

סיכום - אינפי 1

12 בפברואר 2010



מרצה: אודי דה שליט

מתרגלים: ינאי ג', איב גודין
אין המרצה או המתרגלים קשורים לסיכום זה בשום דרך.
ציורי הקמירות והקעירות באדיבות סיגל מעון.

(מוקדש שוב לנריה אור, ולגורל)

הערות יתקבלו בברכה - noga.rotman@gmail.com

תוכן עניינים

5	הקדמה וקצת הסברים	0.1
5	פרטי המרצה	0.1.1
5	איך ומה נלמד?	0.1.2
5	קצת אינטואיציה - מתוך השיעור הראשון לקורס הקיץ 2009	0.2
6	מהם למען השם δ, ε , ולמה נראה אותן בכל פינה באינפי?	0.2.1
7	המספר	1
7	"מילון"	1.0.2
7	האקסיומות של Peano	1.1
7	קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$	1.2
8	קבוצת השלמים $\mathbb{Z}$	1.3
8	שדה הרציונליים $\mathbb{Q}$	1.4
8	אקסיומות השדה	1.4.1
9	יחס הסדר ותכונותיו	1.4.2
10	אי שיוויון המשולש	1.4.3
10	אי שיוויון המשולש ההפוך	1.4.4
10	אי שיוויון הממוצעים	1.4.5
10	שדה הממשיים $\mathbb{R}$	1.5
11	יחס הסדר	1.5.1
11	כיצד $\mathbb{Q}$ משוכן ב- $\mathbb{R}$	1.5.2
12	קבוצות חסומות, חסמים ותכונת השלמות	1.6
12	סימונים של קטעים	1.6.1
13	חסם עליון, חסם תחתון, אקסיומת השלמות	1.6.2
19	סדרות	2
19	הגבול	2.1
22	אריתמטיקה של סדרות	2.2
24	יחס סדר בין סדרות	2.3
24	משפט הסנדוויץ'	2.3.1
27	סדרות מונוטוניות	2.4
28	המספר e	2.4.1
30	הלמה של קנטור (או איך צדים אריה במדבר)	2.4.2
31	תתי סדרות	2.5
33	משפט בולצנו ויירשטראס ומשפט הנובע ממנו	2.5.1
35	קריטריון קושי להתכנסות	2.5.2
37	גבול עליון וגבול תחתון - $\limsup, \liminf$	2.6
38	איפיונים בעזרת סביבות ε ומסקנות	2.6.1
39	חזקות ממשיות	2.7

45	סדרות לא (לאו דוקא) חסומות וגבולות אינסופיים	2.8
46	משפט בולצאנו ויירסטראס המוכלל	2.8.1
46	גבול עליון, תחתון באינסוף	2.8.2
47	סדרות מונוטוניות (לאו דוקא חסומות)	2.8.3
47	משפט הסנדוויץ' המוכלל	2.8.4
47	אריתמטיקה עם אינסוף - בתרגיל 6	2.8.5
48	תרגולים	2.9
53	פונקציות	3
54	הרכבה של פונקציות	3.0.1
54	הפונקציות האלמנטריות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$	3.0.2
54	פונקציות מונוטוניות, פונקציות הפוכות	3.0.3
55	הפונקציות הטריגונומטריות	3.0.4
56	גבולות של פונקציות ורציפות	3.1
56	הגדרת הגבול של פונקציה f בנקודה x_0 לפי קושי	3.1.1
56	רציפות ונקודות אי רציפות	3.1.2
58	הגדרת הגבול על פי היינה, השקילות לקושי ומסקנות	3.2
60	קריטריון קושי לקיום גבול	3.2.1
61	דיון פילוסופי בנושא תכונות של פונקציות	3.2.2
62	מעט על הפונקציות הטריגונומטריות	3.2.3
63	משפט הסנדוויץ' לגבולות של פונקציות	3.2.4
65	גבולות חד צדדיים ועוד על אי רציפות	3.3
66	סוגי נקודות אי רציפות	3.3.1
66	על אריתמטיקה של גבולות	3.3.2
68	רציפות בקטע	3.4
69	משפט ערך הביניים	3.4.1
70	הרכבה של פונקציות (Composition)	3.4.2
71	פונקציות חסומות	3.4.3
72	משפט ויירשטראס הראשון	3.4.4
72	משפט ויירשטראס השני	3.4.5
73	עוד על קטעים	3.4.6
73	פונקציות מונוטוניות	3.5
75	פונקציות הפוכות ורציפותן	3.6
77	רציפות a^x ו- $\log_a$ כאשר $0 < a \neq 1$	3.6.1
78	רציפות במידה שווה	3.7
78	הדוגמא הטיפוסית ודוגמאות נוספות	3.7.1
80	משפט קנטור ומשפטים נוספים	3.7.2
81	גבולות אינסופיים, או גבול כאשר $x \rightarrow \infty$	3.8
81	גבול אינסופי בנקודה	3.8.1

83	גבול באינסוף	3.8.2
84	רציפות במ"ש כאשר $x \rightarrow \infty$	3.8.3
84	סדרי גודל של גידול כאשר $x \rightarrow \infty$	3.8.4
85	הנגזרת	3.9
89	קירובים מסדר 0 ומסדר ראשון	3.9.1
91	אריתמטיקה של נגזרות	3.9.2
95	קירובים נומריים של פונקציות	3.10
95	חישוב נגזרות מסדר גבוה	3.11
96	נוסחאת לייבניץ לנגזרת מסדר n של מכפלה של שתי פונקציות	3.11.1
96	המשפטים היסודיים על פונקציות גזירות בקטע	3.12
96	משפט פרמה	3.12.1
97	משפט רול	3.12.2
98	משפט לגראנג'	3.12.3
98	משפט קושי	3.12.4
99	משפט לגראנג' - שימושים	3.12.5
101	משפט דרבו	3.12.6
103	חקר פונקציות	3.13
104	עליה וירידה בנקודה	3.13.1
105	אקסטרמום	3.13.2
107	כלל לופיטל	3.14
107	המקרה הבסיסי	3.14.1
108	כלל לופיטל באינסוף	3.14.2
109	כלל לופיטל לגבולות מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$	3.14.3
110	קמירות וקעירות	3.15
111	משפט שלושת המיתרים ומשפטים נוספים	3.15.1
115	הקשר בין המיתרים לממוצע משוקלל	3.15.2
116	מבחן הנגזרת השנייה	3.15.3
117	אי שיוויונים	3.15.4
118	נקודת פיתול	3.15.5
119	קמירות וקעירות בקטע	3.15.6
121	תרגולים	3.16

0.1 הקדמה וקצת הסברים

סיכום זה יכול, בנוסף לחומר מהשנה הזו, גם חומר מהשנה שעברה. ניתן לדלג על האינטואיציה מטה - אבל אולי זה דווקא יעזור. מושאר לשיקול הדעת של הקורא, למרות שמומלץ, במידה והקורא בוחר לוותר על האינטואיציה, לעבור על ההסבר על δ - ε .

0.1.1 פרטי המרצה

אודי דה שליט - DeShalit@math.huji.ac.il

ספרים מומלצים - מייזלר, הוכמן, הפתוחה.

שעות קבלה - יום חמישי, 9:00-10:00, חדר 102 בניין מנצ'סטר (מתמטיקה).

0.1.2 איך ומה נלמד?

נדבר על מספר ופונקציה, כאשר נדבר רק על ממשיים.

לא נשתמש במחשבון¹, או בדפי נוסחאות, והכי חשוב - לא נלמד שום דבר בע"פ. זה פשוט לא יעזור.

נתחיל ממושגי יסוד (פרימיטיביים) והנחות יסוד (אקסיומות).

0.2 קצת אינטואיציה - מתוך השיעור הראשון לקורס הקיץ 2009

תהינה A, B קבוצות.

פונקציה f מ- A ל- B הינה דרך להתאים לכל איבר $a \in A$ איבר $f(a) \in B$.

פונקציה ממשית היא פונקציה שבה A, B הן קבוצות של מספרים ממשיים (בדרך כלל קטעים), לדוגמא: $[a, \infty)$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) , ...

הגרף של f הוא אוסף הזוגות הסדורים $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ כתת קבוצה של $A \times B$.

הגדרה 0.1 פונקציה f הינה תת קבוצה של $A \times B$

המקיימת שלכל $a \in A$ יש $b \in B$ אחד ויחיד

כך ש- (a, b) שייך אליה.

נסמן $b \in f(a)$.

הגדרה 0.2 סדרה ממשית היא מקרה פרטי של פונקציה,

כאשר תחום ההגדרה הינו $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

והטווח הינו R .

כלומר, $a(n) = a_n, a : N \rightarrow R$.

הגדרה 0.3 תהי f פונקציה המוגדרת בקטע פתוח, $x_0 \in (a, b)$.

הגבול של f ב- x_0 הוא L

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x - x_0| < \delta$ אז $|f(x) - L| < \varepsilon$.

נוכל גם לסמן $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ או $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L$.

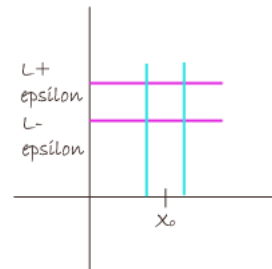
¹אין להשתמש במחשבון - זה כמו לשחק במיקרוויב - אודי לקהל הסטודנטים

0.2.1 מהם למען השם δ , ולמה נראה אותן בכל פינה באינפי?

בתחילה נראה את ϵ בנושא חסמים.

נשים לב שבכל מקום, חשיבות ה- ϵ היא כאשר הערך שלו קטן מאוד, בחלוקה העדינה (בערכים גדולים קל לראות...).

נוכל להביט בהמחשה גרפית של הגדרת הגבול של פונקציה:



כלומר - הגדרת הגבול בעצם מגבילה לכל את הפונקציה בתוך מרווח קטן מאוד מהגבול.

כדי להראות ש- M אינו גבול של f ב- x_0 , די למצוא $\epsilon > 0$ ($x_0 + \epsilon, x_0 - \epsilon$ מופיעים בורוד) אחד כך שלכל $\delta > 0$ (מופיעים בתכלת) $0 < |x - x_0| < \delta$ עברו $|f(x) - M| \geq \epsilon$.

תחילה:

1.0.2 "מילון"

קבוצה - $\{\}$

$$A = \{\}, B = \{a \in A | \text{When...}(tnai)\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$
 מערכת הטבעיים -

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$
 מערכת השלמים -

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \right\}$$
 הרציונליים "שברים פשוטים" -

$$\mathbb{R} = \{\text{המספרים הממשיים}\}$$

 $\forall$ - לכול $\exists$ קיים

1.1 האקסיומות של Peano

הגדרה 1.1 העוקב של n הוא $n|$.

$$1| = 2, 103| = 104$$
 דוגמא:

הנחות יסוד

- 1 אינו עוקב של אף מספר
- כל מספר שונה מ-1 הינו עוקב של מספר אחד ויחיד.
- עיקרון האינדוקציה - כל קבוצה חלקית של $\mathbb{N}$, המכילה את 1, ובנוסף מכילה את העוקב של כל איבר שלה, מתלכדת עם כל $\mathbb{N}$.

1.2 קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$

הגדרת החיבור

 $m + n$ כאשר m קבוע ו- n אינדוקציה על m :

$$m + 1 := m|$$

$$m + n| := (m + n)|$$

הגדרת הכפל

באינדוקציה:

$$m \cdot 1 := m$$

$$m \cdot n| := m \cdot n + m$$

1.3 קבוצת השלמים $\mathbb{Z}$

נסמן:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$$
$$-\mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

מרחיבים את פעולות החיבור והכפל, ומגדירים את פעולת החיסור:

$$n - m = n + (-m)$$

1.4 שדה הרציונליים $\mathbb{Q}$

נסמן:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

מזהים שני ביטויים כאלה (כלומר שני ביטויים כלשהם שווים) ו

אם הביטוי המצומצם להם שווה.

נרחיב את הפעולות:

מגדירים $\frac{a}{b}$: ($b \neq 0$)

$$\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{p'}{q'}\right)} = \frac{pq'}{p'q}$$

הגדרת החיבור:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

היות וההגדרה תלויה בייצוג,

יש להראות ש- $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ וכמו כן $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ שני ייצוגים שונים,

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

20.10.2009

1.4.1 אקסיומות השדה

ישנן תשע תכונות מיוחדות ל- $\mathbb{Q}$,

הנקראות "אקסיומות השדה"³, והן:

1. חוק החילוף לחיבור

2. חוק הקיבוץ

3. נייטרליות האפס

4. קיום נגדי

5. חילוף לכפל

6. קיבוץ לכפל

³הן כמובן רלוונטיות לכל שדה, כפי שכבר ראינו בלינארית.

$$7. \forall x \ x \cdot 1 = x$$

$$8. \text{ קיום הופכי } \forall x \neq 0 \exists x' \ x x' = 1$$

$$9. \text{ חוק הפילוג משמאל } x \cdot (y + z) = xy + xz$$

נניישים את האקסיומות שלנו על פעולה חדשה. נסמן:

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$$

מחוק הפילוג משמאל נקבל:

$$= (x + y)x + (x + y)y$$

מחוק הפילוג מימין (חילוף לכפל + הפילוג משמאל):

$$= xx + yx + xy + yy$$

ומחילוף לכפל, לבסוף, נקבל:

$$= x^2 + 2yx + y^2$$

1.4.2 יחס הסדר ותכונותיו

על $\mathbb{Q}$ מוגדר יחס הסדר $<$,

$x < y$ אם ורק אם $y - x$ חיובי.

תכונות הסדר (טעונות הוכחה):

1. טריכוטומיה: לכל אחד אחד x, y אחד ורק אחד מהמצבים הבאים נכון:

$$y < x \text{ או } x = y, \ x < y$$

2. טרנזיטיביות:

$$x < y, \ y < z \Rightarrow x < z$$

$$3. \ x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

$$4. \ x < y, \ 0 < z \Rightarrow xz < yz \quad -y < -x$$

5. צפיפות:

$$\text{אם } x < y \text{ קיים } z \text{ כך ש: } x < z < y$$

6. ארכימדיות:

$$\text{לכל } x \text{ קיים } n \text{ טבעי כך ש-} x < n$$

$$\text{הגדרה 1.2} \quad \max \{a, b\} = \begin{cases} a & a < b \\ b & a = b \\ b & a > b \end{cases}$$

$$x < y \text{ או } x = y \Leftrightarrow x \leq y$$

$$\text{הגדרה 1.3} \quad \text{הערך המוחלט } - \quad |a| = \max \{a, -a\}$$

1.4.3 אי שיוויון המשולש

משפט 1.4

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

הוכחה: $x + y \leq |x| + |y| \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq |x| \\ y \leq |y| \end{cases}$ (א"ש א).

וכנ"ל $-x - y \leq |x| + |y| \Leftrightarrow \begin{cases} -x \leq |x| \\ -y \leq |y| \end{cases}$ (א"ש ב).

ולכן מא"ש א' וב'

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

22.10.2009

1.4.4 אי שיוויון המשולש ההפוך

משפט 1.5

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

הוכחה: בתרגיל 2

1.4.5 אי שיוויון הממוצעים

משפט 1.6

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a + b}{2}$$

הוכחה? אולי בהמשך, כרגע ניתן ללא.

1.5 שדה הממשיים $\mathbb{R}$

26.10.2009

הגדרה 1.7 מספר ממשי הינו מספר המיוצג על ידי פיתוח עשרוני אינסופי:

$$\pm b.a_1a_2a_3\dots$$

כאשר מזהים פיתוח המסתיים ב- $a_k0000000$

עם הפיתוח המתלכד איתו עד הספרה ה- k ומסתיים $a'_k99999\dots$

$$\text{כאשר } a'_k = a_k - 1.$$

לדוגמא:

$$5.029999\dots = 5.030000\dots$$

המשימות שלנו:

• הרחבת 4 פעולות החשבון מ- $\mathbb{Q}$ ל- $\mathbb{R}$.

• הרחבת יחס הסדר $<$.

• כיצד $\mathbb{Q}$ משוכן ב- $\mathbb{R}$.

לגבי הרחבת פעולות החשבון -

פשוט ואינטואיטיבי, ולא נתעכב עליהם בקורס.

1.5.1 יחס הסדר

הגדרה 1.8 יהיו x, y שני מספרים ממשיים חיוביים שונים. נאמר ש- $y < x$ אם במקום הראשון בו הפיתוחים שלהם שונים, עומדת ב- x ספרה קטנה יותר. לדוגמא: $3.141592 < 3.14160$. אם x, y שליליים אזי $x < y \Leftrightarrow -x < -y$. אם אחד שלילי והשני חיובי או אפס, ברור.

1.5.2 כיצד $\mathbb{Q}$ משוכן ב- $\mathbb{R}$

משפט 1.9 הפעלת האלגוריתם של חילוק ארוך מאפשרת ליחס לכל רציונלי $\frac{p}{q}$ פיתוח עשרוני סופי או אינסופי, אבל בכל מקרה מחזורי מאורך q .

הוכחה: מספר השאריות באלגוריתם הינו סופי, ולכן בשלב כלשהוא, אם האלגוריתם לא מסתיים, הוא נכנס ל-"loop".

צריך להוכיח:

אם ייחסנו ל- $\frac{p}{q}$ את הפיתוח העשרוני $x = b.a_1a_2\dots$, אז $x = \frac{p}{q}$, כלומר $q \cdot x = p$ (כאשר פעולת הכפל ב- $\mathbb{R}$). כל פיתוח עשרוני אינסופי (לא סופי) שאיננו מחזורי, מייצג מספר ממשי אי רציונלי. $x = 0.10100100010000\dots$

טענה 1.10 $x \notin \mathbb{Q}$.

הוכחה: הראו שהפיתוח הנ"ל אינו מחזורי.

9 אקסיומות השדה ו-5 אקסיומות הסדר נשמרות גם ב- $\mathbb{R}$.

טענה 1.11 יהיו $x < y$ שני מספרים ממשיים שונים.

אז ישנו r רציונלי כך ש- $x < r < y$.

הוכחה: איך נוכיח? נבנה r שכזה:

נניח, לשם פשטות, $x \leq 0$.

$$x = x_0.x_1x_2x_3\dots, y = y_0.y_1y_2y_3\dots$$

מאחר ו- $x < y$ הספרה הראשונה שלהן שונה.

נאמר הספרה ה- k מקיימת $x_k < y_k$ (הגדרת $<$).

כמו כן, נניח, בלי הגבלת הכלליות, כי הפיתוחים המייצגים את x ו- y אינם מסתיימים ב-999.

אם כך, יש ספרה x_l עבור $k < l$ שאינה 9.

יהי r מספר המתלכד עם x עד המקום ה- l .

במקום ה- l עומדת בו הספרה $x_l + 1$ (ואח"כ אפסים).

קל לראות, שהמספר הנ"ל הוא בין x ו- y .

⁴תרגיל: דיון במקרים האחרים

1.6 קבוצות חסומות, חסמים ותכונות השלמות

קבוצה A של מספרים ממשיים $\mathbb{R} \supseteq A$.

הגדרה 1.12 קבוצה A נקראת חסומה מלעיל אם ישנו מספר ממשי M , כך שלכל $a \in A$ $a \leq M$.

הגדרה 1.13 קבוצה A נקראת חסומה מלרע אם ישנו מספר ממשי m , כך שלכל $a \in A$ $a \geq m$.

דוגמאות:

$\mathbb{N}$ חסומה מלרע אך אינה חסומה מלעיל.

$\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\} = \{1 - \frac{1}{n} | n = 1, 2, 3, \dots\}$ חסומה מלעיל ומלרע.

הגדרה 1.14 חסם מלעיל (מלרע) של A הינו מספר M (m)

המקיים $a \leq M$ ($m \leq a$) לכל $a \in A$.

חסם מלעיל (מלרע) אינו יחיד -

אם M חסם מלעיל (m חסם מלרע)

כל $M' < M$ (כל $m' < m$) גם כן חסם מלעיל (מלרע).

הגדרה 1.15 $\max A$ הינו המקסימום של A .

אם הוא קיים, הוא איבר $\alpha \in A$ המקיים $a \leq \alpha$ לכל $a \in A$.

בצורה דומה, $\min A$ הינו המינימום של A .

הערה 1.16 מקסימום, אם הוא קיים, הינו חסם מלעיל (כנ"ל עבור חסם מלרע).

בניגוד לחסם מלעיל, מקסימום, אם הוא קיים, יחיד.

הערה 1.17 יש קבוצות חסומות מלעיל ללא מקסימום, למשל:

$$A = \{a | a < 0\}$$

מדוע?

אילו היה לה מקסימום α , אזי $\alpha < 0$, אזי $\frac{\alpha}{2} < 0$, ולכן $\frac{\alpha}{2} \in A$

ולכן α אינו מקסימום.

1.6.1 סימונים של קטעים

נשים לב - מעתה "חסום" יתייחס לחסימות מלעיל ומלרע.

קטעים חסומים:

$$\{x | a \leq x \leq b\} = [a, b] \text{ - קטע סגור}$$

$$\{x | a < x < b\} = (a, b) \text{ - קטע פתוח}$$

$$\{x | a \leq x < b\} = [a, b); \quad \{x | a < x \leq b\} = (a, b]$$

קטעים לא חסומים:

$$[a, \infty) = \{x | a \leq x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$$

$$(a, \infty)$$

$$(-\infty, b)$$

$$(-\infty, \infty)$$

1.6.2 חסם עליון, חסם תחתון, אקסיומת השלמות

הגדרה 1.18 תהיה A קבוצה חסומה מלעיל.

M יקרא חסם עליון ($\sup$ – supremum) של A אם:

1. M הינו חסם מלעיל: $\forall a \in A, a \in M$.

2. לכל חסם מלעיל אחר M' , מתקיים $M \leq M'$ (כלומר M מינימלי מבין חסמי המלעיל).

27.10.2009

הערה 1.19 אם יש ל- A חסם עליון, אזי הוא יחיד.

הוכחה: נניח בשלילה שגם M_1 וגם M_2 חסמים עליונים.

ממינימליות M_1, M_2 , $M_1 \leq M_2$.

ממינימליות M_2, M_1 , $M_2 \leq M_1$.

מהטריכוטומיה של יחס הסדר $M_1 = M_2$.

הגדרה 1.20 נסמן את החסם העליון (תחתון) של A (אם קיים) בתור $\sup A$ ($\inf A$).

דוגמא:

$$\sup \{x | x < 0\} = 0$$

$$\sup \{x | x \leq 0\} = 0 = \max \{x | x \leq 0\}$$

הערה 1.21 אם לקבוצה A יש מקסימום⁵ אזי $\sup A = \max A$.

הוכחה: α חסם מלעיל.

אם α' חסם מלעיל אחר⁶, $\alpha \leq \alpha'$ כי $\alpha \in A$.

תהי A קבוצה. אזי נסמן:

$$-A = \{-a | a \in A\}$$

טענה 1.22 A חסומה מלעיל $\Leftrightarrow -A$ חסומה מלרע.

M חסם מלעיל (מלרע) של $A \Leftrightarrow -M$ חסם מלרע (תחתון) של $-A$.

הוכחה: תרגיל.

משפט 1.23 תהיה A קבוצה חסומה מלעיל.

אזי מספר M הינו חסם עליון של A אם ומתקיימים שני התנאים הבאים:

1. M חסם מלעיל.

2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ המקיים $a > M - \varepsilon$.

⁵תזכורת: $\forall a \in A, a \leq \alpha, \alpha \in A = \max A$
⁶אחר במתמטיקה - "אחר או אותו הדבר"

מסקנה 1.24 יהיה M חסם מלעיל של A .

כדי להראות ש- M לא חסם עליון,

די למצוא $\varepsilon > 0$ אחד שעבורו לא קיים $a \in A$ כזה ש- $M - \varepsilon < a$ (לכל a),

דהיינו $\exists \varepsilon > 0, \forall a \in A (a \leq M - \varepsilon)$.

הוכחה: צד ראשון - נניח M חסם עליון. אזי 1 ודאי מתקיים.

נוכיח את 2 - יהי $\varepsilon > 0$. $M - \varepsilon$ קטן מ- M ולכן איננו חסם מלעיל,

כלומר יש $a \in A$ כזה ש- $M - \varepsilon < a$.

ולצד השני - נניח M מקיים את 1 וגם את 2.

אזי מ-1, M חסם מלעיל.

יהי M' חסם מלעיל אחר.

נניח בשלילה כי $M' < M$. נבחר $\varepsilon > 0$ כך ש- $M' < M - \varepsilon < M$.

מתנאי 2 קיים $a \in A$ כזה ש- $M' < M - \varepsilon < a$, ולכן M' אינו חסם מלעיל.

זו סתירה, לכן $M \leq M'$.

דוגמא:

נניח $A = \{1 - \frac{1}{n} | n = 1, 2, 3, \dots\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots\}$.

נראה ש-1 חסם עליון (ברור ש-1 מתקיים):

יהי $\varepsilon > 0$ כלשהוא.

נבחר n כה גדול כך ש- $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (אפשר בגלל ארכימדיות יחס הסדר)

כלומר $n > \frac{1}{\varepsilon}$, ואז $1 - \frac{1}{n} = a > 1 - \varepsilon$.

כדי להראות ש-1.01 אינו חסם עליון (שהרי הוא חסם מלעיל), ניקח $\varepsilon = 0.005$.

$1.0005 = M - \varepsilon$, אבל לא קיים $a \in A$ כזה ש- $1.0005 = M - \varepsilon < a$!

משפט 1.25 אקסיומת השלמות

לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל A (מלרע) של מספרים ממשיים יש ל- A חסם עליון.

הערה 1.26 הטריק של החלפת A ב- $-A$ נובע מכך שאם A חסומה מלעיל יש לה חסם עליון:

A חסומה מלעיל $\Leftrightarrow -A$ חסומה מלרע

$\Leftrightarrow$ יש ל- $-A$ חסם תחתון β (אם מאמינים למשפט).

$\Leftrightarrow \alpha = -\beta$ חסם עליון של $-(-A)$.

הערה 1.27 בהוכחת המשפט נניח תחילה שכל איברי A אי שליליים.

אחר כך נראה איך להיפטר מההנחה הזו.

הוכחה: נניח אם כי $0 \leq a, \forall a \in A$.

סימון: לכל מספר ממשי x , נסמן $[x]$ - החלק השלם של x = מספר שלם,

כך ש- $[x] \leq x \leq [x] + 1$.

נבנה מספר $m = b.a_1a_2a_3\dots$ ממשי (פיתוח אינסופי) ספרה ספרה,

ונראה אחר כך שהוא חסם תחתון.

תחילה - החלק המסובך - בניית המספר.

נסמן $m_k = b.a_1a_2\dots a_k$.

נבנה את m_k באינדוקציה על k :

בשלב $k=0$ $m_0 = b$ יוגדר להיות $b = \min \{[x] \mid x \in A\}$.

כאשר b קיים כי זוהי קבוצה של מספרים שלמים $0 \leq$ ולכן יש לה מינימום.

נשים לב שכל איברי A מקיימים $b \leq [x] \leq x$.

מאידך ישנו $x \in A$ המקיים $b \leq x \leq b+1$ (אחרת כל $b+1 \leq x$ ואז גם $b+1 \leq [x]$).

בשלב k , מהבניה האינדוקטיבית, יש ל- m_k את התכונות הבאות:

1. $x \in A$ לכל $m_k \leq x$.

2. כמו כן קיים $x \in A$ כך ש- $m_k \leq x < m_k + 10^{-k}$.

באינדוקציה נחלק את הקטע $[m_k, m_k + 10^{-k})$ ל-10 חלקים שווים באורך $10^{-(k+1)}$,

ותהיה m_{k+1} נקודת הקצה השמאלית של הראשון ביניהם המכיל נקודה של A .

כלומר, נקבל הקטעים: $(m_k + \frac{i}{10^{k+1}}, m_k + \frac{i+1}{10^{k+1}})$, כאשר $1 \leq i \leq 9$.

נשים לב:

1. $m_{k+1} = \overbrace{b.a_1a_2\dots a_k}^{m_k}a_{k+1}$, מהבניה האינדוקטיבית.

2. כל איברי A $m_{k+1} \leq$.

3. כי בקטעים הקודמים ל- $(m_{k+1}, m_{k+1} + 10^{-k-1})$ לא היו איברים מ- A .

ומתחת ל- m_k בוודאי לא היו.

יש כבר $x \in A$ כך ש:

$m_{k+1} \leq x < m_{k+1} + 10^{-(k+1)}$.

כעת נראה כי m המתקבל מהתהליך הזה הוא חסם תחתון, על ידי הוכחת שני התנאים:

1. נראה כי הוא חסם מלרע:

נניח בשלילה כי m אינו חסם מלרע.

אזי יש $x \in A$ כך ש- $x < m$.

נבחר k כך ש- $x + 10^{-k} < m$.

אבל $m_k \leq x$ ולכן $m_k + 10^{-k} \leq x + 10^{-k} < m$.

בסתירה לעובדה ש- m_k הינו הקיטום מסדר k של m .

ולכן m אכן חסם מלרע.

2. נראה כי m חסם מקסימלי:

נניח $m' > m$, ונראה ש- m' אינו חסם מלרע.

נבחר k כך ש- $m + 10^{-k} < m'$.

נשים לב שמהבניה ישנו $x \in A$ כך ש- $m_k \leq x < m_k + 10^{-k}$.

$m_k \leq m$, ולכן $m' < m_k + 10^{-k} < x$, ולכן m' אינו חסם מלרע.

הוכחנו את שתי הדרישות, ולכן סיימנו את החלק הזה.

כעת, נותר רק להכליל עבור A שבה גם איברים שליליים.

29.10.2009

הגדרה 1.28 יהיו A, B קבוצות. אזי $A + B = \{a + b | a \in A; b \in B\}$.

משפט 1.29 אם $\beta = \sup B, \alpha = \sup A$

אזי $\alpha + \beta = \sup(A + B)$.

הערה 1.30 המשפט לא משתמש בקיום חסם עליון לקבוצה חסומה.

הוכחה: לכל $a \in A, b \in B$,

$$a + b \leq \alpha + \beta$$

כי $a \leq \alpha, b \leq \beta$,

ולכן $\alpha + \beta$ חסם מלעיל.

כעת, בהנתן $\varepsilon > 0$, ישנו $a \in A$ כזה ש- $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a$ (מהמשפט מהשיעור שעבר),

וכנ"ל ישנו $b \in B$ כזה ש- $\beta - \frac{\varepsilon}{2} < b$.

ואז $(\alpha + \beta) - \varepsilon < a + b$.

$$A + B \supseteq B = \{t\}$$

הזה t יחידות $A + t$

מסקנה 1.31 $\sup(A + t) = \sup A + t$

$$\inf(A + t) = \inf A + t$$

בפרט אם ל- A חסם תחתון, גם ל- $A + t$ חסם תחתון.

השלמת הוכחת המשפט:

ניקח A חסומה מלמעלה.

נזיז אותה ע"י t כך ש- $0 \leq A + t$.

ממה שכבר הוכחנו $\inf(A + t)$ קיים,

$$A = (A + t) + (-t)$$

ולכן מהמסקנה גם $\inf A$ קיים.

נניח נתונות שתי קבוצות לא ריקות A, B ,

$$\forall a \in A \forall b \in B a < b$$

אזי, כל $b \in B$ הינו חסם מלעיל של A ,

$$l = \sup A$$

$l \leq b$ לכל $b \in B$ (כי הוא חסם המלעיל הקטן ביותר).

l חסם מלמעלה של B ,

ולכן אם נסמן $l' = \inf B$ אזי $l \leq l'$.

מסקנה 1.32 במצב הזה (" $A < B$ ")

יש איברים בכל הקטע הסגור $m \in [l, l']$ המקיימים

$$A \leq m \leq B$$

מסקנה 1.33 מתי $l = l'$?

$$A = \{x \leq 0\}, B = \{x > 0\}$$

טענה 1.34 $l = l'$ (הקטע הסגור מתנוון לנקודה) אם ורק אם

לכל $\varepsilon > 0$ יש $a \in A, b \in B$ כך ש:

$$b - a < \varepsilon$$

הוכחה: כיוון אחד:

נניח כי התנאי השני מתקיים,

ונניח בשלילה כי $l \neq l'$.

בה"כ $l' > l$, אז נבחר ε קטן מ- $(l' - l)$,

ואז לכל $a \in A, b \in B$

$$b - a \geq l' - l > \varepsilon$$

בסתירה לנתון, ולכן במצב זה $l = l'$.

כיוון שני מושאר כתרגיל:

אם $l' = l$ אז $\sup A = \inf B$...

מקרה שבו הטענה מעלה מתרחשת:

$$A \cup B = \mathbb{R}, A < B$$

ואז נסיק:

מסקנה 1.35 במצב כזה יש m אחד ויחיד כך ש:

$$A \leq m \leq B$$

שימוש באקסיומות השלמות להגדרת חיבור וכפל בממשיים (בהסתמך על חיבור וכפל ב- $\mathbb{Q}$):

2.11.2009

למה 1.36 לכל r ממשי $r = \sup \{x \in \mathbb{Q} | x \leq r\}$

הוכחה: נסמן את הקבוצה הנ"ל A_r .

מהגדרתה r חסם מלעיל שלה.

אם $s < r$ ממשי אחר, ראינו שיש $x \in \mathbb{Q}$ ש $s < x < r$.

$x \in A_r$, ולכן s איננו חסם מלעיל של A_r .

(מכך אנו מבינים ש- r הוא חסם המלעיל הקטן ביותר), לכן r חסם עליון.

יהיו r, s ממשיים.

$A_r + A_s$ חסומה (קיים n טבעי חסם מלעיל של A_r),

m טבעי חסם מלעיל של A_s ,

$n + m$ חסם מלעיל של $A_r + A_s$.

ולכן, ממשפט החסם העליון, יש חסם עליון.

הגדרה 1.37 נגדיר $r + s := \sup(A_r + A_s)$, כאשר $A_r + A_s$ מערב רק חיבור של רציונליים.

יש להראות שההגדרה עבור $r, s \in \mathbb{Q}$ קונסיסטנטית עם ההגדרה המוכרת:

$$r = \max A_r, s = \max A_s \text{ ולכן}$$

$$r + s = \max(A_r + A_s) \text{ כאשר החיבור מצד שמאל הוא החיבור המוכר,}$$

$$\text{ולכן } r + s = \sup(A_r + A_s) = r + s \text{ כאשר מצד ימין זהו החיבור החדש!}$$

-

להגדרת הכפל, ניקח $r, s \geq 0$

$$A_r^+ = \{0 \leq x \in \mathbb{Q} | x \leq r\}$$

$$r \cdot s = \sup A_r^+ \cdot A_s^+$$

משפט 1.38 אי שוויון ברנולי

לכל h ממשי $-1 < h$:

$$1 + nh \leq (1 + h)^n$$

הוכחה: באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: $n = 1 \Leftarrow$ שוויון.

נניח הוכחנו עבור n , ונוכיח עבור $n + 1$:

$$(1 + h)^{n+1} = (1 + h)(1 + h)^n \stackrel{\text{assumption}}{\geq} (1 + h)(1 + nh) = 1 + (n + 1)h + nh^2 \geq 1 + (n + 1)h$$

■

תזכורת: α נקרא שורש מסדר n של a אם $\alpha^n = a$ ($1 \leq n$ טבעי).

משפט 1.39 בממשיים, לכל $0 \leq a$ ולכל n טבעי,

קיים $0 \leq a \in \mathbb{R}$ אחד ויחיד המקיים $\alpha^n = a$. **הוכחה:** תחילה - הקיום: יהיה $0 < a$, ותהיה $B = \{x | 0 \leq x, x^n \leq a\}$.

אם $1 \leq a$, אזי $a \leq a^n$, ולכן אם $a < x$, $a \leq a^n < x$, $x \notin B$.

אם $0 \leq a \leq 1$, אזי אם $1 < x$, $a < x^n$, $x \notin B$.

לכן $x \notin B \Leftarrow M = \max(a, 1) < x$,

ולכן B חסומה מלעיל.

נסמן $\alpha = \sup B$. נוכיח ש- $\alpha^n = a$.

נניח, תחילה, על דרך השלילה כי $\alpha^n < a$.

נראה שקיים $\alpha < x$ עבורו עדיין $x^n \leq a$, כלומר $x \in B$, בסתירה לבחירת α .

נבחר $0 < h < \frac{1}{n}$, $x = \frac{\alpha}{1-h}$ אצל קטן.

$$x^n = \frac{\alpha^n}{(1-h)^n} \leq \frac{\alpha^n}{1-nh} \stackrel{?}{\leq} a$$

$$\text{כדי ש-} \frac{\alpha^n}{1-nh} \leq a \text{ יתקיים, צריך } \frac{\alpha^n}{a} \leq 1 - nh$$

השכזה - $0 < h \leq \frac{1 - \frac{\alpha^n}{a}}{n}$ ימלא אחר הדרישה שלנו, ולכן קיבלנו סתירה לצד הזה, ולכן $\alpha^n \not\leq a$.

כעת, לצד השני - נניח על דרך השלילה כי $\alpha^n > a$,

נמצא $\beta < \alpha$ כך ש- $\beta^n < a$, ואז לכל $\beta < x$, $\beta < \beta^n < x^n$, $x \notin B$.

כלומר $x \notin B$ לכן β חסם מלעיל קטן יותר מ- α , בסתירה.

$$\text{נכתוב } (0 < h < \frac{1}{n}) \quad \beta = \alpha(1 - h)$$

$$\text{מברנולי } \beta^n = \alpha^n(1 - h)^n \geq \alpha^n(1 - nh) \stackrel{?}{\geq} a$$

$$1 - nh \geq \frac{a}{\alpha^n}, \quad \frac{1 - \frac{a}{\alpha^n}}{n} \geq h > 0$$

הראינו שלא ייתכן $\alpha^n < a$,

וכמו כן לא ייתכן $a < \alpha^n$,

לכן $a = \alpha^n$.

■

(יש להשלים בנוגע ליחידות)

2 סדרות

הגדרה 2.1 סדרה של מספרים היא פונקציה מהטבעיים ל- $\mathbb{R}$. נסמן $f(n) = f_n$.

דוגמאות:

$$a_n = \frac{n-1}{n^2+1}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{5}, \quad a_3 = \frac{1}{5}, \quad a_4 = \frac{3}{17} \dots$$

הספרה ה- n ית אחרי הנקודה בפיתוח של $b_n = \pi$.

סדרת פיבונצ'י:

$$2 \leq n, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2}. \quad (\text{הגדרה רקורסיבית}).$$

2.1 הגבול

3.11.2009

הגדרה 2.2 תהי נתונה סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

נאמר שמספר ממשי L הוא הגבול של הסדרה,

או שהסדרה מתכנסת ל- L , ונסמן:

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L \quad \text{או} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N ,

$$\text{כך שאם } n > N \text{ אז } |a_n - L| < \varepsilon.$$

נשים לב כי $|a_n - L| < \varepsilon$ שווה ערך ל-

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \text{ולכן גם } L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

הגדרה 2.3 (a_n) מתכנסת אם יש מספר L כך שהיא מתכנסת ל- L ,

אחרת היא מתבדרת.

שלילת התכנסות:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists (n > N) \quad |a_n - L| \geq \varepsilon$$

דוגמאות:

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

הוכחה: נתון $\varepsilon > 0$. אז:

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

ניקח $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, ואז התנאי להתכנסות יתקיים.

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

הוכחה: נתון $\varepsilon > 0$. מתי $\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon$?

נשים לב כי $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ ולכן אם ניקח $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ (כמו בסעיף הקודם) התנאי יתקיים.

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) = 1$$

הוכחה: נתון $\varepsilon > 0$. מתי $\left| \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) - 1 \right| < \varepsilon$?

$$n > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil = N, \quad -2 < \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

4. לסדרה $(-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$ אין גבול!

הוכחה: תחילה נביט בסדרה $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \dots$.

אינטואיטיבית, אנו רואים שהאיברים האי זוגיים מתקרבים ל-1, בעוד האיברים הזוגיים מתקרבים ל-(-1) נוכיח פורמלית:

נניח בשלילה שהיה גבול L , עלינו למצוא $\varepsilon > 0$ (די באחד!) שעבורו אין N כך ש- $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$.

נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (או כל ε כל ש- $2\varepsilon < 2$ בעצם יעבוד). נניח היה N כך שאם $|a_n - L| < \frac{1}{2}$.

אזי בפרט עבור $n > N$: $|a_n - L| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

אבל עבור כל n בסדרה שלנו $|a_n - a_{n+1}| > 1$.

הוכחה לטענה האחרונה: נניח $n = 2k$, אז $a_n = \frac{2k}{2k+1} \geq \frac{2}{3}$.

נניח $n = 2k+1$, אז $a_n = -\frac{2k+1}{2k+2} \leq -\frac{1}{2}$.

אזי, נקבל: $|a_n - a_{n+1}| \geq \frac{2}{3} - (-\frac{1}{2}) > 1$.

5. האם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n - n}$ קיים ומהו?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n - n} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^n - n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \text{ אם } \left|\frac{1}{2^n - n}\right| < \varepsilon$$

אפשר להוכיח באינדוקציה כי עבור $n \geq 3$ $2^n - n > 2^{n-1} \Leftrightarrow n > 2^{n-1}$.

אם $3 \leq N$ וגם כזה ש- $\frac{1}{\varepsilon} > 2^{N-1}$ לכל $n > N$ אזי:

$$\left|\frac{1}{2^n - n}\right| < \varepsilon \text{ ואז } 2^n - n > 2^{n-1} > 2^{N-1} > \frac{1}{\varepsilon}$$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 3}{n^2 + 1} = 1$. נוכיח!

$$\left|\frac{n^2 - n + 3}{n^2 + 1} - 1\right| < \varepsilon$$

$$= \left|\frac{n^2 - n + 3 - n^2 - 1}{n^2 + 1}\right| = \left|\frac{-n + 2}{n^2 + 1}\right| = \left|\frac{\frac{2}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n^2}}\right|$$

אם כך, די לנו כי $\left|\frac{2}{n} - 1\right| < \varepsilon$, כלומר החל מ- $n \geq 2$.

כלומר $\frac{1}{n} < \varepsilon$ כלומר $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ולכן $N = \max\left(2, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$.

כדי להוכיח כי סדרה מתכנסת צריך (בדרך כלל):

1. למצוא מועמד להיות הגבול שלה.

2. להוכיח בעזרת N , ε כי התנאי מתקיים.

כדי להוכיח כי סדרה לא מתכנסת לשום גבול,

צריך להראות שאף L היפותטי אינו עונה על ההגדרה (כמו דוגמא 4 לעיל).

טענה 2.4 אם (a_n) סדרה מתכנסת - גבולה יחיד.

הוכחה: נניח $\lim a_n = L$, $\lim a_n = L'$.

עלינו להראות כי $L = L'$.

$$\text{אם } L' \neq L, \text{ נבחר: } \frac{|L' - L|}{2} > \varepsilon$$

קיים N כך שלכל $n > N$, $|a_n - L| < \varepsilon$.

וכמו כן קיים N' כך שלכל $n > N'$, $|a_n - L'| < \varepsilon$.

נבחר $n > \max(N, N')$. אזי שני האי שוויונות הנ"ל יתקיימו, ונקבל:

$$|L - L'| \leq |L - a_n| + |a_n - L'| < 2\varepsilon$$

בסתירה לבחירת ε , ולכן $L = L'$.

הגדרה 2.5 נגיד שתכונה מסויימת מתקיימת כמעט לכל איברי הסדרה (a_n)

אם רק למספר סופי של איברים היא לא מתקיימת.

הגדרה 2.6 נגדיר סביבת ε של L בתור הקטע הפתוח $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

ניסוח שקול לתכונת ההתכנסות:

הגדרה 2.7 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ אם ורק אם

לכל $\varepsilon > 0$ כמעט כל איברי הסדרה בסביבת ε של L .

הסבר לשקילות:

אם $\lim a_n = L$ ונתון $\varepsilon > 0$,

אז נמצא N כמו בהגדרת הגבול,

ובפרט ל- $a_1, a_2, \dots, a_N$ כל אברי הסדרה בסביבת ε של L .

אם להפך, - דהיינו, התנאי החדש מתקיים,

אזי בהנתן $\varepsilon > 0$ יהיו $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}$ האיברים שלא בסביבת ε של L .

נבחר $N = \max\{n_i\}$, ואז $|a_n - L| < \varepsilon, n > N$.

5.11.2009

טענה 2.8 אם (a_n) סדרה מתכנסת לגבול L ,

והסדרה (b_n) מתקבלת מ- (a_n) ע"י שינוי מספר סופי של איברים,

אזי גם (b_n) מתכנסת לאותו הגבול L - $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

הוכחה: נניח לכל $n, n_0 < n, a_n = b_n$.

בהנתן $\varepsilon > 0$, על סמך ההנחה יש N כך שאם $n > N$ אז $|a_n - L| < \varepsilon$.

אם כך, עבור $n > \max(N, n_0)$ אזי $|b_n - L| < \varepsilon$.

הגדרה 2.9 תמורה של $\mathbb{N}$ היא פונקציה חח"ע ועל מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$.

נסמן: $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, כאשר:

הגדרה 2.10 חח"ע - אם $\pi(n) = \pi(m)$ אזי בהכרח $n = m$.

הגדרה 2.11 על - כל מספר k הינו $\pi(n)$ עבור n מסויים.

טענה 2.12 אם (b_n) מתקבלת מ- (a_n) ע"י תמורה של האינדקסים -

כלומר יש תמורה π של $\mathbb{N}$ כך ש- $b_n = a_{\pi(n)}$

אזי אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ אזי גם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

הוכחה: נזכור כי על - כל מספר k הינו $\pi(n)$ עבור n מסויים.

נשתמש באפיון ש- $\lim a_n = L$ אם לכל סביבת ε של L ,

כמעט כל⁷ איברי (a_n) הם בסביבה הנ"ל.

אם כך, גם כל איברי b_n פרט למספר סופי של יוצאים מן הכלל בסביבה הנ"ל.

טענה 2.13 נגדיר סדרה חדשה $b_n = a_{n-1}, b_1 = a_1$ איזוהו ערך.

אזי, אם $\lim a_n = L$ גם $\lim b_n = L$.

הוכחה: בהנתן $\varepsilon > 0$ קיים N כך שאם $n > N$ אזי $|a_n - L| < \varepsilon$.

ולכן עבור $n > N + 1$ מתקיים $|b_n - L| = |a_n - L| < \varepsilon$.

⁷כולם פרט למספר סופי של איברים.

מה הקשר בין חסימות וקיום גבול?

טענה 2.14 כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה: נניח $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

נבחר $\varepsilon = 10$. אזי קיים N כך שאם $n > N$ אזי $L - 10 < a_n < L + 10$.
אם כך לכל n $\min\{L - 10, a_1, a_2, \dots, a_N\} \leq a_n \leq \max\{L + 10, a_1, \dots, a_N\}$
דהיינו הסדרה חסומה.

לדוגמא, הסדרה:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ is even} \\ n^2 - 1 & n \text{ is odd} \end{cases}$$

לא מתכנסת, כי אינה חסומה מלעיל.

2.2 אריתמטיקה של סדרות

תהיינה (a_n) , (b_n) סדרות.

אזי נוכל לבצע ביניהן פעולות שונות, כגון:

$$(a_n + b_n), (c \cdot a_n), (a_n \cdot b_n), \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ when } b_n \neq 0 \dots$$

משפט 2.15 נניח $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ וקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$

אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$

הוכחה: יהי נתון $\varepsilon > 0$.

ישנו N' כך שאם $n > N'$ אזי $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$.

כנ"ל ישנו N'' כך שאם $n > N''$ אזי $\beta - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$.

יהי $N = \max\{N', N''\}$ אזי $\alpha + \beta - \varepsilon < a_n + b_n < \alpha + \beta + \varepsilon$ $n > N$.

משפט 2.16

$$\lim a_n = \alpha \Rightarrow \lim (c \cdot a_n) = c\alpha$$

הוכחה: נתון $\varepsilon > 0$. אם $c = 0$ אזי אין מה להוכיח.

אחרת נבחר N כך ש- $n > N$ אזי $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{c}$.

לקורא החרוץ מושארת המשימה להשלים את ההוכחה...

לקראת המשפט הבא - טריק:

$$a_n b_n - \alpha \beta = (a_n - \alpha) b_n + \alpha (b_n - \beta)$$

משפט 2.17 אם $\lim a_n = \alpha$, $\lim b_n = \beta$

אזי $\lim (a_n b_n) = \alpha \beta$

הוכחה: יהיה R מספר ממשי כך ש:

$$|\alpha| \leq R, \text{ וכמו כן } |b_n| \leq R \text{ לכל } n.$$

יהיה נתון $\varepsilon > 0$. נבחר N' כך שאם $n > N'$ אז $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2R}$.

כנ"ל נבחר N'' כך שאם $n > N''$ אז $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2R}$.

עבור $n < N = \max\{N', N''\}$, לפי אי שיוויון המשלוש ושימוש בטריק מעלה:

$$|a_n b_n - \alpha \beta| < |a_n - \alpha| \cdot |b_n| + |\alpha| \cdot |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2R} \cdot R + R \cdot \frac{\varepsilon}{2R} = \varepsilon$$

■

9.11.2009

הערה 2.18 סכום של סדרות מתבדרות יכול להתכנס אך לא חייב.

הערה 2.19 סכום של סדרה מתכנסת וסדרה מתבדרת - מתבדר. לדוגמא:

$$(a_n) \text{ מתבדרת, } (b_n) \text{ מתכנסת, אזי } (a_n + b_n) \text{ מתבדרת. למה? } a_n = (-b_n) + (a_n + b_n)$$

כלומר אם הסכום היה מתכנס גם (a_n) היתה אמורה להתכנס, בסתירה לנתון.

משפט 2.20 נניח $\lim a_n = \alpha, \lim b_n = \beta \neq 0$ אזי:

1. קיים n_0 כך שעבור $n \geq n_0$ $b_n \neq 0$.

2. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ כאשר זה מוגדר עבור $n \geq n_0$.

הוכחה: 1. קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ $|b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$,

ולכן $b_n \neq 0$.

2.

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|a_n \beta - \alpha b_n|}{|b_n \beta|} = \frac{|(a_n - \alpha) \beta + \alpha (\beta - b_n)|}{|b_n \beta|} \leq \frac{|a_n - \alpha| |\beta| + |\alpha| |\beta - b_n|}{|b_n \beta|} (*)$$

יהי n_0 כמו ב-1, כך שעבור $n \geq n_0$ $\frac{|\beta|}{2} < |b_n|$,

ואז עבור $n \geq n_0$ הביטוי הנ"ל $\leq \frac{2}{|\beta|} |a_n - \alpha| + \frac{2|\alpha|}{|\beta|^2} |\beta - b_n|$

עכשיו, בהינתן $\varepsilon > 0$ נבחר N כך שאם $N < n$ $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon |\beta|}{4}$, $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon |\beta|^2}{4|\alpha|}$

ואז, עבור $n = \max\{n_0, N\}$ יתקיים $\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

■

טענה 2.21 אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ואם b_n סדרה חסומה,

$$\lim a_n b_n = 0$$

הוכחה: יהי M חסם עבור b_n , כלומר $|b_n| \leq M$.

בהנתן $\varepsilon > 0$ נבחר N כך ש- $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ עבור $N < n$,

ואז $|a_n b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$ לכל $N < n$.

■

⁸ משתמשים בחסימות הסדרה b_n הנובעת מכך שהיא מתכנסת.

⁹ כאשר למעשה בחרנו $\varepsilon = \frac{|\beta|}{2}$. זהו מספר חיובי ולכן יכולנו לבחור אותו.

¹⁰ שהרי $\frac{|\beta|}{2} < |b_n - \beta| \Leftrightarrow \frac{|\beta|}{2} < |b_n|$ (שהרי β הוא קבוע).

2.3 יחס סדר בין סדרות

טענה 2.22 נניח $\beta > \alpha$, $\lim b_n = \beta$, $\lim a_n = \alpha$

אזי קיים n_0 שהחל מ- n_0 $b_n > a_n$.

הוכחה: נבחר $0 < \varepsilon < \frac{\beta - \alpha}{2}$.

מהגדרת הגבול יש n_0 כך שלכל $n > n_0$:

$$\beta - \varepsilon < b_n < \beta + \varepsilon, \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

היות ועל פי בחירת ε $\alpha + \varepsilon < \beta - \varepsilon$ לכל $n \geq n_0$.

האם $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow a_n \leq b_n$ לכל $n \leq n_0$ מסויים? לא!!

מסקנה 2.23 אם $\lim a_n = \alpha < \beta$ אם קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ $a_n < \beta$.

מסקנה 2.24 אם לכל $n \geq n_0$ $a_n \leq b_n$ ושתי הסדרות מתכנסות, אזי:

$$\alpha = \lim a_n \leq \lim b_n = \beta$$

הוכחה: אם לא, אזי $\beta < \alpha$, ואז מהטענה 2.22 שהוכחנו,

לכל $n \geq n_1$ כלשהוא $b_n < a_n$, ועבור $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ נקבל סתירה!

2.3.1 משפט הסנדוויץ'

משפט 2.25 נניח שלכל $n \geq n_0$ $a_n \leq c_n \leq b_n$

אזי אם $\lim a_n$ ו- $\lim b_n$ קיימים ושווים לאותו מספר L ,

גם $\lim c_n$ קיים ושווה L .

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$.

נבחר N כך שאם $n > N$ גם $|a_n - L| < \varepsilon$ וגם $|b_n - L| < \varepsilon$.

$$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon$$

ולכן $|c_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow n > N$.

דוגמאות:

$$1. \sqrt{\frac{n+1}{n}} \rightarrow 1. \text{ נוכיח זאת!}$$

$$1 \leftarrow 1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$$

ולכן ממשפט הסנדוויץ' הסדרה הנתונה שואפת ל-1.

$$2. \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

סדרה זו שווה ל- $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

נטען כי ההסדרה הזו שואפת ל- $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + 1 \rightarrow 2 \text{ מדוגמא 1.}$$

מאריתמטיקה של גבולות $\frac{1}{2} \rightarrow a_n$.

¹¹ בטענה הקודמת, ניקח $b_n = \beta$ לכל n .

$$3. \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

האגף הימני והשמאלי שואפים לאפס, ולכן גם הסדרה שלנו! מדוע האגפים הללו שואפים לאפס?

בהנתן $\varepsilon > 0$ צריך למצוא N כך שלכל $n > N$ $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon$ $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$. למשל, $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

$$4. \text{נסמן: } \sqrt[n]{n} = 1 + h_n, \text{ אזי } (1 + h_n)^n = n \\ \text{מאי שיוויון ברנולי } (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n \\ \text{מנוסחאת הבינום - } h_n^2 + \dots + h_n^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \dots + h_n^n \\ \text{ולכן: } h_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \leq (1 + h_n)^n - 1 - nh_n = n - 1 - nh_n \\ 0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \rightarrow 0$$

מסקנה 2.26 יהי q מספר ממשי.

אם $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$

אם $q = 1$, $q^n \rightarrow 1$

בכל מקרה אחר, הסדרה מתבדרת.

הוכחה: אם $|q| > 1$, הוכיחו (במסקנה ממה שנעשה עבור $|q| < 1$)

ש- q^n אינה סדרה חסומה,

ולכן מתבדרת.

אם $q = 1$ ברור, כנ"ל לגבי $(-1)^n$ (המתבדרת, כבר דובר עליה בכיתה).

נוכיח עבור $|q| < 1$.

10.11.2009

הוכחה: נתון $\varepsilon > 0$. צריך למצוא $N_\varepsilon = N$ כך שלכל $n > N$ $|q|^n < \varepsilon$.
 $\log_a \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) < n \Leftrightarrow 1 < a = \frac{1}{|q|} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \left(\frac{1}{|q|} \right)^n$
 אבל מאיפה אנחנו יודעים כי פונקציית הלוג קיימת? נחזור לכך בהמשך...
 כרגע נוכיח בשיטה אחרת.

נכתוב $|q| = \frac{1}{1+h}$ כי $h > 0$ $|q| < 1$.

מאי שיוויון ברנולי: $1 < \frac{1}{|q|} = 1 + h$ ($0 < h$).

$$|q^n| = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh} \stackrel{?}{\leq} \varepsilon$$

$N = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) < n \Leftrightarrow \varepsilon < 1 + nh$ כלומר מצאנו N , וסיימנו.

משפט 2.27 נתונה סדרת מספרים ממשיים a_n ,

ונניח שיש $0 < r < 1$ (קבוע!) כך שלכל $n \geq n_0$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq r \text{ אזי } \lim a_n = 0$$

הוכחה: $|a_{n_0+1}| \leq |a_{n_0}| \cdot r$

$$|a_{n_0+2}| \leq |a_{n_0+1}| \cdot r \leq |a_{n_0}| \cdot r^2$$

ובאינדוקציה על k ניתן להוכיח (נא לבדוק!): $|a_{n_0+k}| \leq |a_{n_0}| \cdot r^k$

נגדיר $b_k = a_{n_0+k}$. כעת, די להראות $\lim b_k = 0$

$$|b_k| \leq |a_{n_0}| \cdot r^k \rightarrow 0 \text{ כמובן, וקבוע, } |a_{n_0}| \text{ כמובן, } r^k \rightarrow 0$$

ולכן ממשפט הסנדוויץ' גם $b_k \rightarrow 0$.

שימושים למשפט 2.27:

• לכל מעריך טבעי k (קבוע) ולכל $R > 1$ - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{R^n} = 0$.

למשל: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10}}{1.01^n} = 0$.¹²

הוכחה: $a_n = \frac{n^k}{R^n}$

ניקח $\frac{1}{R} < r < 1$, ואז: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{R} \leq r$

$1 < rR$. היות ו- $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leftarrow 1$ (מחוקי אריתמטיקה של סדרות),

$\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$, $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \rightarrow 1 \cdot 1$, $\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, $\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \rightarrow 1$

ובאינדוקציה על k (קבוע עבור הסדרה הזאת),

קיים n_0 כך שאם $n \geq n_0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \cdot R$ מ.ש.ל.

■

גידול אקספוננציאלי (R, R^n קבוע גדול מ-1) יותר מהיר מגידול פולינומיאלי (n^k, k קבוע)

או, כפי שנאמר על ידי מתרגל - "אקספוננט הוא גבר-גבר".

• לכל R כלשהוא: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^n}{n!} = 0$.

הוכחה:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{R^n} = \frac{R}{n+1}$$

אם $|R| \leq 2$ אז עבור $n \geq n_0$:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{|R|}{2|R|+1} \leq \frac{1}{2} < 1$$

■

לדוגמא: $\frac{2^n}{n!+n^5} = \frac{\frac{2^n}{n!}}{1+\frac{n^5}{n!}}$

כל האיברים בביטוי מימין שואפים לאפס (מלבד 1),

ולכן הסדרה שואפת לאפס.

$\lim a_n$ אינו החסם העליון או התחתון.

אם לכל n $m \leq \lim a_n \leq M$, $m \leq a_n \leq M$.

¹²נשים לב כי במקרה הזה תחילת הסדרה עלול לבלבל - בהתחלה אין שאיפה לאפס, ואולם בהמשך הסדרה המעריך נהיה קטן ביחסית ל- n .

2.4 סדרות מונוטוניות

הגדרה 2.28 סדרה נקראת עולה (עולה ממש או עולה במובן הצר)

אם לכל n $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} > a_n$).

הגדרה 2.29 סדרה נקראת מונוטונית יורדת (לא עולה)

אם לכל n $a_{n+1} \leq a_n$ ($a_{n+1} < a_n$).

לדוגמא:

1. הסדרה $2, 2, 2, \dots$ "לא עולה" ו"לא יורדת", וכמו כן לא "עולה" ולא "יורדת".

2. הסדרה $1 - \frac{1}{n}$ עולה ממש, כי $1 - \frac{1}{n+1} < 1 - \frac{1}{n}$.

משפט 2.30 תהיה סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל,

אזי הסדרה מתכנסת, ומתקיים $\lim a_n = \sup \{a_n\}$.

הוכחה: יהיה $M = \sup \{a_n\}$ - הוא קיים בגלל משפט השלמות 1.25.

יהיה נתון $\varepsilon > 0$.

מהאפיון של חסם עליון יש N כך ש: $M - \varepsilon < a_N \leq M$.

היות והסדרה מונוטונית לא יורדת, לכל $n > N$ $M - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq M < M + \varepsilon$,

כלומר $|a_n - M| < \varepsilon$.

מסקנה - $M = \lim a_n$.

מסקנה 2.31 אם a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע,

אזי היא מתכנסת, וכמו כן או $\lim a_n = \inf \{a_n\}$.

הוכחה: ניתן להוכיח בשתי דרכים - הוכחה זהה לזו למעלה בשינויים קטנים,

או נביעה מההוכחה למשפט עבור a_n . שתי הדרכים מושארות לקורא החרוץ.

דוגמא:

$$a_n = \frac{\sqrt{n} - 4}{\sqrt{n} + 4}$$

נראה ש- $\lim a_n$ קיים (מבלי לחשב אותו!) ע"י: $a_n \leq 1$.

$a_n \stackrel{?}{\leq} a_{n+1}$ - נראה המונוטוניות!

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n} - 4}{\sqrt{n} + 4} \stackrel{?}{\leq} \frac{\sqrt{n+1} - 4}{\sqrt{n+1} + 4} &\Rightarrow \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 4\sqrt{n} - 4\sqrt{n+1} - 16 \leq \sqrt{n+1}\sqrt{n} - 4\sqrt{n} - 4\sqrt{n+1} - 16 \\ &\Rightarrow 4(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \leq 4(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \end{aligned}$$

12.11.2009

דוגמא נוספת:

ניקח קבוע $c > 1$, ונגדיר באופן רקורסיבי:

$$a_1 = 1, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} + c}$$

הסדרה הזו תראה כך:

$$1, \sqrt{1+c}, \sqrt{\sqrt{1+c}+c} \dots$$

טענה 2.32

$$a_n < 1 + \sqrt{c}$$

לכל n , כלומר הסדרה חסומה מלעיל.

הוכחה: באינדוקציה על n :

$$a_1 = 1 < 1 + \sqrt{c}$$

נניח $a_{n-1} < 1 + \sqrt{c}$, ונוכיח עבור a_n :

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + c} < \sqrt{1 + \sqrt{c} + c} < \sqrt{1 + 2\sqrt{c} + c} = 1 + \sqrt{c}$$

■

טענה 2.33 הסדרה עולה ממש.

הוכחה: באינדוקציה על n נראה כי $a_{n+1} > a_n$

$$a_2 = \sqrt{1 + c} > 1 = a_1$$

נניח נכונות עבור n , ונוכיח כי $a_{n+2} > a_{n+1}$

$$a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} + c} > \sqrt{a_n + c} = a_{n+1}$$

■

מהמשפט 2.30 $\lim a_n = \alpha$ קיים.

$$(n \geq 2) \quad a_n^2 = a_{n-1} + c$$

$$\lim (a_n^2) = \alpha^2$$

$$\lim (a_{n-1} + c) = \alpha + c$$

$$\alpha^2 = \alpha + c \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - c = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

2.4.1 המספר e

$$e = 2.718...$$

המטרה: למצוא האם קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, כאשר x הינו קבוע אי שלילי.

נשים לב:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{17} = 1$$

מאיתמטיקה של גבולות -

אולם המספר 17 אינו תלוי במשתנה n ,

ולכן זה לא אותו המקרה שאנו מחפשים לפתור!

נחזור למקרה שלנו -

נזכור כי אם ניקח $1 < q$ אז הסדרה q^n לא חסומה מלעיל.

משפט 2.34 הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e(x)$ קיים לכל $x \geq 0$, $1 = e(0)$.

הוכחה: נראה כי $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ סדרה מונוטונית עולה וחסומה.

תחילה נראה כי הסדרה עולה:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k$$

נביט באיבר k -ה' בסכום:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^k}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{\underbrace{n \cdot n \cdot n \dots n}_{k \text{ times}}} \frac{x^k}{k!} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

טענה 2.35 $a_n \leq a_{n+1}$.

הוכחה:

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \overbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)}^{k \text{ times}} \frac{x^k}{k!}$$

נשווה את המחובר k -ה' הסכום הנותן את a_n עם המחובר k -ה' בסכום הנותן את a_{n+1} ($0 \leq k \leq n$):

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n} &< 1 - \frac{1}{n+1} \\ 1 - \frac{2}{n} &< 1 - \frac{2}{n+1} \\ &\vdots \\ 1 - \frac{k-1}{n} &< 1 - \frac{k-1}{n+1} \end{aligned}$$

■

טענה 2.36 (a_n) חסומה מלעיל. **הוכחה:** נסמן

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$$

$a_n \leq b_n$ (שהרי $0 \leq x$).

מספיק להראות כי b_n חסומה.

נזכור שהוכחנו כי $\frac{(2x)^k}{k!} \rightarrow 0$ $k \rightarrow \infty$.

בפרט ישנו n_0 כך שאם $n_0 \leq k$ $\frac{(2x)^k}{k!} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^k}{k!} \leq \frac{1}{2^k}$.

$$b_n = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n_0+1}^n \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n_0} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n_0+1}^n \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{n_0} \frac{x^k}{k!} + 1 = M$$

■

לכל n (כי הרי n_0 קבוע כלשהוא), כלומר a_n גם כן חסומה מלעיל.

לכן, משתי הטענות מעלה a_n סדרה מונוטונית עולה וחסומה (מלעיל),
הגבול

$$e(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

קיים.

נסמן $e = e(1) \approx 2.718...$ **הוכחה:** לכל x קבוע a_n סדרה מונוטונית עולה וחסומה, ולכן ממשפט 2.30 גבולה

זוהו!

הערה 2.37 כשנדבר על הגדרת a^x ($a > 0$),

נוכיח ש- $e(x) = e^x$.

תרגיל: הוכיח שגם $\lim b_n = \lim a_n = e(x)$.

16.11.2009

2.4.2 הלמה של קנטור (או איך צדים אריה במדבר)

משפט 2.38 יהיו $I_n = [a_n, b_n]$ קטעים סגורים כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:

א. $(a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n) \quad I_{n+1} \subseteq I_n$.

ב. אורכי הקטעים שואפים ל-0, דהיינו $\lim(b_n - a_n) = 0$.

אזי יש נקודה אחת ויחידה x בחיתוך כל הקטעים:

$$\forall n \quad a_n \leq x \leq b_n$$

הוכחה: הסדרה (a_n) מונוטונית עולה וחסומה מלעיל על ידי b_1 למשל,

ולכן על פי משפט 2.30 יש לה גבול α .

הסדרה (b_n) מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ע"י a_1 ,

ולכן על פי אותו המשפט יש לה גבול β .

היות ו- $a_n \leq b_n$ לכל n ,

$$\alpha = \lim a_n \leq \lim b_n = \beta$$

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$$

כאשר אי השוויון השני נובע מכך ש- $\beta = \inf b_n$, $\alpha = \sup a_n$.

לכל x כך ש- $\alpha \leq x \leq \beta$ מקיים $\forall n \quad a_n \leq x \leq b_n$.

הוכחת היחידות - ישירות ממסקנה לאקסיומת השלמות, או:

נניח בשלילה כי קיים $x' \neq x$, המקיים, בה"כ $a_n \leq x' \leq b_n$ לכל n ,

אזי

$$b_n - a_n \geq x' - x > 0$$

לכל n , בסתירה ל-ב'.

2.5 תתי סדרות

הגדרה 2.39 תהי $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ סדרה עולה של אינדקסים טבעיים.

אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ממשיים,

אזי הסדרה $(b_k = a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ נקראת תת סדרה שלה.

דוגמאות:

1.

$$a_n = \sqrt{n}, \quad n_k = k^2 + 1 \Rightarrow a_{n_k} = \sqrt{k^2 + 1}$$

2.

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1} \Rightarrow a_{2k} = \frac{2k}{2k+1}, \quad a_{2k+1} = -\frac{2k+1}{2k+2}$$

בדוגמא האחרונה, $\lim a_n$ אינו קיים, אבל לשתי תתי הסדרות שבנינו יש גבול:

$$\lim a_{2k} = 1, \quad \lim a_{2k+1} = -1$$

משפט 2.40 אם $\lim a_n = L$ קיים,

אזי כל תת סדרה שלה a_{n_k} מתכנסת לאותו הגבול:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L$$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$.

עלינו למצוא K כך שאם $K < k$ $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$.

אבל ידוע שיש N כך שאם $n > N$ $|a_n - L| < \varepsilon$.

נמצא K כך שאם $k > K$ אזי $n_k > N$.

למשל ניקח $N = K$, וסיימנו. ■

הגדרה 2.41 תהי נתונה סדרה (a_n) כלשהיא.

מספר L נקרא גבול חלקי של (a_n)

אם יש תת סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת ל- L .

תזכורת: L הוא הגבול של a_n אם

בכל סביבה ε של L שוכנים כמעט כל איברי (a_n) .

משפט 2.42 L הינו גבול חלקי של הסדרה (a_n) אם

בכל סביבת ε של L שוכנים אינסוף מאיברי הסדרה.

נשים לב להבדל בין ההגדרות!!

הוכחה: אם $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L$ (גבול חלקי של a_n),

אזי בכל סביבת ε של L נמצאים כל האיברים a_{n_k} עבור $K < k$ מסויים, ובפרט אינסוף איברים מסדרת האם.

בכיוון השני - נניח שהתנאי מתקיים.

עלינו לבחור תת סדרה a_{n_k} כך ש- $\lim a_{n_k} = L$.

נבחר באינדוקציה על k אינדקסים $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ כך ש:

$$|a_{n_k} - L| < \frac{1}{k}$$

$$L - \frac{1}{k} < a_{n_k} < L + \frac{1}{k}$$

ולכן $a_{n_k} \rightarrow L$.

כעת, נשים לב כי מהבנייה, עבור a_{n_1} :

$$|a_{n_1} - L| < 1$$

נניח בחרנו את $n_1, \dots, n_{k-1}$. אזי, צריך לקיים:

$$n_{k-1} < n_k, \quad |a_{n_k} - L| < \frac{1}{k}$$

היות ויש אינסוף a_i המקיימים:

$$|a_i - L| < \frac{1}{k}$$

ניתן למצוא a_i כזה עם $i < n_{k-1}$, ונסמן $n_k = i$, וסיימנו. ■

דוגמא נוספת:

יהי $Z(n)$ מספר האפסים בייצוג העשרוני של n , לדוגמא: $Z(10035) = 2$.

$$a_n = \frac{1}{1+Z(n)} + \frac{1}{n} \text{, לדוגמא, } a_{10035} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10035}$$

נבט בתת הסדרה:

$$a_{n_k} \Rightarrow n_1 = 100, n_2 = 1001, n_3 = 10011, n_4 = 100111, \dots$$

כך ש- $Z(n_k) = 2$ לכל k .

$$a_{n_k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n_k} \rightarrow \frac{1}{3}$$

באותו אופן, כל $\frac{1}{m}$ הוא גבול חלקי. גם 0 הוא גבול חלקי.

דוגמא אחרונה:

לסדרה $a_n = n$ אין אף גבול חלקי.

כל תת סדרה $a_{n_k} = n_k$ אינה חסומה, ולכן אינה מתכנסת.

2.5.1 משפט בולצנו ויירשטראס ומשפט הנובע ממנו

משפט 2.43 משפט בולצנו ויירשטראס -

לכל סדרה חסומה (x_n) יש תת סדרה מתכנסת (ולכן יש לה לפחות גבול חלקי אחד).

הוכחה: בעזרת הלמה של קנטור 2.38.

שלב א' - נמצא מועמד להיות הגבול החלקי.

נניח ש- $a \leq x_n \leq b$ לכל n טבעי.

נבנה באינדוקציה סדרה קטעים $I_n = [a_n, b_n]$ סגורים כך ש:

$$1. I_{n+1} \subseteq I_n$$

$$2. b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

3. יש ב- I_n אינסוף איברים מהסדרה x_k .

הבניה:

$$n = 1, a_1 = a, b_1 = b$$

נניח שבנינו את $I_1, I_2, \dots, I_n$ באותה הצורה

נחלק את $I_n = [a_n, b_n]$ לשני חצאים שווים.

היות ועל פי הנחת האינדוקציה יש ב- I_n אינסוף x_k ים,

גם בכל אחד משני החצאים יש אינסוף x ים.

נביט בחצי $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

ננאים 1, 2, והעובדה כי $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^{k-1}} \rightarrow 0$ מבטיחים שנוכל בלמה 2.38.

ולכן יש נקודה אחד ויחידה L המקיימת:

$$a_n \leq L \leq b_n$$

לכל n , וגם

$$\lim a_n = L = \lim b_n$$

שלב ב' - נבנה תת סדרה $x_{n_k} \rightarrow L$. נבנה אותה באינדוקציה על k .

x_{n_1} - something or other

נניח שבחרנו $n_1, \dots, n_k$.

נבחר $n_k < n_{k+1}$ כך ש- $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$.

זה אפשרי כי בקטע $I_k = [a_k, b_k]$ יש אינסוף x_n ים.

$$L \leftarrow a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \rightarrow L$$

ולכן $x_{n_k} \rightarrow L$ לפי משפט הסנדוויץ'.

■

הוכחה אלטרנטיבית למשפט - הוכחה בעזרת פסגות: הוכחה: נוכיח את טענת העזר הבאה:

טענה 2.44 לכל סדרה יש תת סדרה יורדת או תת סדרה עולה ממש¹³.

במידה וטענת העזר הזו מתקיימת, תהי a_n סדרה חסומה.

על פי טענת העזר, יש לה תת סדרה מונוטונית.

לפי משפט הירושה, גם תת הסדרה חסומה,

ומכיוון והיא מונוטונית וחסומה קיים לה גבול (מהגדרת החסם העליון\תחתון),

דהיינו - היא מתכנסת, כפי שרצינו.

וכעת - להוכחת טענת העזר: **הוכחה:** תהי a_n סדרה מסדר n .

נקרא למספר m **פסגה** אם $a_m \geq a_n$ לכל $n > m$.

כעת, ישנן שתי אפשרויות -

אפשרות 1 - קבוצת הפסגות אינה חסומה.

אם כך, נגדיר ברקורסיה סדרה עולה ממש של טבעיים k_n :

k_1 תוגדר להיות הפסגה המינימלית (כלומר האינדקס המינימלי של איבר בסדרה כך שכל איבר אחריו קטן ממנו)

k_{n+1} תוגדר להיות הפסגה המינימלית הגדולה מ- k_n (יש כזה כי קבוצת הפסגות אינה חסומה).

נתבונן בתת הסדרה a_{k_n} :

$k_{n+1} > k_n$. לפי בניית k_{n+1} , מכיוון ו- k_n פסגה $a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}}$, לכן a_{k_n} סדרה יורדת.

אפשרות 2 - קבוצת הפסגות חסומה.

במקרה זה נגדיר ברקורסיה סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים k_n בצורה הבאה:

k_1 יהיה חסם מלעיל ממש של קבוצת הפסגות.

במקביל להגדרה, נוכיח באינדוקציה כי $k_n \geq k_1$ ולכן k_n אינו פסגה:

בסיס האינדוקציה - $n = 1$ - מתקיים מהנתון.

צעד האינדוקציה - בהנתן k_n , לפי הנחת האינדוקציה k_n אינו פסגה,

לכן קיים $l > k_n$ כך ש- $a_l > a_{k_n}$. נסמן את l המינימלי הזה ב- k_{n+1} .

כלומר, קיבלנו כי עבור $k_{n+1} > k_n$ מתקיים $a_{k_{n+1}} > a_{k_n}$,

ולכן k_{n+1} גם כן אינו פסגה, וכאן סיימנו את הוכחת האינדוקציה.

אזי, בסה"כ קיבלנו כי עבור כל $n, k \in \mathbb{N}$ מתקיים $k_{n+1} > k_n \geq k_1$, $a_{k_{n+1}} > a_{k_n}$,

ולכן a_n עולה ממש.

וכך הוכחנו את טענת העזר.

■

■

הערה 2.45 נשים לב כי משפט בולצנו ויירשטראס לא נותן לנו דרך קנונית כלשהיא לבחירת תת הסדרה.

כלומר, בבניה יש אפשרות להגיע לגבולות חלקיים שונים.

¹³כן, זו אותה טענה מדיסקרטית, למי שמזהה - משפט ארדש סקרש האינסופי.

משפט 2.46 תהיה סדרה חסומה.

אזי a_n מתכנסת אם"מ יש לה רק גבול חלקי אחד.

הוכחה: $\Leftarrow$ ראינו שאם $\lim a_n = L$ אזי לכל $\epsilon > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L) = 0$

ולכן L הוא הגבול החלקי היחיד של a_n .

$\Rightarrow$ נניח להפך, כלומר a_n חסומה ויש לה רק גבול חלקי אחד L .

עלינו להראות ש- $\lim a_n = L$.

נניח בדרך השלילה שזה לא נכון.

אזי קיים $\epsilon > 0$ כך שמחוץ לקטע $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ עדיין יש אינסוף מאיברי a_n .

נסמן $b_1, b_2, b_3, \dots$ את איברי הסדרה המקורית שמחוץ לקטע $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

הסדרה b_n חסומה בתור ϵ של a_n .

ממשפט בולצאנו וירשטראס 2.43 יש לה תת סדרה b_{n_k} המתכנסת לגבול L' :

$$\lim b_{n_k} = L'$$

אבל גם b_{n_k} ת"ס של a_n ולכן L' גבול חלקי של a_n .

על פי ההנחה, $L' = L$, וזאת סתירה לעובדה ש- b_{n_k} לא מבקרת לעולם בקטע $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

הסתירה מראה שאין ϵ כזה, כלומר $L = \lim a_n$, כנדרש.

■

2.5.2 קריטריון קושי להתכנסות

עולה השאלה -

אם הפרשים עוקבים בין כל שני איברים שואפים לאפס,

האם בהכרח הסדרה תתכנס?

מאינטואיציה, נראה נכון, אולם נביט בדוגמא:

$$a_n = \sqrt{n}, \quad a_{n+1} - a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$$

הפרשים עוקבים שואפים לאפס, אבל הסדרה לא מתכנסת!

קריטריון קושי מדבר על מצב דומה:

קריטריון קושי להתכנסות סדרה

משפט 2.47 סדרה a_n מתכנסת אם"מ

לכל $\epsilon > 0$ יש N כך שאם $n, m > N$ (כלשהם, לא רק עוקבים)

אזי $|a_n - a_m| < \epsilon$.

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח כי $\lim a_n = L$.

בהנתן $\epsilon > 0$ נבחר N כך שאם $n > N$ אזי $|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$.

ואז $n, m > N$:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

וסיימנו.

$\Rightarrow$ נניח כי קריטריון קושי מתקיים.

ראשית, נבחר $\varepsilon = 1$, ונקבל שיש N כך שלכל $n, m > N$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

ובפרט:

$$\begin{aligned} |a_n - a_{N+1}| &< 1 \\ a_{N+1} - \varepsilon &< a_n < a_{N+1} + \varepsilon \end{aligned}$$

לכל $n > N$, ולכן a_n סדרה חסומה.

ממשפט בולצנו ויירשטראס 2.43 קיימת תת סדרה מתכנסת.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L, a_{n_k}$$

נראה כי L הוא גבול כל הסדרה $\lim a_n = L$.

יהי $\varepsilon > 0$. נמצא N כך ש- $n, m > N \Leftrightarrow |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ (מתקיים מתנאי קושי).

קיים k כך ש- $N < n_k$ וגם $|a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ (מתת הסדרה שמצאנו).

נציב $m = n_k$ ונקבל כי עבור $n > N$:

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

הערה 2.48 החשיבות של קריטריון קושי היא העובדה כי מעתה אנו יכולים להוכיח התכנסות, מבלי לדעת כלל את הגבול עצמו!

19.11.2009

הגדרה 2.49 סדרת קושי הינה סדרה a_n המקיימת:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \Leftrightarrow n, m > N \text{ ש-} \varepsilon > 0 \text{ ישנו } N$$

אזי, נוכל לשנות את קריטריון קושי להיות:

משפט 2.50 a_n מתכנסת $\Leftrightarrow a_n$ סדרה קושי.

הוכחה: כבר הוכחנו, אולם כעת נביא הוכחה נוספת!

1. a_n מתכנסת $\Leftarrow$ קושי a_n כמו בהוכחה קודמת.

2. נניח בשלילה כי a_n אינה מתכנסת.

לפי מסקנה ממשפט בולצנו ויירשטראס 2.43,

אם a_n אינה מתכנסת, יש לה (לפחות) שני גבולות חלקיים $L_1 \neq L_2$ שונים.

$$\text{נבחר } 0 < \varepsilon = \frac{1}{3} |L_1 - L_2|. \text{ נניח } L_1 > L_2.$$

לפי ההנחה, קיים N כך שאם $n, m > N$ אזי $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

מכיוון ו- L_1, L_2 שניהם גבולות חלקיים,

נוכל למצוא $n, m > N$ כך ש: $a_m < L_2 + \varepsilon$, $a_n < L_1 - \varepsilon$, ואז

$$a_n - a_m < \varepsilon, \text{ בסתירה להיות הסדרה סדרת קושי (כלומר המרחק ביניהם אמור להיות קטן מ-}\varepsilon\text{).}$$

ולכן יש לסדרה a_n רק גבול חלקי אחד,

ולכן a_n מתכנסת.

■

2.6 גבול עליון וגבול תחתון - $\limsup, \liminf$

הגדרה 2.51 תהי a_n סדרה חסומה.

$$s_m = \sup \left\{ \underbrace{a_m, a_{m+1}, a_{m+1}, \dots}_{\text{the series' } m\text{-tail}} \right\}$$

טענה 2.52 $s_{m+1} \leq s_m$.

הוכחה: s_m הינו חסם מלעיל של $\{a_m, a_{m+1}, \dots\}$,

ולכן בוודאי חסם מלעיל של $\{a_{m+1}, a_{m+2}, \dots\}$.

טענה 2.53 אם L חסם מלרע של כל הסדרה,

$$\text{אז } L \leq s_m$$

הוכחה: $L \leq a_m \leq s_m$

הגדרה 2.54 הסדרה s_m מונוטונית יורדת וחסומה מלרע,

ולכן יש לה גבול :

$$S = \limsup(a_n) = \overline{\lim}(a_n)$$

והוא נקרא הגבול העליון של a_n .

אפשר לפרק את הביטוי ולקבל:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq m} (a_n) \right) = S$$

וכמו כן:

$$\limsup a_n = \inf S = \inf \{ \sup \{ a_n, a_{n+1}, \dots \} \}$$

הגדרה 2.55 כמו כן, נסמן גם:

$$t_m = \inf \{ a_m, a_{m+1}, \dots \}$$

וכן $t_m \leq M, t_m \leq t_{m+1}$ (הוא חסם מלעיל של הסדרה),

ולכן $\lim t_n = T$ קיים, ונסמן:

$$\liminf(a_n) = T$$

דוגמאות:

a_n	s_m	S	t_m	T
$1 - \frac{1}{n}$	1	1	$1 - \frac{1}{m}$	1
$1 + \frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{m}$	1	1	1
$(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$	1	1	-1	-1
$(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$	תלוי ב- m	1	תלוי ב- m	-1

לסיכום:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup a_n = \inf s_m = \inf_{n \geq m} \sup \{a_n\}$$

$$\underbrace{\limsup a_n}_{S = \lim s_m} \leq \underbrace{\sup a_n}_{S_1}$$

משפט 2.56 תהי סדרה חסומה.

אזי $S = \limsup a_n$ מקיים:

1. לכל $\varepsilon > 0$ יש אינסוף איברים של הסדרה הגדולים מ- $S - \varepsilon$.
2. לכל $\varepsilon > 0$ יש רק מספר סופי של איברים מן הסדרה הגדולים מ- $S + \varepsilon$.

הוכחה: נשתמש בסימונים מההגדרה.

1. נניח $\varepsilon > 0$. לכל m $S - \varepsilon < S \leq s_m$,

ולכן יש a_n עם $m \leq n$ (איבר בזנב ה- m)

המקיים $S - \varepsilon < a_n$ (מהאיפיון של חסם עליון,

כי $S - \varepsilon$ כבר אינו חסם מלעיל של $\{a_m, a_{m+1}, \dots\}$.)

היות ו- m גדול כרצוננו. יש אינסוף $S - \varepsilon < a_n$.

2. יהי $\varepsilon > 0$. היות ו- $\lim s_m = S$ קיים m כך ש- $s_m < S + \varepsilon$.

אבל $a_n \leq s_m$ לכל $n \leq m$, ולכן $a_n < S + \varepsilon$ לכל $n \leq m$,

ולכן יש רק מספר סופי של איברים הגדולים מ- $S + \varepsilon$.

2.6.1 איפיונים בעזרת סביבות ε ומסקנות

לכל $\varepsilon > 0$:

הגדרה 2.57 $A = \sup a_n$: אין $A + \varepsilon < a_n$, יש $A - \varepsilon < a_n$.

$S = \limsup a_n$: רק מספר סופי $S + \varepsilon < a_n$, אינסוף $S - \varepsilon < a_n$.

$L = \lim a_n$: רק מספר סופי $L + \varepsilon < a_n$, כולם פרט למספר סופי $L - \varepsilon < a_n$.

L הינו גבול חלקי של a_n : יש אינסוף $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

מסקנה 2.58 תהי סדרה חסומה.

אזי $S = \limsup a_n$ הינו הגבול החלקי הגדול ביותר של הסדרה,

ובפרט - יש גבול חלקי גדול ביותר:

$$\limsup a_n = \max \{L | L \text{ is a partial lim}\}$$

הוכחה: לכל $\varepsilon > 0$ יש אינסוף $S - \varepsilon < a_n$,

אבל רק מספר סופי $S + \varepsilon \leq a_n$,

ולכן יש אינסוף $S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$,

ולכן S גבול חלקי.

מאידך, אם $S' < S$, נבחר $\varepsilon > 0$ כך ש- $S' - \varepsilon > S$.

ממשפט 2.56 יש רק מספר סופי של $S' - \varepsilon < a_n$,

ולכן S' אינו גבול חלקי של a_n .

מסקנה 2.59 תהי סדרה חסומה.

אזי $L = \limsup a_n = \liminf a_n$ קיים אמ"מ

ובמקרה כזה, שני הגבולות (העליון והתחתון) $L =$.

הוכחה: ראינו שסדרה חסומה מתכנסת אמ"מ יש לה גבול חלקי אחד ויחיד,

וזה מתקיים אמ"מ הגבול החלקי הגדול ביותר שווה לגבול החלקי הקטן ביותר.

■

2.7 חזקות ממשיות

$$0 < a, 0 < a^x, x \in \mathbb{R}$$

תכונות נדרשות:

$$1. a^1 = a$$

$$2. a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$3. (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$4. (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$5. \text{סדר - אם } 1 < a, a^x < a^y \Leftrightarrow x < y, \text{ אם } 1 > a, a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$$

משפט 2.60 יש דרך אחת ויחידה להגדיר את a^x כך שהתכונות הנ"ל תתקיימנה.

הוכחה: שלב א' - $1 < a, n \in \mathbb{N}, a^n$, נגדיר באינדוקציה:

$$\text{בסיס: } 1 := a^1, \text{ צעד: } a^{n+1} := a^n \cdot a$$

$$1 := a^0, a^0 := 1 \Leftrightarrow a^0 \cdot a^0 = a^0$$

$$1 = a^0 = a^{-n} \cdot a^n \Leftrightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

בדיקה: נא לבדוק שכל התכונות מתקיימות ל- $x, y \in \mathbb{Z}$.

$1 < a$ שלב ב' - $x \in \mathbb{Q}$. נכתוב $x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, ונגדיר:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

(תזכורת: הוכחנו שקיים מס' אחד ויחיד שסומן $\sqrt[n]{a}$ $0 <$

המקיים $(\sqrt[n]{a})^n = a \Rightarrow$ מסקנה מאימות $\mathbb{R}$).

(1) נבדוק שההגדרה טובה:

אם $x = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, ו- $\frac{p}{q}$ הינו כתיבה כשבר מצומצם: $m = dp, n = dq, d$ טבעי.

$$\text{צריך להראות } (\sqrt[n]{a})^p = (\sqrt[n]{a})^{dp} = (\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a})^p$$

דהיינו, די לראות כי $\sqrt[n]{a}^d = \sqrt[n]{a}$, כלומר

$$(\sqrt[n]{a})^{dq} = ((\sqrt[n]{a})^d)^q = a$$

$$(2) \text{ צ"ל למשל } a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

היות (ובשלב 1) הראינו שהגדרת a^x לא תלויה בדרך בה כותבים את x ,

נכתוב אותם בעזרת מכנה משותף $x = \frac{r}{q}, y = \frac{s}{q}, (r, s \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$

$$a^{\frac{r}{q}} \cdot a^{\frac{s}{q}} = a^{\frac{r+s}{q}} = (\sqrt[q]{a})^{r+s}$$

בגלל תכונת הסדר (עבור מעריך שלם) די להראות:

$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s = \left(a^{\frac{r}{q}}\right)^q \cdot \left(a^{\frac{s}{q}}\right)^q = \left(a^{\frac{r}{q}} \cdot a^{\frac{s}{q}}\right)^q = \left((\sqrt[q]{a})^{r+s}\right)^q = ((\sqrt[q]{a})^q)^{r+s} = a^{r+s}$$

■

24.11.2009

$$:x < y$$

$$x = \frac{p_1}{q} < \frac{p_2}{q} = y$$

$$p_1 < p_2, \quad q \in \mathbb{N}$$

$$1 < \sqrt[q]{a} \Leftrightarrow 1 < a$$

$$(\sqrt[q]{a})^{p_1} < (\sqrt[q]{a})^{p_2}$$

נרצה להגדיר:

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$$

אם r_n סדרת רציונליים המתכנסת ל- x .

$$10^\pi \approx 10^{3.14159} = \left(100,000\sqrt[10]{10}\right)^{314159}$$

למה 2.61 תהיה סדרת רציונליים כך ש- $h_n \rightarrow 0$.

$$a^{h_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = a^0 \text{ אזי}$$

הוכחה: ראינו ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ($1 < a$). עבור $a < n$

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$$

ולכן ממשפט הסנדוויץ' $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

לכל $\varepsilon > 0$ קיים M כך ש- $1 < a^{\frac{1}{M}} < 1 + \varepsilon$.

קיים N כך שאם $n > N$ אזי $-\frac{1}{M} < h_n < \frac{1}{M}$.

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{1 + \varepsilon} < a^{-\frac{1}{M}} < a^{h_n} < a^{\frac{1}{M}} < 1 + \varepsilon$$

■

$$a^{h_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ ולכן}$$

יהיה x ממשי. נסתכל ב:

$$A = \{r \in \mathbb{Q} | r \leq x\}, \quad B = \{s \in \mathbb{Q} | s \geq x\}$$

נניח $1^4 < a$. אזי לכל $r \in A$ ולכל $s \in B$,

$$a^r \leq a^s \Leftrightarrow r \leq s$$

(חזקות רציונליות כבר מוגדרות).

הקבוצה $a^A = \{a^r | r \in A\}$ חסומה מלעיל (ע"י כל $a^s, s \in B$),

ומאותה סיבה a^B חסומה מלרע, ומתקיים $\sup a^A \leq \inf a^B$.

¹⁴(אם $0 < a < 1$ הפכו את סימני האי שיוויון להלן)

$$\sup a^A = \inf a^B$$

הוכחה: די להראות שלכל $\varepsilon > 0$ יש $r \in A, s \in B$ כך ש-

$$0 \leq a^s - a^r < \varepsilon$$

$$a^r (a^{s-r} - 1) < a^K (a^{s-r} - 1)$$

כאשר K מספר שלם $x < .$

ראינו שקיים M כך ש:

$$a^{\frac{1}{M}} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^K}$$

ועכשיו אם $s - r < \frac{1}{M}$:

$$a^{s-r} - 1 < a^{\frac{1}{M}} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^K}$$

ולכן

$$0 \leq a^s - a^r < \varepsilon$$

■

הגדרה 2.63

$$a^x = \sup a^A = \inf a^B$$

$$A = \{r \in \mathbb{Q} | r \leq x\}, B = \{s \in \mathbb{Q} | s \geq x\}$$

הוכחה: הערה: אם $x \in \mathbb{Q}$ ו- a^x כבר מוגדר,

ההגדרה ה"חדשה" מתלכדת עם מה שידוע:

במקרה הזה $x = \max A = \min B$ וסיימנו.

■

משפט 2.64 תהי $x_n \rightarrow x$ סדרה כלשהיא של רציונליים המתכנסת ל- x ¹⁵.

אזי $\lim a^{x_n} = a^x$.

הוכחה: לכל $\varepsilon > 0$ ראינו שיש $r \in A, s \in B$ כך ש- $|a^s - a^r| < \varepsilon$, $r < x < s$.

יהי N כך שעבור $n > N$ $r < x_n < s$ רציונליים,

ואז $a^r < a^{x_n} < a^s$.

$$|a^{x_n} - a^x| < \varepsilon \Leftrightarrow a^r \leq a^x \leq a^s$$

■

¹⁵למשל סדרת הקירובים העשרוניים של x .

נראה כי התכונות נשמרות:

1. יחס הסדר ($1 < a$) - אם $x < y$ נבחר $x < r_1 < r_2 < y$,
 r_1, r_2 רציונליים, $a^x < a^y, a^x \leq a^{r_1} < a^{r_2} \leq a^y$.

2.

$$a^x \cdot a^y \stackrel{?}{=} a^{x+y}$$

נבחר: $r_n \rightarrow x, s_n \rightarrow y$ רציונליים,

אזי $r_n + s_n \rightarrow c + y$

$$a^{x+y} = \lim a^{r_n+s_n} = \lim a^{r_n} \cdot a^{s_n} = \lim a^{r_n} \cdot \lim a^{s_n} = a^x \cdot a^y$$

3.

$$(ab)^x \stackrel{?}{=} a^x \cdot b^x$$

$$(ab)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (ab)^{r_n} = \lim a^{r_n} \cdot b^{r_n} = \lim a^{r_n} \cdot \lim b^{r_n} = a^x \cdot b^x$$

4.

$$(a^x)^y \stackrel{?}{=} a^{xy}$$

$$(a^x)^y = \lim (a^x)^{s_n} = \lim a^{x s_n} = \lim a^{r_n} = a^x$$

ומכאן אנחנו לא יכולים להתקדם. ועל כן:

למה 2.65 יהי x ממשי.

אזי אם $0 < a_n \rightarrow 1$ אז $1 = 1^x = \lim a_n^x$.

הוכחה: נניח $x = \frac{p}{q}$ רציונלי. אזי:

$$a_n \rightarrow a \Rightarrow a_n^p \rightarrow 1$$

$$|\sqrt[q]{a_n^p} - 1| \leq |a_n^p - 1|$$

$$\sqrt[q]{a_n^p} \rightarrow 1$$

במקרה הכללי $r < x < s$ כאשר r, s רציונליים. אזי:

$$1 \leftarrow a_n^r < a_n^x < a_n^s \rightarrow 1$$

■

ולכן ממשפט הסנדוויץ' $a_n^x \rightarrow 1$.

נחזור להוכחת 4: **הוכחה:** נבחר כמקודם $r_n \rightarrow x, s_m \rightarrow y$ רציונליים.

בשביל n קבוע:

$$(a^{r_n})^y = \lim_{m \rightarrow \infty} (a^{r_n})^{s_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} a^{r_n s_m} = a^{r_n y}$$

נסתכל על הגבול כאשר $n \rightarrow \infty$: $a^{r_n} \rightarrow a^x$ (ממשפט שהוכחנו מעלה), וכמו כן:

$$\left(\frac{a^{r_n}}{a^x} \right) \rightarrow 1$$

מהלמה:

$$\frac{a^{r_n y}}{(a^x)^y} = \frac{(a^{r_n})^y}{(a^x)^y} = \left(\frac{a^{r_n}}{a^x} \right)^y \rightarrow 1$$

נזכור כי $r_n y \rightarrow xy$ (מדוע? הוכחה כמקודם - ניקח $h_n \rightarrow 0$ ממשיים, לכן $a^{h_n} \rightarrow 1$).

נתון $\varepsilon > 0$, נבחר M כך ש- $1 < a^{\frac{1}{M}} < 1 + \varepsilon$.

כמו כן נבחר N כך ש- $n > N$ - $-\frac{1}{M} < h_n < \frac{1}{M}$.

לכן: $1 - \varepsilon < \frac{1}{1+\varepsilon} < a^{-\frac{1}{M}} < a^{h_n} < a^{\frac{1}{M}} < 1 + \varepsilon$.

, ולכן $a^{r_n y} \rightarrow a^{xy}$ ולכן הוכחנו את הטענה!

■

תזכורת:

הראינו ש: $e(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ קיים $(0 \leq x)$.

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718$$

משפט 2.66

$$e(x) = e^x$$

הוכחה: נוכיח טענה:

טענה 2.67 לכל סדרה $\alpha_n \rightarrow 0$,

$$\lim (1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e$$

26.11.2009

הרעיון הינו להשוות את הסדרה הנתונה עם תת סדרה של סדרה:

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \rightarrow e$$

לכל n יהיה k_n טבעי כך ש:

$$\frac{1}{k_n + 1} < \alpha_n \leq \frac{1}{k_n}$$

(כאשר $n \rightarrow \infty$ גם $k_n \rightarrow \infty$).

$$k_n \leq \frac{1}{\alpha_n} < k_n + 1, \quad k_n = \left\lfloor \frac{1}{\alpha_n} \right\rfloor$$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}}{\left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)} = \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \leq (1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} = \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \cdot \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)$$

הערה: k_n יכולים, לעלות, לרדת, להשאר במקום...

כלומר, לאו דווקא מקיימים $k_1 < k_2 < \dots$,

אבל בכל זאת, בהנתן $\varepsilon > 0$ יש K כך שאם $k + 1 > K$ אזי

$$\left| \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k - e \right| < \varepsilon$$

ויש N כך שאם $n > N$ אזי $k_n + 1 > K$.

(כל מה שצריך הוא $\frac{1}{K} < \alpha_n < \frac{1}{k_n+1}$, וזה אפשרי כי $\alpha_n \rightarrow 0$).

ולכן:

$$\left(1 + \frac{1}{k_n} \right)^{k_n} \rightarrow e$$

ממשפטי האריתמטיקה של גבולות וממשפט הסנדוויץ:

$$(1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} \rightarrow e$$

■

משפט 2.68 הגבול:

$$e(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

קיים לכל x ושווה ל- e^x .

הוכחה: ראשית ניקח $0 < x$:

$$\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n} \right)^{\frac{n}{x}} \right]^x$$

מהטענה הקודמת, ניקח:

$$0 < \alpha_n = \frac{x}{n} \rightarrow 0$$

ואז נובע כי:

$$\lim \left[\left(1 + \frac{x}{n} \right)^{\frac{n}{x}} \right] = e$$

הראנו בפרק על חזקות שאם $a_n \rightarrow a$ אזי $a_n^x \rightarrow a^x$,

ולכן

$$\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \rightarrow e^x$$

יהיה $x > 0$, $x < n$. אזי:

$$1 \leftarrow 1 - \frac{x^2}{n} \leq \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)^n = \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \leq 1$$

כאשר אי השוויון משמאל נובע מאי שיוויון ברנולי עבור $x < n$,

ולכן משפט הסנדוויץ' הסדרה $\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n$ שואפת גם לאחד.

מסקנה 2.69

$$\left(1 - \frac{x}{n} \right)^n = \frac{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n} \rightarrow \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

מסקנה 2.70

$$\left(1 + \frac{x}{n} \right)^x \rightarrow e^x$$

לכל x .

■

2.8 סדרות לא (לאו דוקא) חסומות וגבולות אינסופיים

"שאיפה לאינסוף" (אצל חלק מהמחברים - התכנסות לאינסוף).

נביט בשתי סדרות לא חסומות:

1.

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

2.

$$a_n = \begin{cases} n & n \text{ odd} \\ \frac{1}{n} & n \text{ even} \end{cases} \Rightarrow 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$$

בראשונה אין ת"ס מתכנסת,

ובשניה יש ת"ס מתכנסת.

הגדרה 2.71 סדרה a_n שואפת ל- ∞ ,

$$\lim a_n = \infty$$

אם לכל R יש N כך שלכל $n > N$ - $R < a_n$.

בצורה שקולה, נגיד כי $\lim a_n = \infty$,

אם בכל קטע $[R, \infty)$ נמצאים כמעט כל אברי הסדרה.

נשים לב: למרות הסימון $\lim a_n = \infty$,

לסדרה a_n אין גבול כי היא אינה חסומה מלעיל!

בצורה דומה, עבור $\lim a_n = -\infty$,

a_n לא חסומה מלרע.

נשווה בין ההגדרות:

שואף ל- ∞ :

$$(\forall M) (\exists N) (\forall n < N) M < a_n$$

לא חסום מלעיל:

$$(\forall M) (\exists n) M < a_n$$

לכל M כמעט כל איברי סדרה $M < a_n$.

שואף ל- $-\infty$:

$$(\forall M) (\exists N) (\forall n > N) a_n < M$$

משפט 2.72 אם a_n אינה חסומה מלעיל,

יש לה תת סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ השואפת ל- ∞ .

באותה צורה, אם a_n אינה חסומה מלרע,

יש לה תת סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ השואפת ל- $-\infty$.

הוכחה: נבחר באינדוקציה את n_k כך ש:

$$1. n_k < n_{k+1}$$

$$2. k < a_{n_k}$$

בניה: $1 < a_{n_k}$ (לא חסומה מלעיל).

נניח בנינו את n_k .

אם כל a_j עבור $n_k < j$ מקיימים $a_j \leq k+1$,

אזי הסדרה חסומה על ידי:

$$\max\{a_1, \dots, a_{n_k}, k+1\}$$

בסתירה להנחה,

לכן $j = n_{k+1}$ קיים.

2.8.1 משפט בולצאנו ויירסטראס המוכלל

משפט 2.73 תהיה a_n סדרה כלשהי,

אזי או שיש לה ת"ס מתכנסת,

או שיש לה ת"ס שואפת ל- ∞ ,

או שיש לה ת"ס ששואפת ל- $-\infty$.

הוכחה: אם a_n חסומה (גם מלעיל וגם מלרע) -

אזי יש ת"ס מתכנסת.

אם אינה חסומה מלעיל, אזי יש לה תת סדרה השואפת ל- ∞ (ממשפט קודם),

ואם אינה חסומה מלרע, אזי יש לה תת סדרה השואפת ל- $-\infty$ (מאותו המשפט).

2.8.2 גבול עליון, תחתון באינסוף

הגדרה 2.74 אם a_n לא חסומה מלעיל (כלומר, קיימת ת"ס השואפת ל- ∞),

$$\limsup a_n = \infty$$

אחרת, נסתכל בסדרה $s_n = \sup\{a_n, a_{n+1}\}$.

ה- $\sup$ קיים כי הסדרה, ולכן גם הזנב, חסומים מלעיל - $s_n \geq s_{n+1} \geq \dots$

מצב א' - s_n חסומה מלרע - $\lim s_n = \limsup a_n = S$.

מצב ב' - s_n אינה חסומה מלרע - $\limsup a_n = -\infty$.

דוגמא:

1.

$$a_n = (-1)^n n \Rightarrow \limsup = \infty$$

2.

$$a_n = \begin{cases} -n & n \text{ even} \\ 1 + \frac{1}{n} & n \text{ odd} \end{cases} \Rightarrow \limsup a_n = 1$$

3.

$$a_n = 1 - n, s_n \rightarrow -\infty, \limsup a_n = -\infty$$

הגדרה 2.75 כנ"ל:

$\liminf a_n = -\infty$ אם a_n לא חסומה מלרע.

$T = \liminf a_n$ אם $T = \inf \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ מתכנסת ל- T , $T = \liminf a_n$.

$\liminf t_n = \infty$ אם $t_n \rightarrow \infty$ ובמקרה זה $a_n \rightarrow \infty$.

2.8.3 סדרות מונוטוניות (לאו דווקא חסומות)

הגדרה 2.76 תהי a_n מונוטונית עולה (במובן הרחב) $a_n \leq a_{n+1}$ לכל n ,

אזי $\lim a_n = L$ קיים אם a_n חסומה.

$\lim a_n = \infty$ אם a_n אינה חסומה.

הוכחה: ראינו כבר במשפט קודם 2.30 שאם a_n חסומה, הגבול קיים.

נניח אינה חסומה. יהיה R מספר נתון.

קיים לכן N כך ש- $a_N < R$.

מונוטוניות עולה לכל $n > N$ בוודאי $a_n > R$, ולכן $a_n \rightarrow \infty$.

■

2.8.4 משפט הסנדוויץ' המוכלל

משפט 2.77 תהי $a_n \leq b_n, a_n \rightarrow \infty$,

אזי גם $b_n \rightarrow \infty$.

הוכחה: תרגיל 6.

■

2.8.5 אריתמטיקה עם אינסוף - בתרגיל 6

טענה 2.78 תהי $a_n \neq 0$ לכל n ,

אבל $a_n \rightarrow 0$, אזי $\left| \frac{1}{a_n} \right| \rightarrow \infty$.

הוכחה: בהנתן $R > 0$, נמצא N כך ש- $a_n < R$.

ואז $|a_n| < R$ ואז $\left| \frac{1}{a_n} \right| > \frac{1}{R}$.

■

2.9 תרגולים

אריתמטיקה של גבולות

רק אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות, אז:

16.11.2009

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

תרגול

אם גם ידוע ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, אז:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

למשל:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n + (-1)^{n+1}) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1}$$

כי שני הגבולות מימין אינם קיימים!

דוגמא:

$$a_n = \frac{n^2 + n + 3}{n^2 + 1}$$

בשבוע שעבר הוכחנו בעזרת הגדרת הגבול כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

כעת, נביט בסדרה שלנו:

$$a_n = \frac{(n^2 + n + 3) \cdot \frac{1}{n^2}}{(n^2 + 1) \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 + \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}$$

כעת, מאריתמטיקה של גבולות, ומכך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ נקבל:

$$a_n \rightarrow \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0} = \frac{1}{1} = 1$$

סדרות מונוטוניות, וסדרות רקורסיביות

נזכור משפטים מההרצאה:

משפט 2.79 סדרה מונוטונית עולה חלש וחסומה מלעיל מתכנסת.

סדרה מונוטונית יורדת חלש וחסומה מלרע מתכנסת.

תרגיל:

נתון $b_1 \in \mathbb{R}$, $-\frac{3}{2} \leq b_1$, ונגדיר

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_{n+1} = \sqrt{2b_n + 3}$$

האם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת? אם כן, מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$?

נוכיח באינדוקציה ש- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת:

$b_1, n = 1$ נתון.

$$2b_1 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow b_1 \geq -\frac{3}{2} \text{ כי מוגדרת } b_2 = \sqrt{2b_1 + 3} - n = 2$$

$$\text{בנוסף } 0 \leq b_2$$

נניח ש- b_n מוגדר, נוכיח כי גם b_{n+1} מוגדר עבור $n \leq 2$.

$$b_n \geq 0, \quad b_{n+1} = \sqrt{2b_n + 3} \\ \Rightarrow 2b_n + 3 \geq 0$$

ולכן b_{n+1} מוגדר.

תוצאה נוספת -

$$\forall n \geq 2 \quad b_n \geq 0$$

כעת, נבדוק - $b_2 \leq b_1$ או $b_2 \geq b_1$?

$$b_2 = \sqrt{2b_1 + 3} \geq b_1$$

איננו יודעים אם b_2 חיובי או שלילי - אם כן, נפריד למקרים:

$$\text{אם } -\frac{3}{2} \leq b_1 \leq 0 \text{ אז } b_2 \geq b_1$$

$$\text{אם } b_1 \geq 0 \text{ אז}$$

$$b_2 \geq b_1 \Leftrightarrow b_2^2 \geq b_1^2 \Leftrightarrow 2b_1 + 3 \geq b_1^2 \Leftrightarrow b_1^2 - 2b_1 - 3 \leq 0 \\ \Leftrightarrow (b_1 + 1)(b_1 - 3) \leq 0 \Leftrightarrow b_1 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow b_1 \leq 3$$

לכן

$$-\frac{3}{2} \leq b_1 \leq 3 \Leftrightarrow b_1 \leq b_2 \\ 3 \leq b_1 \Leftrightarrow b_2 \leq b_1$$

$$(\text{עבור } b_1 = b_2 = 3 \Leftarrow b_1 = 3)$$

יהי $n \geq 2$ אזי

$$b_n \leq b_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{2b_{n+1} + 3} \leq \sqrt{2b_n + 3} \Leftrightarrow 2b_{n+1} + 3 \leq 2b_n + 3 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} \leq b_n$$

ז"א

$$\forall n \geq 2 \quad b_n \leq b_{n+1} \Leftarrow b_1 \leq b_2$$

ולכן הסדרה b_n מונוטונית עולה אם $b_1 \leq b_2$,

$$\text{כלומר כאשר } -\frac{3}{2} \leq b_1 \leq 3.$$

באותו אופן הסדרה b_n מונוטונית יורדת כאשר $b_1 \geq 3$.

$$\text{נניח ש-} -\frac{3}{2} \leq b_1 \leq 3.$$

נכיח באינדוקציה כי $b_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$n = 1$ נתון.

נניח ש- $b_n \leq 3$ עבור $n \in \mathbb{N}$ עבור $1 \leq n$:

$$b_{n+1} = \sqrt{2b_n + 3} \leq \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 3$$

ולכן הסדרה חסומה מלעיל.

מכיוון והיא מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, היא מתכנסת.

נסמן: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

$$\forall n \geq 1 \quad b_{n+1} = \sqrt{2b_n + 3} \Rightarrow \forall n \geq 1 \quad b_{n+1}^2 = 2b_n + 3$$

$$d_n = b_{n+1}^2 \text{ ו- } c_n = 2b_n + 3 \text{ נסמן}$$

מאריטמטיקה של גבולות, נובע כי c_n מתכנסת, ונתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2L + 3$.

הסדרה b_{n+1} היא הסדרה המקורית b_n בלי האיבר הראשון b_1 ,

ולכן הסדרה b_{n+1} גם היא מתכנסת ל- L .

ומכאן (מאריטמטיקה) נובע ש- d_n מתכנסת ל- L^2 .

אבל $d_n = c_n$ ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, כלומר:

$$L^2 = 2L + 3 \Leftrightarrow (L + 1)(L - 3) = 0 \Leftrightarrow L = -1 \text{ or } L = 3$$

אבל $0 \leq b_n$ לכל $n \geq 2$ ולכן $0 \leq L$ ומכאן $L = 3$.

משפט הכריז!

יהיו $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=1}^\infty$ המקיימות את התנאים הבאים:

$$1. \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq b_n \leq c_n$$

$$2. \quad a_n \text{ ו- } c_n \text{ מתכנסות.}$$

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

אזי מתקיים:

$$1. \quad b_n \text{ מתכנסת.}$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

דוגמא:

נהי $b_n = \sqrt[n]{\frac{n+5}{n+1}}$. האם הסדרה מתכנסת?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 = \frac{n+1}{n+1} \leq \frac{n+5}{n+1}$$

ולכן

$$a_n = 1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\frac{n+5}{n+1}} = b_n$$

בנוסף:

$$\frac{n+5}{n+1} = \frac{(n+1)+4}{n+1} \stackrel{\forall n \geq 3}{\leq} \frac{(n+1)+(n+1)}{n+1} = 2$$

ולכן

$$\forall n \geq 3: \quad \sqrt[n]{\frac{n+5}{n+1}} \leq \sqrt[n]{2} = c_n$$

כלומר, מתקיים

$$a_n = 1 \leq b_n \leq \sqrt[n]{2} = c_n$$

ולכן מתקיים ממשפט הכריך:

$$1 = \lim a_n = \lim b_n$$

הערה חשובה:

נשים לב שאסור לנו להשאיר את הביטוי מעלה לאינסוף!!

מדוע?

כי ה- n של השורש והאיבר בפנים שואפים יחדיו (!! לאינסוף,

ועל כן הדרך היחידה לפתור כאלו אי שוויונות -

בעזרת הכריך!

גבול עליון, גבול תחתון

נשים לב לאפיונים השונים של הגבול העליון והגבול התחתון -

30.11.2009

הוכחנו בכיתה כי שלושתם שקולים! (ההגדרה, אפיון אפסילון ואפיון הגבול החלקי).

$$A = \{L | L \text{ is a partial limit of } a_n\}$$

תרגול

A היא חסומה, ולכן ממשפט בולצאנו וירשטראס נובע ש- $A \neq \emptyset$,

ולכן בעלת סופרימום ואינפימום, הגדרנו:

$$\sup A := \overline{\lim} a_n$$

$$\inf A := \underline{\lim} a_n$$

תרגיל

יהיו $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות חסומות,

ונניח ש- $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$.

הוכיחו ש: $\overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n$.

פתרון 1 - לפי ההגדרה מהכיתה

נסמן $v_n = \sup \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, $u_n = \sup \{b_n, b_{n+1}, \dots\}$ עבור כל $n \in \mathbb{N}$.

v_n הוא חסם מלעיל של $\{b_n, b_{n+1}, \dots\}$ מההגדרה, כלומר:

$$\forall k \geq n \quad b_k \leq v_n$$

$$\Rightarrow \forall k \geq n \quad a_k \leq b_k \leq v_n$$

ולכן v_n חסם מלעיל של $\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$.

לכן, ממינימליות החסם העליון - $u_n \leq v_n$

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \overline{\lim} a_n$$

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \overline{\lim} b_n$$

ולכן $\overline{lim} a_n \leq \overline{lim} b_n$, כנדרש.

פתרון 2 - לפי אפיון אפסילון

נניח בשלילה כי $\alpha = \overline{lim} a_n < \overline{lim} b_n = \beta$, ונגיע לסתירה (מושאר לקורא החרוץ),

תהליך - נבחר אפסילון קטן (למשל $\varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{2}$),

ואז נראה שיש רק מספר סופי של איברים בסביבה הזו, וזה לא מספיק לייצור תת סדרה.

פתרון 3 - לפי אפיון גבול חלקי.

יהי L גבול חלקי של a_n .

אזי קיימת תת סדרה a_{n_k} כך ש- $\lim a_{n_k} = L$.

נתבונן בסדרה b_{n_k} - האינדקסים נבחרו עבור L כך שאין לנו מידע לגבי התכנסות.

עם זאת, אנו יודעים כי היא חסומה.

משפט בולצאנו וירשטראס מבטיח לנו כי יש לה תת סדרה $b_{n_{k_l}}$ מתכנסת.

נסמן את הגבול שלה להיות $\hat{L}$.

הסדרה $a_{n_{k_l}}$ היא תת סדרה של a_{n_k} ולכן ממשפט הירושה היא מתכנסת לאותו הגבול L .

אנו יודעים כי $a_{n_{k_l}} \leq b_{n_{k_l}}$ מהנתון,

ולכן בפרט $\hat{L} < L$.

סדרות לא חסומות

נשים לב כי ∞ ההוא סמל בלבד!

לדוגמא:

$$\infty + L = \infty$$

3 פונקציות

$A \ni a$ - תחום ההגדרה, $B \ni f(a)$ - טווח

תהיינה A, B שתי קבוצות.

A תקרא תחום ההגדרה, B תקרא הטווח.

(בדור"כ אצלנו A, B יהיו קטעים או קטעים מנוקבים).

$A \times B$ המכפלה הקרטזית = קבוצת הקבוצות הסדורים (a, b) כך ש- $a \in A, b \in B$

הגדרה 3.1 פונקציה מ- A ל- B היא קבוצה חלקית $\Gamma \subseteq A \times B$ המקיימת:

א. לכל $a \in A$ יש $b \in B$, $(a, b) \in \Gamma$.

ב. $(a, b_1), (a, b_2) \in \Gamma \Rightarrow b_1 = b_2$.

הגדרה 3.2 סימון -

נותנים לפונקציות שם - f, g ואז ה- b היחיד ש- $(a, b) \in \Gamma$

מסומן $b = f(a)$, $\Gamma_f = \Gamma$ הגרף של הפונקציה.

הגדרה 3.3 לפונקציה $f : A \rightarrow B$ התמונה של f ($image$)

היא $B \supseteq f(A) = \{f(a) | a \in A\}$.

הגדרה 3.4 f נקראת חד חד ערכית אם $f(a_1) = f(a_2)$ אז $a_1 = a_2$.

הגדרה 3.5 f נקראת על אם $f(A) = B$.

דוגמא:

$$f(x) = x - [x]$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$0 < f(x) < 1$$

הגדרה 3.6 סדרה ממשית היא פונקציה שהתחום שלה $\mathbb{N}$ והטווח שלה $\mathbb{R}$.

אם f, g פונקציות של קבוצה A שהטווח שלהן $\mathbb{R}$, אזי

$$f + g, f \cdot g$$

מוגדרות להיות:

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

$$(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$$

$$\frac{f}{g}(a), g(a) \neq 0$$

$$(f^g)(a), f(a) > 0$$

3.0.1 הרכבה של פונקציות

$$\mathbb{R} \xrightarrow[f(x)]{1+\sin^2 x} [0, \infty) \xrightarrow[g(y)]{+\sqrt{y}} \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$$

3.0.2 הפונקציות האלמנטריות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$

פולינומים -

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

פונקציות רציונליות - $P, Q, \frac{P(x)}{Q(x)}$ פולינומים, תחום ההגדרה $\{x | Q(x) \neq 0\}$
פונקציות החזקה -

$$(a > 0), \mathbb{R} \ni x, a^x$$

3.0.3 פונקציות מונוטוניות, פונקציות הפוכות

הגדרה 3.7 פונקציה f מקטע ל- $\mathbb{R}$ תקרא מונוטונית עולה (ממש), אם לכל $x < x'$ בתחום הגדרתה $f(x) \leq f(x')$ ($f(x) < f(x')$).
נשים לב כי פונקציה עולה או יורדת ממש היא חח"ע.

לדוגמא:

$$a^x \Leftarrow 1 < a \text{ עולה ממש.}$$

$$a^x \Leftarrow 0 < a < 1 \text{ יורדת ממש.}$$

הגדרה 3.8 תהי $f : A \rightarrow B$ חח"ע ועל (אם לא על, נחליף את B ב- $f(A)$).
הפונקציה ההפוכה $g : B \rightarrow A$ מוגדרת:

$$f(a) = b \Leftrightarrow g(b) = a$$

גם g תהיה חח"ע ועל, וכמו כן:

$$g \circ f(a) = a$$

$$f \circ g(b) = b$$

$$(a, b) \in \Gamma_f \Leftrightarrow (b, g) \in \Gamma_g$$

נהוג לסמן:

$$g = f^{-1}$$

$$\text{יש לשים לב לא לבלבל עם } \frac{1}{f(a)}.$$

דוגמאות:

$$\text{ראינו שאם } a > 1 \text{ או אם } 1 > a > 0 \text{ חח"ע.}$$

הפונקציה ההפוכה שלה -

$$f(a) = a^x \Rightarrow g(y) = \log_a y$$

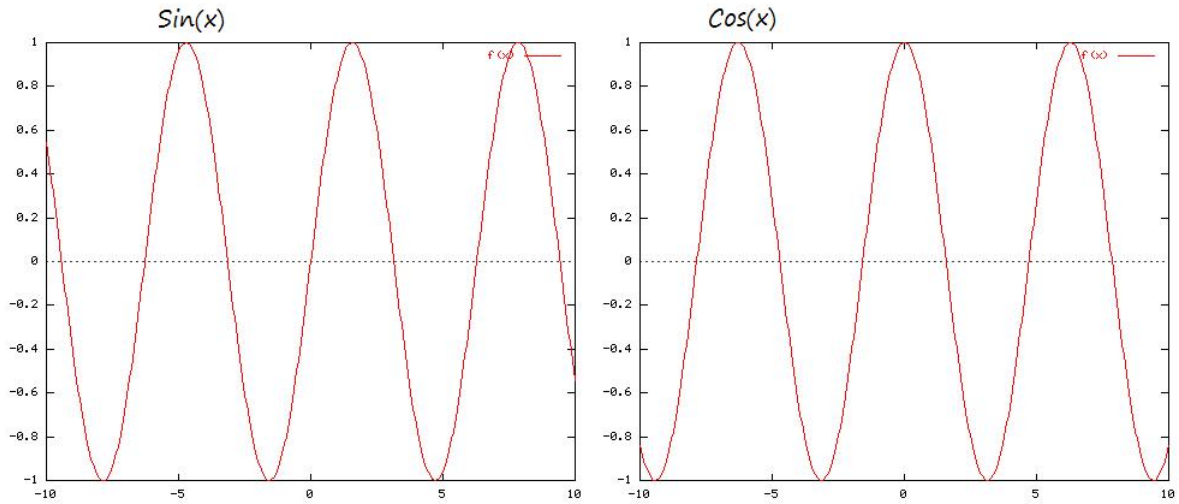
נראה בהמשך כי היא גם על ב- $(0, \infty)$.

1.12.2009

$\mathbb{R}$ מוגדרת בכל $\sin(x)$

$\mathbb{R}$ מוגדרת בכל $\cos(x)$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ מוגדרת עבור $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ עבור k טבעי כלשהוא



$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

חח"ע ועל (מונוטונית עולה)

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

חח"ע ועל (מונוטונית יורדת)

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, \infty)$$

חח"ע ועל (מונוטונית עולה)

$$\arctan : (-\infty, \infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

3.1 גבולות של פונקציות ורציפות

בראש ובראשונה אנו מתעניינים ב"מה קורה סביב נקודה מסויימת x_0 ?"
מאוחר יותר נדון בתופעות כאשר $x \rightarrow \infty$, ואז המקרה יהיה דומה לסדרות.

3.1.1 הגדרת הגבול של פונקציה f בנקודה x_0 לפי קושי

הגדרה 3.9 תהי f פונקציה ממשיית המוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה x_0 , כלומר בקטע פתוח (a, b) המכיל את x_0 , פרט אולי לנקודה x_0 עצמה.
אזי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

דוגמא:

$$f(x) = x^2$$

נרצה להוכיח:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$$

המטרה - למצוא $\delta > 0$ כך ש $\delta > 0$ $|x - 1| < \delta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$.

$$|x - 1| |x + 1| < \varepsilon$$

אם $\delta < 1$ אזי $|x + 1| < 3$.

אם בנוסף $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$, אזי

$$|x - 1| |x + 1| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon$$

לכן, בהנתן $\varepsilon > 0$, אזי $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{3})$ "יעבוד".

3.1.2 רציפות ונקודות אי רציפות

הגדרה 3.10 נניח f מוגדרת בקטע פתוח (a, b) , $x_0 \in (a, b)$

f תקרא רציפה ב- x_0 אם $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,

כלומר, יש לה גבול בנקודה והוא שווה לערכה שם,

או, "ככל ש- x מתקרב ל- x_0 כך $f(x)$ מתקרב ל- $f(x_0)$ ",

או

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

דוגמא:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

בהנתן $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, ואז אם $0 < |x - 0| < \frac{\varepsilon}{3}$,

$$-\varepsilon < f(x) = 3x < \varepsilon.$$

f אינה רציפה, מפני שהגבול קיים, אך שונה מערך הפונקציה בנקודה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$$

בדוגמא הזו, אם $x_0 \neq 0$ נראה ש- f כן רציפה ב- x_0 .

כלומר, עלינו להראות:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 3x_0 = f(x_0)$$

יהיה נתון $\varepsilon > 0$. צריך למצוא $\delta > 0$ כך ש-

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3x_0| < \varepsilon$$

נתנה ש- $|x_0| < \delta$.

ואז $f(x) = 3x$ (כי $x \neq 0$).

$$|3x - 3x_0| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{3}$$

לכן, לכל $x_0 \neq 0$, $\delta = \min(|x_0|, \frac{\varepsilon}{3})$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

הגדרה 3.11 נקודה x_0 בתחום ההגדרה של f ,

בה f אינה רציפה,

נקראת "נקודת אי רציפות".

למשל, בדוגמא מעלה, $x_0 = 0$ היא נקודת אי רציפות.

אי רציפות סליקה

הגדרה 3.12 אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ קיים,

אבל $l \neq f(x_0)$,

x_0 תקרא אי רציפות סליקה.

כלומר - אם "נתקן" את הגדרת f ע"י כך

שנגדירה בכל נקודה $x_0 \neq x_0$ כמקודם,

אבל ב- x_0 ניתן את הערך l ,

הפונקציה החדשה תהיה רציפה ב- x_0 .

דוגמא:

פונקציית הסימן:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

טענה 3.13 $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$ לא קיים!

הוכחה: כדי להוכיח אי קיום גבול, די למצוא $\varepsilon < 0$ אחד עבורו לא ניתן אין δ כמבוקש.

ניקח $\varepsilon = 1$. נניח בשלילה כי קיים גבול l ב-0,

אזי היה $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אזי $|\operatorname{sgn}(x) - l| < 1 = \varepsilon$.

אבל, ישנו $0 < x_2 < \delta$ ו- $-\delta < x_1 < 0$,

ואז

$$2 = |\operatorname{sgn}(x_1) - \operatorname{sgn}(x_2)| \leq |\operatorname{sgn}(x_1) - l| + |l - \operatorname{sgn}(x_2)| < 1 + 1 = 2$$

■

סתירה!

3.2 הגדרת הגבול על פי היינה, השקילות לקושי ומסקנות

3.12.2009

משפט 3.14 תהיה f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 .

אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ אם ומ"מ

לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$, $x_n \neq x_0$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ מתקיים:

$$f(x_n) \rightarrow l$$

דוגמא - פונקציית דיריכלה:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

הייחוד שלה - אין לה גבול בשום נקודה -

נוכיח זאת כמסקנה מהגדרת הגבול על פי היינה.

תהי x_0 נקודה כלשהיא.

אם היה קיים $\lim_{x \rightarrow x_0} D(x) = l$, אזי מצד אחד נוכל לבחור סדרה $x_n \rightarrow x_0$ כך שכל $x_n \in \mathbb{Q}$,

ולכן $D(x_n) = 0 \rightarrow l$ ולכן $l = 0$.

מאידך, קיימת סדרה $x'_n \rightarrow x_0$ כך שכל $x'_n \notin \mathbb{Q}$, ואז

$D(x'_n) = 1 \rightarrow l$ ולכן $l = 1$,

בסתירה ליחידות הגבול,

ולכן הגבול לא קיים!

כעת, נוכיח את המשפט:

הוכחה: מכיוון אחד, נניח כי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, ותהיה $x_0 \neq x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. נתון $\varepsilon > 0$. לכן, מהגדרת הגבול עפ"י קושי, קיים $\delta > 0$ כך ש- $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. מאחר ו- $x_0 \neq x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$, קיים N כך שאם $n > N$ אזי $0 < |x_n - x_0| < \delta$. ולכן $|f(x_n) - l| < \varepsilon \Leftarrow n > N$. מהכיוון השני, צ"ל כי אם l אינו הגבול של $f(x)$ ב- x_0 , אזי זה גורר כי יש סדרה אחת $x_0 \neq x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ כך שמתקיים $f(x_n) \not\rightarrow l$. מאחר ועל פי הנחתנו l אינו הגבול של $f(x)$, אזי ישנו $\varepsilon > 0$ כך שאין δ כך ש- $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. ניקח $\delta_n = \frac{1}{n}$, אזי אפשר למצוא מסויים המקיים $0 < |x_n - x_0| < \delta_n$ אבל $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. ניקח $x_n \rightarrow x_0$ כי $|x_n - x_0| \leq \frac{1}{n}$, וכמו כן $x_n \neq x_0$, ואף על פי כן: $f(x_n) \not\rightarrow l$.

חיזוק להגדרת הגבול על פי היינה:

טענה 3.15 על מנת ש- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ יהיה קיים, די לוודא שלכל סדרה $x_0 \neq x_n \rightarrow x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ קיים. (הערה: לכאורה בחיזוק הזה הגבול של $f(x)$ יכול להיות תלוי בבחירת הסדרה).

הוכחה: די להראות שאם לכל סדרה x_n כנ"ל, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ קיים, אזי הגבול אינו תלוי בסדרה. נניח $x_0 \neq x'_n \rightarrow x_0$ וכמו כן $l' \rightarrow f(x'_n)$, $x_0 \neq x''_n \rightarrow x_0$ וכמו כן $l'' \rightarrow f(x''_n)$. ונניח $l' \neq l''$. נבנה $x'_1, x'_2, x''_1, x''_2, \dots$ הסדרה המתקבלת משילוב שתי הסדרה לסירוגין, ונקרא לה x_n . עדיין $x_0 \neq x_n \rightarrow x_0$, אבל יש לה ת"ס אחת המתכנסת ל- l' , ותת סדרה אחרת המתכנסת ל- l'' , הוכחנו כי כל שתי תת סדרות של סדרה מתכנסת מתכנסות לאותו הגבול, ולכן $f(x_n)$ אינה מתכנסת.

נשים לב:

מדוע יש לדרוש $x_n \neq x_0$ לכל n ? נגיד $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, אבל $f(x_0) \neq l$, כלומר קיים גבול, אך x_0 נקודת אי רציפות. נבנה סדרה $x_n \rightarrow x_0$ וכמו כן עבור אינסוף ערכים של $x_n = x_0$, אזי לא קיים $\lim f(x_n)$!

7.12.2009

מסקנה 3.16 אם f מוגדרת בכל $x_0 \in (a, b)$,

אזי f רציפה ב- x_0 אם"מ לכל סדרה $x_n \rightarrow x_0$ מתקיים $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

הוכחה: בכיוון הראשון - אם התנאי הסדרתי מתקיים,

הוא ודאי מתקיים לסדרות המקיימות $x_n \neq x_0$

ולכן מאפיון הגבול על פי היינה $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

בכיוון השני, אם סדרה x_n כלשהיא המתכנסת ל- x_0 ,

תהי x_{n_k} תת הסדרה המתקבלת מהשמטת המספרים השווים ל- x_0 .

אם מניחים ש- f רציפה אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$,

ולכן מתנאי היינה $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$.

אבל בכל x_n שאינו בתת הסדרה $x_n = x_0$ בוודאי $f(x_n) = f(x_0)$

ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

עוד מסקנה מאפיון זה:

3.2.1 קריטריון קושי לקיום גבול

מסקנה 3.17 תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 .

אזי, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ קיים אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$,

כך שלכל $\delta > 0$, $|x' - x_0| < \delta$, $|x - x_0| < \delta$ אזי $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

הוכחה: בכיוון הראשון - תהי $x_n \neq x_0$ תהי

לכל $\varepsilon > 0$ נמצא δ כמובטח,

ואז נמצא N כך ש- $n > N \Leftrightarrow |x_n - x_0| < \delta$.

אם גם $n, m > N$ אזי $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ (מהנתון).

מסקנה: $f(x_n)$ הינה סדרת קושי, ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ קיים.

מהחיזוק לקריטריון היינה, נובע ש- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ גם כן קיים.

בכיוון ההפוך, אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$,

בהנתן $\varepsilon > 0$ נבחר $\delta > 0$ כך ש-

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ואז:

$$0 < |x - x_0| < \delta, 0 < |x' - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - l| + |l - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

טענה 3.18 אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ קיים,

אזי ישנו קטע $x_0 \in (a, b)$ ו- M ,

כך ש- $|f(x)| \leq M$ לכל $x \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \neq x$

כאשר $a \leq \alpha < x_0 < \beta \leq b$.

הוכחה: יהי l הגבול.

נבחר $\varepsilon = 1$. מצאנו $\delta > 0$ כך שלכל $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $x \neq x_0$:

$$l - 1 < f(x) < l + 1$$

■

דוגמא:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ m & x = \frac{n}{m} \text{ when } m \text{ is the smallest} \end{cases}$$

פונקציה זו אינה חסומה בשום קטע!

דוגמא נוספת:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

לא קיים $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ כי לכל $M > 0$ ולכל סביבה (α, β)

ל-0 ישנו $x \in (\alpha, \beta)$ ו- $0 \neq x$,

$$|x| < \frac{1}{M}, \text{ ואז } \left| \frac{1}{x} \right| > M$$

כלומר $\frac{1}{x}$ אינה חסומה בקטע (α, β) .

3.2.2 דיון פילוסופי בנושא תכונות של פונקציות

תכונות של פונקציות:

1. נקודתיות - לפונקציה יש את התכונה אמ"מ יש לה אותה בכל נקודה.
לדוגמא - חיוביות. חסימות - לא!
2. מקומיות - לפונקציה יש אותה אמ"מ לכל נקודה יש סביבה בה לפונקציה יש אותה.
לדוגמא - רציפות בכל נקודה.
3. גלובליות - אם באמת צריך להכיר את כל f כדי לדעת שיש לה את התכונה הזאת.
לדוגמא - חסימות - נקודתיות.
חסימות מקומית - לכל x_0 יש סביבה (למשל $(x_0 - 1, x_0 + 1)$) עליה f חסומה.
לא חסומה גלובלית!

הגדרה 3.19 פונקציה f נקראת רציפה (בתחום הגדרתה),

אם לכל x_0 בתחום ההגדרה, f רציפה ב- x_0 .

משפט 3.20 תהיינה f, g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0 .

נניח שקיים קטע $x_0 \in (\alpha, \beta)$ כך ש- $f(x) = g(x)$ לכל $x \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \neq x$.

$$\text{אזי } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$f \text{ רציפה ב-} x_0 \Leftrightarrow g \text{ רציפה ב-} x_0$$

הוכחה: נניח $f = g$ בקטע המנוקב (α, β) (פרט ל- x_0).

$$\text{נניח } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l. \text{ נראה שגם } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l.$$

יהי $\varepsilon > 0$, נבחר δ המקיים:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

נקטין את δ כך שעדיין $\delta > 0$ אבל $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (\alpha, \beta)$ ואז $g(x) = f(x)$ לכל $|x - x_0| < \delta$, ולכן גם $|g(x) - l| < \varepsilon$.

דוגמא:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x = \frac{1}{n} \text{ when } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. f רציפה ב- $x_0 = \frac{1}{n}$ עבור $x_0 \neq 0$, כי בסביבה של x_0 כזה היא כבר מתלכדת עם $g \equiv 0$, שהיא בוודאי רציפה. $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ אז ניקח $\frac{1}{n+1} < x_0 < \frac{1}{n}$.

2. בנקודה $x_0 = \frac{1}{n}$ אינה רציפה. $\frac{1}{n} \in (\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$ היא מתלכדת עם הפונקציה:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

3. בנקודה $x_0 = 0$ הפונקציה כן רציפה, למרות שבכל נקודה מהסוג $\frac{1}{n}$ שמתכנסות לאפס, f אינה רציפה. הוכחה: $f(0) = 0$ ו- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, כי בהנתן $\varepsilon > 0$ נבחר $\delta = \varepsilon$, ואז אם $|x| < \delta$ אזי $|f(x)| < \varepsilon$.

3.2.3 מעט על הפונקציות הטריגונומטריות

מעגל היחידה - $x^2 + y^2 = 1$ (משפט פיתגורס).

אם מעגל היחידה 2π רדיאנים,

אזי זווית θ (ברדיאנים) היא הזווית

שאורך הקשת המתאים לה על מעגל היחידה הוא θ .

$$x = \cos\theta, y = \sin\theta, \frac{y}{x} = \tan\theta$$

כאשר בנוגע לטנגנס - $\theta \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, x \neq 0$

נשים לב כי כיוון מתמטי חיובי הוא נגד מחוגי השעון.

8.12.2009

זהויות טריגונומטריות:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$$

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta) \Rightarrow \cos \text{ is even}$$

$$\sin(\theta) = -\sin(-\theta) \Rightarrow \sin \text{ is odd}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\theta \leq \theta$$

הוכחה: לאי השיוויון האחרון:

$$\sin \theta \leq \overline{AB} \leq \widehat{AB} = \theta$$

■

$$\theta \leq \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

הוכחה: לאי השיוויון האחרון:

שטח $\triangle OAC$ הינו $\frac{1}{2} \tan \theta$.

שטח הגזרה המעגלית OAB הינו $\frac{1}{2} \theta$ ($\pi \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} \theta$)

שטח הגזרה $\geq$ שטח המשולש.

■

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

כעת נראה את הקשר בין הפונקציות הגיאומטריות לחומר הנלמד:

3.2.4 משפט הסנדוויץ' לגבולות של פונקציות

משפט 3.21 אם $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ בקטע (a, b) מנוקב ב- x_0 ,

$$\text{ואם } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

$$\text{אזי גם } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

הוכחה: נשתמש בקריטריון היינה להתכנסות:

ניקח $x_0 \neq x_n \rightarrow x_0$ כלשהיא. אזי:

$$l \leftarrow f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \rightarrow l$$

ולכן ממשפט הסנדוויץ' לסדרה, גם $g(x_n) \rightarrow l$

ומקריטריון היינה: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ כפי שרצינו.

■

מסקנה 3.22 $\sin(x)$ רציפה בנקודה $x_0 = 0$.

הוכחה: עבור $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-|x| \leq \sin(x) \leq |x|$.

ממשפט הסנדוויץ' גם $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = 0 = \sin(0)$

■

מסקנה 3.23 גם $\cos(x)$ רציפה ב-0.

הוכחה: צ"ל - $\cos(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

ניקח סדרת נקודות $x_n \rightarrow 0$, ונסתכל ב:

$$\cos^2 x_n = 1 - \sin^2 x_n$$

הוכחנו כי $\sin x_n \rightarrow 0$, $\sin^2 x_n \rightarrow 0$ לכן $\cos^2 x_n \rightarrow 1$.

כעת נשאל, האם $\cos x$ שואפת ל-1 או ל-(-1)?

נשים לב כי $\cos(x) > 0$ בסביבת ה-0 $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$, ולכן $\cos x_n \rightarrow 1$:

$$\cos x_n = \sqrt{\cos^2 x_n} \rightarrow \sqrt{1} = 1$$

■

משפט 3.24 $\sin x$ הינה פונקציה רציפה.

הוכחה: נחשב את:

$$\begin{aligned} \sin(x) - \sin(x_0) &= \sin(x_0 + (x - x_0)) - \sin(x_0) \\ &= \sin x_0 \cos(x - x_0) + \sin(x - x_0) \cos(x_0) - \sin(x_0) \\ &= \underbrace{\sin x_0}_{\text{constant}} \underbrace{(\cos(x - x_0) - 1)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sin(x - x_0)}_{\rightarrow 0} \underbrace{\cos x_0}_{\text{constant}} \end{aligned}$$

כאשר $x - x_0 \rightarrow 0$, $x \rightarrow x_0$, ולכן מרציפות הקוסינוס $\cos(x - x_0) - 1 \rightarrow 0$,

וכנ"ל - מרציפות סינוס $\sin(x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

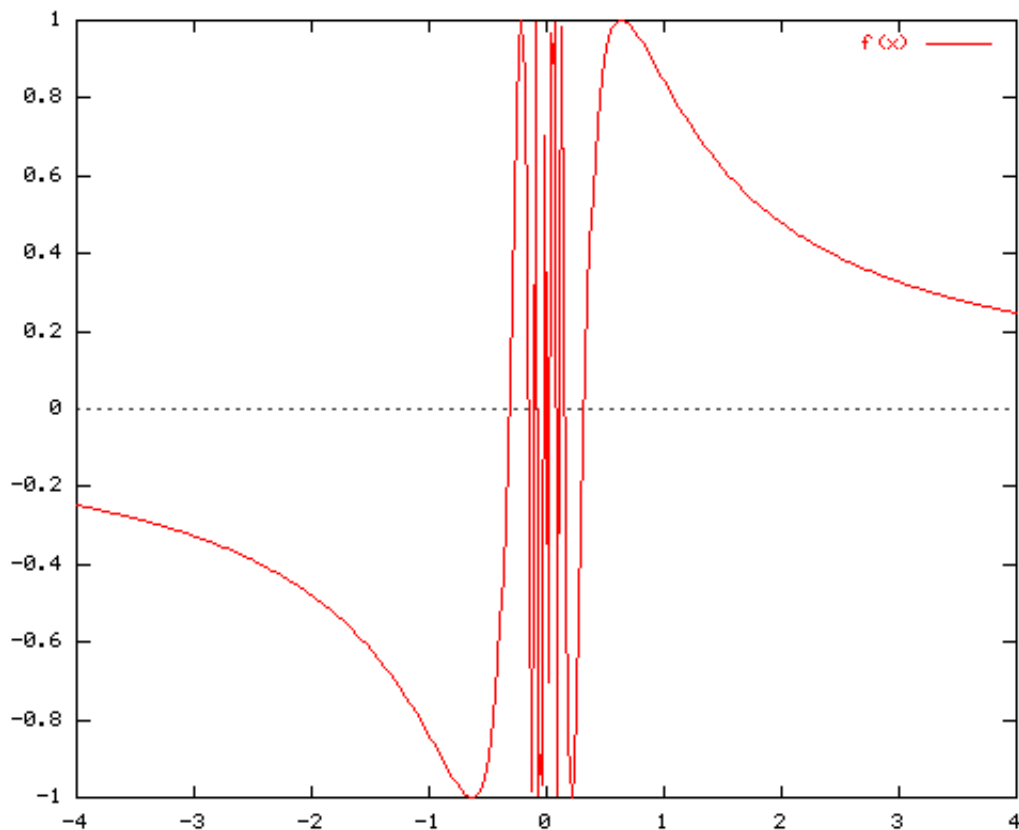
מאירתמטיקה של גבולות כל הביטוי $\rightarrow 0$.

■

תרגיל: הוכיחו את רציפות $\cos(x)$.

דוגמא:

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ מוגדרת עבור $x \neq 0$.



השאלה: האם קיים גבול ב- x_0 ?

טענה 3.25 לא קיים $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

הוכחה: ניקח את הסדרה $x_k = \frac{1}{2k\pi} \rightarrow 0$

עליה $0 = \sin\left(\frac{1}{x_k}\right) \rightarrow 0$

מאידך, ניקח סדרה אחרת:

$$x'_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

עליה $1 = \sin\left(\frac{1}{x'_k}\right) \rightarrow 1$

ומכאן שלא קיים גבול!

3.3 גבולות חד צדדיים ועוד על אי רציפות

טענה 3.26 לפונקציה $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ כן קיים גבול ב-0, וכמו כן:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0$$

טענה זו תנבע ישירות מהטענה הבאה:

טענה 3.27 אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

ואם $g(x)$ חסומה בסביבה (α, β) של x_0 ,

אזי גם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

הוכחה: תהי $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \in (\alpha, \beta)$, $x_n \neq x_0$, סדרה חסומה,

$f(x_n) \rightarrow 0$, ולכן ממשפט שהוכחנו:

$$(f \cdot g)(x_n) \rightarrow 0$$

הגדרה 3.28 יהי (a, b) קטע פתוח, f מוגדרת בקטע.

נאמר שיש ל- f גבול מימין ב- a (או משמאל ב- b) שהוא l , ונסמן:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \quad \left(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = l \right)$$

אם לכל $\varepsilon > 0$ ישנו $\delta > 0$ כך ש:

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \quad (b - \delta < x < b \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

אם f מוגדרת ב- $[a, b)$ נאמר ש- f רציפה מימין ב- a , אם

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

וכנ"ל לגבי רציפות משמאל.

טענה 3.29 תרגיל:

בנקודה פנימית x_0 של הקטע (a, b) קיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,

אמ"מ שני הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים זה לזה.

f רציפה ב- $x_0 \Leftrightarrow f$ רציפה מימין ומשמאל ב- x_0 .

3.3.1 סוגי נקודות אי רציפות

תהי f פונקציה המוגדרת בקטע (a, b) , $a < x_0 < b$.

הגדרה 3.30 נקודת אי רציפות של f אם f לא רציפה בה.

הגדרה 3.31 נקודת אי רציפות סליקה אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ קיים אך $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

הגדרה 3.32 נקודת אי רציפות מסוג ראשון, אם שני הגבולות החד צדדיים:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

קיימים, אך שונים.

הגדרה 3.33 אם x_0 נקודת אי רציפות שבה אחד מהגבולות החד צדדיים לפחות אינו קיים,

x_0 תקרא נקודת אי רציפות מסוג שני.

משפטים בסיסיים של גבולות ורציפות עד כה:

משפט הסנדוויץ'.

3.3.2 על אריתמטיקה של גבולות

משפט 3.34 תהיינה f, g שתי פונקציות ממשיות,

המוגדרות בקטע המנוקב $x_0 \in (a, b)$ (אולי $x_0 \in (a, b)$ אינן מוגדרות ב- x_0). אזי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g) = \lim_{x \rightarrow x_0} f + \lim_{x \rightarrow x_0} g$$

(בהנחה ששני הגבולות באגף ימין קיימים). כנ"ל לגבי מכפלה:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot g = \lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g$$

לגבי מנה, אם $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ קיים ושונה מאפס,

אזי ישנה סביבה $(\alpha, \beta) \supseteq (a, b)$ של x_0 שם $g \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

הוכחה: שני השוויונות הראשונים מושארים כתרגיל. נוכיח את השוויון השלישי:

למה 3.35 אם $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0$ אזי יש סביבה (α, β) של x_0 כך ש- $g(x) > 0$ לכל x .

הוכחה: נסמן את הגבול ב- $l, l > 0$.

ניקח $\varepsilon = \frac{l}{2}$. אזי יש $\delta > 0$ כך ש:

$$\alpha = x_0 - \delta < x < x_0 + \delta = \beta \Rightarrow \frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2}$$

נחזור להוכחה הראשית:

מצאנו, מן הלמה, סביבה $(\alpha, \beta) \supseteq (a, b)$ שבה $\frac{f}{g}$ מוגדרת,

מכאן לכל $x_0 \neq x_n \rightarrow x_0$ מתקיים:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{\lim f}{\lim g}$$

וזאת מתוך המשפט הידוע לגבי סדרות.

מסקנה 3.36 מן הלמה - אם

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

ו- $l > m$, אזי ישנה סביבה (α, β) של x_0 שם לכל x $m < f(x)$.

הוכחה: נסתכל על הפונקציה $f(x) - m$.

הגבול שלה ב- x_0 הינו $l - m$, $0 < l - m$,

ולכן מן הלמה יש סביבה (α, β) של x_0 בה $0 < f(x) - m$.

מסקנה 3.37 אם f, g רציפות ב- x_0 גם $f \cdot g, f + g$

ואם $\frac{f}{g}(x_0) \neq 0$ (בתחום הגדרתה) רציפות ב- x_0 .

הוכחה: למשל עבור $\frac{f}{g}$ ידוע ש:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$$

מכאן, לפי הלמה יש סביבה (α, β) של x_0 בה $0 \neq g(x)$.

לכן מוגדרת ב- (α, β) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

מסקנה 3.38 פולינומים וגם פונקציות רציונליות $\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)$

בנקודות x_0 שם $Q(x_0) \neq 0$, הן פונקציות רציפות.

מסקנה 3.39 $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ רציפה.

משפט 3.40

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

הוכחה: הוכחנו בתחילת השיעור עבור $x > 0$:

$$\sin x \leq x \leq \cos x$$

$$1 \leftarrow \cos x \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

ממשפט הסנדוויץ, גם $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$.

3.4 רציפות בקטע

הגדרה 3.41 נאמר ש- f רציפה בקטע $A \subset D_f$ ¹⁶

אמ"מ f רציפה בכל $a \in A$.

משפט 3.42 תהי f מוגדרת ורציפה ב- $[a, b]$, עם:

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

אזי קיימת נקודה $a < c < b$ כאשר $f(c) = 0$.

הוכחה: בה"כ נניח $f(a) < 0 < f(b)$,

אחרת נתבונן ב- $-f$: אם נמצא $a < c < b$ המקיימת: $-f(c) = 0$ סיימנו.

היו $a_1 = a, b_1 = b$

אם $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$ סיימנו,

אחרת נמשיך בצורה רקורסיבית:

נניח שהגדרנו $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n$,

כאשר $I_n = [a_n, b_n]$, אזי יתקיים

$$a = a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1 = b$$

וכמו כן $f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1})$

כאשר:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

יחד עם $f(a) < 0 < f(b)$.

אם $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$ סיימנו.

אחרת נגדיר - אם $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$ אזי $a_n = a_{n+1} \leq b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$

ואם $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$ אזי $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leq b_{n+1} = b_n$

אם לא סיימנו - נקבל סדרה של קטעים I_n ,

שעומדת בתנאי הלמה של קנטור!

לכן קיים $c \in \mathbb{R}$ יחיד כך שמתקיים $a < a_n \leq c \leq b_n < b$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim a_n = c = \lim b_n$$

$[a, b] = I$ הינו קטע, ולכן:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ a_n, c, b_n \in [a, b]$$

f רציפה ב- c , ולכן $\lim f(a_n) = f(0) = \lim f(b_n)$

$$f(b_n) > 0 \Rightarrow \lim f(b_n) = f(c) \geq 0$$

$$f(a_n) < 0 \Rightarrow \lim f(a_n) = f(c) \leq 0$$

ולכן בהכרח $f(c) = 0$.

נביא הוכחה נוספת - מהשיעור בתאריך 14.12.2009: **הוכחה:** תחילה, שוב נניח בה"כ כי $f(a) < 0 < f(b)$.

¹⁶נזכור כי הכוונה היא למוכל או מוכל ושווה.

תהי $S = \{t \in [a, b] \mid \forall x \in [a, t] \ f(x) \leq 0\}$.
הקבוצה אינה ריקה - כי בוודאות $a \in S$.
הקבוצה חסומה, למשל ע"י b , כי $f(b) > 0$ וכמו כן $b > x \in (a, b)$.
לכן, מאקסיומת השלמות, קיים $c = \sup S$.
 $a < c < b$, מהרציפות (בדקו למה!).
כעת, נראה כי $f(c) = 0$ - כיצד?
נראה כי $f(c) \neq 0$, וכמו כן כי $f(c) \neq 0$.
תחילה נניח בשלילה כי $f(c) < 0$.
אזי, קיימת נקודה e כך ש- $a < d < c < e < b$ עבורה $f(e) < 0$.
אבל, אז עבור כל $x \in [a, e]$, $f(x) < 0$,
בסתירה להיות c הסופרימום של הקבוצה!
כעת, נניח בשלילה כי $f(c) > 0$.
אזי, מרציפות f , קיימות נקודות $a < d < c < e$
עבורן $\forall x \in [d, e] \ f(x) > 0$,
בסתירה להיות c הסופרימום של הקבוצה S .
לכן קיבלנו שלילה לשני המקרים,
ועל כן בהכרח $f(c) = 0$, כפי שרצינו.

■

3.4.1 משפט ערך הביניים

משפט 3.43 תהי f רציפה בקטע $[a, b]$,
אזי לכל ערך d בין $f(a)$ ל- $f(b)$,
קיימת נקודה $a < c < b$ כך שמתקיים $f(c) = d$.

הוכחה: בה"כ נניח $f(a) < d < f(b)$.
נתבונן בפונקציה $g = f - d$.
 g מוגדרת ב- $[a, b]$, היא גם רציפה בו ומקיימת:

$$g(a) = f(a) - d < 0$$

$$g(b) = f(b) - d > 0$$

לכן לפי המשפט הקודם, קיימת נקודה $a < c < b$,
כך ש- $g(c) = 0$. לכן $f(c) - d = 0$ ולכן $f(c) = d$, כפי שרצינו.

■

נשים לב כי המשפט הזה נכון רק לפונקציות ממשיות:
כדוגמא לכך שמשפט ערך הביניים אינו נכון לפונקציות רציפות מ- Q ל- Q -
נסתכל על $f(x) = x^2 - 2$ בקטע $[0, 2]$ אינה מקבלת את ערך הביניים 0.

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

נשים לב:

- $g(x)$ צריך להיות בתחום ההגדרה של f .
- פעולת ההרכבה אינה סימטרית - הסדר חשוב.

$$f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x)))$$

קיימת אסוציאטיביות בפעולת ההרכבה:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

משפט 3.44 יהיו g רציפה ב- a , f רציפה ב- $g(a)$.

נניח ש- $f \circ g$ מוגדרת בסביבה פתוחה של a .

אזי $f \circ g$ רציפה ב- a .

הוכחה: צריך להוכיח כי:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x |x - a| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$$

יהי $\varepsilon > 0$. f רציפה ב- b , ולכן קיים:

$$\exists \eta > 0 \forall y |y - b| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(b)| < \varepsilon$$

g רציפה ב- a , ולכן קיים:

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 \forall x |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \eta \\ \Rightarrow |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \eta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon \end{aligned}$$

נשים לב - מטרת $\delta > 0$ מספיק קטן -

בעזרתו אנו מוודאים כי $g(x)$ בתחום ההגדרה של f .

■

בשורה התחתונה - הרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה!

בהנתן:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b, \lim_{y \rightarrow b} f(y) = c$$

מה נוכל לומר על ההרכבה $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$?

- יכול להיות שההרכבה כלל לא מוגדרת!
- יכול להיות ש- f אינה רציפה ב- b .

נוסיף הנחות ע"מ לקיים את הרציפות:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b, \lim_{y \rightarrow b} f(y) = c$$

נניח שקיימת בסביבה המנוקבת של a , שבה $g(x) \neq b$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c \text{ אזי}$$

הוכחה: עלינו להוכיח:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon$$

$$\text{יהי } \varepsilon > 0, c = \lim_{y \rightarrow b} f(y) \text{ אזי:}$$

$$\exists \eta > 0 \forall y \ 0 < |y - b| < \eta \Rightarrow |f(y) - c| < \varepsilon$$

$$\text{כמו כן, } b = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ אזי:}$$

$$\exists \delta > 0 \forall x \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \eta$$

אזי:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < \left| g(x) - \underbrace{g(a)}_{=b} \right| < \eta \Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon$$

■

סדרות חלקיות והרכבה

$$\mathbb{N} \xrightarrow{n} \mathbb{N} \xrightarrow{x} \mathbb{R}$$

ניתן להסתכל על סדרה חלקית כהרכבה של תמורה של n

(בהגבלה של עולה ממש) על הפונקציה המקורית.

15.12.2009

3.4.3 פונקציות חסומות

הגדרה 3.46 f חסומה ב- D_f אם $A \subset D_f$ אמ"מ

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \text{ חסומה ב-}\mathbb{R}.$$

אם $A = D_f$ אזי נגיד כי f חסומה.

הערה 3.47 אם f רציפה בנקודה a ,

אזי היא חסומה בסביבה פתוחה של a .

מדוע?

אם ניקח $\varepsilon = 1$ אזי:

$$\exists \delta > 0 \forall x \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < 1 \Rightarrow f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1$$

3.4.4 משפט ויירשטראס הראשון

משפט 3.48 אם f רציפה בקטע חסום וסגור $[a, b]$, אזי f חסומה בו.

הוכחה: נניח בשלילה, ונגיע לסתירה.

אם כך, נניח כי f איננה חסומה.

אזי, לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x_n \in [a, b]$ כך ש- $|f(x_n)| > n$.

נתבונן בסדרה (x_n) ב- $[a, b]$:

$\{x_n\} \subset [a, b]$, ולכן x_n חסומה.

לכן, לפי בולצאנו ויירשטראס, קיימת לה ת"ס x_{n_k} מתכנסת.

נסמן את הגבול שלה ב- x . כעת:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq x_n \leq b \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad a \leq x_{n_k} \leq b$$

לכן $a \leq x \leq b$, ולכן $x \in D_f$.

$$x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$$

לכן לפי הגדרת היינה - $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$, כלומר $f(x_{n_k})$ מתכנסת,

לכן היא חייבת להיות חסומה,

אבל $|f(x_{n_k})| > n_k$, בסתירה להנחה!

■

3.4.5 משפט ויירשטראס השני

משפט 3.49 אם f רציפה בקטע סגור וחסום $[a, b]$,

אזי קיימים x_{min}, x_{max} כך שמתקיים:

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

לכל $x \in [a, b]$

כלומר היא מקבלת מינימום ומקסימום בקטע.

נשים לב לניסוח נוסף - במקרה זה תמונת f היא קטע.

הוכחה: לפי משפט ויירשטראס הראשון, f חסומה.

יהי

$$\sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\} = M$$

נניח בשלילה שלא קיים $x \in [a, b]$ כך ש- $f(x) = M$.

נתבונן בפונקציה הבאה:

$$g = \frac{1}{M - f}$$

היא מוגדרת כי הנחנו ש- $M - f \neq 0$.

לפי אריתמטיקה של פונקציות רציפות, g מוגדרת ורציפה ב- $[a, b]$,

ולכן ממשפט ויירשטראס הראשון, גם היא חסומה שם.

אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x \in [a, b]$ כך ש(קראו משמאל לימין):

$$M - \varepsilon < f(x) < M + \varepsilon \Leftrightarrow 0 < M - f(x) < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{M - f(x)} = g(x)$$

■

בסתירה לחסימותה של g .

3.4.6 עוד על קטעים

הגדרה 3.50 $I \subseteq \mathbb{R}$ תקרא קטע אמ"מ

אם $a < b, \forall a, b \in I$, אם $a < c < b$ אזי $c \in I$.

משפט 3.51 תהי f מוגדרת ורציפה בקטע I ,

אזי $J = f(I)$ קטע.

הוכחה: יהי $c, d \in J, c < d$,

ותהי $c < z < d$,

נרצה להוכיח כי $z \in f(I)$.

לפי הבנייה קיימים $a, b \in I$ כאשר $f(a) = c, f(b) = d$.

נניח בה"כ כי $a < b$.

לפי משפט ערך הביניים ל- f ב- $[a, b]$,

אם z נמצא בין $f(a)$ ל- $f(b)$,

קיים $a < x < b$ כך ש- $f(x) = z$,

ועל כן $z \in J$, כפי שרצינו להראות.

■

3.5 פונקציות מונוטוניות

הגדרה 3.52 נאמר כי f עולה אמ"מ

$$\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

f תקרא עולה ממש אם האי שיויון מעלה חזק.

הגדרה 3.53 נאמר כי f יורדת אמ"מ

$$\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

f תקרא יורדת ממש אם האי שיויון מעלה חזק.

משפט 3.54 תהי f עולה¹⁷ בקטע I .

תהי $x \in I$. אם $f(x)$ מוגדרת בסביבה ימנית¹⁸ שלה, אזי קיים

$$\lim_{t \rightarrow x, x < t} f(t) = f(x^+)$$

¹⁷המשפט נכון בשינוי סימונים גם עבור יורדת
¹⁸שמאלית עבור יורדת

ומתקיים:

$$\lim_{t \rightarrow x, x < t} f(t) = f(x^+) = \inf \{f(t) | x < t \in I\}$$

$$\lim_{t \rightarrow y, y > t} f(t) = f(y^-) = \sup \{f(t) | y > t \in I\}$$

אם $x < y$, אז:

$$f(x) \leq f(x^+) \leq f(y^-) \leq f(y)$$

17.12.2009

הוכחה: נניח שקיים x כנ"ל. הקבוצה:

$$\{f(t) | t \in I, x < t\}$$

אינה ריקה, כי היא מוגדרת בסביבה הימנית של x ,

וחסומה מלמטה, למשל ע"י $f(x)$,

(שנמצא בתחום ההגדרה של הפונקציה)

כי f הרי מונוטונית עולה.

לכן, לפי אקסיומת השלמות, קיים:

$$A = \inf \{f(t) | t \in I, x < t\}$$

$$\lim_{t \rightarrow x^+, x < t} f(t) = A \quad \text{טענה 3.55}$$

הוכחה: צ"ל:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad x < t < x + \delta \Rightarrow |f(t) - A| < \varepsilon$$

כאשר A הוא האינפימום, ולכן ההפרש חיובי,

ולכן נוכל גם לרשום:

$$f(t) - A < \varepsilon$$

כיוון ש- A^- הוא האינפימום,

בהנתן $\varepsilon > 0$, $A + \varepsilon$ אינו חסם מלמעלה,

ולכן קיים $x < u \in I$ כך ש- $f(u) < A + \varepsilon$.

יהי $u - x := \delta > 0$. עבורו מתקיים:

$$x < t < x + \delta = u$$

כעת, מכיוון f מונוטונית עולה:

$$f(t) < f(u) \Rightarrow f(t) - A < f(u) - A < \varepsilon$$

באופן סימטרי ניתן להוכיח את החלק עבור $y \in I$.

נוכיח את הטיעון האחרון במשפט, והיא:

טענה 3.56 אם $x < y$, אז:

$$f(x) \leq f(x^+) \leq f(y^-) \leq f(y)$$

הוכחה: לפי הגדרת קטע, אם $x < y$,

נוכל למצוא $t \in I$ כך ש- $x < t < y$,

ומכיוון ו- t מוגדרת שם $f(t)$ יהי מוגדר גם כן.

כיוון ש- f מונוטונית:

$$f(x^+) \leq f(t) \leq f(y^-)$$

אי השיוויון השמאלי נובע מכך ש- $f(x^+)$ הוא האינפимум של $\{f(t) | t > x\}$.

אי השיוויון הימני נובע מכך ש- $f(y^-)$ הוא הסופרימום של $\{f(t) | t < y\}$.

לכן, קיבלנו:

$$f(x) \leq f(x^+) \leq f(t) \leq f(y^-) \leq f(y)$$

וזהו!



3.6 פונקציות הפוכות ורציפות

21.12.2009

נזכיר:

הגדרה 3.57 $f : A \rightarrow B$ חח"ע

אם $f(a_1) = f(a_2)$ גורר ש- $a_1 = a_2$.

הגדרה 3.58 הפונקציה ההפוכה $g : B \rightarrow A$ (לפעמים מסומנת f^{-1})

מוגדרת ע"י $g(b) = a$ אם ורק אם $f(a) = b$.

נניח עכשיו כי f ממשית המוגדרת על קטע $[l, L]$ סגור וחסום,

ונניח ש- f רציפה בקטע.

ממשפט ויירשטראס תמונת f (תחת הנחת הרציפות)

גם כן קטע סגור וחסום $[m, M]$.

$$f : [l, L] \xrightarrow{On} [m, M]$$

נניח בנוסף ש- f חד חד ערכית מ- $[l, L]$ על $[m, M]$.

למה 3.59 אם f חד חד ערכית ורציפה בקטע $[l, L]$

אזי f מונוטונית במובן הצר - עולה או יורדת.

הוכחה: עלינו להראות או שלכל $x < x'$ אזי $f(x) < f(x')$

או שלכל $x < x'$ אזי $f(x') < f(x)$.

אם לא, אזי ישנן שלוש נקודות $l \leq x \leq x' \leq x'' \leq L$

שעבורן או $f(x) \leq f(x')$, $f(x'') \leq f(x')$,

או $f(x') \leq f(x)$, $f(x') \leq f(x'')$.

אם אנחנו במצב א',

ראשית מחח"ע f - $f(x'') < f(x')$, $f(x) < f(x')$.

נבחר $y < f(x')$ $\max(f(x), f(x'')) < y < f(x')$

ממשפט ערך הביניים, לפי רציפות,

יש עוד נקודה $x < x_1 < x'$ שם $f(x_1) = y$.

מאותה הסיבה יש נקודה $x' < x_2 < x''$ שם $f(x_2) = y$,

כלומר $f(x_1) = f(x_2)$ למרות ש- $x_1 \neq x_2$,

בסתירה להנחת חח"ע f .

בדרך דומה (בדקו) נפסלת אפשרות ב'.

לסיכום:

אם f רציפה וחח"ע ב- $[l, L]$,

אזי f מונוטונית עולה ממש, ומתקיים $f([l, L]) = [m, M]$, $f(l) = m$, $f(L) = M$,

או f מונוטונית יורדת ממש, ומתקיים $f([l, L]) = [m, M]$, $f(l) = M$, $f(L) = m$.

תהי f רציפה, חח"ע מ- $[l, L]$ על $[m, M]$.

נגדיר $g =$ הפונקציה ההפוכה מ- $[m, M]$ על $[l, L]$.

משפט 3.60 הפונקציה ההפוכה של פונקציה רציפה חח"ע ועל,

גם היא רציפה.

הוכחה: נשים לב שגם g מונוטונית במובן הצר,

בעלת אותה מגמה של f :

נניח $y_1 < y_2$ וגם $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$.

נניח f היתה מונוטונית עולה במובן הצר,

אזי אם $x_1 \geq x_2$, $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$,

אבל $y_1 < y_2$ ולכן $x_1 < x_2$.

כלומר גם g מונוטונית עולה במובן הצר.

מאחר ו- $g([n, m]) = [l, L]$ הינו קטע,

אזי ממשפט שהוכח המאפיין פונקציות מונוטוניות רציפות שמעתיקות קטע לקטע,

g רציפה.

לסיכום:

f מונוטונית עולה\יורדת $\leq f^{-1}$ g מונוטונית עולה\יורדת.

f רציפה מונוטונית $\leq g$ רציפה מונוטונית.

דוגמאות:

1.

$$f(x) = x^n, [l, L] = [0, L]$$

מונוטונית עולה ותמונה על הקטע $[0, L^n]$.

$$\sqrt[n]{y} = g : [0, L^n] \rightarrow [0, L]$$

גם כן רציפה.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin(x) \\
 [l, L] &= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
 [m, M] &= [-1, 1] \\
 \arcsin(y) &= g(y) : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]
 \end{aligned}$$

מונוטונית עולה ומהמשפט, רציפה.

3.6.1 רציפות a^x ו- $\log_a$ כאשר $0 < a \neq 1$

נעשה עבור $a > 1$ - עבור $0 < a < 1$ מושאר כתרגיל $(a^x = (\frac{1}{a})^{-x})$.

הגדרנו את a^x לכל x ממשי.

הראינו $a^{x_1} < a^{x_2}$ אם $x_1 < x_2$,

וגם הראינו $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$

לכל סדרת רציונלים $r_n \rightarrow x$ (ההגדרה).

משפט 3.61 a^x רציפה.

הוכחה: צ"ל שאם $x_n \rightarrow x$ סדרת ממשיים $a^{x_n} \rightarrow a^x$.

נבחר שתי סדרות של רציונליים $r_n < x_n < s_n$

שגם כן מתכנסות ל- x , ואז $a^{r_n} < a^{x_n} < a^{s_n}$ מהמונוטוניות.

a^{r_n}, a^{s_n} סדרות המתכנסות ל- a^x ,

ולכן ממשפט הסנדוויץ גם $\lim a^{x_n} = a^x$.

כלומר a^x פונקציה רציפה.

מסקנה 3.62 $a^x : [l, L] \xrightarrow{on} [a^l, a^L]$ ולכן ההפוכה שלה מוגדרת:

$$\log_a : [a^l, a^L] \rightarrow [l, L]$$

מונוטונית עולה ורציפה.

טענה 3.63 תהי L_n סדרת ממשיים $L_n \rightarrow \infty$,

אזי $a^{L_n} \rightarrow \infty$, ואם $a^{l_n} \rightarrow 0$, $l_n \rightarrow -\infty$.

הוכחה: תרגיל, בעזרת משפט הסנדוויץ' עם פרוסה אחת.

$$a^x : [-n, n] \xrightleftharpoons[on]{on} [a^{-n}, a^n] : \log_a$$

כאשר $n \rightarrow \infty$ נקבל את הגדרת $\log_a(y)$ לכל $0 < y < \infty$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a^n &= \infty \\
 \log_a((0, \infty)) &= (-\infty, \infty)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\sin(3x+1) + \log_{10}(x^2+2)}{x^5 + x^{\cos(x)+3}}$$

רציפה לכל x ממשי $x > 0$.

3.7 רציפות במידה שווה

תהי f מוגדרת בקטע I (מכל סוג שהוא).

נזכור כי רציפות f ב- x_0 בקטע (נקודה קבועה) הינה -

לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ התלויה ב- ε וב- x_0 כך ש:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

כלומר $\delta = \delta_{x_0, \varepsilon}$.

נזכור: f נקראת רציפה בכל הקטע I ,

אם לכל $x_0 \in I$, f רציפה ב- x_0 .

הגדרה 3.64 f נקראת רציפה במידה שווה בקטע I ,

אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ (תלוי רק ב- ε),

כך שלכל $x, x_0 \in I$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(נשים לב ש- δ נדרש להיות לא תלוי ב- x_0 ,

כלומר אותו δ צריך "לספק את הסחורה" בכל הנקודות $x_0 \in I$).

נשים לב:

1. אם f רציפה במידה שווה בקטע אזי היא רציפה בכל $x_0 \in I$.

2. רציפות במ"ש היא אינה תכונה נקודתית, אלא תכונה של קטע שלם.

3.7.1 הדוגמא הטיפוסית ודוגמאות נוספות

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad I = [a, b], \quad a \geq 0$$

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x - x_0|}{|x \cdot x_0|}$$

אם $0 < a$, המכנה $a^2 < a^2$, ולכן

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \frac{|x - x_0|}{a^2}$$

$$|x - x_0| < a^2 \cdot \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{a^2 \cdot \varepsilon}{a^2} = \varepsilon$$

ולכן נוכל לקחת $\delta = \delta_\varepsilon = a^2 \cdot \varepsilon$ -

שהרי גודלו אינו תלוי ב- x_0 אלא רק ב- ε ,

ואז לפי ההגדרה f רציפה במ"ש על I .

הערה טריוויאלית:

אם f רציפה במ"ש ב- I ,

היא רציפה במ"ש ב- J לכל קטע $J \subseteq I$.

22.12.2009

דוגמא לפונקציה שאינה רציפה במ"ש

$\frac{1}{x}$ אינה רציפה במ"ש בשום קטע $(0, b)$. נוכיח זאת:

ניקח $\varepsilon = 1$. לא קיים δ כך ש:

$$|x - x'| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} \right| < 1$$

מפני שלכל $\delta > 0$ נוכל לקחת (עבור n מתאים) $x = \frac{1}{n}$, $x' = \frac{1}{n+2}$ ואז:

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} \right| = 2 > \varepsilon = 1$$

נאפשר לקחת n כזה כך ש:

$$0 < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} < \delta$$

דוגמא נוספת

$\sin \frac{1}{x}$ בקטע הפתוח $(0, b)$.

הפונקציה אינה רציפה במידה שווה!

הפעם הסתירה לא תעבוד עבור כל ε כמו בדוגמא הקודמת -

ניקח $\varepsilon = 0.1$, ונטען כי לא קיים $\delta > 0$ כך ש:

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow \left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x'} \right| < 0.1$$

נניח בשלילה שהיה קיים $\delta > 0$ כזה,

ונמצא n כך ש- $x = \frac{1}{2n\pi}$, $x' = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$ כך שיתקיים:

$$0 < x < x' < \delta \Rightarrow |x - x'| < \delta$$

כלומר

$$\sin \frac{1}{x} = 1, \sin \frac{1}{x'} = 0$$

ואז נקבל:

$$\left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x'} \right| > 0.1$$

3.7.2 משפט קנטור ומשפטים נוספים

משפט 3.65 אם f פונקציה רציפה בקטע חסום וסגור $[a, b]$

כולל רציפות בנקודות הקצה,

אזי f רציפה במ"ש בקטע.

הוכחה: יהיה $\varepsilon > 0$. נניח על דרך השלילה שאין $\delta > 0$

העונה על הגדרת הרציפות במ"ש בקטע הסגור.

זה אומר, בפרט שעבור $\delta = \frac{1}{n}$ יש זוג נקודות x_n, x'_n בקטע $[a, b]$,

כך ש:

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$$

אבל:

$$|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$$

ממשפט בולצאנו וירשטראס 2.43,

יש לסדרה (x_n) המוכלת בקטע הסגור והחסום $[a, b]$ ת"ס מתכנסת:

$$x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \underline{\underline{\alpha \in [a, b]}}$$

אבל

$$x'_{n_k} = \underbrace{x'_{n_k} - x_{n_k}}_{\rightarrow 0} + x_{n_k}$$

$$\text{ולכן גם } x'_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha$$

ב- α הפונקציה רציפה (אולי, אם $\alpha = a$ או $\alpha = b$ רק מכיוון אחד),

לכן עבור ה- ε שהתחלנו איתו,

$$\text{יש } \delta > 0 \text{ כך שאם } |x - \alpha| < \delta_{\alpha, \frac{\varepsilon}{2}} \text{ אז } |f(x) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{נבחר } K \text{ כה גדול כך שאם } k > K, |x_{n_k} - \alpha| < \delta \text{ וגם } |x'_{n_k} - \alpha| < \delta$$

נעריך:

$$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(x'_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

בסתירה להנחה שאותו גודל ε .

משפט 3.66 תהי f פונקציה רציפה בקטע $(a, b) = I$. אזי:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ קיים אמ"מ } f \text{ רציפה במידה שווה ב-} I.$$

כמו כן, נשים לב שזה מן הסתם נכון גם עבור הגבול השמאלי,

ועל כן ניתן באופן שקול לומר,

כי פונקציה רציפה במ"ש בקטע הפתוח (a, b)

אמ"מ היא ניתנת להמשכה רציפה לכל קטע סגור $[a, b]$,

דהיינו קיימים הגבולות החד צדדיים.

הוכחה: אם

$$f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

קיים, נסמנו ב- L . נגדיר:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & a < x \leq b \\ L & x = a \end{cases}$$

כאשר $\tilde{f}$ היא ההמשכה הרציפה של f ל- a .

לכן $\tilde{f}$ רציפה ב- $[a, b]$ (כולל ב- a),

ולכן מהמשפט הקודם רציפה במ"ש ב- $[a, b]$,

ולכן גם בקטע $(a, b] = I$ ולכן f רציפה במ"ש ב- I .

ובכיוון השני:

עלינו להראות שאם f רציפה במ"ש ב- $I = (a, b]$,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ קיים.}$$

לפי קריטריון קושי לקיום גבול,

די להראות שלכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$

כך שבסביבת δ $(a, a + \delta)$ לכל x, x' בין a ל- $a + \delta$

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

קיום δ עבורו - תנאי זה מובטח (בכל I , ולכן בפרט ב- $(a, a + \delta)$)

ומתקבל מיידית מהגדרת הרציפות במ"ש.

■

3.8 גבולות אינסופיים, או גבול כאשר $x \rightarrow \infty$

3.8.1 גבול אינסופי בנקודה

הגדרה 3.67 נאמר ש- $f(x)$ שואפת ל- $+\infty$ כאשר $x \rightarrow x_0$,

אם f מוגדרת בקטע (a, b) מנוקב ב- x_0 $(a < x_0 < b)$,

ולכל M יש δ כך שאם $0 < |x - x_0| < \delta$ $f(x) > M$.

כנ"ל שאיפה ל- $-\infty$ $f(x) < M$.

במקרים אלו נסמן:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty / -\infty$$

דוגמא

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

כי לכל M , אם ניקח $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ נקבל $\frac{1}{x^2} > M$.

אם זאת,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \neq \infty$$

כי מימין $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ ומשמאל הגבול הוא מינוס אינסוף.

24.12.2009

משפט 3.68 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ אם"מ לכל סדרת נקודות בקטע $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$, $x_n \neq x_0$, אזי $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

■

הוכחה: מושארת כתרגיל, דומה לחלוטין להוכחה במקרה שהגבול סופי.

משפט 3.69 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ אם"מ מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. יש סביבה מנוקבת δ ש $0 < |x - x_0| < \delta$ שם $f(x) > 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

הערה: את הצורך בדרישת החיוביות ניתן לראות עבור הפונקציה $f(x)$ בנקודה 0 -

שם היא שואפת לאפס,

אבל $\frac{1}{f(x)}$ שואף מצד שמאל ל- ∞ , אבל מצד ימין ל- $-\infty$. **הוכחה:** $1 \Leftarrow$ מושאר כתרגיל.

$\Leftarrow 2$ בהנתן $\varepsilon > 0$ נמצא δ כך ש- $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < \frac{1}{\varepsilon}$

ואז $-\varepsilon < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ בכיוון השני נניח $1+2$ מתקיימים.

אזי בהנתן $M > 0$, נמצא $\delta > 0$ כך ש- $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \frac{1}{M}$,

■

ואז $|f(x)| > M$ אבל מ-1 $f(x)$ חיובית, ולכן $f(x) > M$, מ.ש.ל.

דוגמאות

1.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+3}{x-3}$$

מתנאי 1 עבור $x > 3$:

$$\frac{x+3}{x-3} > 0$$

מתנאי 2:

$$\frac{x-3}{x+3} \xrightarrow{x \rightarrow 3^+} 0$$

ולכן מהמשפט

$$\frac{x+3}{x-3} \rightarrow \infty$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1}{x \rightarrow 0^+} = \infty$$

$$\frac{x \rightarrow 0}{\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$$

נשתמש בקריטריון הסדרתי:

$$0 < x_n \rightarrow 0$$

$$\log_{10} x_n = y_n, \quad y_n \rightarrow -\infty$$

$$x_n = 10^{y_n}$$

כאשר $y_n \rightarrow -\infty, -y_n \rightarrow \infty$ ונסמן $z_n = -y_n \rightarrow \infty$
כעת:

$$\log_{10} x_n = y_n 10^{y_n} = \frac{-z_n}{10^{z_n}} \xrightarrow{-z_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x \rightarrow 0^+} 0$$

ואז $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$

3.8.2 גבול באינסוף

הגדרה 3.70 תהי f פונקציה המוגדרת בקרן $[a, \infty)$ כאשר $a > 0$.
נאמר:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

אם לכל $\varepsilon > 0$ יש T כך שאם $x > T$ $|f(x) - L| < \varepsilon$.

משפט 3.71 במצב זה נגדיר עבור $0 < x \leq \frac{1}{a}$

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

אזי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

אמ"מ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = L$$

הוכחה: תרגיל (ה- ε נשאר אותו אחד ל- f ול- g).

מה שקורה ל- f ב- $[T, \infty)$ "קורה" ל- g ב- $(0, \frac{1}{T}]$.

דוגמאות

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

3.8.3 רציפות במ"ש כאשר $x \rightarrow \infty$

משפט 3.72 אם f רציפה ב- I^- , וקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, אזי f רציפה במידה שווה ב- I^- .¹⁹

הוכחה: יהי נתון $\varepsilon > 0$.

ראשית, מקריטריון קושי לקיום גבול ב- $x \rightarrow \infty$,

ישנו T כך שאם $x, x' > T$ אזי $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

היות ו- f רציפה בקטע $[0, T+1]$ ממשפט קנטור נובע שיש $0 < \delta < 1$,

כך שאם $a \leq x, x' \leq T+1$ ו- $|x - x'| < \delta$ אזי מתקיים

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

וזוהי הרי רציפות במ"ש בקטע $[a, T+1]$.

היו $a \leq x, x' < \delta$ המקיימים $|x - x'| < \delta$ ($\delta < 1$)

אם שניהם $T < x, x'$ אזי $|f(x) - f(x')|$ מראשית ההוכחה.

אם שניהם $T+1 \geq x, x'$ גם כן $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ מהחלק השני.

היות ו- $\delta < 1$, אחד המצבים בהכרח קורה.

3.8.4 סדרי גודל של גידול כאשר $x \rightarrow \infty$

ע"י החלפת f ב- $\frac{1}{f}$ אפשר לדבר על סדר גודל של דעיכה ל-0.

הגדרה 3.73 אומרים שהפונקציה f גדלה יותר מהר מהפונקציה g כאשר $x \rightarrow \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = \infty$$

אומרים גם g הינה o של f (או קטן) $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = 0$.

נהוג לסמן: $f << g$ או $g = o(f)$.

דוגמאות

$a^x << x^n$ לכל n טבעי $a > 1$ (גידול אקספוננציאלי לעומת גידול פולינומיאלי).

הוכחנו שלכל סדרה $x_k \rightarrow \infty$ אזי $\frac{x_k^n}{a^{x_k}} \rightarrow 0$ ולכן $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$.

נציב $x = m \cdot \log_a y$, m טבעי קבוע, כאשר $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$.

$$\frac{m^n (\log_a y)^n}{y^m} = \frac{x^n}{a^x} \rightarrow 0$$

ולכן גם $\log_a(y)^n << y^m$ כאשר $a > 1$, ולכן בסה"כ:

$$\log_b(x)^n << x^m << a^x$$

כאשר $1 < b, 1 < a, m, n \in \mathbb{N}$.

¹⁹השוו למשפט קנטור - אם f רציפה במ"ש על $[a, b]$ אזי f רציפה במ"ש. מאידך אם f רציפה על $[a, b)$ היא לא בהכרח רציפה במ"ש ותנאי הכו"מ לרציפות במידה שווה הינו קיום $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

מי גדול ממי מבין הפונקציות הבאות?

$$x^5, (\log x)^{10}, x \log x, e^{(\log x)^2}, e^x, x^x = e^{x \log x}, x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \log x}$$

$$\frac{e^g}{e^f} = e^{g-f}$$

לכן $e^f << e^g$ אם $g - f \rightarrow \infty$.

$$x (\log x)^{10} << \log x << x^5 << x^{x \log x} = e^{(\log x)^2} << e^{(\log x)^2} << x^{\sqrt{x}} << e^x << e^{x \log x}$$

$$\frac{x}{(\log x)^2} \rightarrow \infty$$

$$x - \log(x)^2 \rightarrow \infty$$

$$e^{x(\log x - 1)} \rightarrow \infty$$

$$x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \log x}$$

$$\frac{\sqrt{x} \log x}{(\log x)^2} = \frac{\sqrt{x}}{\log x} \rightarrow \infty$$

$$\sqrt{x} - \log x \rightarrow \infty$$

$$x - \sqrt{x} \log x \rightarrow \infty \Rightarrow \sqrt{x} (\sqrt{x} - \log x)$$

3.9 הנגזרת

תהיה $y = f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע.

הגדרה 3.74 שיפוע המיתר בין הנקודות $(x_1, y_1) = (x_1, f(x_1))$ ו- $(x_2, y_2) = (x_2, f(x_2))$ על גרף הפונקציה הינו:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

השיפוע חיובי אם f עולה בין x_1 ל- x_2 ,
השיפוע שלילי אם היא יורדת שם.

הגדרה 3.75 אם קיים

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

אז אומרים ש- f גזירה ב- x_0 ,
ומסמנים את הגבול ב:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$$

וקוראים לו הנגזרת של f ב- x_0 .

אם $I = [a, b]$ אפשר לדבר על נגזרת חד צדדית מימין ב- a או משמאל ב- b ,
וגם ב- x_0 כלשהיא.
נגדיר:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

f גזירה ב- $x_0 \Leftrightarrow$ היא גזירה מימין ומשמאל,

והנגזרות החד צדדיות שמתקבלות שוות זו לזו.

כמו כן, לפעמים יופיעו הסימונים הבאים:

$$x = x_0 + h, x_0 \text{ is constant}$$

$$h = x - x_0 = \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

דוגמאות:

1.

$$f(x) = ax + b$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{a(x_0 + h) - ax_0 - b}{h} = a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$$

כלומר, עבור פונקציה קבועה - הנגזרת היא אפס בכל נקודה.

2.

$$f(x) = x^2$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

3.

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} =$$

נזכור כי מתקיים:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

ואז נקבל כי הביטוי שלנו שווה ל:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \left[\sin \frac{h}{2} \cos \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) = 1 \cdot \cos(x_0) = \cos(x_0)$$

הגדרה 3.76 אם f גזירה בכל פונקציה בקטע I ,

אזי הפונקציה המתאימה ל- x את $f'(x)$ נקראת הפונקציה הנגזרת של f .

$f'(x_0)$ מוגדרת (אם קיימת) להיות שיפוע המשיק לגרף ב- $(x_0, f(x_0))$.

עבור $a > 0, a^x$:

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \left(\frac{a^h - 1}{h} \right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = ?$$

$$a = e \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}, \quad k = e^h - 1, \quad h = \log(1 + k)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log(1 + k)}$$

ראינו כי $\log(x)$ רציפה.כאשר $k \rightarrow 0$:

$$h = \log(1 + k) \rightarrow \log(1) = 0$$

ולכן:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log(1 + k)}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\left[\frac{\log(1+k)}{k} \right]} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\log \left[(1+k)^{\frac{1}{k}} \right]} = 1$$

מסקנה:

$$(e^x)' = e^x$$

נזכור ש:

$$\lim_{k \rightarrow 0} (1 + k)^{\frac{1}{k}} = e$$

 $\log$ רציפה ולכן:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \log(1 + k)^{\frac{1}{k}} = \log e = 1$$

אחרת, כאשר a כלשהוא:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_a(1 + k)} \quad (k = a^h - 1)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a \left[(1 + k)^{\frac{1}{k}} \right]} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e(a)$$

$$(a^x)' = a^x \log(a)$$

משוואות דיפרנציאליות

מחפשים פונקציה $f(x)$ גזירה בכל נקודה המקיימת:

$$f'(x) = f(x)$$

דוגמא:

$$f(x) = e^x$$

פתרון - ce^x .

משפט 3.77 אם f גזירה (או גזירה חד צדדית) בנקודה x_0 ,

אז f רציפה (או רציפה מאותו הצד) ב- x_0 .

הוכחה:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) (x - x_0) \right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

■

דוגמאות:

$$f(x) = |x|$$

זוהי פונקציה רציפה - הוכחנו זאת בתרגיל.

נטען כי הפונקציה אינה גזירה ב- $x_0 = 0$ - מכיוון ומתקיים

$$f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$$

כלומר הנגזרות החד צדדיות קיימות אך לא שוות.

תרגיל

הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & 0 \end{cases}$$

רציפה ב- 0 , אך לא גזירה שם, אפילו לא חד צדדית. **הוכחה:** רציפות ראינו לפני כמה שיעורים.

אין נגזרת מימין:

$$\begin{aligned} x'_n &= \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \quad x''_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}} \\ \frac{f(x'_n) - f(0)}{x'_n - 0} &= 1 \\ \frac{f(x''_n) - f(0)}{x''_n - 0} &= -1 \end{aligned}$$

כעת נביט בסדרה

$$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots \rightarrow 0$$

■

אבל גבול שיפוע המיתר לא קיים.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$f(x) = x^2 D(x)$$

f רציפה ב-0 ולא רציפה בשום $x \neq 0$.

f גזירה ב-0, $f'(0) = 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\pm x^2}{x} = \pm x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

3.9.1 קירובים מסדר 0 ומסדר ראשון

הגדרה 3.78 אומרים שהקבוע a הינו "קירוב מסדר 0" לפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 אם:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - a) = 0$$

כלומר:

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

ואם f רציפה, הערך היחיד שעונה הוא $a = f(x_0)$.

יהיו $m, n, mx + n$ פרמטרים.

הגדרה 3.79 "קירוב מסדר ראשון" ל- $f(x)$ ליד הנקודה x_0

הינו פונקציה לינארית $mx + n$, המקיימת:

$$\frac{f(x) - (mx + n)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

בעזרת הביטוי o :

$$f(x) - (mx + n) = o(x - x_0)$$

נניח f רציפה ב- x_0 .

הגדרה 3.80 f נקראת דיפרנציאבילית ב- x_0

אם יש לה קירוב מסדר ראשון ב- x_0 .

משפט 3.81 f דיפרנציאבילית ב- x_0

אם ורק אם f גזירה ב- x_0 ,

ובתנאים הללו הפונקציה הלינארית היחידה המהווה קירוב מסדר ראשון

הינה פונקציית המשיק לגרף:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$m = f'(x_0) \cdot x_0$$

הוכחה: אם f דיפרנציאבילית,

אז יש לה קירוב לינארי מסדר ראשון, ואז:

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - mx - n}{x - x_0} &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \\ f(x) - mx - n &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \\ f(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} mx_0 + n\end{aligned}$$

ולכן הגבול של f קיים,

$$\begin{aligned}f(x_0) = mx_0 + n &\Rightarrow \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - mx_0 - n}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - mx - n + mx - mx_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - mx - n}{x - x_0} + m \rightarrow 0\end{aligned}$$

כשהשאיפה האחרונה היא לפי ההנחה שלנו.

מסקנה 3.82 f דיפרנציאבילית $\Leftrightarrow$ גזירה, $f'(x_0) = m$.

בכיוון השני:

נניח ש- f גזירה ב- x_0 ומגדירים:

$$mx + n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

כאשר הביטוי הזה הוא המשיק. אזי:

$$\frac{f(x) - mx - n}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

■

ולכן f דיפרנציאבילית.

31.12.2009

בסה"כ שלוש הגדרות שקולות לנגזרת של f ב- x_0 :

הגדרה 3.83

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

הגדרה 3.84 דיפרנציאביליות - קיום קירוב מסדר 1:

קיום קבועים a, b כך ש:

$$(h = x - x_0) * \frac{f(x_0 + h) - (a + bh)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

ואז:

$$\begin{aligned}a &= f(x_0) \quad b = f'(x_0) \\ f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)\end{aligned}$$

הראינו - אם f דיפרנציאבילית אזי היא גזירה,

והישר היחידי $a + bh$ העונה על * הוא הישר :

$$f(x_0) + f'(x_0)h$$

הגדרה 3.85 גזירה ב- x_0 אמ"מ

יש פונקציה $\varphi(x)$ המוגדרת בתחום ההגדרה של f ורציפה ב- x_0 ,
והמקיימת:

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$$

ואז:

$$\varphi(x_0) = f'(x_0)$$

3.9.2 אריתמטיקה של נגזרות

משפט 3.86 תהיינה f, g שתי פונקציות מוגדרות באותו קטע I

וגזירות ב- x_0 .

אזי גם $f + g, f \cdot g, f \cdot g$, ואם $g \neq 0$ בקטע גם $\frac{f}{g}$ גזירות שם ומתקיים

$$\begin{aligned}(f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\end{aligned}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right] = f'(x) + g'(x) \\ \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x)}{h} &= f(x + h) \cdot \frac{[g(x + h) - g(x)]}{h} + \frac{[f(x + h) - f(x)]}{h} \cdot g(x)\end{aligned}$$

כאשר $h \rightarrow 0$ מרציפות הפונקציות הביטוי מעלה שואף ל:

$$\begin{aligned}& f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \\ \left[\frac{f}{g}(x + h) - \frac{f}{g}(x) \right] \frac{1}{h} &= \frac{f(x + h) \cdot g(x) - f(x)g(x + h)}{h \cdot g(x + h)g(x)} \\ &= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \cdot \frac{g(x)}{g(x)g(x + h)} - \frac{f(x)}{g(x)g(x + h)} \cdot \frac{g(x + h) - g(x)}{h}\end{aligned}$$

כאשר $h \rightarrow 0$ מרציפות הביטוי מעלה שואף ל:

$$\frac{f' \cdot g - f g'}{g^2}$$

■

מסקנה 3.87

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

הוכחה: באינדוקציה:

$n = 1$ נכון.

$$(x^n)' = (x^{n-1}x)' = (n-1)x^{n-2} \cdot x + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

■

מסקנה 3.88

$$\begin{aligned} \tan(x)' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

כלל השרשרת

משפט 3.89 אם

$$f: I \rightarrow J, g: J \rightarrow R$$

פונקציות המוגדרות בקטעים I, J .

נניח f גזירה ב- x_0 , ו- g גזירה ב- $f(x_0)$.

אזי $g \circ f$ גזירה ב- x_0 , ומתקיים:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

הוכחה: נשתמש באפיון השלישי של הנגזרת:

$$g(y) - g(y_0) \stackrel{G}{=} \psi(y)(y - y_0)$$

ψ רציפה ב- y_0 ו- $\psi(y_0) = g'(y_0)$.

באותה הצורה:

$$f(x) - f(x_0) \stackrel{F}{=} \varphi(x)(x - x_0)$$

φ רציפה ב- x_0 ו- $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

$$g(f(x_0)) - g(f(x_0)) \stackrel{G}{=} \psi(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0)) \stackrel{F}{=} \psi(f(x)) \cdot \varphi(x) \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) = [\psi(f(x)) \cdot \varphi(x)](x - x_0)$$

$$(g \circ f)'(x_0) = \psi(f(x_0)) \cdot \varphi(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

■

דוגמא

$$\left(e^{\cos(x^2)}\right)' = e^{\cos(x^2)} \cdot (\cos(x^2))' = -e^{\cos(x^2)} \cdot \sin(x^2) \cdot 2x$$

אם f ו- g הופכיות זו לזו:

$$(f \circ g)(x) = x, \quad 1 = f'(g(x)) \cdot g'(x), \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = \frac{1}{\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y_0}}$$

משפט 3.90 תהיינה f, g פונקציות הופכיות זו לזו,

ונניח g רציפה, $f: I \rightarrow J$ חח"ע ועל, $g: J \rightarrow I$ גם היא חח"ע ועל.

$$x_0 \in J, \quad y_0 \in I = g(x_0)$$

אזי אם g גזירה ב- x_0 ,

ונגזרתה $g'(x_0) \neq 0$,

f גזירה ב- y_0 ומתקיים:

$$f'(y_0) = \frac{1}{g'(x_0)}$$

הוכחה: ראינו שרציפות g ב- $J \Leftarrow$ רציפות f בקטע I . נחשב:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}$$

נשים לב שבגלל חח"ע f , אם $y \neq y_0$ גם $f(y) \neq f(y_0)$.

נרשום:

$$y_0 = g(x_0), \quad y = g(x), \quad x_0 = f(y_0), \quad x = f(y)$$

$$= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\left(\frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)}\right)}$$

ואז מתוך רציפות f נקבל שכאשר $y \rightarrow y_0$ גם $x \rightarrow x_0$,

ולכן הגבול, היות ב- $g'(x_0) \neq 0$:

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)} = \frac{1}{g'(x_0)}$$

אזי אם g גזירה ב- x_0 ,

ונגזרתה $g'(x_0) \neq 0$,

f גזירה ב- y_0 ומתקיים:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(x_0)}$$

■

$x = e^y$	$y = \log x$
$\left. \frac{dy}{dx} \right _{x_0} = x'(y_0) = e^{y_0} = x_0 \neq 0$	$\left. \frac{dy}{dx} \right _{x_0} = \log'(x_0) = \frac{1}{x_0}$
	$\log'(x) = \frac{1}{x}$

$x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = \arcsin x, -1 \leq x \leq 1$
$0 \neq \frac{dy}{dx} = \cos y = \sqrt{1-x^2} \text{ for } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$-1 < x < 1$
	$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = \arcsin x, -1 \leq x \leq 1$
$0 \neq \frac{dy}{dx} = \cos y = \sqrt{1-x^2} \text{ for } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$-1 < x < 1$
	$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$y = \arctan x, -\infty < x < \infty$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + x^2$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$

$x = y^3$	$y = \sqrt[3]{x}$
$\frac{dy}{dx} = 3y^2 = 3x^{\frac{2}{3}}:$	הפונקציה גזירה, ונגזרתה:
$y \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \neq 0$	$\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

טבלה של נגזרות של הפונקציות האלמנטריות - בספר של מייזלר!

x^α , מספר ממשי כלשהוא ($x > 0$).

טענה 3.91 x^α גזירה, ונגזרתה היא $\alpha x^{\alpha-1}$.

הוכחה: $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$. נפעיל את כללי הגזירה של פונקציה מורכבת:

$$(x^\alpha)' = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \log x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

■

3.10 קירובים נומריים של פונקציות

נזכור שראינו:

קירוב מסדר אפס:

$$f(x) \approx f(x_0)$$

קירוב מסדר ראשון:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

דוגמאות:

• $f(x) = \sqrt{x}$ ליד הנקודה $x_0 = 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1.03} \approx 1$$

$$\sqrt{1.03} \approx 1 + \frac{1}{2}0.03 = 1.015$$

•

$$\log = f(x)$$

$$\frac{1}{x} = f'(x)$$

$$f'(1) = 1$$

$$\log(1.001) = 0.000996\dots$$

$$x_0 = 1 \approx \log(1) = 0$$

$$x = 1.001 \approx 0 + 1.0001 = 0.001$$

3.11 חישוב נגזרות מסדר גבוה

אם f גזירה בקטע I ($\Rightarrow$ גזירה בכל x_0 בקטע I),

הפונקציה $f'(x)$ שערכה בכל נקודה = הנגזרת של f הינה פונקציה חדשה, שגם היא יכולה להיות רציפה, גזירה.

הגדרה 3.92 אומרים ש- f גזירה מסדר n אם f גזירה,

f' גזירה, $(f')'$ גזירה... וכן הלאה n פעמים. מסמנים:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$$

דוגמאות

•

$$f(x) = \sin(x), \quad f' = \cos(x), \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos$$

$$f^{(4)}(x) = f^{(iv)}(x) = \sin x$$

במחזור של 4.

3.11.1 נוסחאת לייבניץ לנגזרת מסדר n של מכפלה של שתי פונקציות

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה -

$$f^{(0)} = f$$

הנחת האינדוקציה -

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

צעד האינדוקציה -

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \text{what we needed!} \end{aligned}$$

וסיימנו. ■

3.12 המשפטים היסודיים על פונקציות גזירות בקטע

3.12.1 משפט פרמה

משפט 3.93 תהי f פונקציה המוגדרת בקטע (a, b) ,

ומקבלת את המקסימום שלה בקטע בנקודה פנימית $a < c < b$,

או לחילופין את המינימום.

אזי אם f גזירה ב- c , $f'(c) = 0$.

הוכחה: נוכיח עבור מקסימום.

נחשב נגזרות חד צדדיות:

$$f'_+(c) = \lim_{c < x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

עפ"י ההנחה עבור $c < x$ $f(x) - f(c) \leq 0$ ולכן $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$

ולכן $f'_+(c) \leq 0$

כנ"ל משמאל:

$$f'_-(c) = \lim_{c > x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \Rightarrow f'_-(c) \geq 0$$

ומשיוון הנגזרות החד צדדיות $f'(c) = 0$ כנדרש.

ההוכחה למקרה של מינימום זהה -

האי שיויונים מתהפכים אך המסקנה נשארת בעינה. ■

שתי אזהרות:

1. המשפט אינו נכון בנקודת קצה. ראה: $f(x) = x$ בקטע $[0, 1]$.
2. המשפט אינו נכון בלי הנחת הגזירות בנקודת המקסימום\מינימום, לדוגמא:

$$f(x) = |x|$$

בנקודה $c = 0$.

3.12.2 משפט רול

משפט 3.94 תהי f פונקציה המוגדרת בקטע סגור $[a, b]$,

רציפה בקטע סגור, גזירה בקטע (a, b) ,

ומקיימת $f(a) = f(b)$.

אזי יש נקודה בפנים הקטע $a < c < b$ בה $f'(c) = 0$.

הוכחה: היות ו- f רציפה בקטע חסום וסגור,

משפט ויירשטראס השני אומר שיש לה מקסימום M ומינימום m .

אם $M = m$ אז הפונקציה קבועה ונגזרתה 0 בכל נקודה.

אפשר לבחור את c כרצוננו.

אם $m < M$, היות ו- $f(a) = f(b)$ שווים,

רק אחד לכל היותר מתוך M או n מתקבל בנקודת קצה.

תהי c נקודת פנים בה מתקבל מקסימום\מינימום.

ממשפט פרמה $f'(c) = 0$.

מ.ש.ל.

5.1.2010

מסקנה 3.95 ממשפט רול:

אם f גזירה בקטע,

בין כל שני אפסים של f מסתתר אפס של f' .

אפס של $f \equiv$ נקודה x בה $f'(x) = 0$.

מסקנה 3.96 לפולינום מדרגה n שאינו פולינום האפס,

יש לכל היותר n שורשים ממשיים שונים.

הוכחה: באינדוקציה על k :

בסיס: $n = 1$ ידוע.

הנחת האינדוקציה: נניח כי הוכחנו את הטענה עבור פולינום מדרגה $n > 1$.

צעד האינדוקציה: יהי f פולינום מדרגה n ,

אזי f' הינו פולינום מדרגה $n - 1$.

ל- f' יש, על סמך ההנחה, לכל היותר $n - 1$ שורשים, דהיינו אפסים,

ומן המסקנה האחרונה בין כל שני שורשים עוקבים $x_i < x_{i+1}$ של f ,

יש $x_i < c_i < x_{i+1}$ שם $f'(c_i) = 0$,

ולכן מספר השורשים של f הוא לכל היותר n .

3.12.3 משפט לגראנז'

משפט 3.97 אם f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$,

וגזירה בקטע (a, b) ,

אזי ישנה נקודה $a < c < b$ בה:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

הערה 3.98 הביטוי מעלה הוא שיפוע המיתר המחבר את קצוות הגרף.

הערה 3.99 כאשר $f(a) = f(b)$ מתקבל משפט רול.

הוכחה: הרעיון - "להטות" גרף הפונקציה למצב של משפט רול עם תוספת של פונקציה לינארית.

נגדיר פונקציה חדשה:

$$g(x) = f(x) - (x - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g(a) = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - (b - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f(a)$$

g רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) ,

$$g(a) = g(b)$$

לכן, ממשפט רול, קיימת נקודה $a < c < b$ שם $g'(c) = 0$, לכן:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

3.12.4 משפט קושי

משפט 3.100 תהיינה f, g פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$,

וגזירות בקטע (a, b) .

נניח $g'(x) \neq 0$ לכל x (כלומר, לפי רול $g(a) \neq g(b)$).

אי יש נקודה $a < c < b$ שם:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

הערה 3.101 היחס בין שיפועי המשיקים ב- c ,

הינו כיחס בין שיפועי המיתרים המחברים את קצות הגרפים.

הערה 3.102 אם ניקח $g(x) = x$ אז קושי $\Leftarrow$ לגראנז'.

הוכחה: נסתכל בפונקציה:

$$\varphi(x) = f(x) \cdot (g(b) - g(a)) - g(x) \cdot (f(b) - f(a))$$

φ רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) , וכמו כן:

$$\varphi'(x) = f'(x) \cdot (g(b) - g(a)) - g'(x) \cdot (f(b) - f(a))$$

$$\varphi(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = \varphi(b)$$

לכן, ממשפט רול, קיימת נקודה $a < c < b$ שם $\varphi'(c) = 0$, כלומר:

$$0 = f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) - g'(c) \cdot (f(b) - f(a))$$

$$\Rightarrow g'(c) \cdot (f(b) - f(a)) = f'(c) \cdot (g(b) - g(a))$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

■

השלמות משיעור
ב - 11.1.2010

דוגמא:

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x > 0 \\ 0 & 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases}, \quad g''(x) = \begin{cases} 6x & x > 0 \\ 0 & 0 \\ -6x & x < 0 \end{cases}$$

נשים לב כי בנגזרת השניה g אינה גזירה ב-0.

נביט ב- $[a, b] = [-1, 2]$

$$\frac{f(2) - f(-1)}{g(2) - g(-1)} = \frac{8 - (-1)}{8 - 1} = \frac{9}{7}$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \begin{cases} c > 0 & 1 \\ 0 & \text{not defined} \\ c < 0 & -1 \end{cases}$$

כלומר - אי אפשר לוותר על $g'(a) \neq 0$!

3.12.5 משפט לגראנג' - שימושים

משפט 3.103 תהי f פונקציה גזירה בקטע I .

אם $f'(x)$ פונקציה חסומה בקטע,

אזי f רציפה במידה שווה בו.

הוכחה: מחסימות הנגזרת, ידוע שיש M כך ש:

$$|f'(x)| \leq M$$

לכל x בקטע.

ממשפט לגראנג', לכל שתי נקודות $x, x' \in (x, x')$ קיימת $c \in (x, x')$ כך ש:

$$-M \leq f'(c) = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \leq M$$

$$|f(x) - f(x')| \leq M |x - x'|$$

בהנתן $\varepsilon > 0$, נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$,
ואז אם $|x - x'| < \delta$, מתקיים:

$$|f(x) - f(x')| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

■

הערה 3.104 פונקציה רציפה או רציפה במ"ש לא צריכה להיות גזירה.

אפילו אם f גזירה במ"ש $\nRightarrow$ חסימות הנגזרת.

דוגמא:

$$x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

הינה רציפה וגזירה בקטע $[0, 1]$ אם תוגדר כ-0 ב-0.

הגדרה 3.105 פונקציה עבורה יש קבוע k כך ש:

$$|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$$

נקראת ליפשיץ עם קבוע k .

נגזרת חסומה $\Leftarrow$ ליפשיץ $\Leftarrow$ רציפות במ"ש $\Leftarrow$ רציפות

שימוש בחשבונות

ראינו כי:

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\approx} f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

הקירוב לא נותן מידע על גודל השגיאה.

$$f(x) = f(x_0) + f'(c_x) \cdot (x - x_0)$$

עבור c_x בין x_0 ל- x .

לדוגמא:

$$\sin(30) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

אזי קיים $\frac{\pi}{6} < c < \frac{\pi}{6} + 0.01$ כך ש:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0.01\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos(c) \cdot 0.01$$

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.01$$

$$\cos(c) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + (-\sin(d)) \cdot \left(c - \frac{\pi}{6}\right), \quad \frac{\pi}{6} \leq d \leq c$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0.01\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\sin(d)) \cdot \left(c - \frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot 0.01$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.01 + \left(-\sin(d) \cdot \left(c - \frac{\pi}{6}\right) \cdot 0.01\right)$$

כאשר המספר האחרון קטן מ-0.0001.

משפט 3.106 תהי f פונקציה גזירה בקטע $[a, b]$,

כולל נגזרות חד צדדיות בקצוות.

אם γ הוא ערך בין $f'_+(a)$ ל- $f'_-(b)$,

אזי קיימת נקודה $a < c < b$ שם $f'(c) = \gamma$.

או:

הנגזרת מקבל יחד עם כל שני ערכים גם כל ערך ביניים.

הערה 3.107 אם f' היתה רציפה,

המשפט היה נובע ממשפט ערך הביניים לפונקציה רציפה.

נביא למשפט שזה שתי הוכחות מהכיתה, והוכחה נוספת מהוכח, שנראית הפשוטה ביותר.

העקרון, בכל מקרה, הוא אותו העקרון. **הוכחה:** נניח $f'_+(a) < \gamma < f'_-(b)$. נסתכל בפונקציה:

$$\varphi_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

עבור h קבוע קטן.

נבחר $\delta_1 > 0$ כך שאם $0 < h < \delta_1$ אז $\varphi_h(a) < \gamma$,

זה אפשרי כי כאשר $h \rightarrow 0$ $\varphi_h(a) \rightarrow f'_+(a) < \gamma$.

נבחר $\delta_2 > 0$ כך שאם $0 < h < \delta_2$ אז $\varphi_h(b-h) > \gamma$,

זה אפשרי כי כאשר $h \rightarrow 0$ $\varphi_h(b-h) \rightarrow f'_-(b) > \gamma$ כי צריך להיות $b > b-h$.

יהי $0 < h < \min(\delta_1, \delta_2)$ אז:

$$\varphi_h(a) < \gamma < \varphi_h(b-h)$$

כעת נקבע את h ונביט על $\varphi_h(x)$ כאשר $a \leq x \leq b-h$

$\varphi_h(x) = \gamma$ רציפה, ולכן יש x כך ש- $\varphi_h(x) = \gamma$.

ממשפט לגראנג', יש $x < c < x+h$ שם $f'(c) = \gamma$.

11.1.2010

נביא הוכחה שניה מהשיעור: **הוכחה:** תהי $F(x)$ פונקציה רציפה וגזירה על כל הישר. נסמן:

$$f'_+(a) = \alpha, f'_-(b) = \beta, \alpha < \gamma < \beta$$

$$F(x) := \begin{cases} f(a) + \alpha(x-a) & x \leq a \\ f(x) & a \leq x \leq b \\ f(b) + \beta(x-b) & x \geq b \end{cases}$$

$$G(x) = F(x) - \gamma x$$

$$G'(x) = F'(x) - \gamma := \begin{cases} \alpha - \gamma < 0 & x \leq a \\ \beta - \gamma > 0 & x \geq b \end{cases}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} G(x) = +\infty$$

תהי c מינימום של G . אזי לפי פרמה:

$$G'(c) = 0 \Rightarrow F'(c) = \gamma, a < c < b \Rightarrow f'(c) = \gamma$$

וכעת - הוכחה שלישית (והכי ברורה לדעת הכותבת) - אדפטציה מהספר של הוכמן:

הוכחה: תחילה, נניח בה"כ כי $f'_+(a) < \gamma < f'_-(b)$, אחרת נביט ב- $f - \gamma$ ובערך γ .

נגדיר פונקציה חדשה:

$$g(x) = f(x) - \gamma x$$

פונקציה זו, מהגדרתה, הינה רציפה בקטע (a, b) ,

וכמובן מוגדרת בכל $x \in (a, b)$.

נרצה להראות שקיימת נקודה $a < c < b$ כך ש- $g'(c) = 0$, כי אז:

$$0 = g'(c) = f'(x) - \gamma \Rightarrow f'(c) = \gamma$$

נביט אם כך בפונקציה g בקטע (a, b) .

אם $g(a) = g(b)$, אזי g עומדת בתנאי משפט רול,

ולכן קיימת c כנ"ל.

אחרת, נשים לב כי מתקיים:

$$g'_+(a) = f'_+(a) - \gamma < 0$$

$$g'_-(b) = f'_-(b) - \gamma > 0$$

וזה מהגדרת הערך γ .

אז, מימין לנקודה a יורדת g (הנגזרת שלילית²⁰),

ולכן קיימת נקודה $a' \in (a, b)$ עבורה $g(a') < g(a)$.

כמו כן, משמאל לנקודה b עולה g (הנגזרת חיובית),

ולכן קיימת נקודה $b' \in (a, b)$ עבורה $g(b') < g(b)$.

נניח בה"כ כי $a' < b'$.

כעת, אם $g(a) < g(b)$ אז ממשפט ערך הביניים ל- g ,

קיימת נקודה $d \in (a', b)$ עבורה $g(d) = g(a)$,

ואז נוכל להפעיל את משפט רול על הקטע $[a, d]$.

אם $g(a) > g(b)$, אז ממשפט ערך הביניים ל- g ,

קיימת נקודה $d \in (a, b')$ עבורה $g(b) = g(d)$,

ואז נוכל להפעיל את משפט רול על הקטע $[d, b]$.

כלומר, בכל מקרה קיימת נקודה $c \in (a, b)$ עבורה $g'(c) = 0$, וסיימנו! ■

משפט 3.108 תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) וגזירה בכל $x \neq x_0 \in (a, b)$.

אם קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \gamma$, אזי f גזירה גם ב- x_0 ומתקיים:

$$f'(x_0) = \gamma$$

נשים לב שלמעשה אנו מראים שלא יכולה להיות נק' אי רציפות לנגזרת.

הוכחה: מהגדרת הנגזרת, עלינו לבדוק את:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

נפעיל את לגראנז' בקטע $[x, x_0]$ או $[x_0, x]$, תלוי מי גדול ממי,

ונזכור כי f רציפה בקטע וגזירה בכל נקודה פנימית. נקבל:

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} f'(c_x) = \gamma, \quad x_0 < c_x < x \text{ or } x < c_x < x_0$$

²⁰אגב, זו מסקנה ישירה מלגראנז'

3.13 חקר פונקציות

משפט 3.109 תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I .

אזי f קבועה בקטע אם"מ f גזירה ו- $f' \equiv 0$.

הוכחה: בכיוון הראשון - הנגזרת של פונקציה קבועה היא 0.

בכיוון השני - אם f גזירה ובכל נקודה $f' \equiv 0$,

אזי מלגראנג' לכל $x < x'$ ב- I :

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') = 0$$

■

נזכיר כמה הגדרות:

הגדרה 3.110 תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I ,

f עולה (עולה ממש) בקטע אם לכל $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$).

משפט 3.111 תהי f פונקציה גזירה ב- (a, b) ורציפה ב- $[a, b]$.

א. f עולה בקטע $[a, b]$ אם"מ $f'(x) \geq 0$ ב- (a, b) .

ב. אם $f'(x) > 0$ לכל $a < x < b$, אזי f עולה ממש.

הוכחה: א. בכיוון הראשון - אם f עולה, שיפועי המיתרים:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

ולכן גם גבולם (שקיומם נובע מההנחה) $0 \leq f'(x)$.

בכיוון השני - אם $0 \leq f'(x)$ לכל $x \in I$,

ממשפט לגראנג' לכל $a \leq x < x' \leq b$:

$$x < c < x', \quad f(x') - f(x) = f'(c) \cdot (x' - x) \geq 0$$

ולכן f עולה.

■

אם בשיווייון האחרון $f'(x) > 0$, אזי $f(x') - f(x) > 0$, וזה מוכיח את ב'.

דוגמא מדוע ב' אינה שקילות?

$f(x) = x^3$ על כל $\mathbb{R}$ עולה ממש,

אבל $f'(0) = 0$, כלומר הנגזרת לא תמיד > 0 .

נחזק עתה את ב' עם משפט נוסף:

משפט 3.112 תהי f כמקודם.

אזי f עולה ממש ב- $[a, b]$ אם"מ

$f' \geq 0$ וגם f' אינה מתאפסת זהותית (לא פונקציית האפס)

בשום קטע חלקי $[a, b] \supseteq [a_1, b_1]$.

הוכחה: בכיוון הראשון - אם f עולה ממש אז ראינו ש- $f' \geq 0$.

בכיוון השני אם $[a_1, b_1]$ קטע חלקי, ו- $f' \equiv 0$ על $[a_1, b_1]$,

אזי $f|_{[a_1, b_1]}$ (דהיינו f המצומצמת לקטע הקטן) קבועה, ולכן לא עולה ממש.

ולהפך - אם $f' \geq 0$ אבל לא זהותית אפס על שום תת קטע,

ראינו ש- f עולה (במובן הצר),

אבל אם $x < x'$ ו- $f(x) = f(x')$,

אזי כמובן f קבועה על תת הקטע $[x, x']$ ו- $f' \equiv 0$ שם, בסתירה להנחה.

■

3.13.1 עליה וירידה בנקודה

f מוגדרת ב- (a, b) ו- $x_0 \in (a, b)$

הגדרה 3.113 f עולה ב- x_0 אם יש $\delta > 0$

כך שלכל $x_0 - \delta < x < x_0 < x' < x_0 + \delta$ מתקיים:

$$f(x) \leq f(x_0) \leq f(x')$$

ועולה ממש אם אי השוויונות מעלה הם חזקים ($<$).

דוגמא

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2}$$

$$f(0) = 0$$

הפונקציה גזירה בכל x .

$$0 < x < \delta = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \frac{x - x^2}{2} = \frac{x}{2}(1 - 2x) < f(x)$$

$$-\frac{1}{2} = -\delta < x < 0 \Rightarrow 0 > \frac{x + x^2}{2}(1 + 2x) > f(x)$$

f עולה בנקודה 0 על סמך ההגדרה.

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{4}} < x < \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow 2\pi k + \frac{\pi}{4} < \frac{1}{x} < 2\pi k + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$f'(x) \leq 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} < 0$$

משפט 3.114 אם f גזירה ב- x_0 , ומקיימת $0 < f'(x_0)$,

אזי f עולה בנקודה x_0 .

נשים לב שאין שום דרישה נוספת על f .

הוכחה:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$$

לכן יש $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow f(x_0) < f(x)$$

אם $x_0 < x < x_0 + \delta$

ואם $x_0 - \delta < x < x_0$ אז $f(x) < f(x_0)$.

3.13.2 אקסטרמום

הגדרה 3.115 אקסטרמום - מקסימום או מינימום.

12.1.2010

הגדרה 3.116 פונקציה מוגדרת בקטע I .

$x_0 \in I$ נקראת מקסימום/מינימום גלובלי בקטע

אם $f(x_0) \leq f(x) / f(x) \leq f(x_0)$ לכל x בקטע.

הגדרה 3.117 נקראת מקסימום/מינימום מקומי,

אם יש $\delta > 0$ כך ש- x_0 נקודת מינימום/מקסימום לפונקציה f

בצמצום לקטע $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

נשים לב שזו הגדרה לנקודה שבתוך הקטע -

ישנן הגדרות דומות במידה ו- x_0 הינה נקודת קצה של הקטע.

תזכורת - משפט פרמה

תהי $x_0 \in (a, b)$ נקודת אקסטרמום,

אזי או ש- f לא גזירה ב- x_0 ,

או ש- $f'(x_0) = 0$.

הגדרה 3.118 נקודת x_0 בה $f'(x_0) = 0$ נקראת נקודה סטציונרית.

משפט 3.119 תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) ,

וגזירה בכל נקודה פרט, אולי, ל- x_0 .

אם $f'(x)$ חיובית עבור $a < x < x_0$ ושלילית עבור $x_0 < x < b$,

אזי x_0 היא מקסימום במובן החזק (אם האי שוויון לא חזק אזי זה יהיה מקסימום במובן החלש).

הגדרה בסימנים הפוכים עבור נקודת מינימום.

הוכחה: ממשפט לגראנג' עבור $a < x < x_0$:

$$f(x_0) - f(a) = (x_0 - a) f'(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

בצורה דומה עבור הצד השני של הקטע, עבור $x_0 < x < b$:

$$f(b) - f(x_0) = (b - x_0) f'(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

ולכן x_0 מקסימום חזק.

הוכחה דומה עבור נקודת מינימום.

מסקנה 3.120 אם הנגזרת משנה סימן ב- x_0 ,

אזי הנקודה היא אקסטremum.

	משמאל	מימין
Max	$\uparrow +$	$\downarrow -$
Min	$\downarrow -$	$\uparrow +$

משפט 3.121 (כולל הנגזרת השנייה לאקסטremum) -

תהי f פונקציה גזירה פעם אחת בקטע (a, b) ,

ונניח בנוסף ש- $f''(x_0)$ קיימת.

אם x_0 נקודה סטציונרית, אבל $f''(x_0) > 0$,

אז זוהי נקודת מינימום מקומי.

אם x_0 נקודה סטציונרית, אבל $f''(x_0) < 0$,

אז זוהי נקודת מקסימום מקומי.

הוכחה: נביט על $f'(x)$ בסביבה של x_0 .

זאת פונקציה גזירה ב- x_0 ונגזרתה $(f'(x))' > 0$,

ולכן $f'(x)$ עולה בנקודה x_0 .

כלומר, יש $\delta > 0$ כך שאם $x_0 - \delta < x < x_0$ ואם $f(x) < f'(x_0) = 0$,

ואם $x_0 < x < x_0 + \delta$ ואם $f'(x) < f'(x_0) = 0$.

היות שהנגזרת משנה סימן ב- x_0 משליליות לחיוביות,

מהמשפט הקודם x_0 נקודת מינימום בקטע $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

כנ"ל אם אי השוויונות מתהפכים.

■

דוגמאות:

1.

$$f(x) = x^n$$

אם n זוגי, 0 מינימום גלובלי חזק,

ואף על פי כן אם $n > 2$ $f'(0) = f''(0) = 0$.

אם n אי זוגי, 0 נקודת עליה.

2.

$$f(x) = x^2 + 3x - 2$$

$$f'(x) = 2x + 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \Rightarrow Min, f''(x) = 2 > 0$$

3.

$$f(x) = \sin x \cdot e^{\cos x}$$

נשים לב כי $\frac{1}{e} \approx 0.35..$ וכמו כן $e = 2.718...$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \cdot e^{\cos x} + \sin(-\sin x) e^{\cos x} \\ &= (\cos x - \sin^2 x) e^{\cos x} = (\cos^2 x + \cos x - 1) e^{\cos x} \end{aligned}$$

מהם הנקודות הסטציונריות?

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+5}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\sin x = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2}$$

$$\begin{aligned} f'' &= (2\cos x (-\sin x) - \sin x) e^{\cos x} + (\cos^2 x + \cos x - 1) (-\sin x) e^{\cos x} \\ &= [(-\sin x - x) (\cos^2 x + 3\cos x)] e^{\cos x} \end{aligned}$$

$$\cos x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

אם $\sin(x) > 0$ אז $f''(x) < 0$ וזוהי נקודת מקסימום,
אם $\sin(x) < 0$ אז $f''(x) > 0$ וזוהי נקודת מינימום.

3.14 כלל לופיטל

3.14.1 המקרה הבסיסי

משפט 3.122 תהיינה f, g שתי פונקציות גזירות בסביבה מנוקבת של x_0 . נניח:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

וכמו כן $g'(x) \neq 0$ בסביבת x_0 וקיים הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

אזי גם:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

הערה 3.123 המצב הנפוץ ביותר ליישום הכלל הינו

בו f, g גזירות ברציפות בסביבת x_0 ,

$f(x_0) = g(x_0) = 0$, אבל $g'(x_0) \neq 0$.

למשל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \sin(x) = 0 + 1x + o(x), \quad x = 0 + 1x + o(x)$$

הוכחה: בה"כ $f(x_0) = 0$, ולכן f, g רציפות ב- x_0 ,

וגזירות בסביבת x_0 .

לכן מתקיימים תנאי משפט קושי בקטע $[x_0, x]$ (או $[x, x_0]$, תלוי מי יותר גדול).

מהנתון, אפשר להניח ש- $g'(t) \neq 0$ כאשר $x_0 < t < x$ (כי t בסביבת x_0).

ממשפט קושי:

$$\exists x_0 < c_x < x \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

כאשר $x \rightarrow x_0$ גם $c_x \rightarrow x_0$, ולכן:

$$= \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

■

דוגמאות:

1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2 \\ e^x - e^{-x} &= 0 + 2x + o(x) \\ \sin x &= 0 + 1x + o(x) \\ \Rightarrow \frac{2 + \frac{o(x)}{x}}{1 + \frac{o(x)}{x}} &\rightarrow 2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} &\stackrel{\text{LeHospital 1st time}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &\stackrel{\text{LeHospital 2nd time}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

14.1.2010

3.14.2 כלל לופיטל באינסוף

משפט 3.124 תהייה f, g פונקציות גזירות בקרן $[a, \infty)$.

נניח $g'(x) \neq 0$ לכל x .

בנוסף, נניח $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

אזי, אם קיים $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ גם $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

הוכחה: הטריק - נעביר את הבעיה מ- ∞ לנק' 0 ע"י שינוי משתנה.

נגדיר $t = \frac{1}{x}$ (נניח $a > 0$) ונגדיר $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$, $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

אזי F, G מוגדרות וגזירות בקטע $(0, \frac{1}{a}]$.

כמו כן,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} F(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} G(t) = 0$$

ולפי כלל השרשרת:

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2} \cdot f'\left(\frac{1}{t}\right), \quad G'(t) = -\frac{1}{t^2} \cdot g'\left(\frac{1}{t}\right) \neq 0$$

קיבלנו כי כל תנאי הגרסא הראשונה למשפט לופיטל מתקיימים ל- F, G בנקודה 0 (מימין).

לכן, קראו מימין משמאל:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{F(t)}{G(t)} \stackrel{\text{LeHospital}}{=} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

וסיימו.

■

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\log\left(\frac{x+5}{x}\right)}$$

$$\sin'\left(\frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right), \log'\left(\frac{x+5}{x}\right) = \log'(x+5) - \log'(x) = \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-x(x+5)}{-x^2(x+5)} = \frac{1}{5}$$

3.14.3 כלל לופיטל לגבולות מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$

משפט 3.125 תהייה f, g פונקציות גזירות בקטע $^{21}(a, b]$.

נניח $g'(x) \neq 0$ לכל x .

בנוסף, נניח $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

אזי, אם קיים $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ גם $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

הוכחה: מקיום הגבול, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ שאם $a < x < a + \delta$

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

נסמן $x_0 = a + \delta$ אזי:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \stackrel{Cauchy}{=} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

בכדי לסיים את ההוכחה, נעריך את

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

ונראה שעבור $a < x < \delta'$ (כאשר $\delta' < \delta$),

ערכו המוחלט של הגודל הזה קטן מ- $\frac{\varepsilon}{2}$.

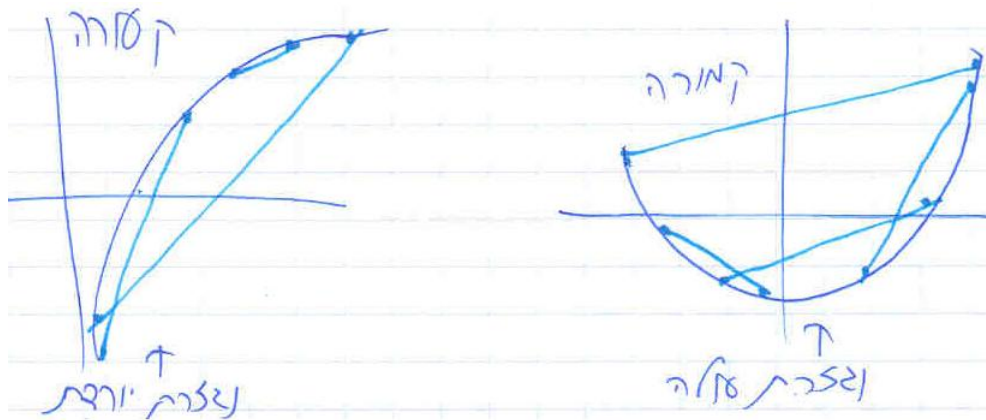
מאי השוויונות נקבל:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} &= \frac{f(x)(g(x) - g(x_0)) - g(x)(f(x) - f(x_0))}{g(x)(g(x) - g(x_0))} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) - g(x)f(x) + g(x)f(x_0)}{(x)(g(x) - g(x_0))} = \frac{f(x_0)g(x) - f(x)g(x_0)}{g(x)(g(x) - g(x_0))} \\ &= f(x_0) \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x) - g(x_0)}}_{\rightarrow \infty} - \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}}_{\text{between } L + \frac{\varepsilon}{2} \text{ and } L - \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0)}{g(x)}}_{0} - \underbrace{\frac{f(x_0)g(x)}{g(x)(g(x) - g(x_0))}}_0 \end{aligned}$$

■

לכן קיים δ' כך שאם $a < x < a + \delta'$ עבורו כל הביטוי מעלה קטן מ- $\frac{\varepsilon}{2}$.

²¹ואכן, הבעיה תהיה בגבול ליד a

**תכונה:**

אם נעביר מיתר בין כל שתי נקודות בגרף של פונקציה רציפה, אזי 6 נקודות במיתר מעל הגרף אם הפונקציה קמורה, ומתחת אם היא קעורה.

הגדרה 3.126 תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I ,

אז f תקרא קמורה לכל $x_1 < x_2$ כקטע,

המיתר המחבר את הנקודה $(x_1, f(x_1))$ עם $(x_2, f(x_2))$ נמצא מעל לגרף הפונקציה או עליו.

הייצוג הפרמטרי של ציר x :

$$0 \leq t \leq 1, \quad x = (1-t)x_1 + tx_2$$

הייצוג הפרמטרי של ציר y :

$$(x, y) = (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)$$

כלומר x, y כפונקציה של t .

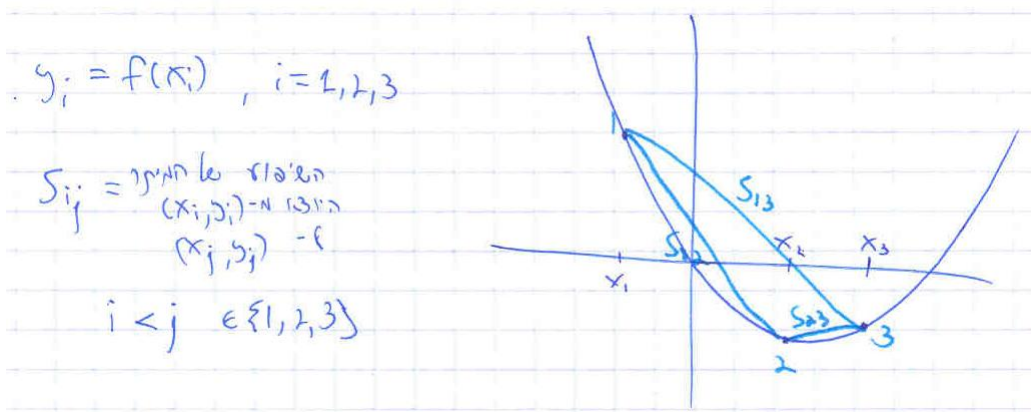
נקודה כללית - $(x(t), y(t))$.

נשים לב:

בניגוד לאינטואיציה, קמורה היא מחייכת וקעורה היא עצובה.

3.15.1 משפט שלושת המיתרים ומשפטים נוספים

תחילה, אינטואיציה:



משפט 3.127 תהי f פונקציה קמורה בקטע I ,

ויהיו $x_1 < x_2 < x_3$ בקטע.

כמו כן $y_i = f(x_i)$ ערכי הפונקציה בנקודות. אזי:

$$\underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{S_{12} = \text{Slant of } 1,2} \leq \underbrace{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}}_{S_{13}} \leq \underbrace{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}_{S_{23}}$$

הערה: השוויונות נראים הפוכים, כי הם השיפועים שליליים.

הוכחה: נבטא:

$$x_2 = (1 - t)x_1 + tx_3 \quad (I)$$

עבור $0 < t < 1$.

f קמורה, ולכן:

$$\begin{aligned} y_2 &= f(x_2) = f((1-t)x_1 + tx_3) \leq (1-t)y_1 + ty_3 \\ &\Leftrightarrow y_2 - y_1 \leq t(y_3 - y_1) \quad (II) \end{aligned}$$

נחלץ את t (מ- I):

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= t(x_3 - x_1) \\ \Rightarrow t &= \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \end{aligned}$$

נציב ב- (II) :

$$y_2 - y_1 \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (y_3 - y_1)$$

$0 < x_2 - x_1$, לכן נוכל לחלק בביטוי זה,

ונקבל את א"ש i .

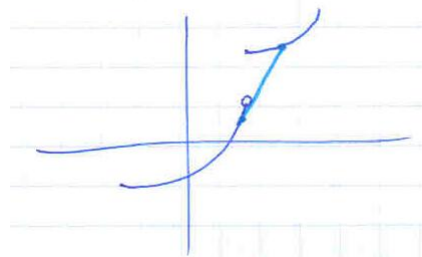
תרגיל: חלצו את א"ש ii בצורה דומה.

רמז - החלפת משתנה: $r = 1 - t$. אינטואיטיבית - נלך מימין לשמאל במקום משמאל.

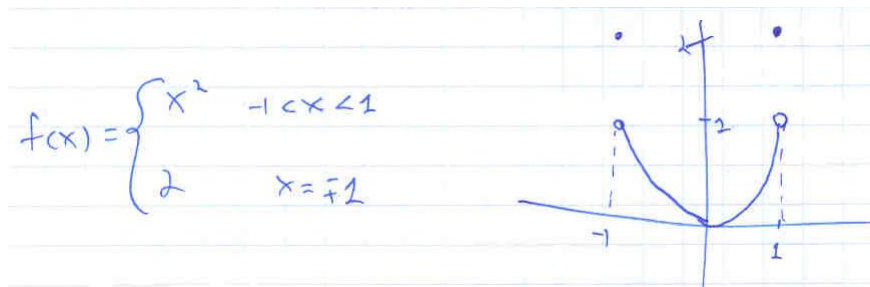
משפט 3.128 תהי f פונקציה קמורה בקטע I .

אזי f רציפה בכל נקודה שאינה נקודת קצה של I .

תחילה, שתי אינטואיציות כלליות:

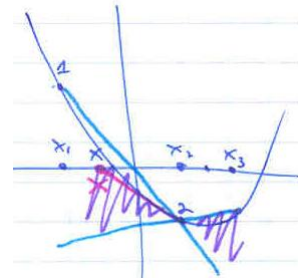


1.



2.

הוכחה: כעת, אינטואיציה להוכחה:



נבחר שלוש נקודות x_1, x_2, x_3 .

נראה שהפונקציה חסומה ע"י המיתרים ונמצאת בשטח הסגור.

המיתרים שואפים ב- x_2 לאותה נקודה - $f(x_2)$,

ולכן ממשפט הסנדוויץ', הפונקציה שואפת לשם ולכן רציפה.

כעת, להוכחה:

תהיה $x_2 \in I$ נקודה פנימית, $y_2 = f(x_2)$.

נבחר $x_1 < x_2 < x_3$ בקטע (נוכל לבחור כי x_2 נקודה פנימית),

ונסמן: $f(x_1) = y_1$, $f(x_3) = y_3$.

נוכיח: $\lim_{x \rightarrow x_2} f(x) = y_2$ (דהיינו רציפות משמאל - רציפות מימין מושארת כתרגיל).

אנחנו רוצים להראות עבור נק' x נעה, השואפת ל- x_2 , כי:

$$l_{23}(x) \leq f(x) \leq l_{12}(x)$$

נסמן $y = f(x)$ עבור $x_1 < x < x_2$ ממשפט שלושת המיתרים:

$$\frac{y_2 - y}{x_2 - x} \leq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

למה? בהשוואה לנוסחא המקורית,

y הוא y_2 , y_2 הוא y_3 , y_1 נשאר y_1 .

מאידך, עבור $x < x_2 < x_3$, שוב באותה הצורה:

$$\frac{y_2 - y}{x_2 - x} \leq \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

נסמן ב- l_{12} את הישר דרך הנקודות 1 ו-2,

וב- l_{23} את הישר בין 2 ל-3.

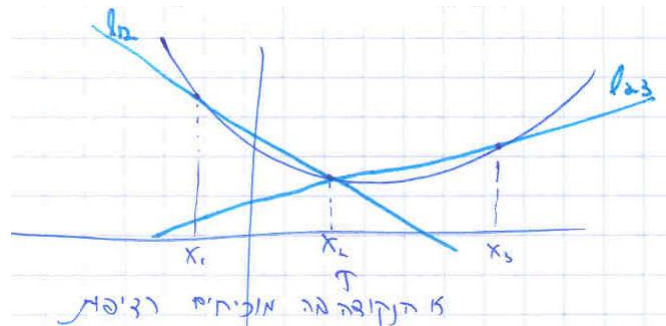
אזי הנקודה (x, y) נמצאת מעל l_{23} ומתחת ל- l_{12} .

נשים לב - אלו ישרים ולא מיתרים!

כלומר, צ"ל

$$\lim_{x \rightarrow x_2^+} f(x) = y_2$$

$$l_{12}(x) = y_1 + S_{12}(x - x_1) = y_2 + S_{12}(x - x_2)$$



. $f(x) \leq l_{12}(x)$, לכן, מקמירות, $x_1 < x < x_2$

באותה צורה, $l_{23} \leq f(x)$

אזי, ממשפט הסנדוויץ, היות וגם $l_{12}(x) \rightarrow y_2$ וגם $l_{23}(x) \rightarrow y_2$ כ- $x \rightarrow x_2^+$

אז גם $f(x) \rightarrow y_2$ כ- $x \rightarrow x_2^+$

נשים לב שאפילו בשביל רציפות של צד אחד,

היינו צריכים מיתרים מ-2 הצדדים!

כלומר זה בפירוש לא נכון לנקודות הקצה.

בדיוק באותה דרך מטפלים ב- $\lim_{x \rightarrow x_2^+} f(x)$:

לוקחים $x_2 < x < x_3$ ומראים שהנקודה (x, y) , $y = f(x)$,

מעל l_{12} (כלומר מעל $(x, l_{12}(x))$) ומתחת $(x, l_{23}(x))$.

ואז מסנדוויץ:

$$y_2 \leftarrow l_{12}(x) \leq y \leq l_{23}(x)$$

וסיימנו. ■

משפט 3.129 אם f מוגדרת וקמורה בקטע I ,

אזי בכל נקודה פנימית $x_0 \in I$

יש ל- f נגזרות חד צדדיות $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ (לא בהכרח שוות),

ומתקיים: $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$.

כמו כן, אם $x_0 < x_1$, $f'_+(x_0) \leq f'_-(x_1)$.

הוכחה: כדי להוכיח את קיום הנגזרות החד צדדיות ואי השיוויון ביניהם,

נבחר $x < x_0 < x'$, ונסתכל בשיפועי המיתרים:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

זו פונקציה מונוטונית עולה של x ($x \neq x_0$) ממשפט 3 המיתרים.

לכן, עבור $x < x_0 < x'$ כלשהם, כאשר x' קבוע ו- x נע,

$\varphi(x) \leq \varphi(x')$, $\varphi(x)$ עולה כש- $x \rightarrow x_0^-$,

וכמו כן $\varphi(x)$ חסומה מלעיל ע"י $\varphi(x')$ וכי $\varphi(x)$ לא מוגדרת עבור $x = x_0$,

ולכן יש לה גבול, והוא $f'_-(x_0)$. כלומר:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \varphi(x)$$

משמאל ב- x_0 :

$\varphi(x) \leq \varphi(x')$ כאשר $\varphi(x')$ הפעם נעה והשניה קבועה,

$\varphi(x')$ יורדת כש- $x' \rightarrow x_0^-$ וחסומה מלרע ע"י $\varphi(x)$,

ולכן יש לה גבול והוא $f'_+(x_0)$. כלומר:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

לכן, עבור

$$x_0 > x_n \rightarrow x_0, \quad x_0 < x'_n \rightarrow x_0$$

$$\varphi(x_n) \leq \varphi(x'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$$

עבור החלק השני של המשפט:

יהי $x_0 < x_1$. נביט בשיפוע המיתר:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = S_{01}$$

לכל x בין x_0 ל- x_1 , ממשפט שלושת המיתרים:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} \leq \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \leq \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

כאשר $x \rightarrow x_0^+$:

$$f'_+(x_0) \leq \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = S_{01}$$

לעומת זאת, כאשר $x \rightarrow x_1^-$:

$$S_{01} \leq f'_-(x_1)$$

וסיימו!

19.01.2010

המובא מתאריך זה מוגדר תחת "חזרה והבהרות" -

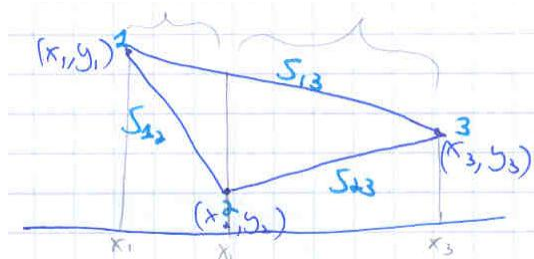
דיון המשך לגבי תכונות של קמירות שכבר דיברנו עליהן

והבהרות לגבי משפטים קודמים הוכנסו בהוכחות מעלה.

3.15.2 הקשר בין המיתרים לממוצע משוקלל

$$0 \leq t \leq 1, (1-t)A + tB$$

זהו ממוצע משוקלל של A, B עם משקל $t, 1-t$.



S_{13} הינו ממוצע משוקלל של S_{12}, S_{23} :

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \underbrace{\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}}_{1-t} \cdot \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{S_{12}} + \underbrace{\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}}_t \cdot \underbrace{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}_{S_{23}}$$

לכן, S_{13} תמיד בין S_{12} ו- S_{23} .

למה זה עובד ככה רק אם $x_1 < x_2 < x_3$? אחרת נקבל $t > 0$.

הגדרה 3.130 תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I .

היא קמורה (קעורה) בקטע אם לכל $x_1 < x_2$ בקטע:

$$f((1-t)x_1 + t(x_2)) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

לקעורה:

$$f((1-t)x_1 + t(x_2)) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

משפט 3 המיתרים:

אם f קמורה, $x_1 < x_2 < x_3$ בקטע, $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, 3$:

$$S_{12} \leq S_{13} \leq S_{23}$$

נשים לב:

S_{13} תמיד באמצע, כפי שראינו קודם.

המשפט הוסיף לנו את $S_{12} \leq S_{23}$.

משפט 3.131 תהי f פונקציה גזירה בקטע I .

אזי f קמורה בקטע אם"מ $f'(x)$ פונקציה מונוטונית עולה.

או, f קעורה אם"מ $f'(x)$ מונוטונית יורדת.

הוכחה: בכיוון $f \Leftarrow$ קמורה (וגזירה),

אז ראינו שאם $x_0 < x_1 \Leftarrow f'(x_0) \leq f'(x_1)$, וזהו.

בכיוון $\Rightarrow$, תהייה $x_1 < x_2 < x_3$ 3 נקודות בקטע.

אזי ממשפט לגראנג' קיימות $x_1 < c < x_2$, $x_2 < d < x_3$ כך ש:

$$S_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad S_{23} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = f'(d)$$

$f', c < d$ היא מונוטונית עולה, לכן:

$$f'(c) \leq f'(d) \Rightarrow S_{12} \leq S_{23} \Rightarrow S_{12} \leq S_{13} \leq S_{23}$$

כאשר S_{13} הינו ממוצע משוקלל של S_{23}, S_{12} .

נסתכל בישרים:

$$l_{13}(x) = y_1 + S_{13}(x - x_1), \quad l_{12}(x) = y_1 + S_{12}(x - x_1)$$

בנקודה x_2 :

$$y_2 = l_{12}(x_2) = f(x_2) \leq l_{13}(x_2)$$

לכן המיתר בין (x_3, y_3) ו- (x_1, y_1) הינו מעל לגרף הפונקציה,

ולכן f קמורה. ■

נשים לב - פונקציה קמורה לא חייבת לעלות, וקעורה לא חייבת לרדת.

לדוגמא, פונקציות קבועות הן, על פי ההגדרה, גם קמורות וגם קעורות.

3.15.3 מבחן הנגזרת השניה

משפט 3.132 תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע I .

אזי f קמורה בקטע אם"מ $f''(x) \geq 0$,

ו- f קעורה בקטע אם"מ $f''(x) \leq 0$.

הוכחה: f קמורה אם"מ f' מונוטונית עולה (במובן הרחב).

היות ואנו מניחים ש- f' גזירה,

f' עולה אם"מ $f''(x) \geq 0$ לכל x בקטע. ■

דוגמאות

$$1. \quad e^x = (e^x)'' > 0, \text{ ואכן } e^x \text{ קמורה.}$$

$$2. \quad 2 = (x^2)'' > 0 \text{ גם היא קמורה.}$$

$$3. \quad (\log(x))' = \frac{1}{x}, \quad (\log(x))'' = -\frac{1}{x^2} \text{ קעורה.}$$

$$4. \quad (\sin(x))'' = -\sin(x), \text{ כלומר, איפה ש-} \sin(x) > 0 \text{ הפונקציה קעורה,}$$

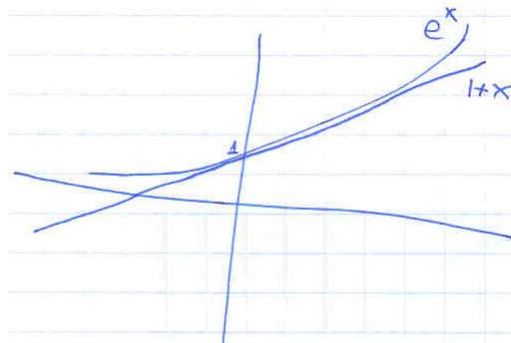
ואיפה ש- $\sin(x) < 0$ הפונקציה קמורה.

3.15.4 אי שיויונים

נשתמש בנגזרות ובקמירות/קעירות להוכחת אי שיויונים:

דוגמאות:

1. נוכיח כי לכל x $e^x \geq 1 + x$.



$$e^0 = 1 = 1 + 0$$

ולכן אם נגדיר $f(x) = e^x - 1 - x$ אז $f(0) = 0$.

עבור $x > 0$: $f'(x) = e^x - 1 > 0$.

f עולה ב- $[0, \infty)$ ולכן לכל x :

$$f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow e^x \geq 1 + x$$

עבור $x < 0$: $f'(x) = e^x - 1 < 0$.

ולכן f מונוטונית יורדת, ולכן לכל x :

$$f(x) \geq f(0) \Rightarrow e^x - 1 - x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1 + x$$

2. נוכיח כי עבור $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$: $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$.

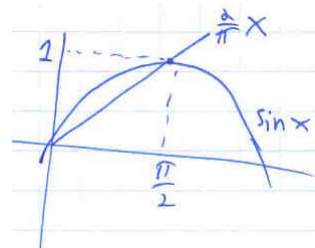
נגדיר $f(x) = x - \sin(x)$ או $f(0) = 0$.

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

לכן f עולה. כלומר לכל $x > 0$: $0 = f(0) \leq f(x)$.

ולכן $x - \sin(x) \geq 0$, כלומר $x \geq \sin(x)$ - צד ראשון של אי השיויון.

נעבור לצד השני:



הישר $x \frac{2}{\pi}$ נפגש עם הגרף של $\sin(x)$ בנקודות $A = (0, 0)$, $B = (\frac{\pi}{2}, 1)$.

ולכן הוא מיתר.

אבל, ממבחן הנגזרת השנייה, בקטע $(0, \frac{\pi}{2})$ ראינו כי $(\sin(x))'' = -\sin(x)$ קעורה,

ולכן המיתר מתחת לפונקציה, כלומר:

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$$

וסיימנו.

3. הוכחה ישירה של קמירות x^2 , ללא נגזרות:

$$\begin{aligned} [(1-t)x_1 + tx_2]^2 &\leq (1-t)x_1^2 + tx_2^2 \\ \Leftrightarrow (1-t)^2 x_1^2 + 2t(1-t)x_1x_2 + t^2x_2^2 &\stackrel{?}{\leq} (1-t)x_1^2 + tx_2^2 \\ \Leftrightarrow 2t(1-t)x_1x_2 &\stackrel{?}{\leq} [(1-t) - (1-t)^2]x_1^2 + (t-t^2)x_2^2 \\ &= (1-t)[1 - (1-t)]x_1^2 + t(1-t)x_2^2 \end{aligned}$$

נשים לב שהצמצום האחרון נכון רק כי $0 < t(1-t)$. נסיים:

$$\Leftrightarrow 2x_1x_2 \stackrel{?}{\leq} x_1^2 + x_2^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x_1 - x_2)^2$$

3.15.5 נקודת פיתול

21.01.2010

הגדרה 3.133 תהי f פונקציה רציפה המוגדרת בקטע $x_0 \in I$.

אזי x_0 תקרא נקודת פיתול של f ,

אם ש $\delta > 0$ כך ש- f קמורה ב- $(x_0 - \delta, x_0)$ וקעורה ב- $(x_0, x_0 + \delta)$ או להפך.

אם f גזירה, זה אומר שמשמאל ל- x_0 אז הנגזרת עולה,

ומימין הנגזרת יורדת (או להפך).

אם f גזירה פעמיים,

$f'' \geq 0$ בצד אחד, $f'' \leq 0$ בצד השני,

בנקודת הפיתול - $f' = 0$, אבל $f'' \neq 0$ נקודת פיתול.

לדוגמא:

1.

$$f = x^4, \quad 4x^3 = f', \quad f'' = 12x^2$$

2.

$$f = x^3, \quad f'' = 6x$$

3.

$$f = \sin x, \quad f'' = -\sin x$$

3.15.6 קמירות וקעירות בקטע

טענה 3.134 תהיה f פונקציה קמורה בקטע $x_0 \in I$ נקודה פנימית.

אם f גזירה ב- x_0 ,

אזי יש סביבה של x_0 בה גרף הפונקציה נמצא מעל המשיק ב- x_0 . כלומר,

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

יש $\delta > 0$ כך שלכל $|x - x_0| \leq \delta$ $f(x) \geq l(x)$.

הוכחה: אם $x' > x_0$ בקטע, ראינו ששיפוע המיתר:

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} \geq f'_+(x_0) = f'(x_0)$$

וכנ"ל אם $x' < x_0$ עבור הנגזרת השמאלית:

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

■

הגדרה 3.135 תהי f גזירה בנקודה x_0 .

אזי f נקראת קמורה בנקודה x_0 ,

אם יש $\delta > 0$ כך שלכל $|x - x_0| < \delta$ מתקיים

$$f(x) \geq l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

כאמור, כמו בעליה\ירידה בנקודה,

קמירות בנקודה לא נותנת שום מידע לגבי קמירות, קעירות, עליה, ירידה, רציפות... בקטע שלם סביב הנקודה.

דוגמאות לשימוש:

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$$

עבור $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

עקרון ראשון:

אם מזהים נקודה שבה אי שוויון הינו שוויון,

וידועים שההפרש עולה או יורד מאותה נקודה ואילך (למשל ע"י חישוב נגזרת),

אזי אי השוויון מתקיים.

עקרון שני:

קמירות - אם יודעים ש- $f'' > 0$ למשל,

קמירות $\Leftrightarrow$ אי שוויון.

עקרון שלישי:

אם f פונקציה מונוטונית עולה מקטע I לקטע J ,

עם פונקציה הפוכה עולה g מ- J ל- I ,

אזי $f(A) \leq f(B) \Leftrightarrow A \leq B$

כאשר A, B ביטויים.

נוכיח כך שני אי שוויונות חשובים:

אי שיויון הממוצעים:

$a, b > 0$, אזי הממוצע החשבוני גדול שווה מהממוצע ההנדסי. דהיינו:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

נוכיח:

$$4ab \stackrel{?}{\leq} a^2 + b^2 + 2ab$$

$$0 \stackrel{?}{\leq} a^2 + b^2 - 2ab$$

$$0 \leq (a-b)^2$$

ואם $a \neq b$ אי השיויון הוא חד.

אי שיויון הממוצעים המוכלל:

לכל $0 < t < 1$:

$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b$$

נוכיח:

נשתמש בעקרון השלישי, ובפונקציות:

$$\ln : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty), \exp : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

אלו פונקציות עולות ממש. אזי:

$$\ln(a^t b^{1-t}) \stackrel{?}{\leq} \ln(ta + (1-t)b)$$

$$t \ln(a) + (1-t) \ln(b) \stackrel{?}{\leq} \ln(ta + (1-t)b)$$

אי השיויון האחרון נכון כי $\ln$ קעורה (לפי ההגדרה)!

אי שיויון קושי שורץ המוכלל:

$$t + (1-t) = 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 1$$

משפט 3.136 יהיו $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ מספרים חיוביים.

אזי:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

כאשר $p = q = 2$:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\left| \vec{a} \cdot \vec{b} \right| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

הדרכה להוכחה:

e^x קמורה, ולכן:

$$e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \leq \frac{e^x}{p} + \frac{e^y}{q}$$

$$A = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{a_i}{A} = e^{\frac{x_i}{p}}, \frac{b_i}{B} = e^{\frac{y_i}{q}}$$

$$\frac{a_i}{A} \cdot \frac{b_i}{B} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{a_i}{A} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{b_i}{B} \right)^q$$

3.16 תרגולים

הגדרה 3.137 יהיו A, B קבוצות.

7.12.2009

פונקציה מקבוצה A לקבוצה B

היא התאמה של איברים מקבוצה B לאיברים בקבוצה A

תרגול

כך שלכל איבר $a \in A$ מוגדר איבר יחיד $b \in B$.

אם הפונקציה מסומנת f , נסמן $f : A \rightarrow B$.

נסמן $f(a) = b$ אם f מתאימה ל- $a \in A$ את $b \in B$.

הגדרה 3.138 A נקרא התחום של הפונקציה,

כמו כן $B \supseteq \{b \in B \mid \exists a \in A, f(a) = b\}$ נקראת התמונה של הפונקציה f .

הגדרה 3.139 $f : A \rightarrow B$ תקרא חד חד ערכית (חח"ע),

אם לכל $a_1 \neq a_2 \in A$ מתקיים $f(a_1) \neq f(a_2)$.

לחילופין:

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

הגדרה 3.140 $f : A \rightarrow B$ תקרא על,

אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש- $f(a) = b$.

הגדרה 3.141 אם $f : A \rightarrow B$ חח"ע"ל,

אזי ניתן להגדיר את הפונקצי ההפוכה $f^{-1} : B \rightarrow A$,

המתאימה לכל $b \in B$ את האיבר היחיד $a \in A$ המקיים $f(a) = b$.

הגדרה 3.142 פונקציה ממשית היא פונקציה מהצורה $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, כאשר $D \subseteq \mathbb{R}$.

מוסכמת התחום המקסימלי

אם התחום לא צוין במפורש (הפונקציה נתונה רק על ידי נוסחא), נניח שהתחום הוא הגדול ביותר עבורו לנוסחא יש משמעות.

דוגמאות:

1. אם נתון $f(x) = \frac{1}{x}$, נניח שהתחום הוא $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. אם נתון $g(x) = \sqrt{-x^2 - 1}$, נניח שהתחום הוא ϕ .

הגדרה 3.143 (יש שימוש בה בשיעורי הבית!)

יהיו $f: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות כך ש:

$$D_2 \supseteq \text{Im}(f) (= \{f(x) \mid x \in D_1\})$$

ההרכבה של g על f מסומנת:

$$g \circ f: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

המוגדרת:

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

דוגמא:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

נשים לב:

$$\text{Dom} g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \supset \text{Im} f$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}, \quad \text{Dom} g \circ f = \text{Dom} f = \mathbb{R}$$

תרגיל 1

פונקציית הסינוס ההיפרבולי מוגדרת על ידי²²:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

²²בעתיד (או במת"פ) נראה כי $\sin(x) = \frac{-ie^{-ix} + ie^{ix}}{2}$.

מצאו את התחום והתחונה של $\sinh$ והראו כי היא הפיכה.

פתרון:

לכל $x \in \mathbb{R}$: e^x, e^{-x} מוגדרות, ולכן $\sinh(x)$ מוגדר, ולכן $\mathbb{R} = \text{Dom} \sinh$.

נראה כי $\sinh$ היא על $\mathbb{R}$ וכמו כן היא חח"ע:

יהי $y \in \mathbb{R}$. נרצה:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Rightarrow \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2e^x} \Leftrightarrow (e^x)^2 - (2y)e^x - 1 = 0$$

קיבלנו משוואה ריבועית ב- e^x ,

$$\text{לכן } e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

נשים לב כי $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$, ולכן האופציה היחידה היא $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$.

בהמשך הקורס נראה ש- $\exp(x) = e^x$ היא על $\mathbb{R}^+$ (חיוביים ממש),

$$\text{ולכן יש } x \text{ כך ש-} e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1},$$

וחישוב יראה ש:

$$\sinh(x) = y \Rightarrow \sinh \text{ On } \mathbb{R}$$

בנוסף $\sinh$ חח"ע כי ראינו בחישוב מעלה (ומכך כי e^x חח"ע) כי x הוא יחיד,

הגדרה 3.144 תהי f פונקציה ממשית המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 .

נאמר ש- $L \in \mathbb{R}$ הוא גבול של f ב- x_0 ,

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ המקיים $0 < |x - x_0| < \delta$

$$\text{מתקיים } |f(x) - L| < \varepsilon,$$

$$\text{ונסמן } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

תרגיל 2

הוכיחו כי ל- $g(x) = \frac{2x}{4x-3}$ יש גבול ב-1.

פתרון:

ננחש ש-2 הוא הגבול.

יהי $\varepsilon > 0$.

נסמן $\delta > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $0 < |x - 1| < \delta$.

$$|g(x) - 2| = \left| \frac{2x}{4x-3} - 2 \right| = \left| \frac{2x - 8x + 6}{4x-3} \right| = \left| \frac{-6x + 6}{4x-3} \right| = 6 \frac{|x-1|}{|4x-3|}$$

על מנת שהמכנה לא יהיה אפס, נדרוש כי $0.8 < x$, ואז $4x - 3 > 0.2$.

נשים לב כי אם נדרוש $0.2 < \delta$ גם כן נקבל כי $x > 0.8$, וכו'.

כמו כן, אם נניח בשלילה כי $x \leq 0.8$ נקבל סתירה מהנתון על $|1 - x| < \delta$
 כעת:

$$< 6 \frac{|x-1|}{0.2} = 30|x-1| < \varepsilon$$

נבחר את ה- δ להיות $\delta = \min \{0.15, \frac{\varepsilon}{30}\}$ וסיימנו!

הגדרת גבול של פונקציה על פי היינה

משפט 3.145 ל- f כ"ל יש גבול L ב- x_0 אם"מ

לכל סדרת נקודות $x_n \rightarrow x_0$ המקיימת:

1. $x_n \in \text{Dom } f$ לכל n .

2. $x_n \neq x_0$ לכל n .

מתקיים $f(x_n) \rightarrow L$.

תרגיל 3

תהא $f(x) = \lfloor x \rfloor$ - המספר השלם הגדול ביותר ש- $x \geq$.

יהי $x \in \mathbb{Z}$.

הראו כי אין ל- f גבול ב- x ,

ובכל $x \notin \mathbb{Z}$ יש ל- f גבול (תרגיל הביתה!)

פתרון:

נשים לב - $(x - \frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה המתכנסת ל- x ,

לא שווה ל- x , וכמו כן f מוגדרת על איבריה.

על פי היינה, לו היה ל- f גבול L ב- x , אזי היה מתקיים:

$$L = \lim f\left(x - \frac{1}{n}\right) = x - 1$$

בנוסף, הסדרה $(x + \frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ גם היא מתכנסת ל- x ,

שונה ממנו, וכמו כן f מוגדרת על איבריה,

לכן לו היה ל- f גבול ב- x , היה מתקיים:

$$L = \lim f\left(x + \frac{1}{n}\right) = x$$

לכן קיבלנו $x = L = x - 1$, ומיחידות הגבול זו סתירה,

ולכן ל- f אין גבול ב- x .

תרגיל 4

תהי $f(x) = \frac{1}{x}$. האם קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

פתרון:

לא!

כי כל $\left(\frac{1}{x}\right)_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל-0,

f מוגדרת על איבריה, וכמו כן היא שונה מ-0,

אבל $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת,

ולפי היינה לו היה גבול, היא היתה מתכנסת אליו.

תרגיל 5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}$$

האם יש ל- f גבול ב-3?

פתרון:

לכל $f(x) = \frac{x^2-1}{x-3}$, f מזדהה עם הפונקציה $x+3$ כל סביבה מנוקבת של 3,

ולכן, היות של- $x+3$ יש גבול ב-3, כך גם ל- f והגבולות שווים.

2521.12.2009

משפט הערך הביניים

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

הגדרה 3.146 נאמר ש- f רציפה ב- (a, b) ,

אם f פונקציה ממשית שמוגדרת (גם) על (a, b)

ורציפה בכל $x \in (a, b)$.

הגדרה 3.147 נאמר ש- f רציפה ב- $[a, b]$

אם f פונקציה ממשית שמוגדרת (גם) על $[a, b]$

רציפה בכל $x \in (a, b)$, רציפה מימין ב- a ורציפה משמאל ב- b .

משפט 3.148 משפט לפני ערך הביניים:

אם f רציפה על $[a, b]$ ו- $f(a) < f(b)$,

אזי קיימת $c \in (a, b)$ כך ש- $f(c) = 0$.

אם f רציפה ב- $[a, b]$ ו- $c, d \in [a, b]$,

ו- λ הוא מספר ממשי בין $f(c)$ ל- $f(d)$,

אזי קיים x_0 בין c ל- d כך ש- $f(x_0) = \lambda$.

משפט ערך הביניים

משפט 3.149 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה,

ויהי $c \in \mathbb{R}$ בין $f(a)$ ל- $f(b)$ (חלש),

אזי קיים $x \in [a, b]$ כך ש- $f(x) = c$.

גרסא 2:

תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה,

ויהי $c \in \mathbb{R}$ ממש בין $f(a)$ ל- $f(b)$,

אזי קיים $x \in (a, b)$ כך ש- $f(x) = c$.

גרסא 3 - של איב:

אם f רציפה ב- $[a, b]$ ו- $c, d \in [a, b]$,

ו- λ הוא מספר ממשי בין $f(c)$ ל- $f(d)$,

אזי קיים x_0 בין c ל- d כך ש- $f(x_0) = \lambda$.

דוגמא:

תהא $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$,

אזי קיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = c$.

(ל- c כזו קוראים נקודת שבת של f). **הוכחה:** נתון שלכל x ב- $[a, b]$ מתקיים $a \leq f(x) \leq b$.

נגדיר $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $g(x) = f(x) - x$. אזי:

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$

$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

אם $g(a) = 0$ או $g(b) = 0$ נקבל כי $f(a) = a$ או $f(b) = b$, וסיימו.

אחרת $g(a) > 0$ וגם $g(b) < 0$, כלומר $g(a) \cdot g(b) < 0$.

ולכן נוכל להפעיל את משפט ערך הביניים,

כלומר יש $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = c$.

ולכן $f(c) = c$ כפי שרצינו.

■

עוד דוגמא:

תהא $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הטמפרטורה על קו המשוואה בקו אורך שזוויתו x .

פיסיקאים מספרים לנו ש- T רציף. נניח שאכן כך.

נוכיח שיש שתי נקודות אנטיפודיות²³ על קו המשוואה

כך שהטמפרטורה בהן שווה. **הוכחה:** נשים לב: T היא עם מחזור 2π .

נגדיר:

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(\theta) = T(\theta) - T(\pi + \theta)$$

צ"ל כי קיים θ כך ש- $f(\theta) = 0$.

²³ כלומר מצדדים מנוגדים של כדור הארץ

f רציפה כי T רציפה (מאוריטמטיקה ומרציפות ההרכבה).

$$f(0) = T(0) - T(\pi) = T(2\pi) - T(\pi) = -(T(\pi) - T(2\pi)) = -f(\pi)$$

אם $f(0) = 0$ סיימנו, אחרת $f(\pi)$, $f(0)$ בעלי סימן מנוגד, ולכן יש $0 < \theta < \pi$ כך ש- $f(\theta) = 0$, וסיימנו.

■

דוגמא שלישית

מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימות:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f(x))^2 = x^2$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad ((f(x))^2 = x^2) &\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{(f(x))^2} = \sqrt{x^2} \right) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| = |x|) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = |x| \text{ or } f(x) = -|x| \\ &\Leftrightarrow \forall x \geq 0 \quad f(x) = x \text{ or } f(x) = (-x) \end{aligned}$$

אילו היו קיימות $x_1 > 0$ ו- $x_2 > 0$ כך ש- $x_1 \neq x_2$, וכמו כן $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = -x_2$, אזי היה נובע משפט ערך הביניים שקיימת נקודה x_3 בין x_1 לבין x_2 כך ש- $f(x_3) = 0$, וזאת סתירה.
(וכנ"ל עבור $\forall x < 0 \quad f(x) = x$ or $\forall x < 0 \quad f(x) = -x$).
לכן יש ארבע אפשרויות בלבד:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x, \quad f(x) = -x \quad f(x) = |x|, \quad f(x) = -|x|$$

משפט ויירשטראס הראשון

משפט 3.150 פונקציה רציפה בקטע סגור היא חסומה בו.

משפט ויירשטראס השני

משפט 3.151 פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת מקסימום ומינימום.

דוגמא

תהא $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חיובית רציפה.

נגדיר $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. g חסומה מלרע ע"י 0.

נוכיח בשתי דרכים כי g חסומה מלעיל. **הוכחה:** דרך ראשונה:

לכל $x \in (a, b)$ מתקיים $f(x) > 0$, וכן f רציפה ב- x ,

ולכן מאריתמטיקה $\frac{1}{f}$ רציפה ב- x

נימוק דומה יראה ש- $\frac{1}{f}$ רציפה ח"צ ב- a, b ,

לכן g רציפה ב- $[a, b]$,

ולכן מוירשטראס הראשון היא חסומה בו.

דרך שניה:

f רציפה ב- $[a, b]$, ולכן היא מקבלת שם מינימום,

ולכן יש $c \in [a, b]$ כך שלכל $x \in [a, b]$ $f(c) \leq f(x)$.

נסמן $m = f(c) > 0$

קיבלנו שלכל $x \in [a, b]$ מתקיים $f(x) \geq m$,

ולכן $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{m}$

1728.12.2009

הערות על הבוחן הקודם:

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ odd} \\ \frac{5+8n}{11n^2+3} & n \text{ even} \end{cases}$$

אפשר להראות ששתי הסדרות שואפות לאפס,

ואז לפעול לפי אינדקסים זוגיים ואי זוגיים, וכו' -

עשינו את זה הרבה פעמים, וזה מאוד ארוך.

איך ניתן לפתור במהירות?

לכל $\varepsilon > 0$ ראינו שיש N_1 כך שלכל $n > N_1$ $|2^{-n}| < \varepsilon$

ויש N_2 כך שלכל $n > N_2$ $\left| \frac{5+8n}{11n^2+3} \right| < \varepsilon$

לכן לכל $n > \max\{N_1, N_2\}$ $|a_n| < \varepsilon$

כלומר הסדרה עצמה (האם) שואפת לאפס,

ולכן ממשפט הירושה כל תת הסדרות המתכנסות מתכנסות לאפס, כפי שרצינו להראות.

רציפות במידה שווה

הגדרה 3.152 יהי I קטע.

פונקציה f תקרא רציפה במידה שווה ב- I ,

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$

כך שלכל $x, y \in I$ המקיימים $|x - y| < \delta$ מתקיים:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ובכמתים:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

שלילה:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists x, y \in I : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

נזכיר:

3.153 הגדרה f תקרא רציפה ב- I ,

אם לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $x \in I$ קיים $\delta > 0$

כך שלכל $y \in I$ המקיים $|x - y| < \delta$ מתקיים:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

תרגיל ראשון

הוכיחו כי $f(x) = \sqrt{x}$ רבמ"ש ב- $[1, \infty)$. **הוכחה:** יהי $\varepsilon > 0$, נסמן $\delta = \text{Something we'll find later}$.

אזי לכל $x, y \in [1, \infty)$ כך ש- $|x - y| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left| \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{2} < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

■

כלומר נבחר $\delta = 2\varepsilon$, וסיימנו.

תרגיל שני

הוכיחו כי $f(x) = \sin(x)$ רבמ"ש ב- $\mathbb{R}$. **הוכחה:** יהי $\varepsilon > 0$, נסמן $\delta = \text{Something we'll find later}$.

אזי לכל $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש- $|x - y| < \delta$:

$$|\sin(x) - \sin(y)| = \left| 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \right| = 2 \left| \sin\frac{x-y}{2} \right| \left| \cos\frac{x+y}{2} \right| \leq 2 \left| \sin\frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x - y| < \delta = \varepsilon$$

■

תרגיל שלישי

הוכיחו כי $f(x) = \sqrt{x}$ רבמ"ש ב- $[0, \infty)$. **הוכחה:** יהי $\varepsilon > 0$. נסמן $\delta = \text{Something we'll find later}$.
נניח בה"כ כי $x > y$. אזי לכל $x, y \in [0, \infty)$ כך ש- $|x - y| < \delta$:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{x - y} = \sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

לכן נבחר $\delta = \varepsilon^2$.

נוכיח את אי השוויון השמאלי:

$$x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq x - y \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$$

מעלה אנו רואים את החשיבות בבחירת $x > y$ - כך אנחנו מבטיחים את אי השוויונות.
נשאר להוכיח:

$$\begin{aligned} y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} &\leq -y \\ 2\sqrt{y}\sqrt{y} = 2y &\leq 2\sqrt{x}\sqrt{y} \end{aligned}$$

וסיימנו. ■

תרגיל רביעי

24

הוכיח ש- x^2 לא רבמ"ש ב- $\mathbb{R}$. **הוכחה:** ניקח $\varepsilon = \text{Something}$.
יהי $\delta > 0$, ניקח $y = x + \frac{\delta}{2}$, $x = \text{something}$.
נשים לב ש- $|x - y| < \delta$, ועם זאת:

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| = \frac{\delta}{2}|x + y| = \frac{\delta}{2}\left|2x + \frac{\delta}{2}\right| \geq \frac{\delta}{2}|2x| = \delta \cdot x \geq \varepsilon$$

נבחר $x = \frac{\varepsilon}{2} + 1$ (נזכור כי לפני הכתוב מעלה על x להיות חיובי),
וכמו כן $\varepsilon = 1$ יספיק לנו. ■

טענה 3.154 אם f רבמ"ש ב- I ,

אז גם $a \cdot f$ ($a \in \mathbb{R}$) רבמ"ש ב- I .

17²⁴

הוכחה: תחילה, אם $a = 0$ נקבל את הפונקציה הקבועה 0,

ואז סיימנו כי היא רבמ"ש בכל קטע.

נניח $a \neq 0$.

יהי $\varepsilon > 0$. קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in I$

אם $|x - y| < \frac{\varepsilon}{|a|}$ אז $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{|a|}$.

$$\Rightarrow |af(x) - af(y)| < |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

■

משפט 3.155 מהכיתה: אם f רציפה ב- $[a, b]$ סגור,

אז היא רבמ"ש שם.

באיזשהו מובן, זוהי המהות של רציפות רבמ"ש. מדוע?

משפט 3.156 מהכיתה: f רבמ"ש ב- $[a, b]$ אמ"מ

היא ניתנת להרחבה לפונקציה רציפה ב- $[a, b]$,

אמ"מ קיים $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

ראינו גם בכיתה:

משפט 3.157 אם f מוגדרת על $[a, \infty)$ ויש לה גבול ממשי ב- ∞ ,

אז f רבמ"ש ב- $[a, \infty)$

שימו לב: זה לא אמ"מ-לדוגמא:

$\sqrt{x}$ ב- $[0, \infty)$, $\sin x$ ב- $\mathbb{R}$.

תרגיל 5

תהי $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ רבמ"ש כך ש- $c > 0$ לכל $x \in (0, 1)$ קבוע.

הוכיחו כי $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ רבמ"ש ב- $(0, 1)$. **הוכחה:** f רבמ"ש ב- $(0, 1)$ ולכן לפי המשפט הקודם,

נוכל להרחיבה לפונקציה:

$$\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

כך ש- $\tilde{f}(x) = f(x)$ לכל $x \in (0, 1)$,

ו- $\tilde{f}$ רציפה ב- $[0, 1]$.

נשים לב:

$$\tilde{f}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |f(x)| > c$$

כנ"ל בצורה דומה $c \leq |\tilde{f}(1)|$. לכן:

$$\forall x \in [0, 1] \quad \tilde{f}(x) \geq c \Rightarrow \forall x \in [0, 1] \quad \tilde{f}(x) \neq 0$$

$$\text{נגדיר } \tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(x) = \frac{1}{\tilde{f}(x)}$$

זוהי הרחבה רציפה של g ל- $[0, 1]$,

ולכן לפי משפט קודם g רבמ"ש ב- $(0, 1)$.

■

תרגיל שישי

תהי f רציפה ב- (a, b) .

אם קיימת $b < c < a$ כך ש- f רבמ"ש ב- $(a, c]$ וב- $[c, b)$

אזי נוכיח כי f רבמ"ש ב- (a, b) . **הוכחה:** מהרבמ"ש בשני הקטעים קיימים הגבולות החד צדדיים בקצוות,

ולכן f רבמ"ש ב- (a, b) .

■

תרגיל 7

הוכיחו כי $\frac{1}{x^2+1}$ רבמ"ש ב- $\mathbb{R}$. **הוכחה:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

ולכן f רבמ"ש ב- $[0, \infty)$. בדומה:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

ולכן f רבמ"ש ב- $(-\infty, 0]$.

ניתן להוכיח כי 6 נכון גם כאשר $a \setminus b$ או הם סופיים (הוכחה שונה).

■