע ההתכנסות I של הטור. קטע זה הינו סימטרי ביחס לראשית.
בכל מקרה, נכנה את R רדיוס ההתכנסות בהתאם, כלומר:

1. $R = \infty$.
2. R כלשהוא, $R \in \mathbb{R}$.
3. $R = 0$.

הוכחה: יהי $\sum c_n x^n$ מתכנס, $0 \ni I \neq 0$.
נניח ש־I איננו חסום מלמעלה, בהינתן $x_1 \in \mathbb{R}$, יהי $r \in I$ עם $|x_0| < r$.
אזי $\sum c_n r^n$ מתכנס, ולפי הלמה הקודמת $\sum c_n x_0^n$ מתכנס.
אחרת, יהי $R = supI$. נניח $R > 0$.
אם $|x| < R$, אזי קיים $r \in I$ עם $|x| < r \leq R$, ואז $\sum c_n x_0^n$ מתכנס.
אילו $R < |x_0|$ ו־$\sum c_n x_0^n$ מתכנס, אזי עבור $R < r < |x_0|$ $\sum c_n r^n$ מתכנס, בסתירה להגדרת R. ■

4.3.2 נוסחת קושי הדמר לחישוב רדיוס ההתכנסות

משפט 4.19 יהי $\sum c_n x^n$ טור חזקות, ויהי:

$$\frac{1}{R}=\overline{lim}\sqrt[n]{|c_n|},\ \ \frac{1}{\infty}=0,\ \ \frac{1}{0}=\infty$$

אזי R הינו רדיוס ההתכנסות של הטור.

הוכחה: לפי קריטריון השורש, אם $\overline{lim}\sqrt[n]{|c_n|}\cdot|x|<1$ אז הטור מתכנס.

אם $1<\overline{lim}\sqrt[n]{|c_n|}\cdot|x|$ אזי הטור מתבדר. ■

02.06.2010

משפט 4.20 טור החזקות $\sum c_n x^n$ מתכנס במ"ש בכל קטע $[-r,r]$ המוכל בקטע ההתכנסות I.

הוכחה: $r<R$ ולכן $\sum c_n r^n$ מתכנס. אם $|x|\le r$ $\sum|c_n x^n|\le\sum|c_n|\cdot r^n$ ולכן ההתכנסות במ"ש. ■

מסקנה 4.21 יהי $\sum c_n x^n$ טור חזקות עם קטע התכנסות I ורדיוס התכנסות R.

תהי $f(x):=\sum c_n x^n$ עבור $x\in I$.

אזי f רציפות ב־I. יתר על כן, לכל $[a,b]\subseteq I$ f אינטגרבילית בו.

משפט 4.22 בתנאים מעלה, רדיוס ההתכנסות של f' ושל $\int f$ יהיה:

$$\int f=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Rightarrow\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n+1}}\cdot|x|\cdot\sqrt[n]{|x|}\right)=\frac{1}{R}$$
$$f'=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot n\cdot x^{n-1}\Rightarrow x\neq0\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sqrt[n]{|c_n|\cdot n\cdot\frac{|x^n|}{x}}\right)=\frac{1}{R}$$

כלומר אין שינוי ברדיוס ההתכנסות בין טורים אלו לבין הטור המקורי!

לכן f היא גם גזירה אינסוף פעמים בקטע I. נשים ♡:

$$f(0)=c_0,\ \ c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

על כן, טור החזקות מהווה טור טיילור של הפונקציה המוגדרת על ידו בקטע I.

אנטי דוגמא

$$g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}\Rightarrow g^{(n)}(0)=0$$

לכן הטור של g הוא הפונקציה הזהותית 0.

הגדרה 4.23 תהי f גזירה אינסוף פעמים בקטע I, ותהי $a\in I$.

הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ נקרא טור טיילור של f (בסביבת a) בחזקת של $(x-a)$.

דוגמא

$$E\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\ R=\infty\ E'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{\left(n-1\right)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=E\left(x\right)$$

טענה 4.24

$$E\left(x\right)=e^{x}$$

הוכחה:

$$\left(\frac{E\left(x\right)}{e^{x}}\right)'=\frac{E'\left(x\right)e^{x}-E\left(x\right)e^{x}}{\left(e^{x}\right)^{2}}\equiv0\Rightarrow\frac{E\left(x\right)}{e^{x}}=C$$

כאשר C הוא קבוע.

$$\Rightarrow E\left(x\right)=c\cdot e^{x}\Rightarrow E\left(0\right)=C=1$$

■

נדון בעוד פונקציות שאנו מכירים:

$$C\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}\ R=\infty\ C'\left(x\right)=-S\left(x\right)\ \ C\left(0\right)$$
$$S\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}\ R=\infty\ S'\left(x\right)=C\left(x\right)\ \ S\left(0\right)$$
$$\left[C^{2}\left(x\right)+S^{2}\left(x\right)\right]'=2C\left(x\right)\cdot\left(-S\left(x\right)\right)+2S\left(x\right)\cdot C\left(x\right)=0$$
$$C^{2}\left(x\right)+S^{2}\left(x\right)=Constant\Rightarrow1+0=Constant=1$$

תרגיל

הוכיחו על ידי גזירה של הביטוי:

$$\left(C\left(x\right)-Cos\left(x\right)\right)^{2}+\left(S\left(x\right)-Sin\left(x\right)\right)^{2}$$

כי

$$S\left(x\right)=Sin\left(x\right),\ \ C\left(x\right)=Cos\left(x\right)$$

4.3.3 משפט אבל

משפט 4.25 אם הטור $\sum c_{n}$ מתכנס, ונגדיר:

$$f\left(x\right):=\sum c_{n}x^{n}$$

עבור $-1<x<1$, וכמו כן $f\left(1\right)=\sum c_{n}=S$, איזי:

$$\lim_{x\rightarrow1}f\left(x\right)=f\left(1\right)$$

דוגמאות

- $$\frac{1}{1-x}=G\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n},\ -1<x<1$$

- $$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}x^{n},\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$ln\left(1+x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1},\ -1<x\leq1$$
$$\left(x=1\right)\Rightarrow ln\left(2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{1}{n+1}$$

- $$\frac{1}{1+x^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}x^{2n},\ -1<x<1$$
$$Integral\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\underbrace{C}_{=0}=arctan\left(x\right),\ -1<x\leq1$$
$$\left(x+1\right)\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{1}{2n+1}=arctan\left(1\right)=\frac{\pi}{4}$$

ומה קורה במקרה הכללי?

$$0<R<\infty,\ \sum c_{0}x^{n}\leftrightarrow\sum c_{n}R^{n}$$

נגדיר:

$$g\left(x\right):=f\left(R_{x}\right)=\sum c_{n}R^{n}x^{n}$$

אזי $g\left(x\right)$ רציפה משמאל ב־1 (ממשפט אבל), ובכיוון השני $f\left(x\right)=g\left(\frac{x}{R}\right)$ בצורה דומה...

03.06.2010

סקירה קצרה ־ טורי חזקות

תהי c_n סדרה. טור החזקות יהיה מהצורה $\sum c_{n}x^{n}$.

- יהי I קטע ההתכנסות. הגדרנו R רדיוס התכנסות ־ שיכול להיות $0,1$ או $\infty\ldots$
- כמו כן ראינו נוסחא לחישוב הרדיוס R:

$$\frac{1}{R}=\overline{lim}\sqrt[n]{\left|a_{n}\right|}$$

- לכל $0<r<R$, לכל $\left|x\right|<r$ $\sum c_{n}x^{n}$ מתכנס בהחלט.
- נגדיר עבור $x\in I$ את הפונקציה $f\left(x\right):=\sum c_{n}x^{n}$. $\sum c_{n}x^{n}$ מתכנס במ"ש ב־$\left[-r,r\right]$, ולכן f רציפה בכל I.

- גזרנו וטיגרלנו את הטור הנ"ל. ראינו כי לשלושת הטורים אותו רדיוס התכנסות. מדוע? תחילה נטפל בטור הגזירה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

נכפיל את הגזירה ב־x, ונקבל טור חדש ($x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n$). לטור זה יהיה אותו רדיוס התכנסות כמו לטור הגזירה. נשים ♡:

$$x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n$$

ולפי נוסחאת קושי הדמר:

$$R = \frac{1}{\bar{lim}\sqrt[n]{n\left|c_n\right|}} = \frac{1}{\bar{lim}\sqrt{\left|c_n\right|}}$$

כלומר זהו אותו הרדיוס. לגבי טור האינטגרל $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{x^{n-1}}{n+1}$, בצורה דומה:

$$\frac{1}{R} = \bar{lim}\sqrt[n+1]{\frac{\left|c_n\right|}{n+1}} = \bar{lim}\sqrt{\left|c_n\right|}$$

- נגדיר $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ עבור $x \in I$... אזי $f'(x) = g(x)$.
- אם $g(x)$ גזירה אינסוף פעמים בקטע J, בנינו טור טיילור עבור g, כאשר $a = 0$:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(0) \cdot \frac{x^n}{n!}$$

- נשאל את עצמנו, מה הקשר בין $g(x)$ ל־$f(x)$? נזכור:

$$c_n = f^{(n)}(0) \cdot \frac{1}{n!}$$

- ראינו כי R יכול לכלול או לא לכלול את נקודות הקצה ־ דוגמאות בשיעור הקודם.

נביט בפונקציה:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \\ 0 \end{cases}$$

$$B_n g(x) \underset{[-1,1]}{} \underset{Bamash}{\rightarrow} g(x)$$

נשים ♡ ־ פולינומי ברנשטיין B_n אינם פולינום טיילור!

4.3.4 משפט על התכנסות, הכללות שלו וקצת על טיילור

משפט 4.26 אם $\sum c_n$ מתכנס ו־$-1 < x < 1$, $f(x) := \sum c_n x^n$, ולכן:

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = S$$

אזי $\underset{x\to1,\ x<1}{lim} f(x) = f(1)$.

הוכחה:

$$0 \le x < 1 \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow 1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)(1-x)$$
$$\frac{1}{1-x} \cdot f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=}^{\infty} c_n x^n\right)$$

שני טורים אלו מתכנסים בהחלט, ולכן לפי משפט המכפלה, המכפלה של טורים אלו מתכנסת בהחלט. נסמן את המכפלה ב־$\sum_{n=0}^{\infty} d_n$. אזי:

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i \cdot x^{i-1} = \sum_{i=0}^{n} c_i x^n = \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} c_i}_{s_n}\right) \cdot x^n$$
$$0 < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-x} \cdot f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} s_n x^n \Rightarrow f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$
$$-1 < x < 1 \ 1 = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ f(1) = S = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S x^n$$
$$0 < x < 1 \ f(x) - f(1) = (1-x) \sum_{k=0}^{n} (s_n - S) x^n$$

בהנתן $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ עבורו:

$$|s_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

נקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (s_n - S) x^n = \sum_{n=0}^{N} (s_n - S) x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} (s_n - S) x^n$$
$$\Rightarrow \left|\sum_{n=0}^{\infty} (s_n - S) x^n\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |s_n - S| x^n \le \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{N+1}^{\infty} x^n < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{1-x}$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(1)| \le \underbrace{(1-x) \sum_{n=0}^{N} |s_n - S| x^n}_{} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$g(x)$ פולינום, לכן הוא מגדיר פונקציה רציפה ב־$(x-1)$ עם $g(1) = 0$.

עבור אותו $\varepsilon > 0$, יהי $\delta > 0$ עבורו:

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |g(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן:

$$max\{1-\delta, 0\} < x < 1 \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

■

06.06.2010

הכללה 1: אם $\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n = S$ מתכנס עבור $R > 0$, $-R < x \leq$, ונגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$. אזי:

$$\lim_{x \to R, x < R} f(x) = f(R)$$

הוכחה: תהי $g(x) = f(R \cdot x)$. g עומדת בתנאי המשפט המקורי, ולכן g רציפה משמאל ב־$x = 1$.

מההגדרה, $f(x) = g\left(\frac{x}{R}\right)$ g רציפה משמאל ב־$x = 1$, ולכן f רציפה משמאל ב־$x = R$. ■

הכללה 2: אם $\sum c_n (-R)^n$, $R > 0$, ונגדיר $f(x) := \sum c_n x^n$.

אזי עבור $-R \leq x < R$ $\lim_{-R \leftarrow x, -R < x} f(x) = f(-R)$. **הוכחה:** נסמן $g(x) = f(-x)$, וההמשך ברור.. ■

ודיון אחרון לסיום הנושא ־ עוד קצת על טור טיילור:

$$f \to Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \ c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

נסמן

$$g := Tf(x)$$

עבור כל $x \in I$. אזי, לפי המשפט שהוכחנו:

$$\lim_{n \to \infty} (f(x) - T_n f(x)) = 0$$

5 מסילות

5.1 הגדרות

הגדרה 5.1 יהי I קטע פתוח ב־$\mathbb{R}$.

מסילה ב־$\mathbb{R}^2$ הינה פונקציה:

$$P : I \to \mathbb{R}^2,\ P(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},\ x = f(t)\,,\ y = g(t)$$

דוגמאות

- $$P(t) \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ x = f(t) = a,\ y = g(t) = b$$

- $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\ t \in \mathbb{R}$$

  כאשר בסוגריים אנו לוקחים נקודה, ובסוגריים המרובעים מופיע וקטור. אזי נקבל:

  $$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2t \\ 3t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 0+3t \end{pmatrix} \Rightarrow x = f(t)\,,\ x = f(t) = 1+2t,\ y = g(t) = 3t$$

- $$P(t) = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix},\ x = f(t) = cos(t)\,,\ y = g(t) = sin(t)$$
  $$x^2 + y^2 = 1$$

- $$H(t) = \begin{pmatrix} cosh(t) \\ sinh(t) \end{pmatrix},\ x = f(t) = cosh(t)\,,\ y = g(t) = sinh(t)$$
  $$x^2 - y^2 = 1$$

- $$P(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix},\ x = f(t) = t^2,\ y = g(t) = t^2$$
  $$x = y$$

- $$Q(t) = \begin{pmatrix} sin(t) \\ sin(t) \end{pmatrix},\ x = f(t) = sin(t)\,,\ y = g(t) = sin(t)$$
  $$x = y$$

09.06.2010

5.1.1 הנגזרת של מסילה

הגדרה 5.2 נסמן:

$$\underset{t\to a}{lim}\left[\begin{array}{c} f\left(t\right)\\ g\left(t\right)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} \underset{t\to a}{lim}f\left(t\right)\\ \underset{t\to a}{lim}g\left(t\right)\end{array}\right]$$

אזי, הנגזרת של המסילה $P:I\to\mathbb{R}^{2}$ כאשר $a\to\left[\begin{array}{c} f\left(t\right)\\ g\left(t\right)\end{array}\right]$ תהיה:

$$P'\left(a\right)=\underset{t\to0}{lim}\frac{P\left(a+t\right)-P\left(a\right)}{t}=\underset{t\to0}{lim}\frac{\left(\begin{array}{c} f\left(a+t\right)\\ g\left(a+t\right)\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c} f\left(a\right)\\ g\left(a\right)\end{array}\right)}{t}$$
$$=\underset{t\to0}{lim}\frac{1}{t}\cdot\left[\begin{array}{c} f\left(a+t\right)-f\left(a\right)\\ g\left(a+t\right)-g\left(a\right)\end{array}\right]=\underset{t\to0}{lim}\left[\begin{array}{c} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}\\ \frac{g(a+t)-g(a)}{t}\end{array}\right]$$

ואם f,g גזירות ב־a:

$$=\left[\begin{array}{c} f'\left(a\right)\\ g'\left(a\right)\end{array}\right]$$

דוגמא

- $$P\left(t\right)=\left(\begin{array}{c} cos\left(t\right)\\ sin\left(t\right)\end{array}\right),\ P'\left(t\right)=\left[\begin{array}{c} -sin\left(t\right)\\ cos\left(t\right)\end{array}\right]$$

  אזי, הוקטורים $\left[\begin{array}{c} cos\left(t\right)\\ sin\left(t\right)\end{array}\right]$ ו־$\left[\begin{array}{c} -sin\left(t\right)\\ cos\left(t\right)\end{array}\right]$ ניצבים! במקרה זה נוכל להגדיר:

  $$v\left(t\right)=\left|P'\left(t\right)\right|=\sqrt{\left(-sin\left(t\right)\right)^{2}+\left(cos\left(t\right)\right)^{2}}$$

  וכמו כן נוכל לחשוב על "וקטור התאוצה":

  $$P''\left(t\right)=\left[\begin{array}{c} -cos\left(t\right)\\ -sin\left(t\right)\end{array}\right]$$

  וכן, נוכל להגדיר:

  $$a\left(t\right)=\left|P''\left(t\right)\right|=1$$

5.1.2 המסילה המשיקה

הגדרה 5.3 בהנתן מסילה גזירה בנקודה, נוכל להגדיר את המסילה המשיקה:

$$L\left(t\right):=P\left(a\right)+P'\left(a\right)\cdot\left(t-a\right)$$

דוגמא

•

$$P\left(t\right)=\left(\begin{array}{c} t\\ -t^{2}+g \end{array}\right),\ -3\leq t\leq3,\ x=f\left(t\right)=t,\ y=g\left(t\right)=-t^{2}+g$$

$$P'\left(t\right)=\left[\begin{array}{c} 1\\ -2t \end{array}\right],\ v\left(t\right)=\sqrt{1+4t^{2}}$$

$$P''\left(t\right)=\left[\begin{array}{c} 0\\ -2 \end{array}\right],\ a\left(t\right)=2$$

5.2 אורך של מסילה

נסתכל על המקרה בו:

$$x=f\left(t\right)=t,\ y=g\left(t\right)$$

בשביל מסילה מ־$a\leq t\leq b$.

ניקח חלוקה P של הקטע $[a,b]$:

$$P:=\left(a=t_{0}<t_{1}<...<t_{n}=b\right)$$

ונביט בנקודות הבאות על המסילה:

$$P_{0},P_{1},...,P_{n-1}$$

אזי האורך - $length$ של המסילה יהיה:

$$\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{n}\alpha\left(P_{i-1},P_{i}\right)$$

נסביר את הכתוב מעלה -

$$P_{i}=\left(\begin{array}{c} f\left(t_{i}\right)\\ g\left(t_{i}\right) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} t_{i}\\ g\left(t_{i}\right) \end{array}\right)$$

α היא פונקצית מרחב אוקלידי הפועלת באופן הבא:

$$\alpha\left(P_{i-1},P_{i}\right)=\sqrt{\left(t_{i}-t_{i-1}\right)^{2}+\left(g\left(t_{i}\right)-g\left(t_{i-1}\right)\right)^{2}}=\left(t_{i}-t_{i-1}\right)\sqrt{1+\left(\frac{g\left(t_{i}\right)-g\left(t_{i-1}\right)}{t_{i}-t_{i-1}}\right)^{2}}$$

נניח ש־g גזירה ברציפות. אזי, לפי לגראנז', עבור g בקטע $[t_{i-1},t_{i}]$ קיים $d_{i}\in[t_{i-1},t_{i}]$ עם:

$$=\sqrt{1+\left(g'\left(d_{i}\right)\right)}\left(t_{i}-t_{i-1}\right)$$

ולכן:

$$\mathcal{L}=\left(P\right)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(g'\left(d_{i}\right)\right)^{2}}\left(t_{i}-t_{i-1}\right)$$

נשים ♡ - זהו סכום רימן של הפונקציה:

$$v\left(t\right)=\sqrt{1+\left(g'\left(t\right)\right)^{2}}$$

הגדרה 5.4 תהי $P:I\to\mathbb{R}^2$ מסילה המקיימת:

$$P(t)\neq P'(t)\,,\ a\leq t<t'\leq b$$

נאמר של־P יש אורך (סופי) אמ"מ הקבוצה $\{\mathcal{L}(P)\}$ עבור כל P חלוקה של הקטע $I=[a,b]$ **חסומה מלמעלה**. במקרה זה:

$$\mathcal{L}(P)=sup\{\mathcal{L}(P)\}$$

משפט 5.5 אם P חלקה[19], אזי:

$$\mathcal{L}(P)\leq\int\limits_a^b v(t)\,dt$$

משפט זה נוכיח בהמשך.

הגדרה 5.6 נאמר שמסילה $P:I\to\mathbb{R}^2$ חלקה אמ"מ:

$$(f')^2+(g')^2>0,\ f,g\in C^1(I)$$

דוגמאות

•

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix},\ P(t)=A+t(B-A)$$

כאשר $0\leq t\leq 1$. או באופן מפורש:

$$P(t)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+t\begin{bmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\end{bmatrix}$$
$$x=f(t)=a_1+t(b_1-a_1)\,,\ y=g(t)=a_2+t(b_2-a_2)$$
$$f'(t)=b_1-a_1,\ g'(t)=b_2-a_2$$
$$v(t)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2},\ \mathcal{L}(P)=\alpha(A,B)$$

•

$$P(t)=\begin{pmatrix}cos(t)\\sin(t)\end{pmatrix},\ t\in[0,2\pi]$$
$$\mathcal{L}(P)=\int\limits_0^{2\pi}1dt=2\pi$$

[19]חלוקה תוגדר בהמשך

•

$$E(t)=\begin{pmatrix} acos(t) \\ nsin(t) \end{pmatrix},\ a,b>0,\ 0\le t\le 2\pi$$
$$x=f(t)=acos(t),\ y=g(t)=bsin(t)$$
$$f'(t)=-asin(t),\ g'(t)=bcos(t)$$
$$\mathcal{L}(E)=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2sin^2(t)+b^2cos^2(t)}d\overset{e=\frac{b}{a}}{=}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-cos^2(t)+e^2cos^2(t)}dt$$
$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+(e^2-1)cos^2(t)}dt\overset{when\ k:=e^2-1}{=}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+kcos^2(t)}dt$$

• דוגמא נוספת ־ צקלואיד: (ציור בהמשך)
לפונקציה זו אין פונקציה אלמנטרית. נסמן את החלק הימני שלה ב־Q. אזי:

$$Q:\begin{cases} x=f(\theta)=a(\theta sin\theta) \\ y=g(\theta)=a(1-cos\theta) \end{cases},\ \theta\in[0,2\pi]$$
$$v(\theta)=\sqrt{a^2(1-cos\theta)^2+a^2sin^2\theta}=a\sqrt{(1-cos\theta)^2+sin^2\theta}=a\sqrt{2-cos\theta}$$

ואיך עושים את האינטגרל?

$$cos(2\alpha)=cos'\alpha-sin^2\alpha=1-sin^2\alpha$$

10.06.2010

13.06.2010 להשלים!!!

נזכור כי רצינו להוכיח:

משפט 5.7 אם P חלקה, אזי:

$$\mathcal{L}(P)\le\int_a^b v(t)\,dt$$

אמרנו בשיעור הקודם כי:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists P\ \left|\int_a^b v-\mathcal{L}(P)\right|<\varepsilon\Rightarrow\int_a^b v=\mathcal{L}(P)$$

הערה 5.8 אורך של מסילה הינו אדטיבי. במילים אחרים:

$$\underset{[a,b]}{\mathcal{L}}(P)=\underset{[a,c]}{\mathcal{L}}(P)+\underset{[c,b]}{\mathcal{L}}(P)$$

ההוכחה לתכונה זו מושארת כתרגיל.

נוכיח אם כך את המשפט:

$$\int_a^b v=\sum_{i=1}^n\int_{t_i-1}^{t_i}v,\ \mathcal{L}(P)=\sum_{i=1}^n\alpha(P_{i-1},P_i)$$

מספיק להוכיח:

$$\int_{t_i-1}^{t_i} v \geq \alpha\left(P_{i-1}, P_i\right)$$

נגדיר:

$$F:[a,b]\to\mathbb{R}^2,\ F(t)=\begin{bmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F'(t)=\begin{bmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix},\ \int_a^b F:=\begin{bmatrix} \int_a^b f_1\\ \int_a^b f_2\end{bmatrix},\lim_{t\to t_0}F(t)=\begin{bmatrix} \lim\limits_{t\to t_0} f_1(t)\\ \lim\limits_{t\to t_0} f_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c\\ c\end{bmatrix}=C\in\mathbb{R}^2\Rightarrow C\cdot\int_a^b F(t)\,dt=\int_a^b C\cdot F(t)\,dt$$

$$C=\int_a^b F\Rightarrow |C\cdot C|=\left|\int_a^b C\cdot F(t)\,dt\right|\leq\int_a^b |C\cdot F(t)|\,dt$$

אם $C=0\in\mathbb{R}^2$ - יש שיוויון. אם $C\neq 0$ - יש אי שיוויון.

נראה מוכר? אי שיוויון קושי שוורץ מלינארית 2!

ניקח את וקטור המהירות $F=P'$. אזי נקבל:

$$\alpha\left(P(a),P(b)\right)=\|P(b)-P(a)\|=\left\|\int_a^b P'(t)\,dt\right\|\leq\int_a^b \underbrace{\|P'(t)\|}_{U(t)}dt=\int_a^b v$$

5.3 מסילות שקולות

הגדרה 5.9 שתי מסילות $Q:[c,d]\to\mathbb{R}^2,\ P:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ תקראנה שקולות,

אמ"מ קיימת $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ גזירה ברציפות כך ש־$\varphi'>0$[20], וכמו כן $\varphi(c)=a,\ \varphi(d)=b$ המקיימת:

$$[c,d]\xrightarrow{\varphi}[a,b]\xrightarrow{P}\mathbb{R}^2,\ Q=P\circ\varphi$$

ומכיוון ו־φ הפיכה, זהו יחס סימטרי. קל להוכיח גם טרנזיטיביות,

ועל כן זהו יחס שקילות. ההוכחה מושארת כתרגיל.

תרגיל נוסף הראו כי אם P,Q מסילות שקולות, אזי:

$$\mathcal{L}(P)=\mathcal{L}(Q)$$

[20] כלומר מונוטונית - ולכן הפיכה

5.3.1 פרמטריזציה באמצעות האורך

הגדרה 5.10 תהי $P:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ מסילה חלקה. נגדיר:

$$S(a)=0,\ S(b)=L=\mathcal{L}(P)$$
$$t\in[a,b]\ \ S(t)=\int_a^t v,\ S'(t)=v(t)$$
$$[a,b]\underset{S^{-1}}{\overset{S}{\rightleftarrows}}[0,L],\ \frac{ds}{dt}=v(t)$$
$$[0,L]\overset{S^{-1}}{\to}[a,b]\overset{P}{\to}\mathbb{R}^2$$

5.3.2 עקמומיות

נתונה $P:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ מסילה חלקה.

מכיוון והיא חלקה, וקטור המהירות אינו מתאפס, ולכן נוכל להגדיר וקטור משיק $T(t)$.

הגדרה 5.11 בתנאים הנ"ל, וקטור הנורמה יוגדר להיות:

$$N(t)=R_{\frac{\pi}{2}}(T(t))$$

כלומר רוטציה ב־$\frac{\pi}{2}$ רדיאנים של וקטור המשיק.

אזי:

$$P''(t)=v'(t)\cdot T(t)+v(t)\cdot T'(t)$$
$$T(t)=\begin{bmatrix}cos\theta(t)\\ sin\theta(t)\end{bmatrix},\ T'(t)=\begin{bmatrix}-sin\theta(t)\\ cos\theta(t)\end{bmatrix}\frac{d\theta}{dt}=N(t)\cdot\frac{d\theta}{dt}$$
$$\Rightarrow P''(t)=v'(t)\cdot T(t)+v(t)\cdot\frac{d\theta}{dt}\cdot N(t)\overset{v(t)=\frac{dS}{dt}}{=}\left(\frac{d^2S}{dt^2}\right)\cdot T(t)+\frac{dS}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\cdot N(t)\ (*)$$

כיצד נתקדם מכאן? נראה כי:

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dS}\cdot\frac{dS}{dt}$$

בצורה הבאה:

$$[a,b]\overset{S}{\to}[0,L]\overset{P\circ S^{-1}}{\to}\mathbb{R}^2$$

כאשר תוצאה זו היא בקורדינטות קוטביות. אזי:

$$\theta(t)=\theta(P(t))$$

אזי הביטוי מעלה שווה:

$$(*)=\left(\frac{d^2S}{dt^2}\right)\cdot T(t)+\left(\frac{dS}{dt}\right)^2\cdot\frac{d\theta}{dt}\cdot N(t)$$

המשמעות הגיאומטרית של הביטוי:

קצב השינוי של הזווית כפונקציה של המרחק שמשרטטים על המסלול.

הגדרה 5.12 אזי, נסמן את העקמומיות של המסילה בנקודה המתאימה ל-t היא:

$$\mathcal{K}\left(t\right)=\frac{d\theta}{dt}$$

נכפול את הוקטור הזה בוקטור הנורמה ונקבל:

$$P'\left(t\right)\cdot N\left(t\right)=\left(\frac{dS}{dt}\right)^{2}\cdot\frac{d\theta}{dS}=\left[\begin{array}{c}f''\left(t\right)\\g''\left(t\right)\end{array}\right]\cdot\frac{\left[\begin{array}{c}-g'\left(t\right)\\f\left(t\right)\end{array}\right]}{\frac{dS}{dt}}$$

$$\Rightarrow\frac{d\theta}{dS}=\frac{f'\left(t\right)\cdot g''\left(t\right)-g'\left(x\right)\cdot f''\left(t\right)}{\left[\left(f'\left(t\right)\right)^{2}+\left(g'\left(t\right)\right)^{2}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

"דוגמונת":

$$P\left(t\right):=\left(\begin{array}{c}rcos\left(t\right)\\rsin\left(t\right)\end{array}\right)$$

$$f'\left(t\right)=-rsin\left(t\right),\ f''\left(t\right)=-rcos\left(t\right)$$

$$g'\left(t\right)=rcos\left(t\right),\ g''\left(t\right)=-rsin\left(t\right)$$

$$\mathcal{K}\left(t\right)=\frac{d\theta}{dS}=\frac{\left(-sin\left(t\right)\right)\left(-sin\left(t\right)\right)\cdot r^{2}-\left(cos\left(t\right)\right)\left(-cos\left(t\right)\right)\cdot r^{2}}{\left(r^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{r^{2}}{r^{3}}=\frac{1}{r}$$

הגדרה 5.13 נגדיר את רדיוס העקמומיות $\rho\left(t\right)$ להיות:

$$\rho\left(t\right)=\frac{1}{\left|\mathcal{K}\left(t\right)\right|}$$

5.4 אפיון לבאג לאינטגרביליות

עד כה, מה ראינו על אינטגרביליות?

תהי $f \in B\left[a,b\right]$. אזי, על פי קושי:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P\ \mathcal{U}\left(P\right) - \mathcal{L}\left(P\right) < \varepsilon \Leftrightarrow \sum \left(M_i - m_i\right) \Delta x_i < \varepsilon$$

הגדרה 5.14 $A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא בעלת מידה אפס אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סדרת קטעים פתוחים $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ כך שמתקיים:

1. $A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} I_n$.
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(I_n\right) < \varepsilon$.

דוגמאות

1. יהיו קבוצות סופיות: $A = \left\{x_1, ..., x_n\right\}$.
בהנתן $\varepsilon > 0$, יהי $x_i \in I_i$. נבחר את I_i כך ש־$\mathcal{L}\left(I_i\right) < \frac{\varepsilon}{N}$.
2. תהי A קבוצה ברת מניה: $A = \left\{x_1, ..., x_n, ...\right\}$.
בהנתן $\varepsilon > 0$, יהי $x_i \in I_i$. נבחר את I_i כך ש־$\mathcal{L}\left(I_i\right) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. אזי:
$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(I_i\right) < \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon$$
3. תהי $A = A_n$, כאשר $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה של קבוצות כך ש־A_n בעלות מידה 0.
אזי A בעלת מידת אפס (A_n בת מניה). מדוע?
בהנתן $\varepsilon > 0$, נבחר $\sum I_{1i} < \frac{\varepsilon}{2}$, $I_{11}, ..., I_{1n}$ סדרה של קטעים המכסה את A_1,
וקבוצות נוספות באותה צורה שיכסו את $A_2, ..., A_n$.
4. תהי $B \subseteq A$, A בעלת מידת אפס, אז B בעלת מידה אפס.

הגדרה 5.15 $A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא בעלת תכולה אפס אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיים קבוצת קטעים **סופית** $\left\{I_1, ..., I_n\right\}$ כך שמתקיים:

1. $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} I_i$.
2. $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}\left(I_i\right) < \varepsilon$.

הגדרה 5.16 תהי $f \in B\left[a,b\right]$, ויהי $\alpha > 0$.

נאמר ש־f היא α רציפה ב־$x \in \left[a,b\right]$ אמ"מ

$$\exists \delta > 0\ \forall y, z \in \underset{\left[x-\delta, x+\delta\right]}{\left(x-\delta, x+\delta\right)},\ \left|f\left(y\right) - f\left(z\right)\right| < \alpha$$

הערה 5.17 f רציפה ב־$x \in \left[a,b\right]$ אמ"מ לכל $\alpha > 0$, f α רציפה ב־x.

הגדרה 5.18

$$D_\alpha := \left\{x \in \left[a,b\right] \middle| f\ not\ continuous\ at\ x\right\}$$

הערה 5.19 אם $0<\alpha<\beta$, אזי $D_\beta \subseteq D_\alpha$.

אם f רציפה ב־x, אזי f αרציפה ב־x (לכל α), $D \subseteq D_\alpha$.

הערה 5.20 אם f איננה רציפה ב־x, אזי קיים $\alpha>0$ כך ש־$\alpha \in D_\alpha$. אז:

$$\cup_{n\in N} D_{\frac{1}{n}} = D = \cup D_{\alpha,\ 0<\alpha\in\mathbb{R}}$$

למה 5.21 תהי $f \in R\left[a,b\right]$. אזי לכל $\alpha>0$, D_α בעלת תכולה אפס.

הוכחה: בהנתן $\varepsilon>0$, נבחר $\varepsilon>\varepsilon'>0$. אזי:

$$\begin{aligned}
&\exists P:\ \mathcal{U}\left(P\right)-\mathcal{L}\left(P\right)<\alpha\varepsilon' \Leftrightarrow \sum\left(M_i-m_i\right)\Delta x_i<\alpha\varepsilon' \\
&i\in B \Leftrightarrow D_\alpha n\left(x_{i-1},x_i\right)\neq\phi,\ D_\alpha\subseteq\left(U_{i\in B}\left(x_{i-1},x_i\right)\right)\cup\left(a=x_0,x_1,...,x_n=b\right) \\
&i\in B \Rightarrow \alpha\leq M_i-m_i \\
&\alpha\sum_{i\in B}\Delta x_i\leq\sum_{i\in B}\left(M_i-m_i\right)\Delta x_i \overset{\sum_{i\in B}\Delta x_i<\varepsilon'}{\leq} \sum\left(M_i-m_i\right)<\alpha\varepsilon'
\end{aligned}$$

יהי $x\in I_i$ קטעים פתוחים עבורם מתקיים:

$$\begin{aligned}
&S'<\mathcal{L}\left(I_i\right)<\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{n+1} \\
&\Rightarrow D_\alpha\subseteq\cup_{i\in B}\left(x_{i-1},x_i\right)+\cup_{i=0}^{n}I_i \\
&\sum_{i\in B}\mathcal{L}\left(x_{i-1},x_i\right)+\sum_{i=0}^{n}\mathcal{L}\left(I_i\right)<\varepsilon'+\varepsilon-\varepsilon'=\varepsilon
\end{aligned}$$

■

מסקנה 5.22 אם f אינטגרבילית אזי D בעלת מידה אפס.

הגדרה 5.23 $A\subseteq\mathbb{R}$ תקרא בת מנייה אמ"מ קיימת סדרה

$$\left\{x_n\right\}=A,\ \left[x:\mathbb{N}\rightarrow A\right]$$

הגדרה 5.24 תהי $f\in B\left[a,b\right]$. נאמר ש־f היא α רציפה במ"ש ב־$\left[a,b\right]$אמ"מ:

$$\exists\delta>0,\ \forall y,z\in\left[a,b\right],\ \left|y-z\right|\leq\delta\Rightarrow\left|f\left(y\right)-f\left(z\right)\right|<\alpha$$

משפט 5.25 תהי f חסומה. אם f α רציפה בכל נקודה ב־$x\in\left[a,b\right]$, f רציפה במ"ש ב־$\left[a,b\right]$.

למה 5.26 לכל $\alpha>0$, D_α קבוצה סגורה.

במילים אחרות, לכל $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה מתכנסת ב־D_α לגבול x, אז גם $x\in D$.

ההוכחה ללמה מושארת כתרגיל.

משפט 5.27 אם D בעלת מידה אפס, אזי D_α בעלת תכולה אפס לכל $\alpha>0$.

5.4.1 הלמה של היינה בורל

למה 5.28 תהי $B \subseteq [a,b]$ סגורה. תהי $B = \cup_{j \in J} I_j$, כאשר I_j קטע פתוח (וחסום). אזי קיים תת כיסוי סופי. במילים אחרות, קיימים $j_1, ..., j_n$ עבורם מתקיים $B \subseteq I_{j1} \cup ..., \cup I_{jn}$.

הוכחה: נניח בדרך בשלילה שקיים כיסוי כזה כך שכל תת כיסוי סופי אינו מכסה את B.
נביט בקטעים $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. יהי Q_1 תת קטע כזה ש־$B \cap Q_1$ איננו ניתן לכיסוי ע"י תת כיסוי סופי.
נבנה סדרה של קטעים $... \subseteq Q_n \subseteq Q_{n+1}$ בעלת התכונות הבאות:

1. $Q_0 = [a,b]$.
2. $|Q_n| = \frac{(b-a)}{2^n}$.
3. $B \cap Q_n \neq \phi$ איננו ניתן לכיסוי סופי.

לפי קנטור, יהי $x \in \cap_{n \in \mathbb{N}} Q_n$.

טענה 5.29 $x \in B$.

הוכחה: יהי $x \in Q_n,\ x_n \in B \cap Q_n$.

$$|x_n - x| \leq \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow x_n \to x$$

B סגורה, ולכן $x \in B$. ■

אזי קיים $j \in J$ עם $x \in I_j$ ועם $n \in \mathbb{N}$, כך שמתקיים:

$$\frac{b-a}{2^n} = \mathcal{L}(Q_n) < \frac{1}{2}\mathcal{L}(I_j) \Rightarrow Q_n \subseteq I_j$$

וזו סתירה, שכן במצב זה די לנו בקטע אחד I_j ע"מ לכסות את Q_n. ■

מסקנה 5.30 אם D_α בעלת מידה אפס, אזי D_α בעלת תכולה אפס.

5.4.2 תנאי חדש לאינטגרביליות

17.06.2010

משפט 5.31 תהי $f \in B[a,b]$. אם D בעלת מידה אפס, אזי $f \in R[a,b]$.

הוכחה: בהנתן $\varepsilon > 0$. נבנה חלוקה P עם $\mathcal{U}(P) - \mathcal{L}(P) < C \cdot \varepsilon$.
יהי $0 < \alpha < \varepsilon$. אזי $D_\alpha \subset \cup_{i=1}^{n} I_i$ איחוד זר של קטעים פתוחים עם:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}(I_n) < \varepsilon$$

נתבונן ב־$[a,b] \setminus (\cup_{i=1}^{n} I_i)$ שהינו איחוד זר של קטעים סגורים:

$$J_1, J_2, ..., J_m$$

נתבונן בכיסוי של הקטע $[a,b]$, המורכב מקטעים סגורים:

$$J_1, ..., J_m, \overline{I}_1, ..., \overline{I}_m$$

כאשר הקטעים $\overline{I}_1, ..., \overline{I}_m$ הם אותם קטעים $I_1, .., I_m$ אבל מכילים גם את הקצוות.

כיסוי זה משרה חלוקה P של של $[a,b]$:

$$\mathcal{U}(P)-\mathcal{L}(P)=\underbrace{\sum_{1\le j\le m}\left(M_j-m_j\right)\Delta x_j}_{2}+\underbrace{\sum_{1\le i\le n}\left(M_i-m_i\right)\Delta x_i}_{1}$$

עתה נחסום את שני הקבוצות הנ"ל.

יהיו $M<f<m$. אזי:

$$1\le (M-m)\sum_{1\le i\le m}x_i\le (M-m)\,\varepsilon$$

בנוגע ל־2:

$$J_1,...,J_m\subset[a,b]\setminus D_\alpha$$

במילים אחרות, f רציפה ב־$J_1,...,J_m$.

לכן f α רציפה במ"ש באיחוד שלהם. אזי:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall y,z\in J_1\cup...\cup j_m:\ \ |y-z|\le\delta\Rightarrow|f(y)-f(z)|<\alpha$$

נעדכן את P כך ש־$\lambda(P)<\delta$. אזי:

$$2\le\alpha\cdot\sum_{j=1}^{m}\Delta x_i<\varepsilon\,(b-a)$$

אזי בסה"כ:

$$\mathcal{U}(P)-\mathcal{L}(P)<(M-m)\,\varepsilon+\varepsilon\,(b-a)$$

ולכן הפונקציה אינטגרבילית, כנדרש! ■