

מבוא ללוגיקה מתמטית - 80423

24 במרץ 2012

איני לוקחת אחריות על מה שכתוב כאן, so tread lightly
אין המרצה או המתרגל קשורים לסיכום זה בשום דרך.
הערות יתקבלו בברכה - noga.rotman@gmail.com אהבתם? יש עוד!
www.cs.huji.ac.il/~nogar02

תוכן עניינים

I שיעורים	
5	0.1 הקדמה
5	1 תחשיב היחסים - לוגיקה מסדר ראשון
6	1.1 בניית השפה הפורמלית של תחשיב היחסים
6	1.1.1 הגדרה של מבנה $\mathcal{M}$
8	1.2 מערכת ההיסק
15	1.2.1 בניית מערכת ההיסק
15	1.2.2 כללי היסק
16	1.2.3 משפט הנאותות
17	1.2.4 משפט פוסט על טאוטולוגיה
23	1.2.5 כלל הניתוק (Modus Ponens)
32	1.3 פעולות עם כמותים
33	1.3.1 כלל הכנסת $\forall$
33	1.3.2 כלל ההכללה
34	1.3.3 כלל ההצבה
34	1.3.4 משפט ההצבה
36	1.3.5 כלל הדיסטריוטיביות
37	1.4 הרחבת השפה
38	1.4.1 משפט הדדוקציה
38	1.4.2 משפט הקבועים
41	1.4.3 משפט השקילות
42	1.4.4 משפט הוריאנט
43	1.4.5 משפט הסימטריות
44	1.4.6 משפט השיוויון
45	1.5 צורת הקידומת (prenex form)
48	1.6 משפט השלמות של גדל
52	1.6.1 בניית המודל הקנוני
53	1.6.2 תכונת הנקין
55	1.6.3 הרחבות
58	1.6.4 משפט לינדנבאום
60	1.6.5 הוכחת משפט השלמות
61	1.6.6 משפט הקומפקטיות
62	1.6.7 משפט לובנהיים סקולם ופרדוקס סקולר
62	
II תרגילים	
63	1.7 תחשיב פסוקים
63	1.7.1 סימני השפה
63	1.7.2 אינדוקציה על בניית הפסוק
64	1.7.3 סדרת יצירה של פסוק
64	1.7.4 עץ יצירה
65	1.7.5 מבנה לשפת תחשיב הפסוקים
65	1.7.6 טבלת אמת

66	כללי היסק	1.7.7	
66	אקסיומות לוגיות:	1.7.8	
73	אקסיומות פיאנו	1.8	
78	על הוכחת משפט השלמות	2	
84	חזרה	2.1	
84	מניה של מודלים ומבנים סופיים	2.1.1	
85	השלמה למשפט הקומפקטיות	2.1.2	
86	על המבחן	2.2	

חלק I

שיעורים

0.1 הקדמה

הספר הכי קרוב לקורס (80% בערך) - Shoenfield, Mathematical Logic. ישנם ספרים אחרים, אך זה הכי טוב (של עזריאל לוי, של האוניברסיטה הפתוחה, ועוד).

על מה מדברים בלוגיקה מתמטית? נותן פורמט פורמלי ללוגיקה - כשנותנים טיעון מתמטי, הולכים לפני הגיון מסוים. את ההגיון הזה מנסה הלוגיקה המתמטית להפוך לדבר פורמלי. דהיינו, החשיבה המתמטית היא מקבלת את צורתה הפורמלית בצורת הלוגיקה שנלמד.

מה שאנחנו נלמד בקורס זה הוא "תחשיב היחסים" - לוגיקה מסדר ראשון (ישנם תחומים נוספים - לוגיקה מסדרים אחרים - $0, 2, 3, \dots$). המתרגל ידבר על אחד הסוגים הללו - "תחשיב הפסוקים".

1 תחשיב היחסים - לוגיקה מסדר ראשון

31/10/2011

1.1 בניית השפה הפורמלית של תחשיב היחסים

מרכיבי השפה ישנם מספר מרכיבים:

1. משתנים, ללא מגבלה מספרית.
2. קשרים לוגיים - מספר מצומצם של קשרים, בעזרתם נתאר את שאר הקשרים:

(א) $\vee$ - אייו, דיסיונקציה - $A \vee B$.

(ב) $\neg$ - שלילה - $\neg A$.

3. $\exists$ כמת הקיום (את $\forall$ - כמת הכולל, נגדיר בעזרתו בהמשך).

הערה 1.1 ישנן תורות נוספות בהם משתמשים בכמתים נוספים - למשל, בתורת הקבוצות הכמותית, קיים (ג'י הפוכה).

4. סמלי פונקציות - f סמל של פונקציה n -מקומית, כאשר $n \geq 0$.

הערה 1.2 פונקציה 0-מקומית היא למעשה קבוע.

5. סמלי יחסים - P סמל של יחס m -מקומי, כאשר $m \geq 0$. על תפקידם נדבר בהמשך.

6. $()$,

הערה 1.3 ישנן תורות בהם לא משתמשים בסימנים אלו, אך הן עושות את השפה קריאה יותר.

הגדרה 1.4 הסיגנטורה של השפה היא אוסף של סימלי פונקציות וסמלי היחסים שיש בשפה.

הגדרה 1.5 ביטוי בשפה - סדרה של מרכיבי השפה. קיימים שני סוגי ביטויים:

1. שמות עצם.

2. נוסחאות.

נגדיר את המושג "שם עצם" בעזרת המושג "סדרת יצירה של שם עצם":

1. כל משתנה הוא שם עצם - זוהי סדרה באורך 1.

2. אם c הוא סמל פונקציה 0-מקומית, כלומר קבוע, אז c הוא שם עצם.

3. אם $u_1, u_2, \dots, u_n$ הם שמות עצם, ו- f הוא סמל פונקציה n -מקומית, אז $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ הוא שם עצם.

הערה 1.6 למעשה 2 הוא מקרה פרטי של 3.

הערה 1.7 לכאורה נראה שמקרה זה מעגלי, כי אנו יוצרים שם עצם בעזרת שמות עצם אחרים. לשם כך אנו זקוקים למושג "סדרת יצירה של שם עצם". במקרה זה, סדרת היצירה של $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ תהיה מורכבת מסדרות היצירה של שמות העצם $u_1, u_2, \dots, u_n$. נרשום אותה כך:

$$u_n - - - - - u_2 - - - - - u_1 - - - - -$$

כלומר, סדרת יצירה היא "סיפור חייו" של שם עצם - כיצד הוא נוצר. היא תמיד סופית, ולכן נוכל בדר"כ להשתמש באינדוקציה על סדרת היצירה (נניח הטענה עבור שם עצם בעל סדרת יצירה באורך קטן או שווה ל- n , ונוכיח נכונות הטענה עבור שם עצם בעל סדרת יצירה באורך $n+1$).

שם עצם מתקבל אך ורק ע"י שימוש חוזר בסעיפים 1, 2, 3.

דוגמא:

יהיו 1,2,3 קבועים, והפונקציה $+$. אזי הביטוי $(1+2) + (2+3) + 1$ הוא שם עצם. מהי סדרת היצירה שלו?
סדרת היצירה של 1,2,3 הן הקבועים עצמם.
 $1+3$ נוצר ע"י הסדרה 1 3.
סדרת היצירה של $(1+3) + 2$ היא 1, 2, 3, 3, 1.
של $1+2$ היא 1, 2, 1, 2.
וכך לבסוף עבור כל הביטוי נקבל את סדרת היצירה

$$((1+3) + 2), (1+3) + 2, 1+3, 3, 1, 2, 1+2, 2, 1$$

גם נוסחא מוגדרת ע"י סדרת יצירה של נוסחא:

1. נוסחא אלמנטרית - אם $u_1, u_2, \dots, u_n$ הם שמות עצם, ו- P סמל יחס n -מקומי, אז $P(u_1, u_2, \dots, u_n)$ היא נוסחא, כאשר $n \geq 0$.
2. אוי - אם A, B נוסחאות, אז $A \vee B$ נוסחא.
3. שלילה - אם A נוסחא, אזי $\neg A$ נוסחא.
4. הטלת כמת על משתנה x - אם A נוסחא, x משתנה, אז $(\exists x) A$ נוסחא.

הערה 1.8 בין אם A מכילה x או לא, ניתן להטיל כמת עם משתנה x לפנייה.

הערה 1.9 נרצה להתייחס לשיוויון = בצורה שונה משאר סימני היחס - כאשר נגיע לפירוש של שפה בתוך מבנה, נדרוש כי משמעותו תהיה זו שאנו מכירים.

בסעיף הראשון - רשימת המרכיבים נותנת לנו את סדרת היצירה, וכך נוכל לחבר סדרות יצירה כדי לקבל עבור הסעיפים הבאים.

כמתים נוספים:

1. כמת החץ - $\rightarrow$. משמעו $A \rightarrow B$ משמעו $(\neg A) \vee B$.
2. גימזם - קוניונקציה: $\wedge, \&$. משמעו $A \wedge B$ משמעו $(\neg((\neg A) \vee (\neg B)))$.
3. חץ כפול. $A \leftrightarrow B$ משמעו $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$.
4. $(\forall x) B$ משמעו $(\neg((\exists x)(\neg B)))$.
5. כאשר לא כותבים סוגריים - מניחים שהסוגריים מופיעים מימין לשמאל. למשל:
 (א) $A_1 \vee (A_2 \vee \dots (A_{n-1} \vee A_n))$ משמעו $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$
 (ב) $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\dots (A_{n-1} \rightarrow A_n)))$ משמעו $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow A_n$

1.1.1 הגדרה של מבנה $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}|$ קבוצה של המבנה $\mathcal{M}$. הקבוצה הזו תמיד לא ריקה.
 מבנה - פירוש של כל סמלי פונקציה וסמלי יחסים ב- $\mathcal{M}$. נגדיר מבנה לפי הפעולה שלו על כל ממרכיבי השפה:
 עבור f סמל פונקציה n -מקומית:

$$f^{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}|^n \rightarrow |\mathcal{M}|$$

אם c סמל של קבוע, אזי $c^{\mathcal{M}} \in |\mathcal{M}|$.
 עבור P סמל יחס n -מקומי:

$$P^{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}|^n \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$$

כאשר הקבוצה מימין היא קבוצת ערכי האמת.
 סמלי הפונקציה מתפרשים כפונקציות וסמלי היחסים - כנוסחאות.
 נרצה לקשר בין המבנה - הצד הסמנטי של השפה, לצד הפורמלי.
 השמה $\sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}|$ מתאימה לכל משתנה x איבר $x \in |\mathcal{M}|$. נגדיר לה הרחבה:

$$\tilde{\sigma} : Terms \rightarrow |\mathcal{M}|$$

כאשר $Terms$ - שמות עצם.
 אזי, הפירושים במבנה יהיו:

1. עבור x משתנה - $\tilde{\sigma}(x) = \sigma(x)$.
2. עבור c סמל קבוע - $\tilde{\sigma}(c) = c^{\mathcal{M}}$.
3. עבור $u_1, \dots, u_n$ שמות עצם, f סמל פונקציה n -מקומית. אזי:

$$\tilde{\sigma}(f(u_1, \dots, u_n)) = f^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(u_1), \dots, \tilde{\sigma}(u_n)) \in |\mathcal{M}|$$

הערה 1.10 הוכחה של סעיף שלוש - אינדוקציה על אורך סדרת היצירה.

בהנתן A נוסחא, נגדיר $\bar{\sigma}(A) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$, $\bar{\sigma} : Formulas \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ פונקציה המקיימת:

1. עבור $P(u_1, \dots, u_n)$

$$\bar{\sigma}(P(u_1, \dots, u_n)) = P^M(\bar{\sigma}(u_1), \dots, \bar{\sigma}(u_n))$$

2. כמו כן:

$$\bar{\sigma}(A \vee B) = \bar{\sigma}(A) \vee \bar{\sigma}(B), \bar{\sigma}(\neg A) = \neg \bar{\sigma}(A)$$

עבור קבוצת ערכי האמת:

$$\mathbb{T} \vee \mathbb{T} = \mathbb{T}, \mathbb{F} \vee \mathbb{F} = \mathbb{F}, \mathbb{F} \vee \mathbb{T} = \mathbb{T}$$

3/11/2011

הגדרנו את הפונקציה:

$$\bar{\sigma} : Formulas \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$$

ע"י:

$$\bar{\sigma}(P(u_1, \dots, u_n)) = P^M(\bar{\sigma}(u_1), \dots, \bar{\sigma}(u_n))$$

$$\bar{\sigma}(B \vee C) = \bar{\sigma}(B) \vee \bar{\sigma}(C)$$

$$\bar{\sigma}(\neg B) = \neg \bar{\sigma}(B)$$

נשים לב כי החלק הימני בשתי השורות האחרונות כבר לא סינטקטי - אינו חלק מהשפה, בעוד הצד השמאלי הוא ביטוי בשפה. כלומר, הצד הימני מקבל $\mathbb{T}$ או $\mathbb{F}$ ללא התחשבות בנכונות הביטויים המקוריים. נמשיך בהגדרת $\bar{\sigma}$:

$$\bar{\sigma}((\exists x) B) = \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \bar{\sigma}[x/a](B)$$

מה הנוסחא הזו עושה? נפרק למרכיבים:

$$\sigma[x/a] : Var \rightarrow |\mathcal{M}|$$

$$\begin{cases} (\sigma[x/a])(x) = a \\ (\sigma[x/a])(y) = \sigma(y) \quad y \neq x \end{cases}$$

$\vee$ יתן $\mathbb{T}$ אם לפחות אחד מהביטויים בקבוצת המבנה הוא $\mathbb{T}$, ויתן $\mathbb{F}$ אם כולם $\mathbb{F}$. בצורה פורמלית:

$$\bigvee_{\alpha \in I} q_\alpha = \mathbb{T}, q_\alpha = \mathbb{F} \text{ כאשר כל } \alpha \in I \text{ כד ש-} q_\alpha = \mathbb{T}.$$

נשים לב:

$$\begin{aligned}\sigma[x/a] : Var &\rightarrow |\mathcal{M}| \\ \tilde{\sigma}[x/a] : Terms &\rightarrow |\mathcal{M}| \\ \overline{\sigma}[x/a] : Formulas &\rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}\end{aligned}$$

דוגמא:

נניח שבסיגנטורה של השפה יש לנו יחס סדר בלבד: $<$. זהו יחס דו מקומי. נגדיר אותו בצורה האינסטינקטיבית על שני מבנים:

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_1| &= \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0 \right\} \\ |\mathcal{M}_2| &= \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0 \right\} \\ &<^{\mathcal{M}_1}, <^{\mathcal{M}_2}\end{aligned}$$

נביט בנוסחא:

$$(x_1 < x_2) \vee (x_2 < x_3)$$

מהי השמה עבור $\mathcal{M}_1$ כך שהנוסחא ש:

$$\sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}_1|, \quad \bar{\sigma}((x_1 < x_2) \vee (x_2 < x_3)) = \mathbb{F}$$

אופציה אחת:

$$\begin{aligned}\sigma(x_1) &= 1, \quad \sigma(x_2) = \frac{1}{2}, \quad \sigma(x_3) = \frac{1}{3} \\ \bar{\sigma}(x_1 < x_2) &= \mathbb{F}, \quad \bar{\sigma}(x_2 < x_3) = \mathbb{F} \\ \dots &= \mathbb{F} \vee \mathbb{F} = \mathbb{F}\end{aligned}$$

7/11/2011

בהמשך לשיעור הקודם:

הבטנו בשפה שיש לה רק יחס של השוואה $<$ (יחס דו מקומי), ובמבנים הבאים:

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_1| &= \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\} \\ |\mathcal{M}_2| &= \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1 \right\}\end{aligned}$$

נרצה להסתכל על:

$$(\forall x_1)(\exists x_2)(x_1 < x_2)$$

האם זו נוסחא? לא¹, כי הכמת לא בשפה. נביע את הכמת שלא בשפה בעזרת כמת הקיום ושלילה (שכן כלולים בשפה כחלק ממרכיביה):

$$\neg(\exists x_1)\neg(\exists x_2)(x_1 < x_2)$$

¹המשמעות (הפירוש הלא פורמלי) - בקבוצה אין איבר מקסימלי.

כעת זו נוסחא! נגדיר:

$$\sigma : x_1 \rightarrow \frac{1}{n}, x_2 \rightarrow \frac{1}{m}, \sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}_1|$$

כיוון ולא יהיה לנו צורך לדעת את הערך של המשתנים האחרים, נסמן $\sigma_{n,m}$ כפי שהוגדרה מעלה.

$$\bar{\sigma}_{n,m}(x_1 < x_2) = \begin{cases} \mathbb{T} & n > m \\ \mathbb{F} & n \leq m \end{cases}$$

ב- $\mathcal{M}_1$. נחשב:

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}_{n,m}(\neg(\exists x_1) \neg(\exists x_2)(x_1 < x_2)) \\ & \stackrel{1}{=} \neg \bar{\sigma}_{n,m}((\exists x_1) \neg(\exists x_2)(x_1 < x_1)) \\ & \stackrel{2}{=} \neg \left(\bigvee_{\frac{1}{p} \in |\mathcal{M}_1|} \overline{\sigma_{n,m} \left[x_1 / \frac{1}{p} \right]} (\neg(\exists x_2)(x_1 < x_2)) \right) \\ & \stackrel{3}{=} \neg \left(\bigvee_{\frac{1}{p} \in |\mathcal{M}_1|} \neg \left(\overline{\sigma_{n,m} \left[x_1 / \frac{1}{p} \right]} (\exists x_2)(x_1 < x_2) \right) \right) \\ & \stackrel{4}{=} \neg \left(\bigvee_{\frac{1}{p} \in |\mathcal{M}_1|} \neg \left(\bigvee_{\frac{1}{q} \in |\mathcal{M}_1|} \overline{\left(\sigma_{n,m} \left[x_1 / \frac{1}{p} \right] \right) \left[x_2 / \frac{1}{q} \right]} (x_1 < x_2) \right) \right) \\ & \frac{1}{p} = \sigma_{n,m} \left[x_1 / \frac{1}{p} \right] (x_1) = \left(\left(\sigma_{n,m} \left[x_1 / \frac{1}{p} \right] \right) \left[x_2 / \frac{1}{q} \right] \right) (x_1), \\ & \frac{1}{q} = \left(\left(\sigma_{n,m} \left[x_1 / \frac{1}{p} \right] \right) \left[x_2 / \frac{1}{q} \right] \right) (x_2) \\ & \Rightarrow \left(\sigma_{n,m} \left[x_1 / \frac{1}{p} \right] \right) \left[x_2 / \frac{1}{q} \right] = \sigma_{p,q} \\ & \Rightarrow \stackrel{5}{=} \neg \left(\bigvee_{\frac{1}{p} \in |\mathcal{M}_1|} \neg \left(\bigvee_{\frac{1}{q} \in |\mathcal{M}_1|} \overline{\sigma_{p,q}} (x_1 < x_2) \right) \right) \\ & p = 1, \bigvee_{\frac{1}{q} \in |\mathcal{M}_1|} \bar{\sigma}_{1,q}(x_1 < x_2) = \mathbb{F} \\ & p = 2, \bigvee_{\frac{1}{q} \in |\mathcal{M}_1|} \bar{\sigma}_{2,q}(x_1 < x_2) = \mathbb{T} \\ & p > 2, \bigvee_{\frac{1}{q} \in |\mathcal{M}_1|} \bar{\sigma}_{p,q}(x_1 < x_2) = \mathbb{T} \\ & \Rightarrow \mathbb{F} \end{aligned}$$

למה הכל בסוף שווה $\mathbb{F}$? עבור $p = 1$ האיווי הפנימי הוא $\mathbb{F}$, לכן הכל הוא $\mathbb{T}$, ולבסוף שלילה של $\mathbb{T}$ הוא $\mathbb{F}$. כלומר, הנוסחא אכן פועלת בצורה בה צפינו עבור הפירוש הלא פורמלי שלה. כעת, נעשה את אותו דבר עבור $\mathcal{M}_2$ - הפעם נצפה לתשובה $\mathbb{T}$. נגדיר השמות בצורה

דומה:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{n,m}(x_1) = \frac{1}{n} \\ \sigma_{n,m}(x_2) = \frac{1}{m} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{p,q}(x_1) = \frac{1}{p} \\ \sigma_{p,q}(x_2) = \frac{1}{q} \end{array} \right\} \\
 & \tau_{n,m} = \tau : x_1 \rightarrow 1 - \frac{1}{n}, x_2 \rightarrow 1 - \frac{1}{m} \\
 & \bar{\tau}_{n,m}(x_1 < x_2) = \begin{cases} \mathbb{T} & n < m \\ \mathbb{F} & n \geq m \end{cases} \\
 & \bar{\tau}_{n,m}(\neg(\exists x_1) \neg(\exists x_2)(x_1 < x_2)) \\
 & \stackrel{1}{=} \neg \left(\bigvee_{1-\frac{1}{p} \in |\mathcal{M}_2|} \overline{\tau_{n,m} \left[x_1/1 - \frac{1}{p} \right]} (\neg(\exists x_2)(x_1 < x_2)) \right) \\
 & \stackrel{2}{=} \neg \left(\bigvee_{1-\frac{1}{p} \in |\mathcal{M}_2|} \neg \left(\bigvee_{1-\frac{1}{q} \in |\mathcal{M}_2|} \overline{\tau_{n,m} \left[x_1/1 - \frac{1}{p} \right] \left[x_2/1 - \frac{1}{q} \right]} (x_1 < x_2) \right) \right) \\
 & \left(\left(\tau_{n,m} \left[x_1/1 - \frac{1}{p} \right] \right) \left[x_2/1 - \frac{1}{q} \right] \right) (x_1) = \left(\tau_{n,m} \left[x_1/1 - \frac{1}{p} \right] \right) (x_1) = 1 - \frac{1}{p} \\
 & \left(\tau_{n,m} \left[x_1/1 - \frac{1}{p} \right] \right) \left[x_2/1 - \frac{1}{q} \right] (x_2) = 1 - \frac{1}{q} \\
 & \left(\tau_{n,m} \left[x_1/1 - \frac{1}{p} \right] \right) \left[x_2/1 - \frac{1}{q} \right] = \tau_{p,q} \\
 & \Rightarrow \stackrel{3}{=} \neg \left(\bigvee_{1-\frac{1}{p} \in |\mathcal{M}_2|} \neg \left(\bigvee_{1-\frac{1}{q} \in |\mathcal{M}_2|} \overline{\tau_{p,q}}(x_1 < x_2) \right) \right) \\
 & p = 1 \quad \bigvee_{1-\frac{1}{q} \in |\mathcal{M}_2|} \bar{\tau}_{1,m}(x_1 < x_2) = \mathbb{T} \\
 & p = 2 \quad \bigvee_{1-\frac{1}{q} \in |\mathcal{M}_2|} \bar{\tau}_{2,m}(x_1 < x_2) = \mathbb{T}
 \end{aligned}$$

לכן האיווי הפנימי תמיד יהיה $\mathbb{T}$. אחרי שלילה כולם $\mathbb{F}$, לכן האיווי החיצוני יהיה $\mathbb{F}$ - ולאחר השלילה החיצונית, התוצאה הסופית של הנוסחא היא $\mathbb{T}$:

$$\stackrel{4}{=} \mathbb{T}$$

נביט ב:

$$(\exists x_1)((\exists x_1)P(x_1))$$

הטלנו שני כמתים על המשתנה x_1 - החיצוני אם כך כרגע עובד ב"מהלך סרק" - כי הוא עובד רק על משתנים חופשיים (כאלו שלא קשורים בכמת).

משפט 1.11 נניח ש: $\sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}|$, $\tau : Var \rightarrow |\mathcal{M}|$ שתי השמות, ויש לנו נוסחא A . נניח שלכל משתנה x שמופיע ב- A בצורה חופשית (ללא כמת), $\sigma(x) = \tau(x)$. אזי $\bar{\sigma}(A) = \bar{\tau}(A)$.

הוכחה: נשתמש באינדוקציה על אורך סדרת יצירה² של A .
נניח תחילה כי A היא נוסחא אלמנטרית, אזי $A = P(u_1, u_2, \dots, u_n)$

טענה 1.12 אם u הוא שם עצם, ו- $\sigma(x) = \tau(x)$ עבור כל המשתנים x המופיעים בשם עצם u , אזי $\tilde{\sigma}(u) = \tilde{\tau}(u)$.

הוכחה: נשתמש באינדוקציה על אורך סדרת יצירה של שם עצם u .
אם $u = x$, אז:

$$\tilde{\sigma}(u) = \tilde{\sigma}(x) = \sigma(x) = \tau(x) = \tilde{\tau}(x) = \tilde{\tau}(u)$$

אם $u = c$, אז:

$$\tilde{\sigma}(u) = \tilde{\sigma}(c) = c^M = \tilde{\tau}(c) = \tilde{\tau}(u)$$

אם $u = f(v_1, v_2, \dots, v_m)$, אז:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(u) &\stackrel{1}{=} \tilde{\sigma}(f(v_1, v_2, \dots, v_m)) \stackrel{2}{=} f^M(\tilde{\sigma}(v_1), \dots, \tilde{\sigma}(v_m)) = f^M(\tilde{\tau}(v_1), \dots, \tilde{\tau}(v_m)) \\ &\stackrel{4}{=} \tilde{\tau}(f(v_1, v_2, \dots, v_m)) = \tilde{\tau}(u) \end{aligned}$$

■

בעזרת טענת העזר, נקבל:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{\sigma}(A) &= \bar{\sigma}(P(u_1, \dots, u_m)) \stackrel{1}{=} P^M(\tilde{\sigma}(u_1), \dots, \tilde{\sigma}(u_m)) \stackrel{2}{=} P^M(\tilde{\tau}(u_1), \dots, \tilde{\tau}(u_m)) \\ &= \bar{\tau}(P(u_1, \dots, u_m)) = \bar{\tau}(A) \end{aligned}$$

כעת, נניח $A = B \vee C$. אזי:

$$\bar{\sigma}(A) \stackrel{1}{=} \bar{\sigma}(B \vee C) \stackrel{2}{=} \bar{\sigma}(B) \vee \bar{\sigma}(C) \stackrel{3}{=} \bar{\tau}(B) \vee \bar{\tau}(C) \stackrel{4}{=} \bar{\tau}(B \vee C) \stackrel{5}{=} \bar{\tau}(A)$$

נניח $A = \neg B$. אזי:

$$\bar{\sigma}(A) \stackrel{1}{=} \bar{\sigma}(\neg B) \stackrel{2}{=} \neg \bar{\sigma}(B) \stackrel{3}{=} \neg \bar{\tau}(B) \stackrel{4}{=} \bar{\tau}(\neg B) \stackrel{5}{=} \bar{\tau}(A)$$

והמקרה הרביעי והמעניין - $A = (\exists y) B$:

אם z הוא משתנה המופיע חופשית ב- B , אזי $\sigma(z) = \tau(z)$ (מהנחת האינדוקציה), אלא אם כן $z = y$, אזי y לא מופיע חופשית ב- A שכן הוא נקשר בכמת מההנחה שלנו (הוא עדיין יכול להופיע חופשית ב- B , אנו לא מניחים כלום על B) ולכן לא נתון $\sigma(y) = \tau(y)$.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A) &= \bar{\sigma}((\exists y) B) \stackrel{\text{definition}}{=} \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \bar{\sigma}[y/a](B) \stackrel{3}{=} \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \bar{\tau}[y/a](B) \\ &= \bar{\tau}((\exists y) B) = \bar{\tau}(A) \end{aligned}$$

מדוע 3 נכון?

²אנו כבר יודעים כי יכולה להיות יותר מסדרת יצירה אחת, ועל כן אנו נמנעים כאן משימוש ב"ה" הידועה.

עבור y :

$$(\sigma[y/a])(y) = a = (\tau[y/a])(y)$$

ועבור $y \neq z$, המופיע חופשי ב- B , z מופיע חופשי ב- A , ואז:

$$(\sigma[y/a])(z) = \sigma(z) = \tau(z) = ([y/a])(z)$$

ולכן לכל משתנה z המופיע בצורה חופשית ב- B :

$$\sigma[y/a](z) = \tau[y/a](z)$$

ולכן לפי הנחת האינדוקציה, שיוויון 3 נכון, ומכיוון ועברנו על כל המקרים, סיימנו. ■

הגדרה 1.13 נוסחא A תקרא נוסחא סגורה אם נוסחא בה כל המשתנים סגורים בכמותים, כלומר, אין ב- A משתנים חופשיים כלל.

מסקנה 1.14 אם A נוסחא סגורה, אז לכל שתי השמות $\mathcal{M} \rightarrow Var$ מתקיים $\bar{\sigma}(A) = \bar{\tau}(A)$ - כלומר, לכל השמה הנוסחא תקבל ערך $\mathbb{T}$ או $\mathbb{F}$.
אם $\bar{\sigma}(A) = \mathbb{T}$, אז רושמים $\models_{\mathcal{M}} A$ או $\mathcal{M} \models A$. אם הנ"ל מתקיים עבור A כלשהיא, A תביע מידע על המבנה A . אם יש לנו שני מבנים, ניתן לחפש נוסחא כך שמתקבל ערך אמת באחד וערך שקר בשני.

דוגמאות

1. בדוגמא מיום ב', הנוסחא:

$$(\forall x_1)(\exists x_2)(x_1 < x_2)$$

אומרת שלמבנה אין איבר מקסימלי (במידה והיא נכונה במבנה).

14/11/2011+17/11/2011

2.

$$|\mathcal{M}_2| = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid 0 < n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$|\mathcal{M}_1| = \left\{ \frac{1}{n} \mid 0 < n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$|\mathcal{M}_3| = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\} \cup \left\{ 2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1 \right\}$$

ראינו שהנוסחא:

$$(\forall x_1)(\exists x_2)(x_1 < x_2)$$

מתקיימת ב- $\mathcal{M}_2$ ולא ב- $\mathcal{M}_1$. נוסחא זו גם מסתפקת ב- $\mathcal{M}_3$. האם יש נוסחא שמבדילה בין $\mathcal{M}_2$ לבין $\mathcal{M}_1$?
"הנוסחא" $(\exists x)(x > 1)$ אינה בשפה, כי 1 הוא איבר בקבוצה המבנה, ולכן זו אפילו לא נוסחא, ו-1 לא ערך לשפה L .

$$A = (\exists x_1)(\forall x_2)((x_2 < x_1) \rightarrow (\exists x_3)(x_2 < x_3) \wedge (x_3 < x_1))$$

נראה כי $\mathcal{M}_3 \models A$: חסר וארוך מאוד, I'm sure you get the gist.

3. נגדיר:

$$|\mathcal{M}_4| = \{a | 0 < a < 1, a \in \mathbb{Q}\}, |\mathcal{M}_5| = \{a | 0 < a < 1, a \in \mathbb{R}\}$$

בשני המבנים מתקיימות בדיוק אותן נוסחאות סגורות, כלומר עם השפה שבנינו לא ניתן להבדיל בין שני המבנים הנ"ל (למרות שהם מעוצמה שונה). במקרה זה נאמר כי $\mathcal{M}_4, \mathcal{M}_5$ שקולים אלמנטרית.

1.2 מערכת ההיסק

1.2.1 בניית מערכת ההיסק

הגדרה 1.15 תהי A נוסחא לאו דווקא סגורה. אזי נאמר ש- A מתקיימת, ונסמן $\mathcal{M} \models A$ או $\models_{\mathcal{M}} A$ אם לכל השמה $\sigma : Vars \rightarrow |\mathcal{M}|$ מתקיים $\sigma(A) = \mathbb{T}$.

הגדרה 1.16 $Th(\mathcal{M})$ הוא אוסף כל הנוסחאות הסגורות (בשפה המתאימה) המתקיימות ב- $\mathcal{M}$.

הגדרה 1.17 שני מבנים $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ שקולים אלמנטרית, ונסמן $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}'$, כאשר $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{M}')$.

הגדרה 1.18 תהי S קבוצה של נוסחאות סגורות. אזי $Mod(S)$ תהיה קבוצת כל המבנים בהם מתקיימות כל הנוסחאות שבקבוצה S .

מסקנה 1.19 $S \subseteq Th(Mod(S))$.

נרצה, בהנתן S כנ"ל, לבנות את $Th(Mod(S))$, בתהליך שנקרא "מערכת היסק".

האקסיומות של מערכת היסק

1. לכל נוסחא A מתקיים ש- $\neg A \vee A$ היא אקסיומה (פרופוזיציונלית).

2. אקסיומת הזהות: $x = x$.

3. אקסיומת השיוויון:

(א) לכל f סמל פונקציה n -מקומי:

$$x_1 = y_1 \rightarrow (x_2 = y_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n))))$$

(ב) לכל P סמל יחס n -מקומי:

$$x_1 = y_1 \rightarrow (x_2 = y_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (x_n = y_n \rightarrow P(x_1, \dots, x_n) = P(y_1, \dots, y_n))))$$

4. אקסיומת ההצבה:

$$A_x[u] \rightarrow (\exists x) A$$

יש להסביר איך בנוסחא במקום משתנה אפשר להציב שם עצם. נציב רק במשתנים חופשיים.

הגדרה 1.20 יהיו v שם עצם, x משתנה, u שם עצם. $v_x[u]$ הוא שם העצם המתקבל מ- v לאחר שמציבים את u במקום x . נראה כיצד ההצבה הזו פועלת באינדוקציה על סדרת היצירה של v :

$$1. \text{ אם } v = x, \text{ אזי } v_x[u] = u. \text{ אם } v = y, \text{ עבור } y \neq x, \text{ אזי } v_x[u] = y.$$

$$2. \text{ אם } v = c, \text{ קבוע, אז } v_x[u] = c.$$

$$3. \text{ אם } v = f(v_1, \dots, v_n), \text{ אזי } v_x[u] = f(v_{1x}[u], \dots, v_{nx}[u]).$$

הגדרה 1.21 תהי A נוסחא, x משתנה, u שם עצם. $A_x[u]$ היא הנוסחא המתקבלת מ- A לאחר שמציבים את u ב- A במקום המשתנה x . נראה כיצד ההצבה הזו פועלת בעזרת סדרת היצירה של A :

$$1. \text{ אם } A = P(v_1, \dots, v_n), \text{ אז } A_x[u] = P(v_{1x}[u], \dots, v_{nx}[u]).$$

$$2. \text{ אם } A = B \vee C, \text{ אז } A_x[u] = B_x[u] \vee C_x[u].$$

$$3. \text{ אם } A = \neg B, \text{ אז } A_x[u] = \neg B_x[u].$$

$$4. \text{ אם } A = (\exists x) B, \text{ אז } A_x[u] = A.$$

אם $A = (\exists y) B$ עבור $y \neq x$, אזי $A_x[u] = (\exists y) B_x[u]$, בתנאי ש- u איננו מכיל את המשתנה y , או בתנאי ש- x לא מופיע חופשית ב- B . אם x כן מופיע חופשית ב- B ו- u מכיל את y , אזי y יופיע גם ב- $B_x[u]$, ואז ב- $(\exists y)(B_x[u])$ המשתנה y נקשר בכמת, והצבה כזו הינה אסורה!

הערה 1.22 כאשר נרשום $A_x[u]$, הכוונה היא רק להצבה מותרת.

טענה 1.23 זו מערכת היסק.

הוכחה: יש להראות שמתקיימות כל האקסיומות. אקסיומת ההצבה מתקיימת, כי מההגדרה הנ"ל, נקבל כי לכל נוסחא A , משתנה x ושם עצם u :

$$A_x[u] \rightarrow (\exists x) A$$

שאר האקסיומות מתקיימות באופן טריוויאלי. ■

1.2.2 כללי היסק

כלל ההרחבה: מ- A נסיק $A \vee A^-$.

כלל הצמצום: מ- $A \vee A^-$ נסיק A .

כלל האסוציאטיביות: מ- $A \vee (B \vee C)$ נסיק $(A \vee B) \vee C$.

כלל החתך: מ- $A \vee B$ ו- $\neg A \vee C$ נסיק $B \vee C$.

כלל הכנסת $\exists$: מ- $A \rightarrow B$ נסיק $(\exists x) A \rightarrow B$, בתנאי שהמשתנה x לא מופיע חופשית ב- B .

הגדרה 1.24 אם ניתן להסיק את A מתוך האקסיומות, נסמן $A \vdash$ (נאמר גם במקרה כזה כי A יכיח).

הגדרה זו שונה מ\הסימון $\models A$, שאומר כי A מתקיימת במבנה.

דוגמא: באופן טריוויאלי, $\vdash ((\neg A) \vee A)$.

נרצה להוכיח שני משפטים עיקריים - משפט הנאותות, אותו נתחיל להוכיח מיד, ומשפט השלמות של גדל, אותו נוכיח רק לקראת סוף הקורס.

1.2.3 משפט הנאותות

משפט 1.25 אם $A \vdash$, אז לכל מבנה $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models A$.

הוכחה: צריך להוכיח עבור אקסיומות מערכת ההיסק וכללי ההיסק. תהי $\sigma : Vars \rightarrow |\mathcal{M}|$ הצבה. נתחיל עם האקסיומות:

1. נראה כי $\mathcal{M} \models (\neg A \vee A)$:

$$\bar{\sigma}(\neg A \vee A) = \bar{\sigma}(\neg A) \vee \bar{\sigma}(A) = (\neg \bar{\sigma}(A)) \vee \bar{\sigma}(A) = \mathbb{T}$$

2. אקסיומת הזהות - נראה כי $\mathcal{M} \models (x = x)$ - נעריך את $\bar{\sigma}(x = x)$. סמל השיוויון תמיד מתפרש ב- $\mathcal{M}$ כשיוויון בין אברי קבוצת המבנה $|\mathcal{M}|$, ולכן:

$$\bar{\sigma}(x = y) = \begin{cases} \mathbb{T} & \sigma(x) = \sigma(y) \\ \mathbb{F} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\bar{\sigma}(x = x) = \mathbb{T} \text{ לכן } \sigma(x) = \sigma(y) \text{ ולכן } y = x$$

3. עבור אקסיומת השיוויון - יש להראות שני חלקים:

(א) עבור סמל פונקציה f n -מקומי, עלינו להראות כי

$$\bar{\sigma}(x_1 = y_1 \rightarrow x_2 = y_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)) = \mathbb{T}$$

נעריך ביטוי זה:

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}(x_1 = y_1 \rightarrow x_2 = y_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)) \\ &= \bar{\sigma}(x_1 = y_1) \rightarrow \bar{\sigma}(x_2 = y_2) \rightarrow \dots \rightarrow \bar{\sigma}(x_n = y_n) \rightarrow \bar{\sigma}(f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)) \\ &= (\sigma(x_1) = \sigma(y_1)) \rightarrow (\sigma(x_2) = \sigma(y_2)) \rightarrow \dots \rightarrow (\sigma(x_n) = \sigma(y_n)) \\ &\rightarrow (f^{\mathcal{M}}(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)) = f^{\mathcal{M}}(\sigma(y_1), \dots, \sigma(y_n))) \end{aligned}$$

כאשר מתייחסים כאן ל- $*$ הוא יחס במבנה - אם מתקיים יתקבל $\mathbb{T}$, אחרת $\mathbb{F}$.
אם קיים $i, 1 \leq i \leq n$ כך ש:

$$(\sigma(x_i) = \sigma(y_i)) = \mathbb{F}$$

כלומר $\sigma(x_i) \neq \sigma(y_i)$, אז הנוסחא כולה אמת, כי:

$$\begin{aligned} (\sigma(x_i) = \sigma(y_i)) &\rightarrow (...) = \mathbb{T} \\ (\sigma(x_{i-1}) = \sigma(y_{i-1})) &\rightarrow \underbrace{(\sigma(x_i) = \sigma(y_i))}_{\mathbb{T}} \rightarrow (...) = \mathbb{T} \\ (\sigma(x_1) = \sigma(y_1)) &\rightarrow \underbrace{(...)}_{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \end{aligned}$$

נשאר המקרה בו כל הביטויים הם אמת:

$$(\sigma(x_1) = \sigma(y_1)) = \mathbb{T}, \dots, (\sigma(x_n) = \sigma(y_n)) = \mathbb{T}$$

זאת אומרת:

$$\sigma(x_1) = \sigma(y_1), \sigma(x_2) = \sigma(y_2), \dots, \sigma(x_n) = \sigma(y_n)$$

ואז:

$$f^{\mathcal{M}}(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)) = f^{\mathcal{M}}(\sigma(y_1) \dots \sigma(y_n))$$

זאת אומרת:

$$\mathbb{T} = (f^{\mathcal{M}}(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)) = f^{\mathcal{M}}(\sigma(y_1), \dots, \sigma(y_n)))$$

ולכן כל הביטוי מקבל:

$$\begin{aligned} (\sigma(x_1) = \sigma(y_1)) &\rightarrow (...) \rightarrow \\ ((\sigma(x_n) = \sigma(y_n)) &\rightarrow (f^{\mathcal{M}}(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)) = f^{\mathcal{M}}(\sigma(y_1), \dots, \sigma(y_n)))) = \mathbb{T} \end{aligned}$$

(ב) באותה מתכונת, נוכיח את החלק השני - עבור כל P סמל יחס n -מקומי:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(x_1 = y_1) &\rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n) \\ &= (\sigma(x_1) = \sigma(y_1)) \rightarrow \dots \rightarrow (\sigma(x_n) = \sigma(y_n)) \\ &\rightarrow (P^{\mathcal{M}}(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)) \rightarrow P^{\mathcal{M}}(\sigma(y_1), \dots, \sigma(y_n))) \end{aligned}$$

אם קיים $i, 1 \leq i \leq n$ כך ש: $(\sigma(x_i) = \sigma(y_i))$, הנוסחא מקבלת ערך $\mathbb{T}$.
אם לכל $i, 1 \leq i \leq n$, $(\sigma(x_i) = \sigma(y_i)) = \mathbb{T}$, אז:

$$\sigma(x_1) = \sigma(y_1), \dots, \sigma(x_n) = \sigma(y_n)$$

ואז:

$$P^{\mathcal{M}}(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)) = P^{\mathcal{M}}(\sigma(y_1) \dots \sigma(y_n))$$

ולכן:

$$(P^{\mathcal{M}}(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)) = P^{\mathcal{M}}(\sigma(y_1), \dots, \sigma(y_n))) = \mathbb{T}$$

ושוב כל הנוסחא מקבלת ערך $\mathbb{T}$ כנדרש.

4. עבור אקסיומת ההצבה:

$$A_x[u] \rightarrow (\exists x) A$$

נעריך את הביטוי:

$$\bar{\sigma}(A_x[u] \rightarrow (\exists x) A) = \bar{\sigma}(A_x[u]) \rightarrow \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(A) \stackrel{2}{=}$$

טענה 1.26 (א) v שם עצם, u שם עצם, אזי:

$$\tilde{\sigma}(v_x[u]) = \sigma[\widetilde{x/\tilde{\sigma}(u)}](v)$$

(ב) אם $A_x[u]$ חוקית, אזי:

$$\bar{\sigma}(A_x[u]) = \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)]}(A)$$

בעזרת החלק השני של הטענה, נקבל (את הראשון נצטרך כדי להוכיח את השני):

$$\stackrel{2}{=} \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)]}(A) \rightarrow \bigvee_{a \in |M|} \overline{\sigma[x/a]}(A)$$

$\overline{\sigma[x/a]}(A)$ הוא אחד מגורמי האיווי (עבור $a = \tilde{\sigma}(u)$), ולכן אם $\mathbb{T}$, אז מכך שהוא באיווי, נקבל משמאל $\mathbb{T}$, אחרת ערכו $\mathbb{F}$, ואז ערך השלילה הוא $\mathbb{T}$, ואז הביטוי כולו מקבל $\mathbb{T}$. לכן, בכל מקרה הנוסחא מקבלת ערך $\mathbb{T}$, וזה מה שרצינו להראות. נותר להוכיח את הטענה מעלה. **הוכחה:** (א) נשתמש באינדוקציה על סדרת יצירה של שם עצם v .

א. $v = y, y \neq x$ אז:

$$\begin{aligned} v_x[u] &= y \\ \tilde{\sigma}(v_x[u]) &= \tilde{\sigma}(y) = \sigma(y) \\ \sigma[\widetilde{x/\tilde{\sigma}(u)}](v) &= \sigma[\widetilde{x/\tilde{\sigma}(u)}](y) = \sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](y) = \sigma(y) \end{aligned}$$

ואז נקבל שיוויון בין השורה השניה לשלישית.

ב. $v_x[u] = u, v = x$ אז:

$$\tilde{\sigma}(v_x[u]) = \tilde{\sigma}(u) = \sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](x) = \sigma[\widetilde{x/\tilde{\sigma}(u)}](x) = \sigma[\widetilde{x/\tilde{\sigma}(u)}](v)$$

ג. $v_x[u] = c, v = c$ אז:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(v_x[u]) &= \tilde{\sigma}(c) = c^{\mathcal{M}} \\ \sigma[\widetilde{x/\tilde{\sigma}(u)}](v) &= \tilde{\sigma}[x/\tilde{\sigma}(u)](c) = c^{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

וכך נקבל שיוויון בין שתי השורות.

$$v = f(w_1, \dots, w_m) \quad \text{ד.}$$

$$\begin{aligned} v_x[u] &= f(w_{1x}[u], \dots, w_{mx}[u]) \\ \tilde{\sigma}(v_x[u]) &= \tilde{\sigma}(f(w_{1x}[u], \dots, w_{mx}[u])) = f^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(w_{1x}[u]), \dots, \tilde{\sigma}(w_{mx}[u])) \\ &\stackrel{3}{=} f^{\mathcal{M}}(\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](w_1), \dots, \sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](w_m)) = \sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](v) \end{aligned}$$

כאשר רק במעבר 3 השתמשנו בהנחת האינדוקציה.

(ב) גם כאן נשתמש באינדוקציה על סדרת יצירה של נוסחא A :

$$\text{א. אם } A \text{ נוסחא אלמנטרית, כלומר } A = P(w_{1x}[u], \dots, w_{mx}[u]), \quad A_x[u] = P(w_{1x}[u], \dots, w_{mx}[u]), \quad P(w_1, \dots, w_m)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A_x[x]) &= \bar{\sigma}(P(w_{1x}[u], \dots, w_{mx}[u])) = P^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(w_{1x}[u]), \dots, \tilde{\sigma}(w_{mx}[u])) \\ &\stackrel{3}{=} P^{\mathcal{M}}(\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](w_1), \dots, \sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](w_m)) \\ &= \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](P(w_1, \dots, w_m))} = \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](A)} \end{aligned}$$

כאשר ב-3' אנו משתמשים בחלק (א) של הטענה.

$$\text{ב. } A_x[u] = B_x[u] \vee C_x[u], \quad A = B \vee C$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A_x[u]) &= \bar{\sigma}(B_x[u] \vee C_x[u]) = \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](B) \vee \sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](C)} \\ &= \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](B \vee C)} = \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](A)} \end{aligned}$$

$$\text{ג. } A_x[u] = \neg(B_x[u]), \quad A = \neg B$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A_x[u]) &= \bar{\sigma}(\neg B_x[u]) = \neg \bar{\sigma}(B_x[u]) \stackrel{3}{=} \neg \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](B)} \\ &= \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](\neg B)} = \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](A)} \end{aligned}$$

ושוב ב-3' השתמשנו בהנחת האינדוקציה.

$$\text{ד.1. } A_x[u] = A, \quad A = (\exists x) B$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A_x[u]) &= \bar{\sigma}(A) = \overline{\sigma((\exists x) B)} = \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a](B)} \\ \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](A)} &= \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)]((\exists x) B)} = \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](x/a)(B)} \end{aligned}$$

נטען כי

$$\bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a](B)} = \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](x/a)(B)}$$

מדוע? נראה כי $\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](x/a) = \sigma[x/a]$

$$\begin{aligned} \sigma[x/a](x) &= a \\ ((\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](x/a))(x) &= a \\ y \neq x \Rightarrow (\sigma[x/a](y) &= \sigma(y)) \\ ((\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](x/a))(y) &= \sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](y) = \sigma(y) \end{aligned}$$

2. $A_x[u] = (\exists y)(B_x[u]) : A = (\exists y)B, x \neq y$ בתנאי ש:
 א. $B_x[u]$ היא הצבה חוקית.
 ב. y לא מופיע ב- u , או x לא מופיע חופשית ב- B .
 אזי:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(A_x[u]) &= \bar{\sigma}((\exists y)B_x[u]) = \bigvee_{b \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[y/b]}(B_x[u]) \stackrel{3}{=} \bigvee_{b \in |\mathcal{M}|} \overline{(\sigma[y/b])(\tilde{\sigma}(u))}(B) \\ \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)]}(A) &= \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)]}((\exists y)B) = \bigvee_{b \in |\mathcal{M}|} \overline{(\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)])(y/b)}(B)\end{aligned}$$

24/11/2011

אבל מעבר 3 שגוי, ועל כן ההוכחה אינה נכונה (שכן היינו מקבלים שיוויון בין הביטויים גם ללא שימוש בהנחה ב' - וידוע שהמשפט אינו נכון ללא הנחה זו). נתקן את ההוכחה:

$$\stackrel{3}{=} \bigvee_{b \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[y/b] \left[\widetilde{x/\sigma[y/b]}(u) \right]}$$

שהרי הנחת האינדוקציה היא ביחס ל- $\sigma[y/b]$ ולא ביחס להשמה המקורית:

$$\overline{\sigma[y/b]}(B_x[u]) = \sigma[y/b] \left[\widetilde{x/\sigma[y/b]}(u) \right] (B)$$

עכשיו, שנשווה בין ההשמות, נקבל שהן אינן שוות:

$$\begin{aligned}\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](y/b)(u) &: \begin{cases} x \rightarrow \tilde{\sigma}(u) \\ y \rightarrow b \\ z \rightarrow \sigma(z) & z \neq x, y \end{cases} \\ \sigma[y/b] \left[\widetilde{x/\sigma[y/b]}(u) \right] (u) &: \begin{cases} x \rightarrow \widetilde{\sigma[y/b]}(u) \\ y \rightarrow b \\ z \rightarrow \sigma(z) & z \neq x, y \end{cases}\end{aligned}$$

אם y אינו מופיע ב- u , אזי:

$$\widetilde{\sigma[y/b]}(u) = \tilde{\sigma}(u)$$

אם x אינו מופיע חופשית ב- B , אז $B_x[u] = B$, ואז $A_x[u] = (\exists u)B = A$, ואז:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(A_x[u]) &= \bar{\sigma}(A) = \bar{\sigma}((\exists y)(B)) = \bigvee_{b \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[y/b]}(B) \\ \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)]}(A) &= \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)]}((\exists y)(B)) = \bigvee_{b \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](y/b)}(B)\end{aligned}$$

ההבדל בין שני הביטויים מעלה הוא רק בפעולה על x , אבל x אינו מופיע ב- B , ז"א לכל המשתנים שכן מופיעים חופשית ב- B , שתי ההשמות הנ"ל פועלות אותו הדבר, ולכן:

$$\overline{\sigma[y/b]}(B) = \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)](y/b)}(B)$$

כנדרש!³

כאן סיימנו עבור האקסיומות. נוכיח עבור כללי ההיסק:

³ריפס מציין שהוכחה זו תופיע בטוח באחד ממועדי הבחינה!

1. כלל ההרחבה: מ- $A \vdash B \vee A$ נובע $A \vdash B$. נראה כי זה אכן מתקיים:

$$\vdash A \Rightarrow \bar{\sigma}(B \vee A) = \bar{\sigma}(B) \vee \overbrace{\bar{\sigma}(A)}^{=\mathbb{T}} = \mathbb{T}$$

2. כלל הצמצום: מ- $A \vee A \vdash A$ נובע $A \vdash A$. נחשב:

$$\vdash A \vee A \Rightarrow \bar{\sigma}(A) = \bar{\sigma}(A) \vee \bar{\sigma}(A) = \bar{\sigma}(A \vee A) = \mathbb{T}$$

3. כלל האסוציאטיביות: מ- $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$ נובע $A \vdash (A \vee B) \vee C$.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}((A \vee B) \vee C) &= \bar{\sigma}((A \vee B)) \vee \bar{\sigma}(C) = (\bar{\sigma}(A) \vee \bar{\sigma}(B)) \vee \bar{\sigma}(C) \\ &= \bar{\sigma}(A) \vee (\bar{\sigma}(B) \vee \bar{\sigma}(C)) = \bar{\sigma}(A \vee (B \vee C)) = \bar{\sigma}(A \vee (B \vee C)) = \mathbb{T} \end{aligned}$$

4. כלל החתך: מ- $A \vee B$ ו- $\neg A \vee C$ נובע $B \vee C$.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A \vee B) &= \bar{\sigma}(A) \vee \bar{\sigma}(B) = \mathbb{T} \\ \bar{\sigma}(\neg A \vee C) &= \neg \bar{\sigma}(A) \vee \bar{\sigma}(C) = \mathbb{T} \end{aligned}$$

אם $\bar{\sigma}(A) = \mathbb{T}$, אז $\neg \bar{\sigma}(A) = \mathbb{F}$, ולכן $\bar{\sigma}(C) = \mathbb{T}$, ולכן:

$$\bar{\sigma}(B \vee C) = \bar{\sigma}(B) \vee \bar{\sigma}(C) = \mathbb{T}$$

אחרת $\bar{\sigma}(A) = \mathbb{F}$, אז $\bar{\sigma}(B) = \mathbb{T}$, ולכן:

$$\bar{\sigma}(B \vee C) = \bar{\sigma}(B \vee \bar{\sigma}(C)) = \mathbb{T}$$

ולכן בכל מקרה $\bar{\sigma}(B \vee C) = \mathbb{T}$.

5. כלל הכנסת $\exists$: מ- $A \rightarrow B$ נובע $(\exists x) A \rightarrow B$, בתנאי ש- x לא מופיע חופשית ב- B .

28/11/2011

$$\bar{\sigma}(((\exists x) A) \rightarrow B) = \left(\bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \bar{\sigma}[x/a](A) \right) \rightarrow \bar{\sigma}(B) \stackrel{?}{=} \mathbb{T}$$

נתון שלכל השמה $\tau: Var \rightarrow |\mathcal{M}|$:

$$\bar{\tau}(A \rightarrow B) = \bar{\tau}(A) \rightarrow \bar{\tau}(B) = \mathbb{T}$$

אם $\bar{\sigma}(B) = \mathbb{T}$, אז:

$$\bar{\sigma}(((\exists x) A) \rightarrow B) = \mathbb{T}$$

אחרת, אם לכל $a \in |\mathcal{M}|$, $\sigma[x/a](A) = \mathbb{F}$ אז $\overline{\sigma[x/a]}(A) = \mathbb{F}$, ואז גם כן

$$\overline{\sigma}((\exists x) A \rightarrow B) = \mathbb{T}$$

לכן, נניח שקיים $a_0 \in |\mathcal{M}|$ כך ש- $\sigma[x/a_0](A) = \mathbb{T}$. לפי הנתון:

$$\mathbb{T} = \overline{\sigma[x/a_0]}(A \rightarrow B) = \overline{\sigma[x/a_0]}(A) \rightarrow \overline{\sigma[x/a_0]}(B)$$

ולכן $\overline{\sigma[x/a_0]}(B) = \mathbb{T}$. ההשמות σ ו- $\sigma[x/a_0]$ זהות על כל המשתנים שמופיעים חופשית ב- B . לכן:

$$\mathbb{T} = \overline{\sigma}(B) = \overline{\sigma[x/a_0]}(B)$$

ומכאן:

$$\overline{\sigma}((\exists x) A \rightarrow B) = \mathbb{T}$$

כנדרש.

■
■

וכאן סיימנו להוכיח את משפט הנאותות!
קעת אנחנו מתחילים לצעוד לעבר המשפט ההפוך - משפט השלמות של גדל.

1.2.4 משפט פוסט על טאוטולוגיה

נוסחאות "אלמנטריות" הן נוסחאות מהצורה הבאה:

- א. נוסחא אטומית $P(u_1, u_2, \dots, u_n)$.
- ב. $(\exists x) A$.

טענה 1.27 כל נוסחא ניתן לבנות מנוסחאות "אלמנטריות" ע"י שימוש בקשרים לוגיים בלבד.
למשל, אם נביט בנוסחא:

$$(\exists x) A \rightarrow B$$

לפי הנחת האינדוקציה, B נבנית מנוסחאות "אלמנטריות" על ידי קשרים לוגיים בלבד.
הוכחה: באינדוקציה על אורך סדרת יצירה של נוסחא.

$$1. A = P(u_1, \dots, u_n)$$

$$2. A = B \vee C$$

$$3. A = \neg B$$

$$4. A = (\exists x) B$$

■

כנדרש.

הגדרה 1.28 הערכה נותנת לכל נוסחא "אלמנטרית" ערך $\mathbb{T}$ או $\mathbb{F}$.

נניח V הערכה. נגדיר $V(A)$ לכל נוסחא A .

אם A אטומית, אז זה כבר נעשה.
 אם $A = B \vee C$ אז $V(A) = V(B) \vee V(C)$.
 אם $A = \neg B$, אז $V(A) = \neg V(B)$.
 אם $A = (\exists x) B$ אז זה כבר נעשה.

הגדרה 1.29 נוסחא A נקראת טאוטולוגיה אם לכל הערכה V , $V(A) = \mathbb{T}$.

כל נוסחא "אלמנטרית" איננה טאוטולוגיה.
 אבל, למשל, $(\exists x) A \vee \neg((\exists x) A)$ היא כן טאוטולוגיה. מדוע? אם $V_1((\exists x) A) = \mathbb{T}$ סיימנו. אחרת:

$$V_1((\exists x) A \vee \neg((\exists x) A)) = \underbrace{V_1((\exists x) A)}_{=\mathbb{F}} \vee \underbrace{\left(\neg V_1((\exists x) A) \right)}_{=\mathbb{T}} = \mathbb{T}$$

אם A טאוטולוגיה, אז לכל מבנה $\mathcal{M}$ ולכל השמה $\sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}|$ ולכל $\bar{\sigma}(A) = \mathbb{T}$, כי סוף
 סוף, גם $\bar{\sigma}$ היא הערכה.

משפט 1.30 (פוסט): אם A טאוטולוגיה, אז $\vdash A$.

לפני שנוכיח את המשפט, נרצה לתאר תהליך שיעזור לקבוע אם נוסחא היא טאוטולוגיה או לא.

מקרה 1: תהא $A = B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m$ כך שכל B_i זו נוסחא "אלמנטרית" או שלילתה.

טענה 1.31 A היא טאוטולוגיה אם ורק אם קיימים $1 \leq i, j \leq m$ כך ש- B_i "אלמנטרית" ו- $B_j = \neg B_i$.

הוכחה: אם התנאי מתקיים, אז לכל הערכה V :

$$V(B_j) = \neg V(B_i)$$

ואז $V(A) = \mathbb{T}$, כי $V(A) = V(B_i) \vee V(B_j) \vee \dots \vee V(B_m)$, ובין הגורמים מופיע $\mathbb{T}$.
 בכיוון שני, נראה כי אם התנאי לא מתקיים, אז איננה טאוטולוגיה. בשביל זה נמצא הערכה V כך ש- $V(A) = \mathbb{F}$.

אם B_i "אלמנטרית", אז ניקח $V(B_i) = \mathbb{F}$. אם $B_i = \neg C$, כאשר C "אלמנטרית", ניקח $V(C) = \mathbb{T}$ ונקבל $V(B_i) = \neg V(C) = \mathbb{F}$.
 לכן $V(B_i) = \mathbb{F}$ לכל $1 \leq i \leq m$, ולכן $V(A) = \mathbb{F}$, כנדרש. ■

כדי להמשיך למקרה הבא, יש צורך בפיתוח נוסף.
 נגדיר לכל נוסחא A פונקצית אורך $l(A)$:

$$\bullet \text{ עבור נוסחא אטומית } l(P(u_1, \dots, u_n)) = 1$$

$$\bullet l(B \vee C) = l(B) + 1 + l(C)$$

$$\bullet l(\neg B) = l(B) + 1$$

$$l((\exists x) B) = 1 \bullet$$

כך למשל:

$$l((\exists x) A \rightarrow B) = l(\neg(\exists x) A \vee B) = l(B) + 3$$

נרצה להשתמש באינדוקציה - אבל על מה?

נביט בנוסחא A .

אם היא נוסחא "אלמנטרית", נגדיר $L(A) = l(A)$.

אם היא איווי:

$$A = B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m$$

במקרה זה⁴, נגדיר:

$$L(A) = l(B_1) + l(B_2) + \dots + l(B_m)$$

נשתמש באינדוקציה על $L(A)$:

בסיס: אם $L(A) = 1$, אזי A נוסחא אלמנטרית, ואז אין זו טאוטולוגיה.

נניח כי עבור כל נוסחא בעלת אורך קטן מ- $L(A)$ ישנה דרך לקבוע אם זו טאוטולוגיה.

נרשום $A = B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m$ (עם m מקסימלי אפשרי), לכן אם לא נמצאים במקרה

1, אז ישנן האפשרויות הבאות:

מקרה 2: קיים i , $1 \leq i \leq m$ כך ש- $B_i = C \vee D$ ⁵.

מקרה 3: קיים i , $1 \leq i \leq m$ כך ש: $B_i = \neg(C \vee D)$.

מקרה 4: קיים i , $1 \leq i \leq m$ כך ש: $B_i = \neg(\neg C)$.

תחילה, נטען כי ארבעת המקרים הללו מכסים את כל האפשרויות (הסבר בע"פ, פשוט

לעבור על האפשרויות).

נחזור לניתוח המקרים:

מקרה 2: $B_i = C \vee D$.

$$A = B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_{i-1} \vee (C \vee D) \vee B_{i+1} \vee \dots \vee B_m$$

נגדיר נוסחא חדשה:

$$A' = B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_{i-1} \vee C \vee D \vee B_{i+1} \vee \dots \vee B_m$$

$$L(A) = l(B_1) + l(B_2) + \dots + l(B_{i-1}) + l(C \vee D) + l(B_{i+1}) + \dots + l(B_m)$$

$$= l(B_1) + \dots + l(B_{i-1}) + l(C) + 1 + l(D) + l(B_{i+1}) + \dots + l(B_m)$$

$$L(A') = l(B_1) + l(B_2) + \dots + l(B_{i-1}) + l(C) + l(D) + l(B_{i+1}) + \dots + l(B_m)$$

כל הערכה נותנת ל- A ול- A' אותו ערך - $V(A) = V(A')$, בעוד $L(A) = L(A') + 1$.

לכן נוכל להשתמש בהנחת האינדוקציה על $L(A')$, ומהשקילות הלוגית בין שתי הנוסחאות

סיימנו.

⁴בהנחה שפירוק זה הוא "הקטן" ביותר, כלומר B_i אינם איווי.

⁵נשים לב שכאן האיווי אינו טרנסזיטיבי!

מקרה 4:

$$\begin{aligned}
 A &= B_1 \vee \dots \vee B_{i-1} \vee (\neg C) \vee B_{i+1} \vee \dots \vee B_m \\
 A' &= B_1 \vee \dots \vee B_{i-1} \vee C \vee B_{i+1} \vee \dots \vee B_m \\
 \Rightarrow L(A') &= L(A) - 2
 \end{aligned}$$

וכן $V(A) = V(A')$, ולכן שוב מהנחת האינדוקציה סיימנו.

מקרה 3:

הפעם נכתוב שתי נוסחאות חדשות:

$$\begin{aligned}
 A &= B_1 \vee \dots \vee (\neg(C \vee D)) \vee \dots \vee B_m \\
 A' &= B_1 \vee \dots \vee (\neg C) \vee \dots \vee B_m \\
 A'' &= B_1 \vee \dots \vee (\neg D) \vee \dots \vee B_m
 \end{aligned}$$

נטען כי אם שתי הנוסחאות החדשות הן טאוטולוגיה, אז גם A טאוטולוגיה.

1/12/2011

$$\begin{aligned}
 L(A) &= l(B_1) + \dots + l(B_{i-1}) + l(\neg(C \vee D)) + \dots + l(B_m) \\
 L(A') &= l(B_1) + \dots + l(B_{i-1}) + l(\neg C) + \dots + l(B_m) \\
 L(A'') &= l(B_1) + \dots + l(B_{i-1}) + l(\neg D) + \dots + l(B_m) \\
 \Rightarrow L(A') &< L(A), \quad L(A'') < L(A)
 \end{aligned}$$

טענה 1.32 A היא טאוטולוגיה אם ורק אם A' היא טאוטולוגיה וגם A'' היא טאוטולוגיה.**הוכחה:** נניח ש- A' היא טאוטולוגיה וגם A'' היא טאוטולוגיה. נרצה להוכיח כי גם A היא טאוטולוגיה. כלומר כי לכל הערכה V , $V(A) = \mathbb{T}$.אם קיים j , $1 \leq j \leq m$, כך ש- $V(B_j) = \mathbb{F}$ לכל $j \neq i$, $1 \leq j \leq m$, נתון כי $V(A') = \mathbb{T}$ ולכן $V(\neg C) = \mathbb{T}$, זאת אומרת $V(C) = \mathbb{F}$. כמו כן $V(A'') = \mathbb{T}$ ולכן $V(\neg D) = \mathbb{T}$, זאת אומרת $V(D) = \mathbb{F}$. מכאן $V(C \vee D) = \mathbb{F}$ ולכן $V(\neg(C \vee D)) = \mathbb{T}$ ולכן $V(A) = \mathbb{T}$ זאת אומרת A היא טאוטולוגיה.בכיוון השני, נניח כי A היא טאוטולוגיה, צריך להוכיח כי A' , A'' הן טאוטולוגיות. ניקח הערכה V . אם קיים j , $1 \leq j \leq m$, כך ש- $V(B_j) = \mathbb{F}$ אז $V(A') = \mathbb{T}$, $V(A'') = \mathbb{T}$.אחרת, נניח ש- $V(B_j) = \mathbb{F}$ לכל j , $1 \leq j \leq m$, $j \neq i$. נתון כי $V(A) = \mathbb{T}$ ולכן $V(\neg(C \vee D)) = \mathbb{T}$ ואז $V(C \vee D) = \mathbb{F}$ ולכן $V(C) = \mathbb{F}$ וכן $V(D) = \mathbb{F}$. לכן $V(\neg C) = \mathbb{T}$ ולכן $V(A') = \mathbb{T}$ וכן $V(\neg D) = \mathbb{T}$ ולכן $V(A'') = \mathbb{T}$ כנדרש. ■**טענה 1.33** $\vdash A \vee B$ נובע $\vdash B \vee A$.**הוכחה:**

$$\begin{aligned}
 &\vdash A \vee B \\
 &\vdash (\neg A) \vee A \\
 &\vdash B \vee A
 \end{aligned}$$

כאשר השורה הראשונה נתונה, השניה נובעת מאקסיומת פרופ', והשלישית מכלל החתך. ■

טענה 1.34 מ- $A_{i_1} \vee A_{i_2} \vee \dots \vee A_{i_m}$ נובע $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$, כאשר $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}$.

קיימים לטענה זו הרבה מקרים פרטיים, למשל, מ- $A_4 \vee A_1 \vee A_3 \vee A_1$ נובע $A_1 \vee A_5$, $A_2 \vee A_3 \vee A_4 \vee A_5$, $4, 1, 3, 1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. כלומר, למעשה זוהי טענה מאוד כללית שמרשה להכליל מספר מהאקסיומות. **הוכחה:** נשתמש באינדוקציה על m .

קודם נטפל המקרה $m \geq 3$, לאחר מכן במקרה $m = 1$, ואחר כך במקרה $m = 2$.
 $m \geq 3$: לפי כלל האסוציאטיביות, מ- $\overbrace{A_{i_1} \vee A_{i_2} \vee \dots \vee A_{i_m}}^C$ נובע $\left(\overbrace{A_{i_1} \vee A_{i_2}}^A \vee \overbrace{A_{i_3} \vee \dots \vee A_{i_m}}^B \right) \vee$

יש כאן $m - 1$ גורמי אוי, ולכן ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה. לכן:

$$\vdash (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

לשם קיצור נסמן $A = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$, כלומר:

$$\vdash (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee A$$

למה לא יכולנו להסיק $\vdash A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$? התשובה - לא מצאנו את הגורם $A_{i_1} \vee A_{i_2}$ במסקנת ההיסק.

לפי כלל הקמוטטיביות שהוכחנו קודם, נקבל:

$$\vdash A \vee A_{i_1} \vee A_{i_2}$$

מאסוציאטיביות:

$$\vdash (A \vee A_{i_1}) \vee A_{i_2}$$

נעשה שימוש נוסף בהנחת האינדוקציה ונקבל:

$$\vdash (A \vee A_{i_1}) \vee A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

$$\vdash (A \vee A_{i_1}) \vee A$$

$$\vdash A \vee (A \vee A_{i_1})$$

$$\vdash (A \vee A) \vee A_{i_1}$$

$$\vdash (A \vee A) \vee A \vee A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

לפי כלל הצמצום:

$$\vdash A \vee A$$

ושוב לפי כלל הצמצום:

$$\vdash A$$

$$\vdash A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

כנדרש למקרה זה.

כעת, נטפל במקרה $m = 1$ - זאת אומרת מ- A_{i_1} צריך להסיק $A_1 \vee \dots \vee A_n$.
לפי כלל ההרחבה, מ- A_{i_1} נובע $A_{i_1} \vee B$ עבור B כלשהוא, ובפרט מתקיים:

$$\vdash (A_{i_1+1} \vee \dots \vee A_n) \vee A_{i_1}$$

לפי כלל ההחלפה⁶:

$$\vdash A_{i_1} \vee (A_{i_1+1} \vee \dots \vee A_n)$$

לפי כלל ההרחבה:

$$\vdash A_{i_1-1} \vee (A_{i_1} \vee \dots \vee A_n)$$

שוב, לפי כלל ההרחבה:

$$\vdash A_{i_1-2} \vee A_{i_1-1} \vee \dots \vee A_n$$

לאחר $i_1 - 1$ פעולות, נקבל:

$$\vdash A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

כנדרש במקרה זה.

לסיום, נוכיח את המקרה בו $m = 2$: נתון

$$\vdash A_{i_1} \vee A_{i_2}$$

אם $i_1 = i_2$, אזי לפי כלל הצמצום, מ- $A_{i_1} \vee A_{i_1}$ נקבל A_{i_1} , ולפי המקרה $m = 1$, נקבל:

$$\vdash A_1 \vee \dots \vee A_n$$

נניח $i_1 \neq i_2$. אם $i_1 > i_2$, נשתמש בהחלפה ונקבל:

$$\vdash A_{i_2} \vee A_{i_1}$$

לכן נוכל להניח כי $i_1 < i_2$. צריך לקבל:

$$\vdash A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

נשתמש באינדוקציה לפי n .

הערך המינימלי של n הוא 2. עבור $n = 2$, $i_2 = 2$, $i_1 = 1$. לכן נתון $A_1 \vee A_2$.
נניח $n > 2$. אם $i_1 > 1$ אז לפי הנחת האינדוקציה:

$$\vdash \underbrace{A_2 \vee A_3 \vee \dots \vee A_n}_{n-1}$$

⁶שיטה לא נכונה:

$$\vdash (A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_{i_1-1}) \vee (A_{i_1} \vee \dots \vee A_n)$$

הבעיה - סדר הסוגריים לא נכון!

$i_1, i_2 \in \{2, 3, \dots, n\}$ לפי כלל ההרחבה:

$$\vdash A_1 \vee (A_2 \vee \dots \vee A_n)$$

אחרת נניח $i_1 = 1, i_2 > 2$, אז לפי הנחת האינדוקציה, נקבל:

$$\vdash \underbrace{A_1 \vee (A_3 \vee \dots \vee A_n)}_{n-1}, i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$$

לפי כלל ההחלפה:

$$\vdash (A_3 \vee \dots \vee A_n) \vee A_1$$

לפי כלל ההרחבה:

$$\vdash A_2 \vee ((A_3 \vee \dots \vee A_n) \vee A_1)$$

לפי כלל האסוציאטיביות:

$$\vdash (A_2 \vee (A_3 \vee \dots \vee A_n)) \vee A_1$$

לפי כלל ההחלפה:

$$\vdash A_1 \vee (A_2 \vee A_3 \vee \dots \vee A_n)$$

נשאר המקרה $i_1 = 1, i_2 = 2$, כלומר $\vdash A_1 \vee A_2$.

$$\vdash (A_3 \vee \dots \vee A_n) \vee (A_1 \vee A_2)$$

מאסוציאטיביות:

$$\vdash ((A_3 \vee \dots \vee A_n) \vee A_1) \vee A_2$$

לפי כלל ההחלפה:

$$\vdash A_2 \vee ((A_3 \vee \dots \vee A_n) \vee A_1)$$

אסוציאטיביות:

$$\vdash (A_2 \vee (A_3 \vee \dots \vee A_n)) \vee A_1$$

החלפה:

$$\vdash A_1 \vee (A_2 \vee (A_3 \vee \dots \vee A_n))$$

כנדרש.⁷

טענה 1.35 מ- $\vdash A \vee B$ נובע $\vdash \neg\neg A \vee B$.

⁷ריפס רמז שהוכחה זו תהיה בבחינה..

הוכחה: $\vdash \neg A \vee \neg A$ (אקסיומה)

$\vdash \neg A \vee \neg A$ (החלפה)

■ לפי כלל החתך $\vdash B \vee \neg A$, $\vdash \neg A \vee B$ כנדרש. מ- $\begin{cases} \vdash A \vee B \\ \vdash \neg A \vee \neg A \end{cases}$

טענה 1.36 מ- $\vdash \neg A \vee C$ ו- $\vdash \neg B \vee C$ נובע $\vdash \neg(A \vee B) \vee C$.

הוכחה: $\vdash \neg(A \vee B) \vee (A \vee B)$ (אקסיומה)

$\vdash A \vee B \vee \neg(A \vee B)$ (ע"ס 1.34).

$\vdash \neg A \vee C$ נתון, ועל פי השורה הקודמת, שורה זו וכלל החתך נקבל:

$\vdash (B \vee (\neg(A \vee B))) \vee C$

$\vdash C \vee (B \vee \neg(A \vee B))$ מכיל החילוף. אז מ-1.34 שוב נקבל:

$\vdash B \vee (\neg(A \vee B)) \vee C$. אזי משורה זו, הנתון $\vdash \neg B \vee C$ וכלל החתך, נקבל:

$\vdash ((\neg(A \vee B)) \vee C) \vee C$

$\vdash C \vee (\neg(A \vee B) \vee C)$ החלפה.

■ $\vdash \neg(A \vee B) \vee C$ לפי 1.34 שהוכחנו.

משפט 1.37 משפט פוסט:

אם A טאוטולוגיה, אז $\vdash A$.

הוכחה: נשתמש באינדוקציה לפי $L(A)$ (כפי שהגדרנו בעבר).

מקרה 1:

$$A = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

כאשר כל A_i היא נוסחא אלמנטרית או שלילתה.

A טאוטולוגיה, לכן קיימים $i \neq j$ כך ש:

$$A_j = \neg A_i$$

$\vdash A_j \vee A_i$ אקסיומה. כלומר, $\vdash A_j \vee A_i$.

על סמך הטענה הכללית 1.34:

$$\vdash A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

כלומר $\vdash A$.

מקרה 2: קיים $i, 1 \leq i \leq n$, כך ש: $A_i = B \vee C$, כלומר:

$$A = A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee (B \vee C) \vee \dots \vee A_n$$

נגדיר:

$$A' = A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee B \vee C \vee \dots \vee A_n$$

ראינו כי $L(A') < L(A)$.

נתון ש- A טאוטולוגיה, לכן A' טאוטולוגיה, כי לכל הערכה V , $V(A') = V(A)$. לפי

הנחת האינדוקציה, $\vdash A'$.

לפי הטענה הכללית 1.34, מ- $A' \vdash$ ניתן להסיק:

$$\vdash A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n \vee (B \vee C)$$

לפי הטענה הכללית 1.34:

$$\vdash A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee (B \vee C) \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n$$

כלומר $A \vdash$.

מקרה 3: קיים $i, 1 \leq i \leq n$, כך ש- $A_i = \neg(B \vee C)$, כלומר:

$$A = A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee (\neg(B \vee C)) \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n$$

נגדיר:

$$A' = A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee (\neg B) \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n$$

$$A'' = A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee (\neg C) \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n$$

ברור כי מתקיים $L(A') < L(A)$, $L(A'') < L(A)$.
הוכחנו כי אם A טאוטולוגיה, אז A', A'' טאוטולוגיות.
לפי הנחת האינדוקציה, $A' \vdash$ ו- $A'' \vdash$.
מהטענה הכללית נובע:

$$\vdash (\neg B) \vee A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n$$

וכן:

$$\vdash (\neg C) \vee (A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n)$$

לפי הטענה השלישית שהוכחנו:

$$\vdash (\neg(B \vee C)) \vee (A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n)$$

לפי הטענה הכללית:

$$\vdash A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee (\neg(B \vee C)) \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n$$

כלומר $A \vdash$.

מקרה 4: קיים $i, 1 \leq i \leq n$, כך ש- $A_i = \neg\neg B$, כלומר:

$$A = A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee \neg\neg B \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n$$

נגדיר:

$$A' = A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee B \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n$$

אז $L(A') < L(A)$ ולכל הערכה V , $V(A') = V(A)$. לכן מכך ש- A טאוטולוגיה, נובע ש- $A' \vdash$ טאוטולוגיה, ולפי הנחת האינדוקציה, $A' \vdash$. לפי הטענה הכללית:

$$\vdash B \vee (A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n)$$

לכן, מטענה שהוכחנו:

$$\vdash (\neg\neg B) \vee (A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n)$$

לפי הטענה הכללית:

$$\vdash A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee \neg\neg B \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n$$

■

דהיינו A , כנדרש.

הוכחנו את משפט פוסט, "כלומר לפחות מערכת ההיסק שלנו שווה משהו". מכאן אין הרבה לאן להתקדם, זהו משפט ההיסק העיקרי - רק המשפט של גדל, אולם הוא לא נותן תהליך לבדיקה של נכונות משפט כלשהו (אחרת יכולנו תמיד לדעת אם בהנתן משפט, הוא נכון או אינו נכון).

1.2.5 כלל הניתוק (Modus Ponens)

משפט 1.38 מ- $A \rightarrow B$ ו- A נובע B .

הוכחה: $B \vee A$ הרחבה

החלפה $A \vee B$

נתון $\neg A \vee B$

כלל החתך $B \vee B$

B צמצום, כנדרש.

■

ישנה גם הכללה לכלל הניתוק:

משפט 1.39 מ- $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow B$ וכן $A_1, \dots, A_k$ נובע B .

הוכחנו נוסחא לגבי היות נוסחא טאוטולוגיה.

נניח שנתונות נוסחאות $A_1, A_2, \dots, A_k, B$.

הגדרה 1.40 הנוסחא B נקראת גרירה טאוטולוגית של הנוסחאות $A_1, A_2, \dots, A_k$, אם כל הערכה V שעבורה $V(A_1) = \mathbb{T}, \dots, V(A_k) = \mathbb{T}$ גם מקיימת $V(B) = \mathbb{T}$.

מסקנה 1.41 מסקנה ממשפט פוסט: אם B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1, \dots, A_k$, ואם $\vdash A_1, \dots, \vdash A_k$ אז $\vdash B$.

הוכחה: בדקו כי הנוסחא B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1, \dots, A_k$ אמ"מ הנוסחא $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow B$ היא טאוטולוגיה.

לפי הנתון, $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow B$ טאוטולוגיה. לכן ממשפט פוסט:

$$\vdash A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow B$$

■

ולפי כלל הניתוק, נקבל $\vdash B$, כנדרש.

8/12/2011

מסקנה זו ניתנת לשימוש במגוון רחב של מקרים. לדוגמא:

$\neg B \rightarrow \neg A$ היא גרירה טאוטולוגית של $A \rightarrow B$. בפועל, לכל הערכה V :

$$V(A \rightarrow B) = V(\neg B \rightarrow \neg A)$$

$V(A)$	$V(B)$	$V(A \rightarrow B)$	$V(\neg B \rightarrow \neg A)$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$

לכן מ- $A \rightarrow B$, נסיק כי $\neg B \rightarrow \neg A$.

דוגמא שניה:

$A_1 \rightarrow A_3$ היא גרירה טאוטולוגית של $A_2 \rightarrow A_3, A_1 \rightarrow A_2$.
בדיקה: צריך לבדוק כי כל הערכה V אשר מקיימת $V(A_1 \rightarrow A_2) = \mathbb{T}$ ו- $V(A_2 \rightarrow A_3) = \mathbb{T}$, מקיימת $V(A_1 \rightarrow A_3) = \mathbb{T}$.

$$V(A_1 \rightarrow A_3) = \mathbb{T}$$

אם $V(A_3) = \mathbb{T}$, אז ממילא $V(A_1 \rightarrow A_3) = \mathbb{T}$.
אם $V(A_1) = \mathbb{F}$, אז ממילא $V(A_1 \rightarrow A_3) = \mathbb{T}$.
נשארו עם האפשרויות $V(A_1) = \mathbb{T}, V(A_3) = \mathbb{F}$.
מכיוון שאז $V(A_1 \rightarrow A_3) = \mathbb{F}$, צריך להראות כי לפחות אחת הנוסחאות $A_1 \rightarrow A_2$ או $A_2 \rightarrow A_3$ תקבל ערך $\mathbb{F}$. אם $V(A_2) = \mathbb{T}$, אז $V(A_2 \rightarrow A_3) = \mathbb{F}$ ואם $V(A_2) = \mathbb{F}$, אז $V(A_1 \rightarrow A_2) = \mathbb{F}$. כנדרש.

באופן יותר כללי, הנוסחא $A_1 \rightarrow A_k$ היא גרירה טאוטולוגית של הנוסחאות $A_1 \rightarrow A_2, \dots, A_{k-1} \rightarrow A_k$.
הוכחה: נניח שההערכה V נותנת ל: $A_1 \rightarrow A_2, \dots, A_{k-1} \rightarrow A_k$ ערך $\mathbb{T}$.

אם $V(A_1) = \mathbb{T}, V(A_1 \rightarrow A_2) = \mathbb{T}, V(A_2) = \mathbb{T}$, אז $V(A_2) = \mathbb{T}$.
מ: $V(A_3) = \mathbb{T}, V(A_2 \rightarrow A_3) = \mathbb{T}, V(A_2) = \mathbb{T}$.
וכן הלאה, עד שנקבל $V(A_k) = \mathbb{T}$, ולכן גם $V(A_1 \rightarrow A_k) = \mathbb{T}$.
אם $V(A_1) = \mathbb{F}$, אז $V(A_1 \rightarrow A_k) = \mathbb{T}$, כנדרש.

במקום לטרוח ולחפש היסק לפי כללי היסק כפי שעשינו עד כה, כעת לאחר משפט הטאוטולוגיה נפטרו מצורך זה, ומספיק לבדוק הערכות. במגוון רחב של מקרים, משפט זה אם כך מבטל את הצורך במציאת סדרת היסק. נשתמש בכך הרבה.

1.3 פעולות עם כמתים

בפעול לא כל כך דיברנו על שימוש בכמתים במערכת ההיסק. נעשה זאת כעת.

1.3.1 כלל הכנסת $\forall$

נזכיר את כלל הכנסת הכמת $\exists$:

מ- $A \rightarrow B$ נובע $\vdash (\exists x) A \rightarrow B$ בתנאי שאין הופעה חפשית של x ב- B .

נסח כלל דומה - כלל הכנסת $\forall$:

מ- $A \rightarrow B$ נובע $\vdash A \rightarrow (\forall x) B$ בתנאי שאין הופעה חפשית של x ב- A . **הוכחה:**

נתון $\vdash A \rightarrow B$ ו- x אינו מופיע חפשית ב- A . על סמך משפט הטאוטולוגיה, $\vdash \neg B \rightarrow \neg A$.
היות ו- x אינו מופיע חפשית ב- $\neg A$, אפשר להשתמש בכלל הכנסת $\exists$ ולקבל:

$$\vdash ((\exists x) (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$$

על סמך משפט הטאוטולוגיה, נקבל (מוסיפים עוד שלילה והופכים את הצדדים):

$$\begin{aligned} & \vdash (\neg(\neg A)) \rightarrow (\neg((\exists x)(\neg B))) \\ \Rightarrow & \vdash \neg\neg A \rightarrow (\forall x) B \end{aligned}$$

ברור שלכל הערכה V , $V(\neg\neg A) = V(A)$, ולכן לכל הערכה V :

$$V(A \rightarrow (\forall x) B) = V(\neg\neg A \rightarrow (\forall x) B)$$

לכן על סמך משפט הטאוטולוגיה נקבל:

$$\vdash A \rightarrow (\forall x) B$$

■ כנדרש!

1.3.2 כלל ההכללה

מ- $A \vdash \neg(\forall x) A \rightarrow A$ נובע $\vdash A$. **הוכחה:** נתון A . על סמך משפט הטאוטולוגיה $\vdash \neg(\forall x) A \rightarrow A$.
 x אינו מופיע חפשית ב- $\neg(\forall x) A$ (כי גם אם לא היה קשור בכמת ב- A , אזי כעת קשור ב- $\forall$), אזי לפי כלל הכנסת $\forall$:

$$\vdash \neg(\forall x) A \rightarrow (\forall x) A$$

הנוסחא $(\forall x) A$ היא גרירה טאוטולוגית של הנוסחא $\neg(\forall x) A \rightarrow (\forall x) A$:

$V((\forall x) A)$	$\neg(\forall x) A \rightarrow (\forall x) A$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

■ לכן $\vdash \neg(\forall x) A$, כנדרש.

1.3.3 כלל ההצבה

ניזכר באקסיומת ההצבה (שלא ממש ניסחנו בצורה מסודרת):

$$\vdash A_x[u] \rightarrow (\exists x) A$$

טענה 1.42 אם A , אז $\vdash A_x[u]$.

הוכחה: לפי אקסיומת ההצבה, $\vdash \neg A_x[u] \rightarrow (\exists x) \neg A$.
על סמך משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash \neg(\exists x) \neg A \rightarrow \neg\neg A_x[u]$$

זאת אומרת:

$$\vdash (\forall x) A \rightarrow A_x[u]$$

על סמך כלל ההכללה, מ- $A \vdash \neg(\forall x) A \rightarrow A_x[u]$ נובע $\vdash (\forall x) A$. לכן, על סמך כלל הניתוק, $\vdash A_x[u]$, כנדרש! ■

12/12/2011

הוכחנו את כלל הכנסת $\exists$, כלל הכנסת $\forall$, וכלל ההכללה: מ- $A \vdash \text{נובע } (\forall x) A$.
יהיו $A = P(x_1, x_2)$, $B = Q(x_1, x_2)$, סמלי יחסים דו מקומיים. יהי $\mathcal{M}$ כך ש-
 $|\mathcal{M}| = \mathbb{R}$. נסמן:

$$\begin{aligned} R &= P^{\mathcal{M}^{-1}}(T) \subseteq \mathbb{R}^2, A^{\mathcal{M}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}, A^{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}| \times |\mathcal{M}| \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\} \\ S &= Q^{\mathcal{M}^{-1}}(T) \subseteq \mathbb{R}^2, A^{\mathcal{M}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}, A^{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}| \times |\mathcal{M}| \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\} \\ \mathcal{M} &\vdash A \rightarrow B, \vdash P(x_1, x_2) \rightarrow Q(x_1, x_2) \end{aligned}$$

תהי $\sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}| = \mathbb{R}$ אזי:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(P(x_1, x_2)) &= \mathbb{T} \Leftrightarrow \sigma(x_1), \sigma(x_2) \in \mathbb{R} \\ \bar{\sigma}(Q(x_1, x_2)) &= \mathbb{T} \Leftrightarrow \sigma(x_1), \sigma(x_2) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

לכן $\mathcal{M} \models A \rightarrow B$ אם ורק אם לכל השמה $\sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}|$, $\bar{\sigma}(A \rightarrow B) = \mathbb{T}$, אמ"מ
 $R \subseteq S$. נשאל מה הקשר בין נכון להכנסת הכמת $\exists$.

$$\begin{aligned} &(\exists x_1) A \rightarrow B \\ &(\exists x_1) P(x_1, x_2) \rightarrow Q(x_1, x_2) \\ \bar{\sigma}((\exists x_1) P(x_1, x_2)) &= \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \bar{\sigma}[x/a] P(x_1, x_2) = \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} P^{\mathcal{M}}(a, \sigma(x_1)) \end{aligned}$$

נניח ש- $\bar{\sigma}((\exists x_1) P(x_1, x_2)) = \mathbb{F}$, $\bar{\sigma}(Q(x_1, x_2)) = \mathbb{T}$. נקבל:

$$\bar{\sigma}((\exists x_1) P(x_1, x_2) \rightarrow Q(x_1, x_2)) = \mathbb{F} \quad \mathcal{M} \not\models (\exists x_1) A \rightarrow B$$

כלומר לא נוכל להסיק את הנוסחא הזו, לפי משפט הנאותות. זה מוכיח שבלי מגבלה על כללי היסק, אי אפשר לקחת את כלל הטלת הכמת בצורה בלתי מוגבלת (אז היינו מקבלים סתירה לכלל הנאותות).

למה "זה בסדר" אם x_1 לא מופיע בצורה בלתי חופשית ב- Q ? אז בקבוצה S משתנה x_1 לא היה רלוונטי, כי התלות היתה רק ב- x_2 (לא חשוב איזה ערך ההשמה נותנת ל- x_1), לכן כל קבוצת האמיתות של Q מורכבת מ"קווים ישרים" - במקרה כזה אנחנו מועברים מהקבוצה R (האמיתות של A) לקבוצה S (האמיתות של B).
תרגיל: עשו את אותו הדיון עבור כלל הכנסת $\forall$.

כלל ההצבה:

מ- $A \vdash \text{נובע } A_{x_1, \dots, x_n}[u_1, u_2, \dots, u_n]$.
כבר הוכחנו (בשיעור הקודם) בהסתמך על אקסיומת ההצבה⁸ כי מ- $A \vdash \text{נובע } A_x[u]$.
הוכחה: נבחר משתנים חדשים $y_1, \dots, y_n$.
מ: $A \vdash \text{נקבל:}$

$$\begin{aligned} &\vdash A_{x_1}[y_1] \\ &\Rightarrow \vdash (A_{x_1}[y_1])_{x_2}[y_2] \\ &\vdash A_{x_1, x_2}[y_1, y_2] \end{aligned}$$

$$\vdash A_x[u] \rightarrow (\exists x) A^8$$

בהסתמך על כך ש- y_2 לא הופיע מעלה - הוא חדש. נשאל:

$$\vdash (A_{x_1} [u_1])_{x_2} [u_2] \stackrel{?}{=} A_{x_1 x_2} [u_1, u_2]$$

כאן לא נקבל שיוויון (הגישה הנאיבית נכשלת) אם x_2 מופיע ב- u_1 . על כן יש להמשיך בתהליך הקודם:

$$(A_{x_1, x_2} [y_1, y_2])_{x_3} [y_3] = A_{x_1, x_2, x_3} [y_1, y_2, y_3]$$

אחרי n שלבים כאלה נקבל $\vdash A_{x_1, x_2, \dots, x_n} [y_1, y_2, \dots, y_n]$. אבל זה לא מה שרצינו לקבל. נטען:

$$(A_{x_1, x_2, \dots, x_n} [y_1, y_2, \dots, y_n])_{y_1} [u_1] = A_{x_1, x_1, \dots, x_n} [u_1, y_2, y_3, \dots, y_n]$$

כך נוכל להמשיך - זהו מעבר חוקי, שכן y_i הם משתנים חדשים, ואז נוכל להשתמש במה שהוכחנו בשיעור שעבר. נוכל להמשיך:

$$(A_{x_1, x_2, \dots, x_n} [u_1, y_2, \dots, y_n])_{y_2} [u_2] = A_{x_1, x_1, \dots, x_n} [u_1, u_2, y_3, \dots, y_n]$$

כך נוכל להמשיך n פעמים, ולבסוף נקבל:

$$(A_{x_1, x_2, \dots, x_n} [u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, y_n])_{y_n} [u_n] = A_{x_1, x_1, \dots, x_n} [u_1, u_2, \dots, u_n]$$

כנדרש. ■

1.3.4 משפט ההצבה

מכליל את כלל ההצבה.

משפט 1.43 א. $\vdash A_{x_1, x_2, \dots, x_n} [u_1, u_2, \dots, u_n] \rightarrow (\exists x_1) (\exists x_2) \dots (\exists x_n) A$
 ב. $\vdash (\forall x_1) (\forall x_2) \dots (\forall x_n) A \rightarrow A_{x_1, x_2, \dots, x_n} [u_1, u_2, \dots, u_n]$

הוכחה: א. לפי אקסיומת ההצבה, $\vdash A \rightarrow (\exists x_1) A$, וכן $\vdash A \rightarrow (\exists x_{n-1}) (\exists x_n) A$.

$$\vdash (\exists x_2) \dots (\exists x_n) A \rightarrow (\exists x_1) (\exists x_2) \dots (\exists x_n) A$$

$$\vdash (\exists x_3) \dots (\exists x_n) A \rightarrow (\exists x_2) \dots (\exists x_n) A$$

$$\vdash A \rightarrow (\exists x_n) A$$

על פי משפט הטאוטולוגיה (מההכלה של $A \rightarrow B, B \rightarrow C$ אז $A \rightarrow C$):

$$\vdash A \rightarrow (\exists x_1) (\exists x_2) \dots (\exists x_n) A$$

כעת נרצה להשתמש בכלל ההצבה:

$$(A \rightarrow (\exists x_1) \dots (\exists x_n) A)_{x_1, \dots, x_n} [u_1, u_2, \dots, u_n]$$

$$= A_{x_1, x_2, \dots, x_n} [u_1, u_2, \dots, u_n] \rightarrow (\exists x_1) \dots (\exists x_n) A$$

זאת אומרת:

$$\vdash A_{x_1, x_2, \dots, x_n} [u_1, u_2, \dots, u_n] \rightarrow (\exists x_1) (\exists x_2) \dots (\exists x_n) A$$

כנדרש לחלק זה.

ב. נוכיח בצורה מאוד דומה לסעיף הקודם. לפי אקסיומת ההצבה, מתקיים $\vdash \neg A \rightarrow (\exists x)(\neg A)$. אזי ממשפט הטאוטולוגיה (שלילה בשני הצדדים והיפוך) נקבל כי $\vdash (\forall x) A \rightarrow A$. נשתמש בזה:

$$\begin{aligned} &\vdash (\forall x_n) A \rightarrow A \\ &\vdash (\forall x_{n-1})(\forall x_n) A \rightarrow (\forall x_n) A \\ &\vdash (\forall x_{n-2})(\forall x_{n-1})(\forall x_n) A \rightarrow (\forall x_{n-1})(\forall x_n) A \\ &\dots \\ &\vdash (\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n) A \rightarrow (\forall x_2) \dots (\forall x_n) A \end{aligned}$$

על סמך ממשפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash (\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n) A \rightarrow A$$

על סמך כלל ההצבה:

$$\vdash ((\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n) A \rightarrow A)_{x_1, x_2, \dots, x_n} [u_1, u_2, \dots, u_n]$$

ז"א:

$$\vdash (\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n) A \rightarrow A_{x_1, x_2, \dots, x_n} [u_1, u_2, \dots, u_n]$$

■

כנדרש.

1.3.5 כלל הדיסטריוטיביות

15/12/2011

מ- $\vdash A \rightarrow B$ נובע א. $\vdash (\exists x) A \rightarrow (\exists x) B$ וכן ב. $\vdash (\forall x) A \rightarrow (\forall x) B$. הוכחה: א. לפי אקסיומת ההצבה, $\vdash B \rightarrow (\exists x) B$. ע"ס מ"ט, $\vdash A \rightarrow (\exists x) B$. לפי כלל הכנסת $\exists$, $\vdash (\exists x) A \rightarrow (\exists x) B$. ב. לפי ממשפט ההצבה $\vdash (\forall x) A \rightarrow A$. ע"ס מ"ט $\vdash (\forall x) A \rightarrow B$. לפי כלל הכנסת $\forall$, אפשר להשתמש שכן כעת x קשור בכמת, $\vdash (\forall x) A \rightarrow (\forall x) B$, כנדרש. ■

טענה 1.44 $\vdash A$ אם ורק אם $\vdash (\forall x) A$.

הוכחה: $\Leftarrow$ ע"פ כלל ההכללה, מ- $\vdash A$ נובע $\vdash (\forall x) A$. $\Rightarrow$ לפי ממשפט ההצבה, $\vdash (\forall x) A \rightarrow A$, ומההנחה $\vdash (\forall x) A$, אם נשתמש בכלל הניתוק, נקבל $\vdash A$, כנדרש. ■

הערה 1.45 מהטענה הזו לא נובע:

$$\vdash A \leftrightarrow (\forall x) A$$

מדוע? יכול להיות שיש משתנה חופשי שיקשר בכמת, ואז נקבל תוצאה שגויה. נשים לב, גם הביטוי הבא לא נכון, הצד הלא נכון הוא:

$$\vdash A \rightarrow (\forall x) A$$

אולם הביטוי הבא נכון:

$$\vdash (\forall x) A \rightarrow A$$

למשל, יהי $\mathcal{M}$, כאשר $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $A = P(x)$. נגדיר:

$$P^{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}| \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}, P^{\mathcal{M}}(a) = \mathbb{T}, P^{\mathcal{M}}(b) = \mathbb{F}$$

תהי $\sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}|$ כך ש- $\sigma(x) = a$. אזי:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A \rightarrow (\forall x) A) &= \bar{\sigma}(A) \rightarrow \bar{\sigma}((\forall x) A) = \bar{\sigma}(P(x)) \rightarrow \bigwedge_{c \in |\mathcal{M}|} \bar{\sigma}[x/c]P(a) \\ &= P^{\mathcal{M}}(a) \rightarrow (\bar{\sigma}[x/a]P(x) \wedge \bar{\sigma}[x/b]P(x)) \\ &= P^{\mathcal{M}}(a) \rightarrow (P^{\mathcal{M}}(a) \wedge P^{\mathcal{M}}(b)) = \mathbb{T} \rightarrow (\mathbb{T} \wedge \mathbb{F}) = \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{F} = \mathbb{F} \end{aligned}$$

בסתירה למשפט הנאותות!

1.4 הרחבת השפה

עד עכשיו הסתכלנו על ההיסק שהגיע ממשפחת האקסיומות הלוגיות וכללי ההיסק.

אפשר וחשוב לעשות את הדבר הבא:

ניקח (בשפה מסויימת) קבוצה של נוסחאות $\mathcal{A}$ ונכריז על הנוסחאות מ- $\mathcal{A}$ כאקסיומות נוספות (לא לוגיות). את ההיסק במסגרת קבלת כל הנוסחאות מ- $\mathcal{A}$ כאקסיומות נסמן ב- $\vdash_{\mathcal{A}}$. בכך נרחיב את האפשרויות של ההיסק.

כלומר, כעת השאלה היא לא מה נוכל להסיק רק מאקסיומות לוגיות, אלא מה נוכל להסיק מהאקסיומות הלוגיות ואקסיומות נוספות.

קודם כל, צריכים להיות בטוחים שעדיין יש לנו גרסא מתאימה של משפט הנאותות. כעת, משפט הנאותות צריך לומר שאם $\mathcal{M} \models B$, $B \in \mathcal{A}$ ולכל $\mathcal{M} \models B$, $B \in \mathcal{A}$ (כלומר $\mathcal{M}$ הוא מודל של $\mathcal{A}$), אז אם $\vdash_{\mathcal{A}} C$ אז $\mathcal{M} \models C$. ההוכחה של גרסא זו של משפט הנאותות זהה להוכחה שהבאנו עבור הגרסא הראשונה.

1.4.1 משפט הדדוקציה

19/12/2011

בפעם הקודמת הדגשנו שלמרות ש: $\vdash A$ נובע $\vdash (\forall x) A$, לא נכון $\vdash A \rightarrow (\forall x) A$. נניח ש- $\mathcal{A} = \{A\}$ כלומר הקבוצה מכילה (לפחות) את A בתור האקסיומה. אזי $\vdash_{\mathcal{A}} A$, ולכן $\vdash_{\mathcal{A}} (\forall x) A$ (הוכחנו בעבר).

תהי T קבוצה נוסחאות, ונסמן: $T[A] = T \cup \{A\}$ - כלומר T בתוספת A .

משפט 1.46 אם A נוסחא סגורה, אז $\vdash_{T[A]} B$ אם ורק אם $\vdash_T A \rightarrow B$.

הערה 1.47 אם $T = \emptyset$, אז $T[A] = \{A\}$ כלומר T מכילה רק את A . נסמן $B = (\forall x) A$. אזי אם $\vdash A \rightarrow B$, נציב ונקבל $\vdash A \rightarrow (\forall x) A$ - כביכול קבלנו כאן סתירה למשפט הדדוקציה (כי ראינו מעלה כי מ- $\vdash A$ לא נכון $\vdash (\forall x) A$!). הקאצ' כאן הוא שמשפט הדדוקציה נכון לנוסחא סגורה בלבד - על כן תנאי זה הוא חיוני, ללא התנאי המשפט אינו נכון.

הוכחה: $\Rightarrow$ נניח ש- $\vdash_T A \rightarrow B$. אז $\vdash_{T[A]} A \rightarrow B$. מצד שני $\vdash_{T[A]} A$. לכן, לפי כלל הניתוק:

$$\vdash_{T[A]} B$$

$\Leftarrow$ נתון $\vdash_{T[A]} B$, צ"ל $\vdash_T A \rightarrow B$ נשתמש באינדוקציה על אורך ההיסק של B, m .
 הבסיס עבור $m = 0$ טריוויאלי (כאשר במקרה $m = 1$ אפשר להשתמש רק באקסיומות - כלומר למעשה אלו שלוש האפשרויות הראשונות מטה).
 נניח נכונות עבור m , נוכיח עבור $m + 1$. נעבור על האפשרויות עבור הצעד ה- $m + 1$:

• שימוש באקסיומות:

- $\vdash_{T[A]} C$ כאשר C אקסיומה לוגית, אז $\vdash_T C$ ולכן $\vdash_T A \rightarrow C$ כי זוהי גרירה טאוטולוגית.

- $\vdash_{T[A]} D$ כאשר $D \in T$, אז $\vdash_T D$, ולכן $\vdash_T A \rightarrow D$.

- $\vdash_{T[A]} A$ אזי על סמך משפט הטאוטולוגיה $\vdash_T A \rightarrow A$.

עברנו מעלה על האפשרות שהשתמשנו באקסיומות. יש לעבור גם על האפשרויות של שימוש בכללי היסק. נחלקם לשני חלקים: כללי היסק ללא הכנסת כמת $\exists$, וכלל הכנסת $\exists$.
 אזי הקבוצה הראשונה מכילה את:

• כלל ההרחבה: מ- $\vdash A$ נובע $\vdash B \vee A$.

• כלל הצמצום: מ- $\vdash A \vee A$ נובע $\vdash A$.

• כלל האסוציאטיביות: מ- $\vdash A \vee (B \vee C)$ נובע $\vdash (A \vee B) \vee C$.

• כלל החתך: מ- $\vdash A \vee B$ ו- $\vdash \neg A \vee C$ נובע $\vdash B \vee C$.

צורת כל כללי ההיסק הנ"ל - נוסחא C היא גרירה טאוטולוגית של $B_1, B_2, \dots, B_k$:

• $B \vee A$ היא גרירה טאוטולוגית של A .

• A היא גרירה טאוטולוגית של $A \vee A$.

• $(A \vee B) \vee C$ היא גרירה טאוטולוגית של $A \vee (B \vee C)$.

• $B \vee C$ היא גרירה טאוטולוגית של $A \vee B$ ו- $\neg A \vee C$.

טענה 1.48 אם C היא גרירה טאוטולוגית של $B_1, \dots, B_k$, אז $A \rightarrow C$ היא גרירה טאוטולוגית של $A \rightarrow B_1, A \rightarrow B_2, \dots, A \rightarrow B_k$.

הוכחה: תהי V הערכה, ונניח ש:

$$V(A \rightarrow B_1) = \mathbb{T}, \dots, V(A \rightarrow B_k) = \mathbb{T}$$

אם $V(A) = \mathbb{F}$ אז $V(A \rightarrow C) = \mathbb{T}$.

אחרת אם $V(A) = \mathbb{T}$, אז $V(B_1) = \dots = V(B_k) = \mathbb{T}$ ולכן $V(C) = \mathbb{T}$ כי C היא גרירה טאוטולוגית של $B_1, B_2, \dots, B_k$, ומכאן $V(A \rightarrow C) = \mathbb{T}$. ■

אזי:

- $\vdash_T A \rightarrow B_1$ לפי הנחת האינדוקציה $\vdash_{T[A]} B_1$.
 - כן הלאה עבור כל i .
 - עבור $\vdash_{T[A]} C$ שקיבלנו בשלב $m+1$ משימוש באחד מכללי ההיסק בקבוצה זו, מכיוון ואנו יודעים כי $\vdash_T A \rightarrow B_i$ לכל $1 \leq i \leq k$, אזי מהטענה נוכל להשתמש במשפט הטאוטולוגיה ולקבל $\vdash_T A \rightarrow C$, כנדרש.
- נותר אם כך להוכיח רק עבור כלל הכנסת $\exists$ - נניח כי בשלב $m+1$ השתמשנו בכלל זה, כלומר שלב זה הוא מהצורה $\vdash_{T[A]} (\exists x) C \rightarrow D$ אזי, בשלבים $k \leq m$, $\vdash_{T[a]} C \rightarrow D$, כאשר ב- D אין הופעה חופשית של x . על סמך הנחת האינדוקציה:

$$\vdash_T A \rightarrow (C \rightarrow D)$$

על סמך משפט הטאוטולוגיה, נקבל:

$$\vdash_T C \rightarrow (A \rightarrow D)$$

נשים לב - x אינו מופיע חופשית ב- $A \rightarrow D$, כי x אינו מופיע חופשית ב- D , וכן A נוסחא סגורה⁹. על כן נוכל להשתמש בכלל הכנסת $\exists$. נקבל:

$$\vdash_T (\exists x) C \rightarrow (A \rightarrow D)$$

ועל פי משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash_T A \rightarrow ((\exists x) C \rightarrow D)$$

כלומר המשפט נכון לכל האפשרויות, ועל כן המשפט נכון. ■
הכללה של משפט הדדוקציה ל- n נוסחאות:

משפט 1.49 אם $A_1, A_2, \dots, A_n$ נוסחאות סגורות, אזי $\vdash_{T[A_1, \dots, A_n]} B$ אם ורק אם $\vdash_T A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$.

הוכחה: $\Rightarrow$ נניח ש: $\vdash_T A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$ אזי:

$$\vdash_{T[A_1, \dots, A_n]} A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$$

מצד שני, $\vdash_{T[A_1, \dots, A_n]} A_1, \vdash_{T[A_1, \dots, A_n]} A_2, \dots, \vdash_{T[A_1, \dots, A_n]} A_n$. על סמך כלל הניתוק נקבל:

$$\vdash_{T[A_1, \dots, A_n]} A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$$

וכן הלאה, ולכן $\vdash_{T[A_1, \dots, A_n]} B$.

$\Leftarrow$ נניח ש: $\vdash_{T[A_1, \dots, A_n]} B$ לפי משפט הדדוקציה:

$$\vdash_{T[A_1, \dots, A_{n-1}]} A_n \rightarrow B$$

ואז $\vdash_{T[A_1, \dots, A_{n-2}]} A_{n-1} \rightarrow A_n \rightarrow B$ וכן הלאה, עד שנקבל $\vdash_T A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$. כנדרש. ■

⁹ זהו המקום לשימוש בתנאי קריטי זה! עד כה לא השתמשנו בהנחה זו.

1.4.2 משפט הקבועים

אנו נרחיב את השפה L ע"י הוספה לסיגנטורה של השפה קבועים חדשים, ז"א סמלי פונקציות 0-מקומיות - נסמן את השפה החדשה ב- L' .

משפט 1.50 $\vdash_{L,T} A$ אם ורק אם $\vdash_{L',T} A_{x_1,x_2,\dots,x_n} [e_1, e_2, \dots, e_n]$

הוכחה: $\Leftarrow$ מ- $\vdash_{L,T} A$ נקבל: $\vdash_{L',T} A$, ועל סמך כלל ההצבה:

$$\vdash_{L',T} A_{x_1,\dots,x_n} [e_1, \dots, e_n]$$

$\Rightarrow$ נתון $\vdash_{L',T} A_{x_1,\dots,x_n} [e_1, \dots, e_n]$, צ"ל $\vdash_{L,T} A$.

מההנחה, קיימת קבוצה נוסחה סופית (נניח בגודל m) של נוסחאות $\vdash_{L',T}$ המובילה ל- $\vdash_{L',T} A_{x_1,\dots,x_n} [e_1, \dots, e_n]$.

נבחר משתנים חדשים $y_1, y_2, \dots, y_n$ ¹⁰ ועוד עבור כל הקבועים החדשים שפגשנו במהלך ההיסק הנ"ל. בתהליך השכתוב, כל קבוע חדש e מוחלף במשתנה חדש מתאים y . בסוף התהליך, לאחר m השלבים נקבל:

$$\vdash A_{x_1,\dots,x_n} [y_1, \dots, y_n]$$

לא מובן מאליו שמה שקיבלנו הוא גם היסק. צריך לבדוק שקיבלנו היסק $\vdash_{L,T}$. שוב נבדוק את האפשרויות - שימוש באקסיומות ושימוש בכללי היסק:

- שימוש באקסיומה: שלב מסויים k נתן לנו $\vdash_{L',T} D$, כאשר D אקסיומה לוגית בשפה L' .

טענה 1.51 תהליך השכתוב מעביר כל אקסיומה לוגית בשפה L' לאקסיומה לוגית בשפה L .

- בשלב מסויים l , $\vdash_{L',T} K$, כאשר $K \in T$. אז תהליך השכתוב משאיר את K כמות שהוא.

- שימוש בכלל היסק: יכול להיות שבשלב p כלשהוא $\vdash M$ כאשר שלב זה התקבל מכלל היסק עבור $N_1, \dots, N_s$.

טענה 1.52 אם M התקבל מ- $N_1, \dots, N_s$ ע"י שימוש בכלל היסק, אותו הדבר נשאר נכון לאחר השכתוב.

אם הכל אכן נכון, אזי קיבלנו אכן היסק $\vdash_{L,T} A_{x_1,\dots,x_n} [y_1, \dots, y_n]$. אזי, ע"י כלל ההצבה, נקבל:

$$\vdash_{L,T} (A_{x_1,\dots,x_n} [y_1, \dots, y_n])_{y_1,\dots,y_n} [x_1, \dots, x_n]$$

זאת אומרת $\vdash_{L,T} A$ כנדרש.

נותר אם כך להוכיח את הטענות מעלה.
נביט באפשרויות שלנו:

¹⁰לאו דווקא $n = m$, יכולים להופיע משתנים נוספים בסדרת ההיסק הזו.

- $\neg B \vee B$ - תהליך השכתוב הופך את B ל- B^0 , ולכן הוא הופך את הנוסחא $\neg B \vee B$ לנוסחא $\neg B^0 \vee B^0$. B^0 היא נוסחא ב- T , ולכן $\neg B^0 \vee B^0$ היא אקסיומה ב- T .

- אקסיומת השיוויון:

- $x = x$ - כאן לא מופיעים קבועים חדשים, וממילא לאחר השכתוב נשאר עם $x = x$.

- $x_1 = y_1 \rightarrow x_2 = y_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$ - כנ"ל.

- $x_1 = y_1 \rightarrow x_2 = y_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow P(x_1, \dots, x_n) = P(y_1, \dots, y_n)$ - כנ"ל.

- $B_x[u] \rightarrow (\forall x) B$. לאחר השכתוב נקבל $B_x^0[u_0] \rightarrow (\forall x) B^0$, וזו גם נוסחא.
- מ- $\vdash C \vee B$ נסיק $\vdash C \vee B^0$, לאחר השכתוב מ- $\vdash B^0$ נסיק $\vdash C \vee B^0$, וגם זו נוסחא.
- מ- $\vdash B \vee B$ נסיק $\vdash B$, לאחר השכתוב מ- $\vdash B^0 \vee B^0$ נסיק $\vdash B^0$.
- מ- $\vdash B \vee (C \vee D)$ נסיק $\vdash (B \vee C) \vee D$, לאחר השכתוב נסיק מ- $\vdash B^0 \vee (C^0 \vee D^0)$ נסיק $\vdash (B^0 \vee C^0) \vee D^0$.
- מ- $\vdash B \vee C$ ו- $\vdash \neg B \vee D$ נסיק $\vdash C \vee D$, לאחר השכתוב מ- $\vdash B^0 \vee C^0$ ו- $\vdash \neg B^0 \vee D^0$ נסיק $\vdash C^0 \vee D^0$.
- מ- $\vdash B \rightarrow C$ נסיק $\vdash (\exists x) B \rightarrow C$ בתנאי ש- x אינו מופיע חפשי ב- C , מכיון ו- y_i חדשים לגמרי, לאחר השכתוב מ- $\vdash B^0 \rightarrow C^0$ נסיק $\vdash (\exists x) B^0 \rightarrow C^0$, כי $x \neq y_i$, ולכן x איננו מופיע חפשי ב- C^0 .

לכן הטענות נכונות, וע"י כלל ההצבה אכן נקבל את הנדרש. ■

1.4.3 משפט השקילות

משפט 1.53 נניח שנוסחא A' מתקבלת מנוסחא A ע"י החלפת כמה מהופעות של הנוסחאות $B_1, B_2, \dots, B_n$ בנוסחאות $B'_1, B'_2, \dots, B'_n$. אם $\vdash_T B_1 \leftrightarrow B'_1, \vdash_T B_2 \leftrightarrow B'_2, \dots, \vdash_T B_n \leftrightarrow B'_n$ אז $\vdash_T A \leftrightarrow A'$.

הוכחה: נטפל קודם במקרה המיוחד, דהיינו $A = B_i, A' = B'_i$. אז לפי הנתון, $\vdash_T A \leftrightarrow A'$. את יתר המקרים נוכיח באינדוקציה לפי סדרת יצירה של A :

- אם $A = P(u_1, \dots, u_n)$, כאן יש רק המקרה המיוחד שכבר דנו בו.
- אם $A = C \vee D$, אז $A' = C' \vee D'$, כאשר C' מתקבלת מ- C ע"י החלפת כמה מההופעות של $B_1, \dots, B_n$ ב- $B'_1, \dots, B'_n$ וכנ"ל D' . מהנחת האינדוקציה, $\vdash_T C \leftrightarrow C'$ ו- $\vdash_T D \leftrightarrow D'$, ולכן על סמך משפט הטאוטולוגיה, $\vdash_T (C \vee D) \leftrightarrow (C' \vee D')$, אז $\vdash_T A \leftrightarrow A'$.
- אם $A = \neg C$, אז $A' = \neg C'$ עם C' כנ"ל. שוב לפי הנחת האינדוקציה $\vdash_T C \leftrightarrow C'$, ולכן ע"ס משפט הטאוטולוגיה $\vdash_T (\neg C) \leftrightarrow (\neg C')$, אז $\vdash_T A \leftrightarrow A'$.

• $A = (\exists x) C$, אז $A' = (\exists x) C'$, עם C' כנ"ל. לפי הנחת האינדוקציה $\vdash_T C \leftrightarrow C'$.
 על סמך משפט הטאוטולוגיה, $\vdash_T C \rightarrow C'$ וגם $\vdash_T C' \rightarrow C$. על סמך כלל
 הדיסטריביוטיות, $\vdash_T (\exists x) C \leftrightarrow (\exists x) C'$, זאת אומרת $\vdash_T A \leftrightarrow A'$, כנדרש.

■

1.4.4 משפט הוריאנט

26/12/2011

משפט 1.54 אם y לא מופיע חופשית ב- B , אז:

$$\vdash (\exists x) B \leftrightarrow (\exists y) B_x[y]$$

הוכחה: על סמך אקסיומת ההצבה,

$$\vdash B_x[y] \rightarrow (\exists x) B$$

לפי כלל הכנסת $\exists$, מכיוון ו- y לא מופיע חופשית ב- B :

$$\vdash (\exists y) B_x[y] \rightarrow (\exists x) B$$

בכיוון השני, נסמן $B' = B_x[y]$. אז $B'_y[x] = B$ (גם כאן נעשה שימוש בעובדה ש- y לא מופיע בצורה חופשית ב- B). לפי אקסיומת ההצבה:

$$\vdash B'_y[x] \rightarrow (\exists y) B'$$

ז"א:

$$\vdash B \rightarrow (\exists y) B_x[y]$$

אנו יודעים כי x לא מופיע חופשית ב- $(\exists y) B_x[y]$ (כי כל מה שהיה חופשי הוחלף ב- y), לכן,
 לפי כלל הכנסת $\exists$:

$$\vdash (\exists x) B \rightarrow (\exists y) B_x[y]$$

לכן בסה"כ לפי משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash (\exists x) B \leftrightarrow (\exists y) (B_x[y])$$

■

כנדרש.

למשל, נביט ב:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = \sum_{k=1}^3 k^2 = \sum_{l=1}^3 l^2$$

כאשר הסכימה מספקת את המקום של הכמת. הנוסחא הזו היא משל על המשפט שהוכחנו
 - כלומר, אנחנו יכולים לשנות את השמות של המשתנים הקשורים בכמתים.

1.4.5 משפט הסימטריות

משפט 1.55 לכל שני שמות עצם a, b :

$$\vdash a = b \leftrightarrow b = a$$

הערה 1.56 נשאל, מה יש כאן בכלל להוכיח? זהו אינו שיוויון "רגיל", אלא בין סימנים בשפה שאיננו יודעים מהו הפירוש שלהם.

הוכחה: לפי אקסיומות השיוויון:

$$\vdash x = y \rightarrow x = x \rightarrow x = x \rightarrow y = x$$

מדוע? נזכיר את הצורה של אקסיומת השיוויון, ונראה מה נציב במקומות ע"מ לקבל את הביטוי מעלה:

$$x_1 = y_1 \rightarrow x_2 = y_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)$$

$$x_1 = x, y_1 = y$$

$$x_2 = x, y_2 = x$$

$$P(x_1, x_2) = (x = x), P(y_1, y_2) = (y = x)$$

על סמך אקסיומת הזהות $x = x$, וע"ס משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash x = y \rightarrow y = x$$

כלומר, זוהי גרירה טאוטולוגית של $x = x$, ושל:

$$\vdash x = y \rightarrow x = x \rightarrow x = x \rightarrow y = x$$

אז, לפי כלל ההצבה:

$$\vdash y = x \rightarrow x = y$$

לכן:

$$\vdash x = y \leftrightarrow y = x$$

ולכן לפי כלל הצבה נקבל:

$$\vdash a = b \leftrightarrow b = a$$

כנדרש. ■

1.4.6 משפט השיוויון

משפט 1.57 נניח ש- $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$ שמות עצם, ונניח ש:

$$\vdash u_1 = v_1, \vdash u_2 = v_2, \dots, \vdash u_n = v_n$$

א. נניח ששם עצם a' מתקבל משם עצם a ע"י מספר החלפות של u_i ב- v_i . אזי:

$$\vdash a = a'$$

ב. נניח שנוסחא A' מתקבלת מנוסחא A ע"י מספר החלפות של u_i ב- v_i . אם מתקיים תנאי שיקבע במהלך ההוכחה, אז:

$$\vdash A \leftrightarrow A'$$

הוכחה: א. נטפל קודם במקרה בו $a = u_i, a' = v_i$. אז, לפי הנתון, $u_i = v_i$, ולכן $\vdash a = a'$.

בהמשך נשתמש באינדוקציה לפי סדרת יצירה של a :

- אם $a = x$, אין מקרים נוספים מלבד המקרה דלעיל.
- אם $a = c$, גם כן אין מקרים נוספים מלבד המקרה דלעיל.
- אם $a = f(b_1, b_2, \dots, b_k)$ כאשר $b_1, b_2, \dots, b_k$ שמות עצם, אז מלבד המקרה דלעיל, $a' = f(b'_1, b'_2, \dots, b'_k)$ כאשר b'_j מתקבל מ- b_j ע"י החלפות של u_i ב- v_i . לפי הנחת האינדוקציה:

$$\vdash b_1 = b'_1, \dots, \vdash b_k = b'_k$$

לפי אקסיומת השיוויון:

$$\vdash x_1 = y_1 \rightarrow x_2 = y_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_k = y_k \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(y_1, y_2, \dots, y_k)$$

לפי כלל ההצבה:

$$\vdash b_1 = b'_1 \rightarrow b_2 = b'_2 \rightarrow \dots \rightarrow b_k = b'_k \rightarrow f(b_1, b_2, \dots, b_k) = f(b'_1, b'_2, \dots, b'_k)$$

לפי כלל הניתוק:

$$\vdash f(b_1, \dots, b_k) = f(b'_1, \dots, b'_k)$$

ז"א $a = a'$, כנדרש.

ב. נשתמש באינדוקציה לפי סדרת יצירה של נוסחא A .

- אם $A = P(b_1, b_2, \dots, b_k)$ אז $A' = P(b'_1, b'_2, \dots, b'_k)$ כאשר b'_j מתקבל מ- b_j ע"י מספר החלפות של u_i ב- v_i . לפי חלק א', $b_j = b'_j$. לפי אקסיומת השיוויון:

$$\vdash x_1 = y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_k = y_k \rightarrow P(x_1, \dots, x_k) \rightarrow P(y_1, \dots, y_k)$$

לפי כלל ההצבה:

$$\vdash b_1 = b'_1 \rightarrow b_2 = b'_2 \rightarrow \dots \rightarrow b_k = b'_k \rightarrow P(b_1, b_2, \dots, b_k) \rightarrow P(b'_1, b'_2, \dots, b'_k)$$

ואז לפי כלל הניתוק:

$$\vdash P(b_1, \dots, b_k) \rightarrow P(b'_1, b'_2, \dots, b'_k)$$

לפי משפט הסימטריות, $\vdash b'_j = b_j$, ולפי כלל ההצבה:

$$\vdash b'_1 = b_1 \rightarrow b'_2 = b_2 \rightarrow \dots \rightarrow b'_k = b_k \rightarrow P(b'_1, b'_2, \dots, b'_k) \rightarrow P(b_1, b_2, \dots, b_k)$$

$$\vdash A \leftrightarrow A' \text{ ז"א } A \leftrightarrow A'$$

• אם $A = B \vee C$, אז $A' = B' \vee C'$. לפי הנחת האינדוקציה, $\vdash B \leftrightarrow B'$, $\vdash C \leftrightarrow C'$,
על סמך משפט הטאוטולוגיה, $\vdash B \vee C \leftrightarrow B' \vee C'$, ז"א $\vdash A \leftrightarrow A'$.

• אם $A = \neg B$, אז $A' = \neg B'$. לפי הנחת האינדוקציה $\vdash B \leftrightarrow B'$, ולכן על סמך
משפט הטאוטולוגיה, $\vdash \neg B \leftrightarrow \neg B'$, ז"א $\vdash A \leftrightarrow A'$.

• אם $A = (\exists x) B$, אז $A' = (\exists x) B'$. לפי הנחת האינדוקציה, $\vdash B \leftrightarrow B'$, זאת
אומרת $\vdash B \rightarrow B'$ ו- $\vdash B' \rightarrow B$. לפי כלל הדיסטריבוטיוביות, $\vdash (\exists x) B \rightarrow (\exists x) B'$
וכן $\vdash (\exists x) B' \rightarrow (\exists x) B$, ועל סמך משפט הטאוטולוגיה $\vdash (\exists x) B \leftrightarrow (\exists x) B'$,
ז"א $\vdash A \leftrightarrow A'$, כנדרש.
יש לשים לב כי עלינו לדרוש כאן כי אם $x = v_i$ עבור i כלשהוא, אסור שהוא יוחלף
כאשר x אינו מופיע חופשית.

■

מסקנה 1.58

$$\vdash a_1 = a'_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_k = a'_k \rightarrow b_{x_1, \dots, x_k} [a_1, \dots, a_k] = b_{x_1, \dots, x_k} [a'_1, \dots, a'_k]$$

הוכחה: הוכחה לא נכונה:

$$\mathcal{A} = \{a_1 = a'_1, \dots, a_k = a'_k\}$$

$$\vdash_{\mathcal{A}} a_1 = a'_1, \dots, \vdash_{\mathcal{A}} a_k = a'_k$$

$$\vdash_{\mathcal{A}} b_{x_1, \dots, x_k} [a_1, \dots, a_k] = b_{x_1, \dots, x_k} [a'_1, \dots, a'_k]$$

על פי משפט הדדקוציה:

$$\vdash a_1 = a'_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_k = a'_k \rightarrow b_{x_1, \dots, x_k} [a_1, \dots, a_k] = b_{x_1, \dots, x_k} [a'_1, \dots, a'_k]$$

■

מדוע ההוכחה אינה נכונה? מותר להשתמש במשפט הדדוקציה אם ורק אם הנוסחאות סגורות. כאן אין לנו שום מידע, ועל כן אסור להשתמש במשפט זה. **הוכחה: נכונה:** נשתמש בקבועים חדשים. נחליף את כל ההופעות של המשתנים ב- a_i, a'_i, b בקבועים חדשים ונקבל שמות עצם d, c_i, c'_i , כאשר d מתקבל מ- b ע"י החלפת כל המשתנים מלבד $x_1, \dots, x_k$.

$$\vdash c_1 = c'_1 \rightarrow c_2 = c'_2 \rightarrow \dots \rightarrow c_k = c'_k \rightarrow d_{x_1, \dots, x_k} [c_1, \dots, c_k] = d_{x_1, \dots, x_k} [c'_1, \dots, c'_k]$$

כל הנוסחאות מלבד d הן נוסחאות סגורות. לאחר ההחלפה נקבל כי כל הנוסחאות סגורות - לא נותר שום משתנה חופשי. אזי, על סמך משפט השיוויון (חלק א'):

$$\vdash \{c_1 = c'_1, \dots, c_k = c'_k\} d_{x_1, \dots, x_k} [c_1, \dots, c_k] = d_{x_1, \dots, x_k} [c'_1, \dots, c'_k]$$

על סמך משפט הדדוקציה (כעת נוכל להשתמש בו, שכן וידאנו כי כל הנוסחאות סגורות):

$$\vdash c_1 = c'_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_k = c'_k \rightarrow d_{x_1, \dots, x_k} [c_1, \dots, c_k] = d_{x_1, \dots, x_k} [c'_1, \dots, c'_k]$$

על סמך משפט הקבועים:

$$\vdash a_1 = a'_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_k = a'_k \rightarrow b_{x_1, \dots, x_k} [a_1, \dots, a_k] = b_{x_1, \dots, x_k} [a'_1, \dots, a'_k]$$

כנדרש. ■

29/12/2011

הגדרה שקולה למסקנה מהשיעור הקודם:

$$a_1 = a'_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_k = a'_k \rightarrow B_{x_1, \dots, x_k} [a_1, \dots, a_k] \rightarrow B_{x_1, \dots, x_k} [a'_1, \dots, a'_k]$$

כאשר d היה שם עצם, וכאן B נוסחא. נראה בהמשך גם את הכיוון השני. ההוכחה דומה לחלוטין להוכחה הקודמת. **הוכחה:** נחליף את כל המשתנים החופשיים בקבועים חדשים (מרחיבים את הסיגנטורה של השפה), מלבד $x_1, \dots, x_k$ בנוסחא B .

$$c_1 = c'_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_k = c'_k \rightarrow D_{x_1, \dots, x_k} [c_1, \dots, c_k] \leftrightarrow D_{x_1, \dots, x_k} [c'_1, \dots, c'_k]$$

ניקח את $\mathcal{A} = \{c_1 = c'_1, c_2 = c'_2, \dots, c_k = c'_k\}$. ע"ס משפט השיוויון חלק ב':

$$\vdash_{\mathcal{A}} D_{x_1, \dots, x_k} [c_1, \dots, c_k] \leftrightarrow D_{x_1, \dots, x_k} [c'_1, \dots, c'_k]$$

על סמך משפט הדדוקציה:

$$\vdash c_1 = c'_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_k = c'_k \rightarrow D_{x_1, \dots, x_k} [c_1, \dots, c_k] \leftrightarrow D_{x_1, \dots, x_k} [c'_1, \dots, c'_k]$$

על סמך משפט הקבועים (ברורס), נחליף חזרה את הקבועים החדשים במשתנים המקוריים, ונקבל:

$$\vdash a_1 = a'_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_k = a'_k \rightarrow B_{x_1, \dots, x_k} [a_1, \dots, a_k] \leftrightarrow B_{x_1, \dots, x_k} [a'_1, \dots, a'_k]$$

■

טענה 1.59 אם x אינו מופיע (חופשית) ב- a , אז:

$$\vdash A_x [a] \leftrightarrow (\exists x) (x = a \wedge A)$$

הוכחה: על סמך הטענה הקודמת:

$$\vdash x = a \rightarrow A_x[x] \leftrightarrow A_x[a]$$

$$\vdash x = a \rightarrow A \leftrightarrow A_x[a]$$

על סמך משפט הטאוטולוגיה אפשר לעבור מחץ דו סיטרי לחץ חד סיטרי, כלומר:

$$\vdash x = a \rightarrow A \rightarrow A_x[a]$$

$$\vdash (x = a \wedge A) \rightarrow A_x[a]$$

כאשר המעבר בשורה השניה מגיע משקילות טאוטולוגית של $A_1 \wedge A_2 \rightarrow \neg A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B$ ב- B .

ב- $A_x[a]$ איננו מופיע בצורה חופשית, לכן נוכל להפעיל את כלל הכנסת $\exists$:

$$\vdash (\exists x) (x = a \wedge A) \rightarrow A_x[a]$$

קיבלנו חץ בכיוון אחד, נותר להראות את הצד השני.

לפי אקסיומת ההצבה לגבי הנוסחא $x = a \wedge A$:

$$\vdash (x = a \wedge A)_x[a] \rightarrow (\exists x) (x = a \wedge A)$$

$$\vdash a = a \wedge A_x[a] \rightarrow (\exists x) (x = a \wedge A)$$

לפי אקסיומת הזהות $a = a$ ולכן על סמך משפט הטאוטולוגיה $\vdash A_x[a] \rightarrow (\exists x) (x = a \wedge A)$.
לכן, על סמך משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash A_x[a] \leftrightarrow (\exists x) (x = a \wedge A)$$

■

1.5 צורת הקידומת (prenex form)

הגדרה 1.60 נוסחא נקראת בצורת הקידומת כאשר:

$$A = (Q_1 x_1) (Q_2 x_2) \dots (Q_n x_n) B$$

$n \geq 0$, כאשר כל Q_i הוא כמת $\exists$ או $\forall$, וב- B אין כמתים בכלל. כלומר, כל הכמתים בנוסחא עומדים בתחילתה.

משפט 1.61 לכל נוסחא A אפשר למצוא נוסחא A' בצורת הקידומת כך ש- $A \leftrightarrow A'$.

הוכחה: נוכיח בצורה הבאה (קעת רק נרשום פעולות, אח"כ נוכיח אותם בצורה מסודרת):
א. שימוש במשפט הוריאנט:

$$\vdash (\exists x) A \leftrightarrow (\exists y) A_x[y]$$

בתנאי ש- y אינו מופיע חופשית ב- A . החלפה של $(\exists x) A$ ב- $(\exists y) A_x[y]$ (כלומר תמיד אפשר להחליף למשתנים שיהיו נוחים לנו).

ב. החלפת $(\exists x) B$ ב- $(\forall x) \neg B$, והחלפת $(\forall x) B$ ב- $(\exists x) \neg B$.

ג. החלפה של $(\exists x) A \vee B$ ב- $(\exists x) (A \vee B)$, והחלפה של $(\forall x) A \vee B$ ב- $(\forall x) (A \vee B)$,
 בתנאי ש- x אינו מופיע חופשית ב- B .
 ד. החלפה של $A \vee (\exists x) B$ ב- $(\exists x) (A \vee B)$, והחלפה של $A \vee (\forall x) B$ ב- $(\forall x) (A \vee B)$,
 בתנאי ש- x אינו מופיע חופשית ב- A .
 נראה כי מותר לבצע את שלב ב':

טענה 1.62

$$\vdash (\forall x) \neg B \leftrightarrow \neg (\exists x) B, \vdash (\exists x) \neg B \leftrightarrow \neg (\forall x) B$$

הוכחה: על סמך משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash \neg (\exists x) \neg \neg B \leftrightarrow \neg (\exists x) B$$

ז"א:

$$\vdash (\forall x) \neg B \leftrightarrow \neg (\exists x) B$$

ובאותה הצורה, על סמך משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash (\exists x) \neg B \leftrightarrow \neg (\exists x) \neg \neg B$$

ז"א:

$$\vdash (\exists x) \neg B \leftrightarrow \neg (\forall x) B$$

■

2/1/2012

נראה כי מותר להפעיל את שלב ג':

$$\vdash (\exists x) A \vee B \leftrightarrow (\exists x) (A \vee B) \quad \text{טענה 1.63 א.}$$

$$\vdash (\forall x) A \vee B \leftrightarrow (\forall x) (A \vee B) \quad \text{ב.}$$

בתנאי ש- x אינו מופיע חופשית ב- B .

הוכחה: על פי משפט הטאוטולוגיה¹¹:

$$\vdash A \rightarrow A \vee B$$

על סמך כלל הדיסטריביוטיביות, אפשר לקשור בכמת את שני הצדדים, כלומר:

$$** \vdash (\exists x) A \rightarrow (\exists x) (A \vee B)$$

$$* \vdash (\forall x) A \rightarrow (\forall x) (A \vee B)$$

על סמך משפט הטאוטולוגיה,

$$\vdash B \rightarrow A \vee B$$

¹¹זהו לא (!) כלל ההרחבה.

x לא מופיע חופשית ב- B , ולכן אפשר להשתמש בכלל הכנסת $\forall$:

$$\vdash B \rightarrow (\forall x) (A \vee B)$$

על סמך משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash (\forall x) A \vee B \rightarrow (A \vee B)$$

ומהשורה הקודמת ומ-*, על סמך משפט הטאוטולוגיה¹², נקבל:

$$\vdash (\forall x) A \vee B \rightarrow (\forall x) (A \vee B)$$

על סמך אקסיומת ההצבה:

$$\vdash (A \vee B) \rightarrow (\exists x) (A \vee B)$$

כאמור, על סמך משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash B \rightarrow A \vee B$$

על סמך משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash B \rightarrow (\exists x) (A \vee B)$$

ובצורה דומה כמו מקודם, מהנוסחא הקודמת, מהנוסחא (***) ועל סמך משפט הטאוטולוגיה¹³:

$$\vdash (\exists x) A \vee B \rightarrow (\exists x) (A \vee B)$$

עד כה הוכחנו כיוון אחד עבור שני הסעיפים. נראה את הכיוון הנותר עבור שניהם.
על סמך אקסיומת ההצבה:

$$\vdash A \rightarrow (\exists x) A$$

הנוסחא הבאה היא גרירה טאוטולוגית של הקודמת¹⁴:

$$\vdash A \vee B \rightarrow (\exists x) A \vee B$$

על סמך כלל הכנסת $\exists$ (אנו יודעים כי x אינו מופיע חופשית ב- B , ועל A הטלנו את הכמת ולכן ברור ש- x לא מופיע חופשית שם):

$$\vdash (\exists x) (A \vee B) \rightarrow (\exists x) A \vee B$$

ובכך סיימנו את א'.

¹² בעזרת בדיקה ידנית של הערכות האפשריות - כדי לקבל $\mathbb{T}$, על שני האגפים השמאליים בשתי הנוסחאות מעלה להיות $\mathbb{F}$, ומכך נקבל את הדרוש.

¹³ זוהי גרירה טאוטולוגית של שתי הנוסחאות מהצורה:

$$\vdash A_1 \rightarrow A_2, \vdash A_2 \rightarrow A_3, \dots, \vdash A_{k-1} \rightarrow A_k \Rightarrow \vdash A_1 \rightarrow A_k$$

¹⁴ אפשר לראות ע"י בדיקת הערכות

על סמך משפט ההצבה (אחד המקרים הפרטיים):

$$\vdash (\forall x) (A \vee B) \rightarrow A \vee B$$

על סמך משפט הטאוטולוגיה (שוב ע"י בדיקת ערכים):

$$\vdash (\forall x) (A \vee B) \wedge (\neg B) \rightarrow A$$

על סמך כלל הכנסת $\forall$:

$$\vdash (\forall x) (A \vee B) \wedge (\neg B) \rightarrow (\forall x) A$$

על סמך משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash (\forall x) (A \vee B) \rightarrow (\forall x) A \vee B$$

ושוב, ע"ס משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash (\forall x) (A \vee B) \leftrightarrow (\forall x) A \vee B$$

כנדרש (ב').

חלק ד' נובע מחלק ג' מיידית ע"י החלפה:
ממשפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash (A \vee (\exists x) B) \leftrightarrow (\exists x) B \vee A$$

ע"ס ג':

$$\vdash ((\exists x) B \vee A) \leftrightarrow (\exists x) (B \vee A)$$

ע"ס משפט השקילות¹⁵:

$$\vdash (\exists x) (B \vee A) \leftrightarrow (\exists x) (A \vee B)$$

על סמך משפט הטאוטולוגיה¹⁶:

$$\vdash (A \vee (\exists x) B) \leftrightarrow (\exists x) (A \vee B)$$

נמשיך עם הוכחת המשפט:

באינדוקציה לפי אורך סדרת יצירה של A .

א. אם $A = P(u_1, u_2, \dots, u_n)$ סיימנו.

ב. אם $A = B \vee C$, לפי הנחת האינדוקציה:

$$\vdash B \leftrightarrow B', \vdash C \leftrightarrow C'$$

כאשר B', C' הן בצורת הקידומת. לכן ממשפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash B \vee C \leftrightarrow B' \vee C'$$

¹⁵ זה לא על סמך משפט הטאוטולוגיה!!!

¹⁶ כי $\vdash (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$ היא טאוטולוגיה.

על סמך פעולה א', אפשר להחליף את המשתנים הקשורים בכמתים בכאלה שלא מופיעים חופשית ב- $B' \vee C'$. **דוגמא:** ג.

$$\begin{aligned} B' &= (\exists x) (\forall y) P(x, y, z, t) \\ C' &= (\exists x) (\exists z) Q(x, z, t, w) \\ \Rightarrow (\exists x) (\forall y) P(x, y, z, t) \vee (\exists x) (\exists z') Q(x, z', t, w) \end{aligned}$$

למעשה רק שינינו את המשתנה z ל- z' (זה היחיד שהפריע לנו). ממשפט הוריאנט:

$$\vdash (\exists z') Q(x, z', t, w) \leftrightarrow (\exists z) Q(x, z, t, w)$$

נשים לב שאין חובה לחזור בסוף למשתנה z' , שכן אנו רק מחפשים נוסחא שקולה. "יותר בריא" להחליף גם את x ב- x' (כי מעלה אותו משתנה קשור בכמת פעמיים). על סמך פעולה ג', נקבל

$$(\exists x) ((\forall y) P(x, y, z, t) \vee (\exists x') (\exists z') Q(x', z', t, w))$$

מג' וד' נקבל:

$$\begin{aligned} &(\exists x) (\forall y) (P(x, y, z, t) \vee (\exists x') (\exists z') Q(x', z', t, w)) \\ &(\exists x) (\forall y) (\exists x') (P(x, y, z, t) \vee (\exists z') Q(x', z', t, w)) \\ &(\exists x) (\forall y) (\exists x') (\exists z') (P(x, y, z, t) \vee Q(x', z', t, w)) \end{aligned}$$

אם $A = \neg B$, לפי הנחת האינדוקציה $B' \leftrightarrow B \vdash B'$ בצורת הקידומת: $B' = (Q_1 x_1) (Q_2 x_2) \dots (Q_m x_m) C$ לפי פעולה ב':

$$\vdash \neg B' \leftrightarrow (Q'_1 x_1) (Q'_2 x_2) \dots (Q'_m x_m) \neg C$$

כאשר Q'_i הוא ההיפוך של Q_i , כלומר $\forall$ הופך ל- $\exists$ ולהפך.

ד. אם $A = (\exists x) B$, אזי $B \leftrightarrow B' \vdash A \leftrightarrow (\exists x) B'$.

ה. החלפת $(\exists x) A \wedge B$ ב- $(\exists x) (A \wedge B)$ ושל $(\forall x) A \wedge B$ ב- $(\forall x) (A \wedge B)$.

ו. החלפת $A \wedge (\exists x) B$ ב- $(\exists x) (A \wedge B)$ ושל $A \wedge (\forall x) B$ ב- $(\forall x) (A \wedge B)$, בתנאי

ש- x אינו מופיע חופשית ב- A .

ז. החלפת $(\exists x) A \rightarrow B$ ב- $(\forall x) (A \rightarrow B)$ ושל $(\forall x) A \rightarrow B$ ב- $(\exists x) (A \rightarrow B)$, בתנאי

ש- x אינו מופיע חופשית ב- B .

ח. החלפת $A \rightarrow (\exists x) B$ ב- $(\exists x) (A \rightarrow B)$ ושל $A \rightarrow (\forall x) B$ ב- $(\forall x) (A \rightarrow B)$, בתנאי

ש- x אינו מופיע ב- A .

ט' וח' נובעים מפעולות ג', ד'.

וסיימנו. ■

1.6 משפט השלמות של גדל

הגדרה 1.64 תיאוריה T נקראת עקבית אם לא ניתן להסיק ממנה סתירה, כלומר $\not\vdash_T A \wedge \neg A$.

אנחנו מנסים להוכיח את משפט השלמות של גדל:

משפט 1.65 לכל תיאוריה עקבית T יש מודל, כלומר מבנה $\mathcal{M}$ כך ש- $\mathcal{M} \models T$.

לפני כן, נצטרך להוכיח משפטים נוספים, ולהכיר מונחים חדשים:

הגדרה 1.66 תיאוריה T נקראת שלמה (*Complete*) אם לכל נוסחא A סגורה מתקיים $\vdash_T A$ או $\vdash_T \neg A$, אך לא שתיהן.

הערה 1.67 "סגור" של נוסחא בלוגיקה - הוספת כמותי $\forall$ כך שיקשרו את כל הכמתים בנוסחא (ניתן לעשות זאת בעזרת כלל ההכללה).

כאן אכניס את "הערת הרדוקציה" - זוהי טענה שלא עשינו בכיתה, אבל אמרנו שעשינו ואז השתמשנו בה - כנראה שריפס שכת. מכיוון ושכת, אניח שההוכחה לא תהיה בבחינה.

טענה 1.68 תהי $T[\Gamma]$ תיאוריה המתקבלת מהתיאוריה T ע"י הוספת קבוצת אקסיומות לא לוגיות לתיאוריה T .

אם $\vdash_{T[\Gamma]} A$, אזי קיימות נוסחאות $B_1, \dots, B_n$ שהן סגורים של נוסחאות מ- Γ , כך ש:

$$\vdash_T B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \rightarrow A$$

5/1/2012

נוכיח תחילה את הכיוון ההפוך למשפט השלמות: **הוכחה:** נניח כי $\mathcal{M}$ מודל של T . נראה ש- T עקבית, כלומר שלא ניתן להסיק ב- T את הנוסחא $B \wedge \neg B$. על פי משפט הנאותות, אם $\vdash_T A$, אז לכל השמה σ , $\bar{\sigma}(A) = \mathbb{T}$. מצד שני:

$$\bar{\sigma}(B \wedge \neg B) = \bar{\sigma}(B) \wedge \bar{\sigma}(\neg B) = \bar{\sigma}(B) \wedge \neg \bar{\sigma}(B) = \mathbb{F}$$

■

ולכן לא ניתן להסיק את $B \wedge \neg B$ ב- T .

9/1/2012

בכיוון שאנו רוצים, נצטרך לבנות תחילה את המודל הקנוני:

1.6.1 בניית המודל הקנוני

תהי T תיאוריה עקבית בשפה L , נרצה להראות שיש מבנה $\mathcal{M}$ שהוא מודל של T . נבנה מודל הידוע בשם "המודל הקנוני", ונראה כי הוא אכן מודל של T . התברר שזה לא תמיד נכון, אלא בתנאים מסויימים עליהם נדבר בהמשך.

בלי הגבלת הכלליות, אפשר להניח כי בסיגנטורה של השפה יש קבועים¹⁷. נסמן ב- Y את קבוצת כל שמות עצם ללא משתנים. מכיוון ואנו מניחים כי יש קבועים, $Y \neq \emptyset$.

נגדיר יחס שקילות על Y :

$$u_1 \sim u_2 \text{ אם } \vdash_T u_1 = u_2$$

נראה כי זהו אכן יחס שקילות:

• רפלקסיביות $\vdash a = a$ מתקיימת מאקסיומת הזהות.

• סימטריות $\vdash a = b \leftrightarrow b = a$ מתקיימת ממשפט הסימטריות.

¹⁷ כי אם אין קבועים - ניתן להוסיף, והעיקביות של התיאוריה תשאר בשל משפט הקבועים.

• טרנזיטיביות - נניח $\vdash_T a = b$, $\vdash_T b = c$. ממשפט השיוויון, $\vdash_T a = c$.

נסמן ב- $X = Y / \sim$ את קבוצת מחלקות השקילות תחת היחס הנ"ל. לכל $u \in Y$ נסמן $[u] \in X$ מחלקת השקילות של u .
נבנה את המודל הקנוני:
קבוצת המבנה תהיה $|\mathcal{M}| = X$. נגדיר:

$$f^{\mathcal{M}}([u_1], [u_2], \dots, [u_n]) = [f(u_1, u_2, \dots, u_n)]$$

$$P^{\mathcal{M}}([u_1], [u_2], \dots, [u_n]) = \begin{cases} \mathbb{T} & \vdash_T P(u_1, \dots, u_n) \\ \mathbb{F} & \text{otherwise} \end{cases}$$

ישנה שאלה טבעית - הרי ישנם כמה נציגים איתם להציג מחלקות שקילות. נשאל, האם בחירת הנציג משנה?

טענה 1.69 אם $u_1 \sim u'_1, \dots, u_n \sim u'_n$ אז $f(u_1, \dots, u_n) \sim f(u'_1, \dots, u'_n)$ וממילא:

$$[f(u_1, \dots, u_n)] = [f(u'_1, \dots, u'_n)]$$

טענה זו תגיד לנו ש- $f^{\mathcal{M}}$ כפי שהגדרנו מעלה מוגדרת היטב. **הוכחה:** נתון $\vdash_T u_1 = u'_1$ לפי המסקנה ממשפט השיוויון:

$$\vdash u_1 = u'_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_n = u'_n \rightarrow f(u_1, u_2, \dots, u_n) = f(u'_1, u'_2, \dots, u'_n)$$

לפי כלל הניתוק נקבל $\vdash_T f(u_1, \dots, u_n) = f(u'_1, \dots, u'_n)$ וז"א $f(u_1, \dots, u_n) \sim f(u'_1, \dots, u'_n)$.
■ כנדרש.

טענה 1.70 אם $u_1 \sim u'_1, \dots, u_n \sim u'_n$ ו- $\vdash_T P(u_1, \dots, u_n)$ אזי $\vdash_T P(u'_1, \dots, u'_n)$.

הוכחה: כאן נשתמש במסקנה נוספת:

$$\vdash u_1 = u'_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_n = u'_n \rightarrow P(u_1, \dots, u_n) \leftrightarrow P(u'_1, \dots, u'_n)$$

לפי הנתון $\vdash_T u_1 = u'_1, \dots, \vdash_T u_n = u'_n$ ולפי כלל הניתוק:

$$\vdash_T P(u_1, \dots, u_n) \leftrightarrow P(u'_1, \dots, u'_n)$$

■ לכן $\vdash_T P(u_1, \dots, u_n)$ אמ"מ $\vdash_T P(u'_1, \dots, u'_n)$ ז"א $P^{\mathcal{M}}$ מוגדר היטב, כנדרש.

האם המבנה $\mathcal{M}$ שזכרנו בנינו, הוא מודל של T ? לצערנו, לא בהכרח. לצערנו, כי יהיו כאן תנאים וצער של הוכחת משפט.

תחילה, נראה מה כן קיבלנו במבנה הזה:

$$\text{תהי } \sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}|$$

טענה 1.71 אם u הוא שם עצם ללא משתנים $(u \in Y)$, אז:

$$\tilde{\sigma}(u) = [u] = u^{\mathcal{M}}$$

הוכחה: באינדוקציה לפי סדרת יצירה של u :

• אם $u = c$ קבוע, אזי:

$$\tilde{\sigma}(c) = c^{\mathcal{M}} = [c]$$

• אם $u = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ מהאינדוקציה נקבל:

$$\tilde{\sigma}(u) \stackrel{1}{=} f^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(u_1), \dots, \tilde{\sigma}(u_n)) \stackrel{2}{=} f([u_1], \dots, [u_n]) \stackrel{3}{=} [f(u_1, \dots, u_n)] = u$$

■

כאשר המעבר השני הוא מהנחת האינדוקציה, השלישי מההגדרה.

אזי, היכן הבעיה שלנו?

הבעיה מתגלה במקרה של $A = (\exists x) B$ נוסחא סגורה. יכול להיות ש- $\vdash_T A$, אבל $\mathcal{M} \models A$. נראה דוגמאות כאלו בהמשך, בינתיים - נגדיר תכונה חדשה, ונעזר בה להוכחה:

1.6.2 תכונת הנקין

הגדרה 1.72 אומרים שלתיאוריה T יש תכונת הנקין (*Henkin*), אם לכל נוסחא סגורה מהצורה $(\exists x) B$ ישנו קבוע e כך ש:

$$\vdash_T (\exists x) B \rightarrow B_x[e]$$

הערה 1.73 כלומר, הקבוע e מעיד על אמיתות הנוסחא $(\exists x) B$.

משפט 1.74 אם T תיאוריה שלמה עם תכונת הנקין, אז $\mathcal{M}$ כפי שהגדרנו אותה (המודל הקנוני) היא מודל של T .

הוכחה: צריך להוכיח, שאם $\vdash_T A$, סגורה, אז $\mathcal{M} \models A$, ז"א לכל השמה $\sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}|$, $\sigma(A) = \mathbb{T}$.

מדוע זה מספיק? נניח שזה נכון. תהי B נוסחא לא סגורה, B' הסגור של B . אזי לפי משפט הסגור (שטכנית לא הוכחנו, אבל הוא הרחבה בשתי שורות של הטענה 1.44) $\vdash_T B$ אם ורק אם $\vdash_T B'$, ואז $\mathcal{M} \models B'$ וממילא $\mathcal{M} \models B$. נוכיח באינדוקציה כפולה - לפי אורך סדרת היצירה של A (נוסחא סגורה), ולפי מספר הכמתים, שאם $\vdash_T A$ אז $\mathcal{M} \models A$, ואם $\vdash_T \neg A$ אז $\mathcal{M} \models \neg A$.

• אם $A = P(u_1, \dots, u_n)$ מהשלמות יש שתי אופציות:

• אם $\vdash_T A$, ז"א $\vdash_T P(u_1, \dots, u_n)$, נובע שלכל השמה $\sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}|$

$$\sigma(A) \stackrel{1}{=} \sigma(P(u_1, \dots, u_n)) \stackrel{2}{=} P^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(u_1), \dots, \tilde{\sigma}(u_n)) \stackrel{3}{=} P^{\mathcal{M}}([u_1], \dots, [u_n]) = \mathbb{T}$$

- אם $\vdash_T \neg A$ אז $\vdash_T \neg P(u_1, \dots, u_n)$ ואז:

$$\bar{\sigma}(A) = P^{\mathcal{M}}([u_1], \dots, [u_n]) = \mathbb{F} \Rightarrow \bar{\sigma}(\neg A) = \mathbb{T}$$

- אם $A = B \vee C$, מכיוון ש- T שלמה, אזי $\vdash_T B$ או $\vdash_T \neg B$, וכן $\vdash_T C$ או $\vdash_T \neg C$.
תהי השמה $\sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}|$ כלשהיא. אזי:

$$\bar{\sigma}(A) = \bar{\sigma}(B \vee C) = \bar{\sigma}(B) \vee \bar{\sigma}(C)$$

- אם $\vdash_T B$ ו- $\vdash_T \neg C$, אז $\vdash_T A$ ומהנחת האינדוקציה:

$$\bar{\sigma}(B) = \bar{\sigma}(C) = \mathbb{T} \Rightarrow \bar{\sigma}(A) = \mathbb{T}$$

- אם $\vdash_T B$ ו- $\vdash_T \neg C$ אז $\vdash_T A$ ואז כנ"ל.

- אם $\vdash_T \neg B$ ו- $\vdash_T C$ אז $\vdash_T A$ ואז כנ"ל.

- אם $\vdash_T \neg B$ ו- $\vdash_T \neg C$ אז $\vdash_T \neg A$. אז נקבל $\bar{\sigma}(A) = \mathbb{F} \vee \mathbb{F} = \mathbb{F}$ ולכן $\bar{\sigma}(\neg A) = \mathbb{T}$.

- אם $A = \neg B$, או ש: $\vdash_T B$ או ש: $\vdash_T \neg B$ (מהשלמות של התורה).

- אם $\vdash_T B$ אז $\vdash_T \neg A$ ואז:

$$\bar{\sigma}(B) = \mathbb{T}, \bar{\sigma}(A) = \mathbb{F} \Rightarrow \bar{\sigma}(\neg A) = \mathbb{T}$$

- אם $\vdash_T \neg B$ אז $\vdash_T A$ ואז:

$$\bar{\sigma}(\neg B) = \mathbb{T}, \bar{\sigma}(A) = \mathbb{T}$$

- אם $A = (\exists x) B$ - כאן נשתמש בתכונת הנקי, בה לא השתמשנו עד כה. תהי $\sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}|$ אזי:

$$\bar{\sigma}(A) = \bigvee_{[u] \in X} \overline{\sigma[x/[u]]}(B)$$

לפי אקסיומת ההצבה, $\vdash_T B_x[u] \rightarrow (\exists x) B$ לכל $u \in Y$.
לכל $u \in Y$, או ש- $\vdash_T B_x[u]$, או ש- $\vdash_T \neg B_x[u]$ כי $B_x[u]$ נוסחא סגורה (כל המשתנים שהם לא x קשורים בכמתים כי A סגורה, ולאחר החלפת x לא נותר אף משתנה שעלול להיות חופשי).

- נניח $\vdash_T \neg A$. אז לכל $u \in Y$, $\vdash_T \neg B_x[u]$, כי אחרת $\vdash_T B_x[u]$, ואז לפי כלל הניתוק (עם אקסיומת ההצבה) $\vdash_T (\exists x) B$ כלומר $\vdash_T A$ בסתירה. אז:

$$\bar{\sigma}(B_x[u]) = \mathbb{F}, \bar{\sigma}(\neg B_x[u]) = \mathbb{T}$$

מדוע? כאן למעשה אנחנו לא יודעים מהי אורך סדרת היצירה של $\neg B_x[u]$ ועל כן לא ניתן להשתמש באינדוקציה הראשונה שלנו. אולם, אנו יודעים כי מספר הכמתים בה קטן מזה שב- A , ופה אנו משתמשים באינדוקציה השנייה שלנו - על מספר הכמתים. על כן הרשום מעלה נכון. נשתמש בטענה שהוכחנו - $\tilde{\sigma}(u) = [u]$, ונקבל:

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= \bar{\sigma}(B_x[u]) = \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(u)]}(B) = \overline{\sigma[x/[u]]}(B) \\ &\Rightarrow \bar{\sigma}(A) = \bigvee_{[u] \in X} \overline{\sigma[x/[u]]}(B) = \mathbb{F}, \bar{\sigma}(\neg A) = \mathbb{T} \end{aligned}$$

- נניח $\vdash_T A$, אז $\vdash_T (\exists x) B$. לפי תכונת הנקין, קיים קבוע e כך ש:

$$\vdash_T (\exists x) B \rightarrow B_x[e]$$

לפי כלל הניתוק, $\vdash_T B_x[e]$, ואז מהנחת האינדוקציה (השנייה):

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \bar{\sigma}(B_x[e]) = \overline{\sigma[x/[e]]} \\ \bar{\sigma}(A) &= \bar{\sigma}((\exists x) B) = \bigvee_{[u] \in X} \overline{\sigma[x/[u]]}(B) = \mathbb{T} \end{aligned}$$

■

וסיימנו!

12/1/2012

נרצה להראות דוגמא לאי הקיום התכונות מעלה - נשתמש בתיאוריה של שדות. נרצה את הסיגנטורה הבאה:

$$+, \cdot, 0, 1$$

נבדוק אם האקסיומות של השדה מתקיימות:
ראינו שאם תורה היא שלמה ובעלת תכונת הנקין, אז המודל יהיה מודל של התורה. נזכיר איך הגדרנו את קבוצת המבנה:
שמות עצם ללא משתנים - סימנו אותה ב- Y . כאן הקבועים שלנו הם $0, 1$, ומהם אפשר לבנות את כל מה שאפשר לבנות באמצעות שתי הפונקציות והצירופים שלהם. למשל:

$$(1 + 1) \cdot ((1 + 0) + 1) + 1$$

את יחס השקילות הגדרנו להיות $u \sim v$ אם $\vdash_T u = v$. למשל:

$$1 + (1 + (1 + (1 + 1))) \sim (1 + 1) \cdot ((1 + 0) + 1) + 1$$

כלומר, מחלקות השקילות הם המספרים הטבעיים. אבל הבעיה - הטבעיים אינם שדה - אין נגדי ל-1. נוסיף את אקסיומת קיום האיבר הנגדי:

$$(\forall x) (\exists y) (x + y = 0)$$

אחד המקרים של משפט ההצבה הוא:

$$\vdash_{TF} (\forall x) A \rightarrow A_x[u]$$

נסמן $A = (\exists y) (x + y = 0)$. במקרה שלנו נקבל:

$$\vdash (\forall x) (\exists y) (x + y = 0) \rightarrow (\exists y) (x + y = 0)_x[1 + 1]$$

$$\vdash (\forall x) (\exists y) (x + y = 0) \rightarrow (\exists y) ((1 + 1) + y = 0)$$

$$\vdash_{TF} (\exists y) ((1 + 1) + y = 0)$$

כלומר קיבלנו היסק - קיים איבר נגדי ל-2. אולם במבנה שלנו אין כזה איבר! אם היתה מתקיימת תכונת הנקין, היינו מקבלים (ישירות מההגדרה) כי קיים e (עד) כך ש:

$$\vdash_T (\exists y) ((1 + 1) + y = 0) \rightarrow ((1 + 1) + e = 0)$$

שכן תכונת הנקין אומרת שאם נביט בנוסחא סגורה $(\exists x) B$, מתקיים e כך ש:

$$\vdash_T (\exists x) B \rightarrow B_x[e]$$

אזי מחלקת השקילות של e היתה מייצגת את ההפכי של 2 - (-2) . אבל אין כזה, ולכן למבנה אין את תכונת הנקין, ולכן לא קיבלנו מספיק איברים כדי לקיים את האקסיומות. זהו החסרון במבנה שאין בו תכונת הנקין.

איך ממשיכים הלאה?

נראה להראות שאם לתיאוריה עקבית אין תכונת הנקין עדיין יש לה מודל. נצטרך להכניס מושג חדש:

1.6.3 הרחבות

הגדרה 1.75 תהי L שפה, T תיאוריה. תהי L' הרחבה של השפה L , ותהי T' תיאוריה מורחבת של T .

(L', T') נקראת הרחבה שמרנית של (L, T) אם לכל נוסחא A בשפה המקורית L מתקיים:

$$\vdash_{L', T'} A \text{ א"מ"מ } \vdash_{L, T} A$$

הכיוון $\Leftarrow$ הוא מיידי, החשוב כאן הוא הכיוון השני.

למשל - במשפט הקבועים קיבלנו הרחבה שמרנית (שכן הוספנו רק קבועים).

משפט 1.76 לכל תיאוריה T עקבית בשפה L קיימת הרחבה של השפה L' והרחבה של התיאוריה T' כך ש:

1. (L', T') היא הרחבה שמרנית של (L, T) .

2. T' היא בעלת תכונת הנקין.

הערה 1.77 הרחבה שמרנית של תיאוריה עקבית, גם היא עקבית, שכן בסתירה, אם היא לא עקבית אפשר להסיק דבר שיקרי, ומכך שהיא שמרנית, אפשר להוכיח את אותו הדבר בשפה המקורית, בסתירה לעקביותה.

הערה 1.78 בתיאוריה לא עקבית ניתן להוכיח כל נוסחא, שכן $A \wedge \neg A \rightarrow B$ הינה טאוטולוגיה, כלומר $\vdash A \wedge \neg A \rightarrow B$, ולכן מ- $\vdash_T A \wedge \neg A$ (מה שקורה בתיאוריה שאינה עקבית) נקבל $\vdash_T B$.

נוכיח את המשפט: **הוכחה:** נבנה סדרה של שפות:

תהי $L_0 = L$ השפה המקורית. נגדיר את L_1 בצורה הבאה:

לכל נוסחא סגורה $(\exists x) B$ בשפה $L = L_0$ נכניס קבוע חדש $e_{(\exists x)B}$. כך נקבל את השפה L_1 . נגדיר $T = T_0$ התיאוריה המקורית. T_1 מתקבלת מ- T_0 ע"י הוספת כל הנוסחאות $(\exists x) B \rightarrow B_x [e_{(\exists x)B}]$ כנ"ל.

בשלב הבא, לכל נוסחא סגורה $(\exists x) B$ בשפה L_1 (אך לא ב- L_0) נכניס קבוע חדש $e_{(\exists x)B}$ כך שנקבל שפה L_2 . כמו כן נוסיף את כל הנוסחאות מהצורה $(\exists x) B \rightarrow B_x [e_{(\exists x)B}]$ ונקבל T_1 ו- T_2 .
כנ"ל מ- L_m עוברים ל- L_{m+1} , ומ- T_m עוברים ל- T_{m+1} .

דוגמא

נביט בשפה בה יש סמל יחס $P(x, y)$, ונוסחא $(\exists z) B$ (היא השפה המקורית L_0), ויהי קבוע חדש $e_{(\exists z)B}$ אותו נוסיף כדי ליצור את L_1 . אזי בשלב הבא באינדוקציה נוסיף את הקבוע החדש לנוסחאות הסגורות, כלומר הנוסחא $(\exists x) P(x, e_{(\exists z)B})$ תופיע ב- T_1 . לנוסחא זו בשלב הבא נגדיר קבוע חדש, שיופיע בשפה החדשה L_2 , וחוזר חלילה.

נגדיר $T' = \bigcup_{m \geq 0} T_m$, $L' = \bigcup_{m \geq 0} L_m$. נראה כי מה שקיבלנו הוא בעל תכונה הנקין

- למעשה מעצם הבניה, ברור כי T' היא בעלת תכונת הנקין. מדוע? כל נוסחא סגורה מהצורה $(\exists x) B$ שייכת לאיזהו L_m עבור m מסויים. ואז, לרמה הבאה T_{m+1} נמצאת שייכת הנוסחא:

$$(\exists x) B \rightarrow B_x (e_{(\exists x)B})$$

כאשר $e_{(\exists x)B} \in L_{m+1}$. על כן תכונת הנקין מתקיימת. נותר להוכיח כי ההרחבה שקיבלנו היא שמרנית.

נזכור כי ההרחבה (L', T') היא שמרנית כאשר לכל נוסחא A בשפה L אמ"מ $\vdash_{L', T'} A$.

נניח כי A נוסחא בשפה L , וכן נניח כי $\vdash_{L', T'} A$. עלינו אם כך על מנת להוכיח השמרנות, להוכיח כי $\vdash_{L, T} A$.

נראה כי אפשר להשתמש במשפט הדדוקציה - זה אפשרי, כי אם נביט בנוסחאות שנוספו לשפה, הן כולם מהצורה

$$(\exists x) B \rightarrow B_x (e_{(\exists x)B})$$

בנוסחאות מסוג זה, הקבוע יחיד שיכול להיות חופשי ב- B הוא x , אבל אנחנו מוסיפים כמת עליו - כלומר כל הנוסחאות הללו הן נוסחאות סגורות. על כן, לפי משפט הדדוקציה והמסקנה ממנו:

$$\vdash_{L', T} C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_k \rightarrow A$$

כאשר כל C_i הוא מהצורה $(\exists x_i) B_i \rightarrow B_{i, x_i} [e_{(\exists x_i) B_i}]$, k הוא סופי, שכן מההנחה $\vdash_{L', T'} A$, כלומר קיימת סדרת היסק, והיא מהגדרתה סופית.

כמובן שמותר להניח שאף אחד מה- C_i לא חוזר על עצמו (אחרת פשוט נוריד אותו).
כמו כן, לכל i , C_i שייכת ל- T_{m_i} , אבל לא ל- T_{m_i-1} , וכן מותר להניח כי:

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k$$

אזי נוכל לכתוב:

$$\vdash_{L',T} ((\exists x_1) B_1 \rightarrow B_{1x_1} [e_{(\exists x_1)B_1}]) \rightarrow ((\exists x_2) B_{12} \rightarrow B_{2x_2} [e_{(\exists x_2)B_2}]) \rightarrow \dots \rightarrow A$$

טענה 1.79 הקבוע $e_{(\exists x_1)B_1}$ לא מופיע עוד פעם בנוסחא הנ"ל.

■ **הוכחה:** הוא אינו מופיע ב- $B_2, \dots, B_k$, וכן כל $C_1, C_2, \dots, C_k$ שונים זה מזה.

אזי מהטענה, על סמך משפט הקבועים, נבצע החלפת משתנה (ראינו שמופיע רק במקום אחד מהטענה) ונקבל:

$$\vdash_{L',T} ((\exists x_1) B_1 \rightarrow B_{1x_1} [y]) \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_k \rightarrow A$$

על סמך כלל הכנסת $\exists$:

$$\vdash_{L',T} (\exists y) ((\exists x_1) B_1 \rightarrow B_{1x_1} [y]) \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_k \rightarrow A$$

על סמך משפט הוריאנט (מכיוון y לא הופיע קודם):

$$\vdash_{L',T} (\exists x_1) B_1 \leftrightarrow (\exists y) B_{1x_1} [y]$$

על פי כללי הקידומת ומשפט השקילות:

$$\vdash_{L',T} ((\exists x_1) B_1 \rightarrow (\exists y) B_{1x_1} [y]) \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_k \rightarrow A$$

על סמך כלל הניתוק:

$$\vdash_{L',T} C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_k \rightarrow A$$

נמשיך בצורה אינדוקטיבית, ונקבל:

$$\vdash_{L',T} A$$

על סמך משפט הקבועים נקבל (אפשר לשכתב את ההוכחה ולרשום משתנים במקום קבועים) $\vdash_{L,T} A$, כנדרש. ■

1.6.4 משפט לינדנבאום

משפט 1.80 כל תיאוריה עיקבית T ניתן להרחיב לתיאוריה שלמה T^* ללא שינוי שפה.

הערה 1.81 אם T היא בעלת תכונת הנקי, אז גם T^* בעלת תכונת הנקי.
אכן, לכל נוסחא סגורה מהצורה $(\exists x) B$ נמצא קבוע e בשפה L כך ש: $\vdash_T (\exists x) B \rightarrow B_x [e]$, וממילא $\vdash_{T^*} (\exists x) B \rightarrow B_x [e]$

משפט זה בדיוק יסיים לנו את הוכחת משפט השלמות.
 ההוכחה למשפט לינדנבאום מסתמכת על גרסא חלשה של אקסיומת הבחירה:
 בהנתן $\{(A_\alpha | \alpha \in I, A_\alpha \neq \phi)\}$, קיימת קבוצה $B = \{(a_\alpha | \alpha \in I), a_\alpha \in A_\alpha\}$, כלומר
 ניתן לבחור נציג אחד ואחד בלבד מכל קבוצה.
 כביכול הדבר נראה טריוויאלי. כשמתכללים על כך לעומק, עם זאת, זה נראה יותר
 מסובך - אולי אין דרך קונסטרוקטיבית לבחור את האיבר. כשמתמשים באקסיומה זו,
 מתקבלים כל מיני פרדוקסים, אולם לכאורה אין ברירה אלא להניח את נכונותה.
 תמיד מביאים דוגמא שכזו - נגיד ש- A_α היא קבוצה שמכילה זוג גרביים, לכל α . אם
 היתה בקבוצה גרב ימין וגרב שמאל, אזי היינו יכולים להגדיר בחירה - למשל תמיד לבחור
 את גרב ימין. אבל מה קורה כאשר הגרביים זהות - איך נוכל לבחור? נטען שאפשר לבחור
 שרירותית - וזהו בדיוק הטענה של אקסיומת הבחירה.
 ברבות הימים מצאו אקסיומה הסותרת את אקסיומת הבחירה - כלומר אי אפשר לקבל
 את שתי האקסיומות.
 במקרה של המשפט שלנו נשתמש בגרסא חלשה יותר של אקסיומת הבחירה - **הלמה של**
טייכמולר-טיוקי:

למה 1.82 נניח ש- E קבוצה, $P(E)$ קבוצת כל תת הקבוצות של E . $\mathcal{J} \subset P(E)$ קבוצה
 של תת קבוצות של E . נאמר ש- $\mathcal{J}$ מטיפוס סופי, $M \in \mathcal{J}$ אמ"מ כל תת קבוצה סופית של
 M שייכת ל- $\mathcal{J}$.
 אם $\mathcal{J}$ מטיפוס סופי, קיימת קבוצה $N \in \mathcal{J}$ מקסימלית, $N \subseteq E$.

זוהי החלשה מסויימת של אקסיומת הבחירה. על סמך הלמה הזו, נוכיח את משפט לינדנבאום:
הוכחה: נסמן ב- E את קבוצת כל הנוסחאות בשפה L . נגדיר את $\mathcal{J}$ באופן הבא: $M \in \mathcal{J}$
 כאשר התיאוריה $T[M]$ עקבית. לכן למשל, $\phi \in \mathcal{J}$.
 נוכיח כי $\mathcal{J}$ היא מטיפוס סופי: אם מ- $T[M]$ אפשר להסיק סתירה, אזי אפשר להסיק
 סתירה מ- $T[M_0]$, כאשר M_0 היא תת קבוצה סופית של M (שכן הסיק הוא סופי). לכן
 אם הקבוצה ב- $\mathcal{J}$, אזי כל תתי הקבוצות הסופיות שלה גם עקביות, ולכן גם הן ב- $\mathcal{J}$.
 על פי הלמה של טייכמולר-טיוקי, קיימת תת קבוצה מקסימלית $N \in \mathcal{J}$ כך ש- $T[N]$
 עקבית.
 נראה כי $T[N]$ שלמה. נניח כי A נוסחא סגורה, וכי A לא שייכת ל- $T[N]$, ז"א
 $\vdash_{T[N]} \neg A$. אז $T[N \cup \{A\}]$ איננה עקבית (כי אחרת נקבל סתירה למקסימליות של N). אז
 ממשפט שהיינו אמורים להוכיח (דומה מאוד להערת הרדוקציה). זאת אומרת, $T[N \cup \{-A\}]$
 עקבית, ומהמקסימליות של N נקבל כי $\neg A \in N$, כנדרש. ■

1.6.5 הוכחת משפט השלמות

לא ממש עשינו את זה בצורה רשמית, זה נובע מכל מה שעשינו מעלה: **הוכחה:** ראינו כי אם
 T תיאוריה שלמה עם תכונת הנקיין, אזי המבנה הקנוני של T הוא מודל של T .
 הוכחנו כי אם T עקבית, קיימת לה הרחבה שמרנית (L', T') כך ש- T' היא בעלת תכונת
 הנקיין. כמו כן, ממשפט לינדנבאום, מכיוון ו- T עקבית, גם T' עקבית, ולכן ניתן להרחיבה
 לתיאוריה שלמה T^* ללא שינוי השפה, וגם היא תהיה שמרנית (כי לא שינוי את השפה).
 אזי מצאנו תיאורית מורחבת T^* היא שלמה ובעלת תכונת הנקיין ושמרנית. אזי המבנה
 הקנוני שלה הוא מודל של T^* . מהשמרנות, זהו גם מודל של T המקורית, כנדרש. ■

1.6.6 משפט הקומפקטיות

משפט 1.83 משפט הקומפקטיות: אם עבור כל תת קבוצה סופית T_0 של תיאוריה T , קיים מבנה $\mathcal{M}_0$ שהוא מודל של T_0 , אז קיים מבנה $\mathcal{M}$ שהוא מודל של T .

הוכחה: לפי הנתון, כל T_0 סופית היא עקבית (מהכיוון הקל של ??), לכן T עקבית - כי תהליך ההיסק הוא סופי, ולכן קיים מבנה $\mathcal{M}$ שהוא מודל של T , כנדרש. ■

כמסקנה ממשפט הקומפקטיות:

טענה 1.84 תהי $\mathcal{F}$ קבוצת כל השדות הסופיים, ויהי $Th(\mathcal{F})$ כל הנוסחאות המתקיימות בכל השדות הסופיים. אזי ל- $Th(\mathcal{F})$ יש מודלים אינסופיים.

מסקנה 1.85 לא ניתן לכתוב נוסחא המפרידה בין קבוצה סופית לקבוצה אינסופית של איברים (באופן כללי, לא עבור קבוצה בגודל מסויים).

1.6.7 משפט לובנהיים סקולם ופרדוקס סקולר

משפט לובנהיים-סקולם:

משפט 1.86 אם לשפה L יש סיגנטורה סופית או בת מניה, ו- T תיאוריה עקבית, אז ישנו מבנה $\mathcal{M}$ שהוא מודל של T כך שקבוצת המבנה $|\mathcal{M}|$ היא בת מניה.

23.11.2011

בקלות הוכחנו את משפט קנטור: אין התאמה חח"ע קבוצת תת הקבוצות של קבוצה בת מניה לקבוצה עצמה - כלומר ישנה קבוצה שאינה בת מניה.

לפי משפט לבנהיים-סקולם, יש לנו מבנה שהוא יהיה המודל של התיאוריה של תורת הקבוצות, במקרה הזה עם יחס השייכות. כלומר, איברי המבנה הם קבוצות בנות מניה, יחס השייכות - לכל $a, b \in |\mathcal{M}|$, נוכל להגיד אם $a \in^{\mathcal{M}} b$. נוכל להתאים ל- b קבוצה:

$$S(b) = \{a \in |\mathcal{M}| \mid a \in^{\mathcal{M}} b\}$$

כאמור אנו מקבלים כאן מודל של תורת הקבוצות. כל קבוצה מהצורה מעלה היא בת מניה. האם זו סתירה עבור מה שקיבלנו במשפט קנטור?

זהו פרדוקס סקולר. זוהי לא סתירה של ממש, אלא "מצב של מבוכה".

התשובה היא שיש לקבוצה הזו, קבוצת כל הקבוצות, מניה, אולם היא לא קיימת במבנה הזה. כלומר, המבנה בפני עצמו "אינו רואה" את המניה הזו - ההעתקה לא שייכת למבנה. מה בכל זאת המבוכה? נשאל, מהו בעצם המושג "לא בן מניה" - אולי כשמסתכלים על מודל מבחון, אפשר למצוא שקבוצה בעלת מניה היא אינה בת מניה, כמו כאן, כלומר, האם זהו מושג יחסי למודל?

חלק II תרגולים

3/11/2011

1.7 תחשיב פסוקים

סיכום מסודר - בבנק האקדמי (יכלול גם חלקים שלא נספיק כאן).

1.7.1 סימני השפה

1. פסוקים יסודיים - $P_1, \dots, P_n, \dots$.
 2. סוגריים $()$.
 3. קשרים - דו מקומיים - $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$, והשלילה - $\neg$.
- הגדרה 1.87** ביטוי הוא סדרה סופית של סימנים בשפה. למשל

$$\forall \wedge \rightarrow P_5)($$

נסמן את קבוצת הביטויים ב- $Expr$.

הגדרה 1.88 נגדיר את $Prop^{18}$ להיות הקבוצה המינימלית כך ש:

1. $Prop \subseteq Expr$.
2. $P_i \in Prop$ לכל פסוק יסודי.
3. אם $\phi \in Prop$ אז $\neg(\phi) \in Prop$.
4. אם $\phi, \psi \in Prop$ אז גם $\phi \vee \psi \in Prop$, $\phi \wedge \psi \in Prop$, $\phi \rightarrow \psi \in Prop$, $\phi \leftrightarrow \psi \in Prop$.
הוא אחד מהקשרים הדו מקומיים.

1.7.2 אינדוקציה על בניית הפסוק

נשתמש בשיטה זו ע"מ להראות תכונה של כל קבוצת הפסוקים.

משפט 1.89 תהי $S \subseteq Prop$ המקיימת את תכונות 2-4. אזי $S = Prop$.

דוגמא: פסוק יקרא מאוזן, אם יש בו אותו מספר של סוגרים מכל סוג.

טענה 1.90 נניח שאנחנו רוצים להראות כי כל הפסוקים מאוזנים.

הוכחה: תהי $S \subseteq Prop$ קבוצת כל הפסוקים המאוזנים.
נראה כי כל התכונות מתקיימות 2-4 מתקיימות - נותר לסטודנט השקדן.

¹⁸proposition - פסוק

1.7.3 סדרת יצירה של פסוק

■

הגדרה 1.91 סדרת פסוקים $\phi_1, \dots, \phi_n$ המקיימת לכל $k \leq n$ אחד התנאים נכון:

1. ϕ_k פסוק יסודי.

2. קיים $l < k$ כך ש- $\phi_k = \neg(\phi_l)$.

3. קיימים $m, l < k$ כך ש- $\phi_k = (\phi_m) \square (\phi_l)$.

תקרא סדרת יצירה עבור ϕ_n .

דוגמא:

$$((P_1) \vee (P_2)) \rightarrow (\neg(P_3))$$

הפסוקים היסודיים בביטוי - P_1, P_2, P_3

$$(P_1) \vee (P_2), \neg(P_3)$$

$$((P_1) \vee (P_2)) \rightarrow (\neg(P_3))$$

הערה 1.92 הגדרת סדרת היצירה אינה מגדירה לנו כיצד למצוא אותה. כמו כן, יכולות להיות יותר מסדרת יצירה אחת - למשל, בדוגמא מעלה, ניתן לשנות את סדר האיברים.

1.7.4 עץ יצירה

הגדרה 1.93 עץ יצירה הוא הצגה של הפסוק והפסוקים המרכיבים אותו בצורת עץ.

הערה 1.94 עץ יצירה הוא יחיד, ועל כן הצגה בצורה כזו עדיפה על ההצגה של סדרת יצירה.

משפט 1.95 (משפט הקריאה היחידה) לכל פסוק ϕ מתקיימת אחת ורק אחד מהאפשרויות הבאות:

1. ϕ הוא פסוק יסודי.

2. קיים ψ כך ש- $\phi = \neg(\psi)$.

3. קיימים ψ_1, ψ_2 כך ש- $\phi = (\psi_1) \square (\psi_2)$.

הערה 1.96 לא נוכיח משפט זה.

דוגמא: נבנה עץ יצירה לדוגמא מעלה.

$$\begin{array}{c}
 ((P_1) \vee (P_2)) \rightarrow (\neg(P_3)) \\
 /\backslash \\
 (P_1) \vee (P_2) \quad \neg(P_3) \\
 /\backslash \\
 P_1 \quad P_2 \quad P_3
 \end{array}$$

1.7.5 מבנה לשפת תחשיב הפסוקים

הגדרה 1.97 מבנה הוא פונקציה $A : \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$.
מבנה A מגדיר באופן יחיד הרחבה $\bar{A} : \text{Prop} \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ כך ש $\bar{A}(x) = A(x)$, $\text{Dom } \bar{A} \supseteq \text{Dom } A$

$$\bar{A} : \text{Prop} \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$$

באופן הבא:

1. אם $\phi = P_i$, אז $\bar{A}(\phi) = A(\phi)$.

$\bar{A}(\psi)$	$\bar{A}(\phi)$
T	F
F	T

2. אם $\phi = \neg(\psi)$:

3. אם $\phi = (\psi_1) \square (\psi_2)$:

$\bar{A}(\psi_1)$	$\bar{A}(\psi_2)$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

1.7.6 טבלת אמת

הגדרה 1.98 טבלת אמת מבטאת את ערך האמת של פסוק בכל מבנה אפשרי¹⁹.

דוגמא:

$$(P_1) \rightarrow \neg(P_2)$$

הערכים עבור P_1, P_2 נתונים, נרצה לחשב את הערך שינתן מהביטוי הנ"ל - מומלץ בתרגיל למצוא את הערך הנתון עבור כל אחד מהפסוקים המופיעים בסדרת היצירה:

P_1	P_2	$P_1 \rightarrow \neg(P_2)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

תרגולים חסרים

¹⁹פסוק נתון מכיל מספר סופי של פסוקים יסודיים, ולכן מעניין לבדוק את הערך המתקבל רק מאותם פסוקים

1/12/2011

1.7.7 כללי היסק

תהי נוסחה φ וקבוצת נוסחאות Σ .

ניתן לשאול שתי שאלות, שתיהן מקושרות דרך משפט הנאותות:

1. $\Sigma \models \varphi$ - האם בכל מבנה $\mathcal{M}$ והשמה σ מתקיים (לכל $\psi \in \Sigma$, $\bar{\sigma}(\psi) = \mathbb{T}$) גורר $\bar{\sigma}(\varphi) = \mathbb{T}$.

2. $\Sigma \vdash \varphi$ - האם קיימת סדרת היסק מ- Σ .

משפט 1.99 משפט הנאותות: $\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models \varphi$

1.7.8 אקסיומות לוגיות:

- $\neg A \vee A$ - אקסיומות פסוקיות $(A \rightarrow A)$.

- $x = x$ - זהות

- שיוויון:

$$x_1 = y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow (f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n))$$

$$x_1 = y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n)$$

- החלפה:

$$A_x[\tau] \rightarrow \exists x A$$

כללי היסק:

- $A \vdash B \vee A$ - הרחבה.

- $A \vee A \vdash A$ - צמצום.

- $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$ - אסוציאטיביות.

- $A \vee B, \neg A \vee C \vdash B \vee C$ - כלל החתך²⁰.

- $A \rightarrow B \vdash \exists x A \rightarrow B$ - אם $x \notin FV(B)$ - כלל הכנסת הכמת.

נתבונן במבנה $\langle \mathbb{N}, < \rangle$, ובנוסחא:

$$(x_1 < x_2) \rightarrow (x_1 < x_2)$$

זוהי אקסיומה פסוקית.

²⁰הסדר כאן מאוד חשוב!²¹אם ל- x אין הופעה חופשית ב- B

ננסה לבצע הכנסת כמת ללא התנאי הרשום מעלה:

$$\exists x_1 (x_1 < x_2) \rightarrow (x_1 < x_2)$$

נשאל האם הרשום מעלה נכון עבור כל השמה במבנה? לא! נראה בעזרת דוגמא נגדית:

$$\sigma(x_1) = 3, \sigma(x_2) = 2$$

אז נקבל פסוק שקרי.
כעת נביט בנוסחה:

$$A \vee \neg A$$

זוהי לא אקסיומה, אך ניתן להוכיח אותה בעזרת האקסיומות הלוגיות. נרצה לדעת:

$$A \vee B \vdash B \vee A$$

כן! נראה זאת:

$$\vdash A \vee B$$

$$\vdash \neg A \vee A$$

כאשר אנו מתחילים עם השורה הראשונה, וכן השורה השניה היא אקסיומה לוגית. מכלל החתך נקבל:

$$\vdash B \vee A$$

לכן אפשר להסתכל על הכלל הזה ככלל היסק נוסף - נקרא לו כלל החילוף.
נעשה תהליך זה לנוסחאות נוספות - תחילה, חיתוך ימני:

$$A \vee B, C \vee \neg B \vdash A \vee C$$

אזי:

$$\vdash A \vee B$$

$$\vdash C \vee \neg B$$

$$\vdash B \vee A$$

$$\vdash \neg B \vee C$$

$$\vdash A \vee C$$

כעת, נוכיח אסוציאטיביות משמאל:

$$(A \vee B) \vee C \vdash A \vee (B \vee C)$$

אזי, בעזרת האקסיומות הנוספות שהוכחנו עד כה:

$$\vdash (A \vee B) \vee C$$

$$\vdash C \vee (A \vee B)$$

$$\vdash B \vee (C \vee A)$$

$$\vdash (B \vee C) \vee A$$

$$\vdash A \vee (B \vee C)$$

כאשר השורה השניה נובעת מחילוף, השלישית מאסוציאטיביות. לשילוב של חיתוך ימני ואסוציאטיביות נקרא "חתך מוכלל". נוכל להגיע (תרגיל) גם לאקסיומה הבאה:

$$A \vee B, \neg B \vee C \vdash A \vee C$$

אקסיומה נוספת:

$$A \rightarrow C, B \rightarrow C \vdash (A \vee B) \rightarrow C$$

אזי:

$$\begin{aligned} 1 &\vdash A \rightarrow C \\ 2 &\vdash B \rightarrow C \\ 3 &\vdash \neg(A \vee B) \vee (A \vee B) \\ 4 &\vdash (\neg(A \vee B) \vee A) \vee B \\ 5 &\vdash (\neg(A \vee B) \vee A) \vee C \\ 6 &\vdash \neg(A \vee B) \vee (A \vee C) \\ 7 &\vdash A \vee (C \vee \neg(A \vee B)) \\ 8 &\vdash C \vee (C \vee \neg(A \vee B)) \\ 9 &\vdash C \vee \neg(A \vee B) \\ 10 &\vdash (A \vee B) \rightarrow C \end{aligned}$$

כאשר $A \vee B$ היא נוסחא, ולכן יכולנו ליצור את השורה השלישית (אקסיומה לוגית), השורה הרביעית מאסוציאטיביות, החמישית מחתך מוכלל, השישית מאסוציאטיביות משמאל, השביעית מאסוציאטיביות + חילוף, השמינית מכלל החתך + השורה הראשונה, התשיעית בצמצום מוכלל שמיד נוכיח, והאחרונה מחילוף. הוכחת הצמצום המוכלל:

$$\begin{aligned} 1 &\vdash A \vee (A \vee B) \\ 2 &\vdash (A \vee B) \vee A \\ 3 &\vdash A \vee (B \vee A) \\ 4 &\vdash B \vee (A \vee (B \vee A)) \\ 5 &\vdash (B \vee A) \vee (B \vee A) \\ 6 &\vdash B \vee A \\ 7 &\vdash A \vee B \end{aligned}$$

כאשר השורה השניה נובעת מחילוף, השלישית מהאסוציאטיביות מוכללת, הרביעית מהרחבה, חמישית מהאסוציאטיביות, שישית מצמצום ואחרונה מחילוף. נשים לב כי הוכחנו מרשימה יחסית מינימלית של כללי היסק, כאשר יכולנו להוסיף את האקסיומות שכרגע הוכחנו, אבל האינטרס הוא שימוש ברשימה מינימלית.

נחפש קשר בין $\vdash$, $\rightarrow$. נטען כי אם $A \vdash B$ אז $(A \rightarrow B) \vdash$ ולהפך.

הכיוון הקל - נניח כי הביטוי השמאלי נכון:

$$\begin{aligned} 1 &\vdash A \\ 2 &\vdash A \rightarrow B \quad (\neg A \vee B) \\ 3 &\vdash A \vee B \\ 4 &\vdash B \vee B \\ 5 &\vdash B \end{aligned}$$

כאשר שתי השורות הראשונות הן מההנחה, השלישית מהרחבה וחילוף, רביעית מחתך וחמישית מצמצום.

8/12/2011

בתרגיל השבוע נוכיח את המינימליות של מערכת ההיסק:
ראינו ממשפט הנאותות כי:

$$\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$$

כאשר הצד השמאלי משמעותו: קיימת סדרת היסק, והצד הימני משמעותו - "גרירה" במובן של מבנים.

נרצה להגיע לכיוון השני - הוא משפט השלמות.
נניח שנשמיט $\vdash *$ משפחת אקסיומות, או כלל היסק, אז נקבל יחס "מוכיח" חדש $\vdash *$.
אנו יודעים כי קיימת גרירה:

$$\Sigma \vdash * \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi$$

האם מתקיימת גרירה בכיוון השני?

נראה דוגמאות עתה ובתרגיל כשאנחנו משמיטים אקסיומות, נוכל למצוא נוסחאות שניתן להסיק במערכת המקורית, אך לא ניתן להסיקה במערכת החדשה (לאחר ההשמטה).
נגדיר את $\vdash *$ כמו $\vdash$, אבל ללא אקסיומת ההחלפה, ותהי:

$$\varphi = (x = x) \rightarrow \exists x (x = x)$$

נראה שלא מתקיים $\vdash *$.

נגדיר באינדוקציה על בניית הנוסחא פונקציה:

$$V : \text{Formulas} \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$$

שתקיים לכל ψ :

$$\vdash * \psi \Rightarrow V(\psi) = \mathbb{T}$$

וכן:

$$V(\varphi) = \mathbb{F}$$

כיצד נגדיר?

תחילה, עבור כל נוסחא אטומית A , נגדיר $V(A) = \mathbb{T}$.

$$V(\neg \psi) = \neg V(\psi)$$

$$V(\psi_1 \cup \psi_2) = V(\psi_1) \cup V(\psi_2)$$

$$V(\exists x \psi_1) = \mathbb{F} \\ \text{כעת:}$$

$$V(\varphi) = V(x = x) \rightarrow V(\exists x(x = x)) \\ \Rightarrow \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{F} = \mathbb{F}$$

כעת נרצה להראות $\vdash * \psi \Rightarrow V(\psi) = \mathbb{T}$. נעשה זאת באינדוקציה על סדרת ההיסק המותרת לנו מ: $\vdash * :$. עבור אקסיומת זהות:

$$V(x = x) = \mathbb{T} \\ V(\neg A \vee A) = \neg V(A) \vee V(A) = \mathbb{T} \\ V(x_1 = y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow f(\dots) = f(\dots)) = f(\dots) = f(\dots) \\ V(x_1 = y_1) \rightarrow \dots \rightarrow V(f(\dots) = f(\dots)) \\ \mathbb{T} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{T}$$

נותר לבדוק עבור כללי ההיסק:

$$A \vee A \vdash * A \\ A \vdash * B \vee A \\ A \vee (B \vee C) \vdash * (A \vee B) \vee C \\ A \vee B, \neg A \vee C \vdash * B \vee C \\ A \rightarrow B \vdash \exists x A \rightarrow B \\ V(\exists x A) \rightarrow V(B) \Rightarrow \mathbb{T}$$

במקרה הספציפי שלנו, לא משנה מהן ההנחות שלנו - בכל מקרה נקבל $\mathbb{T}$ (בדור"כ רק צריך להוכיח כי אם ההנחות שלנו הן $\mathbb{T}$ נקבל $\mathbb{T}$ - כאן קיבלנו תוצאה חזקה יותר). כלומר, לכל ψ מתקיים:

$$\vdash * \psi \Rightarrow V = \mathbb{T}$$

דוגמא

בשבוע שעבר הוכחנו נוסחאות ללא קשר לכמתים. היום, כמו שראינו במשפט $Post$, כל ההיסקים מהסוג הזה, אם נתייחס לסימנים כסימנים באלגברה בוליאנית (לדוגמא $A \vee A = A$, $\neg \neg A = A$), אפשר למצוא הוכחה לפסוקים מסוג זה. נראה כאלו:

$$\exists x(A \vee B) \vdash \exists x A \vee \exists x B$$

נזכור כי ראינו בשבוע שעבר את כלל הניתוק:

$$A, A \rightarrow B \vdash B$$

וכמו כן:

$$A \rightarrow B, C \rightarrow D \vdash (A \vee C) \rightarrow (B \vee D)$$

נשתמש בהם:

$$\begin{aligned} &\vdash A \rightarrow \exists x A \\ &\vdash B \rightarrow \exists x B \\ &\vdash (A \vee B) \rightarrow \exists x A \vee \exists x B \\ &\vdash \exists x (A \vee B) \rightarrow \exists x A \vee \exists x B \end{aligned}$$

כאשר בשורה השלישית השתמשנו בכלל הניתוק, וברביעית השתמשנו בכלל הכנסת הכמות.

ראינו כי במערכת ההיסק הרגילה שלנו, כי אם מדובר בהצבה מותרת, מתקיים:

$$\vdash A_x[\tau] \rightarrow \exists x A$$

נרצה לדון בכמות לכל - נוכיח כי:

$$\begin{aligned} &\vdash \forall x A \rightarrow A_x[\tau] \\ &A \rightarrow B \vdash \exists x A \rightarrow V \end{aligned}$$

בהנחה שההצבה מותרת.

נתחיל מאקסיומת ההצבה. מכיון ש- $A_x[\tau]$ מותרת, גם $(\neg A)_x[\tau]$ מותרת:

$$\begin{aligned} &\vdash \exists (\neg A_x[\tau]) \rightarrow \exists x (\neg A) \\ &\vdash \neg \exists x (\neg A) \rightarrow \neg \neg A_x[\tau] \end{aligned}$$

נזכור כי מתקיים $\neg \neg A \rightarrow A$, וכן:

$$\begin{aligned} &A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C \\ &A \rightarrow B \vdash A \rightarrow \forall x B \end{aligned}$$

כאשר האחרון מתקיים אם $x \notin FV(A)$.
מאלו נקבל:

$$\vdash x A \rightarrow A_x[\tau]$$

15/12/2011

"עזרה" לתרגיל 6 שאלה 1

לכל נוסחא A (בין אם x חופשי ובין אם לאו) מתקיים $A \vdash \forall x A$. נוכיח זאת:

$$\begin{aligned} &\vdash A \\ &y \notin FV(A) \vdash y = y \rightarrow A \\ &\vdash y = y \rightarrow \forall x A \\ &\vdash y = y \\ &\vdash \forall x A \end{aligned}$$

נשים לב כי לא תמיד מתקיים $\vdash A \rightarrow \forall x A$.
כמו כן, הוכחנו:

$$\vdash A \rightarrow B, C \rightarrow D \vdash (A \vee C) \rightarrow (B \vee D)$$

הערה 1.100 באופן כללי, משפט פוסט לא עוזר לנו עם כמתים.

עבור הצבה מותרת, מתקיים:

$$\begin{aligned} A \vdash A_x[\tau] : \\ \vdash \forall x A \rightarrow A_x[\tau] \\ \vdash A \\ \vdash \forall x A \\ \vdash A_x[\tau] \end{aligned}$$

אם נצליח להוכיח כי שני שמות עצם הם שווים, נוכל לרשום:

$$x_1 = y_1 \rightarrow x_2 = y_2 \rightarrow R(x_1, x_2) \rightarrow R(y_1, y_2)$$

מה אנו יודעים על יחס השיוויון?
תחילה, אנו יודעים כי יחס השיוויון הוא סימטרי. זהו יחס דו מקומי מהצורה מעלה.
נראה הסימטריות.

$$\varphi = \vdash x_1 = y_1 \rightarrow x_2 = y_2 \rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2$$

זוהי אקסיומת שיוויון עבור יחס השיוויון.

$$\vdash x_1 = y_1 \rightarrow y_1 = x_1$$

אם A ללא כמתים, אז כל הצבה מותרת. נרצה להסיק את הדבר הבא:

$$\begin{aligned} \vdash \varphi_{x_2, y_2}[x_1, x_1] \\ \vdash x_1 = y_1 \rightarrow x_1 = x_1 \rightarrow x_1 = x_1 \rightarrow y_1 = x_1 \end{aligned}$$

כעת נשתמש במשפט פוסט. מה שרשום לנו היא נוסחא מהצורה הזו:

$$A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow C$$

נרצה להסיק מכך כי

$$\vdash B \rightarrow A \rightarrow C$$

כלומר נרצה להראות שזוהי טאוטולוגיה. זוהי אכן טאוטולוגיה (לא נוכיח כאן), ועל כן נקבל:

$$\begin{aligned} \vdash x_1 = x_1 \rightarrow x_1 = y_1 \rightarrow y_1 = x_1 \\ \vdash x_1 = x_1 \end{aligned}$$

על כן נוכל להשתמש בכלל הניתוק, ונקבל:

$$\vdash x_1 = y_1 \rightarrow y_1 = x_1$$

וסיימנו. נראה כי השיוויון הוא טרנזיטיבי:

$$\vdash \varphi_{y_1}[x_1]$$

$$\vdash x_1 = x_1 \rightarrow x_2 = y_2 \rightarrow y_1 = x_2 \rightarrow x_1 = y_2$$

$$\vdash x_2 = y_2 \rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow x_1 = y_2$$

הוכחנו שתי תכונות חשובות של השיוויון - כעת נוכל להשתמש בהן:

1.8 אקסיומות פיאו

נראה יישום של מה שלמדנו עד כה בשפות ספציפיות. נגדיר:

$$L = \{\bar{0}, S(\cdot), () \cdot (), () + ()\}$$

כאשר S יוגדר בצורה שתהפוך אותו ל"עוקב" כפי שאנו מכירים. אקסיומות פיאו מגדירות את L בצורה הבאה:

$$1 S(x) \neq \bar{0}$$

$$2 S(x_1) = S(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

$$3 x_1 + \bar{0} = x_1$$

$$4 S(x_1 + x_2) = x_1 + S(x_2)$$

$$5 x_1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

$$6 x_1 \cdot S(x_1) = x_1 \cdot x_2 + x_1$$

קיימת סכמת אקסיומות:

$$7 \varphi_{\varphi_x}[\bar{0}] \wedge \forall x (\varphi \rightarrow \varphi_x(S(x))) \rightarrow \forall x \varphi$$

כאשר הנ"ל נכון כי כל ההצבות מותרות. הנ"ל נכון עבור כל φ בשפה. זוהי אקסיומת האינדוקציה.

נראה כיצד משתמשים בכללי ההיסק בצורה פורמלית כדי להגיע לדברים שראינו בשנה א'.

תחילה נרצה להוכיח:

$$\vdash x_1 + x_2 = x_2 + x_1$$

תחילה, למה:

למה 1.101

$$\varphi = \vdash x_1 + S(x_2) = S(x_1) + x_2$$

הוכחה: נשתמש בהיסק קודם $\vdash A_x[\tau]$

$$\begin{aligned}\vdash S(x_1 + \bar{0}) &= x_1 + S(\bar{0}) \\ \vdash (x_1) + \bar{0} &= S(x_1) \\ \vdash x_1 + \bar{0} = x_1 &\rightarrow S(x_1 + \bar{0}) = S(x_1) \\ \vdash S(x_1 + \bar{0}) &= S(x_1) \\ \vdash x_1 + S(\bar{0}) &= S(x_1) + \bar{0}\end{aligned}$$

כאשר השורה השלישית נובעת מאקסיומת שיוויון:

$$x_1 = y_1 \rightarrow S(x_1) = S(y_1)$$

הרביעית נובעת מהניתוק. בשורות הבאות נשתמש בטרנזיטיביות והסימטריות של יחס השיוויון. השורה האחרונה היא למעשה $\varphi_{x_2}[\bar{0}]$.
באקסיומת השיוויון עבור S :

$$x_1 = y_1 \rightarrow S(x_1) = S(y_1)$$

נציב ונקבל:

$$\vdash x_1 + S(x_2) = S(x_1) + x_2 \rightarrow S(x_1 + S(x_2)) = S(S(x_1) + x_2)$$

מאקסיומת פיאנו מס' 4 נקבל:

$$\begin{aligned}\vdash S(x_1 + S(x_2)) &= x_1 + S(S(x_2)) \\ \vdash S(S(x_1) + x_2) &= S(x_1) + S(x_2)\end{aligned}$$

נשאלת השאלה - אנחנו יודעים כי שני האגפים הימניים בשני הביטויים שווים, נרצה להחליף. ההחלפה מותרת ממשפט שנוכיח בהמשך:

$$\vdash x_1 + S(x_2) = S(x_1) + x_2 \rightarrow x_1 + S(S(x_2)) = S(x_1) + S(x_2)$$

קיבלנו:

$$\varphi \rightarrow \varphi_{x_2}[S(x_2)]$$

נוסיף את הכמת לכל, ונקבל:

$$\begin{aligned}\vdash \forall x_2 (\varphi \rightarrow \varphi_{x_2}[S(x_2)]) \\ \vdash \varphi_{x_2}[\bar{0}] \wedge \forall x_2 (\varphi \rightarrow \varphi_{x_2}[S(x_2)])\end{aligned}$$

ומכלל הניתוק:

$$\vdash \forall x_2 \varphi$$

משפט 1.102 משפט השקילות: אם $A_i \leftrightarrow A'_i \vdash$ עבור $i \leq n$, ו- B' מתקבלת מ- B ע"י מספר החלפות של A_i ב- A'_i , אזי $B \leftrightarrow B' \vdash$.

משפט 1.103 משפט השיוויון:

- א. אם $a_i = a'_i \vdash$ ו- $b' \vdash$ (שם עצם) מתקבל מ- b ע"י החלפות, אז $b = b' \vdash$.
 ב. אם $a_i = a'_i \vdash$ ו- A' מתקבלת מ- A (נוסחה) ע"י החלפות, אז $A' \leftrightarrow A \vdash$.

הערה 1.104 החלפות, משמע, זו איננה חייבת להיות הצבה, כלומר, מותר להחליף רק חלק מההופעות.

שימוש לדוגמא במשפט השיוויון:

אם $f(x) = y$, אז $f(x) + 5 = y + 5$.
 נזכיר את האקסיומות של פיאנו:
 השפה היא $\{0, S, +, \cdot\}$, כאשר S היא פונקציית העוקב.

$$\begin{aligned} N_1 S(x) &\neq 0 \\ N_2 S(x) = S(y) &\rightarrow x = y \\ N_3 x + 0 &= x \\ N_4 S(x + y) &= x + S(y) \\ N_5 x \cdot 0 &= 0 \\ N_6 x \cdot S(y) &= x \cdot y + x \end{aligned}$$

נרשום את האקסיומה השביעית בצורה שונה מעט מזו המופיעה בתרגיל - אולם שתי הצורות שקולות:

$$N_{7,\varphi} (\varphi_x [0] \wedge \forall x (\varphi \rightarrow \varphi_x [S(x)]) \rightarrow \varphi$$

כיוון ראשון - גרירה טאוטולוגית. כיוון שני - ניתן להוסיף כמת $\forall$, שכן אין הופעות חופשיות של x .
 נראה שמתוך:

$$\begin{aligned} A \vdash \varphi_x [0] \\ \vdash \varphi \rightarrow \varphi_x [S(x)] \end{aligned}$$

ניתן להסיק φ . נוכל להסיק מהשורה השניה (ע"י הוספת כמת) כי:

$$B \vdash \forall x (\varphi \rightarrow \varphi_x [S(x)])$$

ראינו כי ניתן להוכיח באמצעות גרירה טאוטולוגית $A, B \vdash A \wedge B$. לכן משימוש במשפט הטאוטולוגיה נקבל:

$$\begin{aligned} \vdash A \wedge B \\ \vdash (A \wedge B) \rightarrow \varphi \end{aligned}$$

ומכלל הניתוק נקבל את הנדרש: $\vdash \varphi$. ניתן להשתמש בסדרת היסק זו בתרגיל, זה מאוד מקל על העבודה.

נשתמש במשפטים החדשים להוכחות שונות באינדוקציה.
נראה כי כל מספר שאיננו אפס הוא עוקב:

$$\varphi = x \neq 0 \rightarrow \exists y (x = (S(y)))$$

בסיס האינדוקציה:
נזכור כי

$$A \rightarrow B = \neg A \wedge B$$

אזי מהצבה באקסיומה לוגית נקבל:

$$\vdash \bar{0} \neq \bar{0} \rightarrow \exists y (\bar{0} = S(y)) \quad (\varphi_x [\bar{0}])$$

צעד האינדוקציה - מניחים נכונות עבור מספר מסוים, ומראים נכונות עבור העוקב שלו:

$$\vdash S(x) = S(x)$$

$$\text{Hatzava} \vdash \overbrace{S(x) = S(x)}^{A_y[x]} \rightarrow \exists y \left(\overbrace{S(x) = S(y)}^A \right)$$

$$\text{Nituk} \vdash \exists y (S(x) = S(y))$$

$$\text{Harhava} \vdash \overbrace{S(x) \neq 0 \rightarrow \exists y (S(x) = S(y))}^{\varphi_x[S(x)]}$$

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi_x[S(x)]$$

וסיימנו. כאן לא ממש היה צעד אינדוקציה, אלא שימוש בעובדה שהיא נכונה באופן כללי.
נוכיח אסוציאטיביות של החיבור +:

$$\varphi = (x + y) + z = x + (y + z)$$

נשתמש בטרנזיטיביות ו** של השוויון, וכן במשפט הסימטריה.
בשנה א' עושים את ההוכחה הזו באינדוקציה על הסדר. מה עוזר לנו במעבר מאקסיומה
?7

נרצה להראות (משפט הוריאנט - האפשרות להחליף את השם של משתנה בשם של
משתנה אחר):

$$[\varphi_z [\bar{0}] \wedge \forall z (\varphi \rightarrow \varphi_z)]$$

ראינו ש- $A \vdash \forall x A$. כלומר, אם יש אוסף של משתנים בתוך A , למשל $A[x_1, \dots, x_n]$, אזי:

$$A[x_1, \dots, x_n] \vdash A[y_1, \dots, y_n]$$

משפט הוריאנט - ראינו באחד התרגולים כי:

$$\vdash \exists x A \leftrightarrow \exists y A_x[y]$$

הראנו את זה לגבי A בה y לא מופיע חופשית בלבד. במקרה זה, משפט הוריאנט אומר
שאפשר להפעיל על דבר שכזה את משפט השקילות.

נתחיל בהוכחה - בסיס האינדוקציה:

$$\text{Pianno} \vdash x + 0 = x$$

$$\text{Hatzava in Piano} \vdash (x + y) + 0 = x + y$$

$$\text{Hatzava in Piano} \vdash y + 0 = y$$

$$\text{Equality} \vdash x + \left(\overbrace{y + 0}^{a_1} \right) = x + \overbrace{y}^{a'_1}$$

$$\text{Transitivity and simetry} \vdash \overbrace{(x + y) + 0 = x + (y + 0)}^{\varphi_z(\bar{0})}$$

במקום שימוש בטרנזיטיביות וסימטריה, יכולנו פשוט להשתמש שוב במשפט השיוויון ולהחליף בשלב השני את y ב- $y + 0$ ולקבל את הנדרש.

$$\vdash S((x + y) + z) = (x + y) + S(z)$$

$$\vdash S\left(\overbrace{(x + y) + z}^{a_2}\right) = \overbrace{x + S(y + z)}^{a'_2}$$

$$\vdash S(y + z) = y + S(z)$$

$$\text{Hatzava} \vdash S\left(\overbrace{x + (y + z)}^{a_1}\right) = \overbrace{x + (y + S(z))}^{a'_1}$$

$$* \vdash x + (y + z) = (x + y) + z \rightarrow S\left(\overbrace{x + (y + z)}^{a_1}\right) = S\left(\overbrace{(x + y) + z}^{a_2}\right)$$

$$\text{Equality} \vdash x + (y + z) = (x + y) + z \rightarrow x + (y + S(z)) = (x + y) + S(z)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi_z[S(z)]$$

כאשר * נובע מהצבה ב- $x_1 = y_1 \rightarrow S(x_1) = S(y_1)$ וסיימונו! נגדיר נוסחא:

$$x|y = \exists m (y = m \cdot x)$$

נשים לב כי יש כאן איזו בעיה קטנה:

$$x|y \vdash x'|y'$$

זאת תהיה כעיה כי $x|y \vdash m|y$ וזה לא נכון תמיד. לכן יש לשים לב, ולהתייחס לרשום מעלה כנוסחא.

$$\vdash x|y \leftrightarrow \exists n (y = n \cdot x)$$

זאת כי $\exists x A \leftrightarrow \exists y A_x[y]$ כאשר y אינו חופשי ב- A .

נרצה להראות את הטרגיזטיביות של המחלק. כלומר:

$$\varphi = x|y \rightarrow y|z \rightarrow x|z$$

נטען כי זה שקול לטענה הבאה:

$$\varphi' = \exists m (y = m \cdot x) \rightarrow \exists n (z = n \cdot y) \rightarrow \exists p (z = p \cdot x)$$

זה נכון כי לפי משפט הוריאנט ניתן להשתמש כאן במשפט השיוויון (!?!?!), כלומר $\varphi \leftrightarrow \varphi'$.
לכן מספיק להראות כי φ' מתקיים.

הערה 1.105 את משפט השיוויון אפשר לרשום בצורה קצת שונה וחזקה יותר (ובה נשתמש כאן):

$$\vdash a_1 = a'_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_n = a'_n \rightarrow (A \leftrightarrow A')$$

את הצורה שאנו מכירים ניתן להסיק מגרסא זו ע"י כלל הניתוק.

נמשיך עם ההוכחה:

$$\text{Simetry} \vdash \overbrace{m \cdot x}^{a_1} = \overbrace{y}^{a'_1} \rightarrow \overbrace{z}^{a_2} = \overbrace{n \cdot y}^{a'_2} \rightarrow \left(\overbrace{z}^{a_2} = n \cdot \left(\overbrace{m \cdot x}^{a_1} \right) \leftrightarrow \overbrace{n \cdot y}^{a'_2} = \overbrace{n \cdot y}^{n \cdot a'_1} \right)$$

$$\vdash m \cdot x = y \rightarrow z = n \cdot y \rightarrow z = n \cdot (m \cdot x)$$

$$\text{from the Targil} \vdash n \cdot (m \cdot x) = (n \cdot m) \cdot x$$

$$\text{Equality - original} \vdash y = m \cdot x \rightarrow z = n \cdot y \rightarrow z = (n \cdot m) \cdot x$$

איך מסיימים? חסר רק הכנסת כמתים. מהצד השמאלי $\exists p (z = px)$.
נגיד שקיים $A \rightarrow B \rightarrow C$ ונרצה להכנס כמתים: $\exists x A \rightarrow \exists x B \rightarrow C$.
בשלב הראשון:

$$\exists x A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

ובשלב השני ממשפט הטאוטולוגיה:

$$B \rightarrow (\exists x A \rightarrow C)$$

כאשר התנאי הוא שהכמת אינו חופשי באף אחת מהנוסחאות. פירוט בנושא יהיה במודל.

2 על הוכחת משפט השלמות

12/01/2012

תחילה - תזכורות:

הגדרה 2.1 תורה היא אוסף נוסחאות.

הגדרה 2.2 T' היא הרחבה של T אם $T' \supset T$, $L(T') > L(T)$.

הגדרה 2.3 הרחבה נקראת שמרנית אם $\varphi \in L(T)$ ומתקיים $\vdash_{T'} \varphi$, אז $\vdash_T \varphi$.

הגדרה 2.4 נאמר עבור $\varphi \in L(\mathcal{M})$ שמתקיים $\mathcal{M} \models \varphi$, אם לכל השמה $\sigma : Var \rightarrow |\mathcal{M}|$ מתקיים $\bar{\sigma}(\varphi) = \mathbb{T}$.

הגדרה 2.5 התורה של המבנה היא:

$$Th(\mathcal{M}) = \{\varphi \in L(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \models \varphi\}$$

תחת סימונים אלו נוכל לרשום מסקנה ממשפט הנאותות (להוכחה בתרגיל):

מסקנה 2.6 אם $T \subseteq Th(\mathcal{M})$, אז T עקבית.

הגדרה 2.7 T תקרא עקבית אם לא קיימת φ כך ש- $\vdash_T \varphi$ וגם $\vdash_T \neg \varphi$.

הגדרה 2.8 T תקרא הנקין (או בכיתה - בעלת תכונת הנקין) אם לכל $\exists x \varphi \in L(T)$ סגורה קיים סימן קבוע $e \in L(T)$ (עד) כך ש:

$$\vdash_T \exists x \varphi \rightarrow \varphi_x[e]$$

הגדרה 2.9 מבנה קנוני a_T הוא מבנה בשפה $L(T)$, כאשר קבוצת המבנה היא מחלקות השקילות $\sim$ על קבוצת שמות העצם שאינם מכילים משתנים מ- $L(T)$, כאשר יחס השקילות $\sim$ מוגדר ע"י:

$$a \sim b \Leftrightarrow \vdash_T a = b$$

הגדרת הפירוש של פונקציות ויחסים נעשים על ידי נציגים. לדוגמא - יהי R^{a_T} יחס דו מקומי. אזי:

$$R^{a_T}([a]) = \mathbb{T} \Leftrightarrow \vdash_T R(a)$$

תכונה חשובה של המבנה הקנוני:

משפט 2.10 המבנה הקנוני מקיים $a_T \models \varphi$ לכל φ שאינה מכילה משתנים.

נראה דוגמאות:

- נבנה T תורה שלמה ואינה הנקין כך שמתקיים $a_T \not\models T$:
יהי $\mathcal{M}$ המבנה:

$$|\mathcal{M}| = \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad a <^{\mathcal{M}} b = \mathbb{T} \Leftrightarrow \begin{cases} a < b & a, b \in \mathbb{N} \\ b = \infty, a \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$(\bar{n})^{\mathcal{M}} = n, \quad L(\mathcal{M}) = \{\bar{n}, <\}$$

תהי $T = Th(\mathcal{M})$. אזי T שלמה (תורה של מבנה) וכן היא עקבית. נטען שאין לה תכונת הנקין. נשים לב שלא לכל איבר במבנה יש קבוע - חסר ל- ∞ . נשאל מה מיוחד לאיבר זה - הוא האיבר המקסימלי בקבוצה. ננסה להראות כי תכונת הנקין לא מתקיימת מתכונה זו. תהי $\exists x\varphi = \exists x(\neg\exists y(x < y))$. נשים לב כי $A = \exists x\varphi \in T$. נראה שלא קיים לתכונה זו עד. נשים לב:

$$\mathcal{M} \vdash \neg\varphi_x[\bar{n}] \quad \forall \bar{n} \Rightarrow \vdash_T \neg\varphi_x[\bar{n}], \quad \neg\varphi_x[\bar{n}]$$

כאשר הצד השמאלי מתקיים מכיוון ולא קיים מספר טבעי שגדול מכל שאר הטבעיים. $\vdash_T \exists x\varphi$ ו- $\vdash_T \neg\varphi_x[\bar{n}]$ מטאוטולוגיה נקבל:

$$\begin{aligned} \vdash_T A, \vdash_T B \\ \vdash_T \neg(\exists\varphi \rightarrow \varphi_x[\bar{n}]) \Leftrightarrow A \wedge \neg B \end{aligned}$$

לכן T איננה הנקין. מה אפשר לעשות את זה? נראה ש- a_T אינו מודל של T : נתבונן ב- $a_T = \langle \mathbb{N}, <^A, \bar{n} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$. $\bar{n}^A = n$, $a_T \simeq \langle \mathbb{N}, <^A, \bar{n} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$. a_T אינו יודעים שאיבר ב- a_T הוא מחלקת שקילות על קבוצת שמות העצם הקבועים - מכיוון ואין לנו פונקציות, כל שמות העצם הם סימני קבועים. מכיוון שלכל $m \neq n$:

$$\vdash_T \bar{m} \neq \bar{n}$$

לכן $|a_T| = \{\{\bar{n}\} | n \in \mathbb{N}\}$, כלומר, איברי a_T - מחלקות השקילות, הם יחידונים. המודל הוא אמנם אינו מודל של T , אך מקיים את הנדרש עבור כל הנוסחאות בהן אין משתנים (כמו זה למעלה). מאותו שיקול אם $m < n$ ניתן להוכיח $\vdash_T \bar{m} < \bar{n}$, לכן:

$$\{\bar{m}\} <^{a_T} \{\bar{n}\}$$

לכן ההעתקה $n \rightarrow \{\bar{n}\}$ היא למעשה העתקה $|a_T| \rightarrow |\mathcal{A}|$. נראה כי היא איזומורפיזם: ממה שרשום מעלה, היא חח"ע ועל. כמו כן אנו יודעים כי העתקה זו מוגדרת היטב ממה שכתבנו מעלה, כלומר, יש מחלקה אחת המתאימה לאיבר אחד, וכן מכבדת את כל הקבועים שיש בשפה. כמו כן, היא שומרת על יחס הסדר:

$$\{\bar{m}\} < \{\bar{n}\} \Rightarrow n > m$$

זה נכון מכיוון ומדובר בנוסחאות אטומיות, לכן היחס שהגדרנו בהתחלה נשמר. לכן, ההעתקה הנ"ל הינה איזומורפיזם, כלומר $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <^A, \bar{n} \rangle_{n \in \mathbb{N}} \simeq a_T$. ב- $\mathcal{A}$ אין איבר מקסימלי. מהאיזומורפיזם נקבל:

$$\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow a_T \models \varphi$$

ראינו כמו כן כי $\vdash_T \exists x\varphi$, וכן $\mathcal{A} \models \neg\exists x\varphi$, לכן $\mathcal{A}$ איננו מודל של T , ולכן a_T גם איננו מודל של T .

- דוגמא שניה שלא נספיק - נבנה תורה T שהיא הנקין ואינה שלמה: נגדיר:

$$\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, <, \bar{n} \rangle, T_0 = Th(\mathcal{M}), L(T_1) = L(T_0) \cup \{\alpha\}$$

כלומר הוספנו לתורה המקורית קבוע $\{\alpha\}$. התורה החדשה אינה שלמה, שכן לדוגמא (ממשפט הנאותות - שכן אלו נוסחאות סגורות):

$$\not\models_{T_1} \alpha \neq \bar{n}, \not\models_{T_1} \alpha = \bar{n}$$

ניקח T הרחבת הנקין שמרנית של T_1 - אפשר לעשות זו ממשפט שהוכיח בכיתה. מה זה אומר? שאם לא יכולנו להוכיח משהו קודם, לא נוכל להוכיח את אותו הדבר גם בהרחבה. לכן:

$$\not\models_T \alpha = \bar{n}, \not\models_T \alpha \neq \bar{n}, \not\models_T \alpha < \bar{n}, \not\models_T \bar{n} < \alpha$$

נראה כי a_T איננו מודל של T :
מהניתוח מעלה ניתן להוכיח ב- T כי:

$$\vdash_T x < y \vee u < x \vee x = y$$

כלומר, ניתן להוכיח את הסגור של T , אבל ב- a_T לא מתקיים:

$$\alpha < \bar{n} \vee \bar{n} < \alpha \vee \bar{n} = \alpha$$

כלומר a_T לא מקיים את תכונת ההשוואה.

26/1/2012

בהרצאה דיברנו על משפט לונהיים-סקולם:
תהי T תורה עקבית בת-מניה. אז ל- T קיים מודל בן מניה.
אפשר להשתמש במשפט זה כדי להוכיח עוד "כמה דברים נחמדים" בתורת המודלים.

הגדרה 2.11 תורה T תקרא קטגורית ב- $\aleph_0$ אם לכל שני מודלים של T בעוצמה $\aleph_0$ הם איזומורפיים.

נרצה להוכיח משפט שקשור להגדרה זו, ולמשפט לונהיים-סקולם:

משפט ($Los - Vaught$):

משפט 2.12 תהי T תורה בת מניה עקבית שאין לה מודל סופי, וקטגורית ב- $\aleph_0$. אז T שלמה.

הוכחה: נניח בשלילה ש- $\varphi \in L$ נוסחה סגורה כך ש- $\not\models_T \neg \varphi, \not\models_T \varphi$. T היא עקבית, לכן $T \cup \{\neg \varphi\}$ ו- $T \cup \{\varphi\}$ עקביות.
אזי ל- $T \cup \{\neg \varphi\}$ יש מודל (שונה זה מזה - נובע מההיפוך של משפט השלמות. ממשפט ה- $(??)$ והנאותות). לפי משפט לונהיים-סקולם, קיימים מודלים בני מניה $\mathcal{M}_2 \models T \cup \{\varphi\}, \mathcal{M}_1 \models T \cup \{\neg \varphi\}$.
מכיוון ש- T קטגורית ב- $\aleph_0$ נקבל כי $\mathcal{M}_1 \simeq \mathcal{M}_2$. אבל זו סתירה, כי קיימת נוסחה סגורה φ כך ש- $\mathcal{M}_1 \models \neg \varphi, \mathcal{M}_2 \models \varphi$, וראינו כי מודלים איזומורפיים מקיימים את אותן נוסחאות. ■

הגדרה 2.13 תורת הסדר הצפוף ללא נקודות קצה DLO היא תורה בעלת האקסיומות:

- $\neg(x < x)$
- $x < y \rightarrow y < z \rightarrow x < z$
- $x < y \vee y < x \vee y = x$
- $x < y \rightarrow \exists z (z < y \wedge x < z)$
- $\exists z (z < x) \wedge \exists z (x < z)$

כאשר שלוש האקסיומות הראשונות מגדירות את הסדר הקווי.

עובדה: התורה DLO קטגורית ב- $\aleph_0$.

מסקנה 2.14 DLO תורה שלמה.

הגדרה 2.15 תורה T מחלצת כמתים אם לכל נוסחא $\varphi \in L$ (לאו דווקא סגורה) קיימת נוסחא φ^* שאינה מכילה כמתים כך שמתקיים:

$$\vdash_T \varphi \leftrightarrow \varphi^*$$

הערה 2.16 זה מזכיר לנו דברים שראינו לגבי צורת הקידומת. כמו כן ראינו צורה אחרת בתרגיל קודם (צירופים של נוסחאות ושליה שלהן). נשים לב שלעיתים בצורת הקידומת מצאנו כי הנוסחא בצורה זו נראתה יותר "מסובכת" - גם כאן זה יהיה כך.

DLO שלמה. מצד שני:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{R}, < \rangle &\models DLO \Rightarrow Th(\mathbb{R}, <) = DLO \\ \langle \mathbb{Q}, < \rangle &\models DLO \\ D = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} &\models DLO \end{aligned}$$

לכן לא נוכל להבחין בין הנוסחאות במבנים השונים בלוגיקה מסדר ראשון (הן ממש איזומורפיות).

נוכיח את חילוף הכמתים ב- DLO : **הוכחה:** תהי $\varphi \in L$. נניח ש- φ סגורה. אם $DLO \vdash \varphi$, אזי ממשפט הטאוטולוגיה:

$$DLO \vdash (x = x) \leftrightarrow \varphi$$

אם $\neg \varphi$, אזי מאותו השיקול:

$$DLO \vdash (x < x) \leftrightarrow \varphi$$

אחרת φ היא פתוחה. נניח שהיא מכילה רק משתנים חופשיים $x_1, \dots, x_n$. נגדיר כעת סוג מיוחד של נוסחאות, שהוא יהיה צורה לכל הנוסחאות φ^* שאנו מחפשים:

נוסחא מהצורה:

$$(x'_1 \Box x'_2) \wedge (x'_2 \Box x'_3) \wedge \dots \wedge (x'_{n-1} \Box x'_n)$$

כאשר $x'_1, \dots, x'_n$ סידור מחדש של $x_1, \dots, x_n$, $\Box$ הוא $=$ או $<$. נשים לב שלא ניתן לקיים בו זמנית שני סידורים שונים מהצורה הזו (למעט המקומות שרשום בהם $=$). נראה שכל נוסחא שקולה לאיווי של סידורים. כמו כן נשים לב מטרנזיטיביות $x'_1 \leq x'_i$ לכל $1 < i \leq n$.
דוגמא: איך

$$\begin{aligned} \varphi &= (x_2 < x_3) \wedge (x_1 < x_2) \\ &\leftrightarrow (x_1 = x_2 \wedge x_2 < x_3) \vee (x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3) \vee (x_2 < x_1 \wedge x_1 < x_3) \end{aligned}$$

אפשר להפוך נוסחא פתוחה לאיווי של סידורים?

1. נניח שהנוסחא מהצורה גימור של נוסחאות אטומיות. אזי ניתן לרשום אותה כאיווי של סידורים:

$$x_i < x_j, x_i = x_i = x_j$$

2. כל נוסחא פתוחה שקולה לצירוף בוליאני חיובי (כלומר משתמש ב- $\wedge$ או ב- $\vee$ בלבד) של נוסחאות אטומיות או שלילתן. אזי:

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$$

3. נשים לב כי ב- DLO (לא בכל תורה) ניתן לכתוב כל נוסחא פתוחה כצירוף בוליאני חיובי של נוסחאות אטומיות (ללא שלילה), זאת מכיוון ו:

$$\begin{aligned} DLO \vdash (\neg(x_1 < x_2)) &\leftrightarrow (x_1 = x_2 \vee x_2 < x_1) \\ DLO \vdash (\neg(x_1 = x_2)) &\leftrightarrow (x_1 < x_2 \vee x_2 < x_1) \end{aligned}$$

ולכן נוסחא פתוחה שקולה לצירוף בוליאני חיובי של נוסחאות אטומיות.

4. על ידי שימוש בכללי הדיסטרבייטיביות, כל צירוף בוליאני חיובי שקול לאיווי של גימומים של נוסחאות אטומיות.

לכן הטענה נכונה לנוסחא פתוחה.

נותר לטפל בנוסחא מהצורה $\exists x_n \varphi$ (לא פתוחה ולא סגורה). מספיק שנוכיח את הטענה עבור φ ש היא איווי של סידורים, מבניית הנוסחא באינדוקציה ומה שעשינו עד כה. מכיוון שמתקיים $\exists x_n (A \vee B) \leftrightarrow \exists x_n A \vee \exists x_n B$ מספיק להוכיח את הטענה עבור φ שהיא סידור. למשל:

$$\begin{aligned} \exists x_4 (x_1 < x_n \wedge x_4 < x_2 \wedge x_2 = x_3) \\ \leftrightarrow (x_1 < x_2 \wedge x_2 = x_3) \end{aligned}$$

כיוון $\rightarrow$ משתמש בטרנזיטיביות אקסיומות הסדר הקווי, והגרירה בכיוון השני נכונה מאקסיומת הסדר הצפוף.

על כן כל נוסחא ניתן להציג בצורה שכזו. ■

2.1 חזרה

2/2/2012

2.1.1 מניה של מודלים ומבנים סופיים

אפשר להשאל, בהנתן שפה L , כמה מבנים של L שקבוצת המבנה שלהם היא $\{1, \dots, m\}$?
דוגמא: $L = \{f\}$, פונקציה n -מקומית.

הגדרה 2.17 מבנים הם שווים אם קבוצות המבנה שלהם שוות, ופירושי הסיגנטורה שווים.

במקרה שלנו, קבוצת המבנה נתונה, ולכן המבנה נקבע ע"י הפירוש של f במבנה:

$$f^{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}|^n \rightarrow |\mathcal{M}|$$

לכן ישנם $m^{(m^n)}$ מבנים כאלו.

כמו כן, בהנתן תורה T , אפשר לשאול כמה מודלים שונים יש לה על קבוצת מבנה נתונה? במקרה שלנו, ניקח $\{1, \dots, m\}$.

דוגמא: נניח $n = 1$, $L = \{f\}$, פונקציה n -מקומית, ו- $T = \{f(x) = f(y) \rightarrow x = y\}$.
 כמו קודם, מודל הוא בפרט מבנה, ונקבע על פי $f^{\mathcal{M}}$ (יש m^n מודלים לכל היותר).
 $\mathcal{M} \models T$ אם $f^{\mathcal{M}}$ פונקציה חח"ע. מכיוון ש- $|\mathcal{M}| = m$ סופית, $\mathcal{M} \models T$ אם $f^{\mathcal{M}}$ תמורה על m איברים, ולכן ישנם $m!$ מודלים שונים.

טענה 2.18 נניח ש- $\mathcal{M}$ מודל בעוצמה m . אז קיים מודל $\mathcal{M}'$ איזומורפי ל- $\mathcal{M}$ כך ש- $|\mathcal{M}'| = \{1, \dots, m\}$.

הוכחה: תהי $I : |\mathcal{M}| \rightarrow \{1, \dots, m\}$ חח"ע ועל. נגדיר:

$$|\mathcal{M}'| = \{1, \dots, m\}$$

$$f^{\mathcal{M}'}(a_1, \dots, a_n) = i(f^{\mathcal{M}}(i^{-1}(a_1), \dots, i^{-1}(a_n)))$$

שאלה: כמה מודלים של T קיימים בעוצמה m עד כדי איזומורפיזם?

דוגמא: T כמו קודם. מספיק לבדוק כמה מחלקות איזומורפיזם קיימות כאשר קבוצת המבנה היא $\{1, \dots, m\}$.

נניח ש- $|\mathcal{M}_1| = |\mathcal{M}_2| = \{1, \dots, m\}$. $\mathcal{M}_1$ איזומורפי ל- $\mathcal{M}_2$ אם i קיימת:

$$a \in \{1, \dots, m\} \rightarrow \overbrace{\{1, \dots, m\}}^{|\mathcal{M}_1|} \xrightarrow{\text{חח"ע ועל}} \overbrace{\{1, \dots, m\}}^{|\mathcal{M}_2|}$$

$$f^{\mathcal{M}_2}(i(a)) = i(f^{\mathcal{M}_1}(a))$$

ובכתיב פונקציות:

$$f^{\mathcal{M}_2} \circ i = i \circ f^{\mathcal{M}_1}$$

כאשר $i, f^{\mathcal{M}_1}, f^{\mathcal{M}_2}$ הן תמורות של $\{1, \dots, m\}$.
 תנאי שקול לזה הוא של- $f^{\mathcal{M}_2}$, יהיה אותו מבנה ציקלוסיים.

ממשפט ממבנים 1, אנו יודעים כי ניתן לבטא כל תמורה ע"י הרכבה של ציקלוסים. אלו בעצם הדרכים לרשום את $1, \dots, m$ כסדרה לא עולה של מספרים טבעיים (??). לכן עד כדי איזומורפיזם, קיימים לכל היותר (שוב ממשפט ממבנים שאין צורך לדעת בקורס זה) קיימים $p(m)$ מבנים, כאשר $p(m)$ הוא מספר הדרכים לרשום את m כסדר לא עולה של טבעיים. למשל:

$$p(4) = |\{4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1\}| = 5$$

■

2.1.2 השלמה למשפט הקומפקטיות

נניח שנתונה שפה L ואוסף של מבנים C בשפה זו.

שאלה: האם ניתן לאפיין את C בלוגיקה מסדר ראשון?

כלומר, האם קיימת תורה T כך שלכל מבנה של L מתקיים $M \in C$ אם ורק אם $M \models T$?

דוגמא: נניח ש- C אוסף המבנים האינסופיים בשפה L . אזי $T = \{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ כאשר φ_n נוסחא שאומרת שקיימים לפחות n איברים שונים.

דוגמא נוספת: C אוסף כל המבנים הסופיים בדיוק בגודל n - לוקחים $\varphi_n \wedge (\neg \varphi_{n+1})$.

. ניקח את אוסף כל המבנים הסופיים. אזי $M \models T \Leftrightarrow M \models \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$. נרצה לבטא את הנוסחא בצד הימני בעזרת לוגיקה מסדר ראשון - אי אפשר! נראה זאת:

נניח בשלילה ש- T תורה מסדר ראשון המאפיינת את C . אז ל- T קיים מודל בכל עצמה סופית n . לכן קיים ל- $T \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ מודל. ראינו בתרגול קודם כי לפי משפט הקומפקטיות, קיים מודל של $T \cup \{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ - נסמנו ב- M . לפי ההנחה על T , $M \in C$, בסתירה לכך ש- M אינסופי.

משפט לינסטרס אומר, שאם אפשר לעשות גימומים בני מניה, אז זוהי הרחבה מסויימת של לוגיקה מסדר ראשון. במקרה זה, אנו רואים שאם אנו מרשים לבצע גימומים בני מניה, אז הלוגיקה שנקבל חזקה לפחות כמו הלוגיקה מסדר ראשון (ולמעשה אף יותר חזקה). משפט לינסטרס אומר שהלוגיקה החדשה צריכה לא לקיים את אחת התכונות - משפט לוונהיי-סקולהם או משפט הקומפקטיות.

מההוכחה מעלה ניתן לראות כי הלוגיקה הזו אינה מקיימת קומפקטיות (היא מקיימת את התכונה השנייה, אך לא נראה זאת).

בתרגיל ראינו:

אם $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ לא עקבית, אז קיימת φ כך ש- $\vdash_{\Sigma_1} \varphi$, $\vdash_{\Sigma_2} \neg \varphi$.
מסקנה: אפשר למצוא φ סגורה כזו.

$$\vdash_{\Sigma_1} \varphi \Rightarrow \vdash_{\Sigma_1} \forall x \varphi$$

וכן $\vdash \forall x \varphi \rightarrow \varphi$. ממשפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash (\neg \varphi) \rightarrow (\neg \forall x \varphi)$$

ולכן:

$$\vdash_{\Sigma_2} \neg \forall x \varphi$$

2.2 על המבחן

לעבור על המבחנים של ריפס, רק אח"כ על מבחנים של מרצים אחרים.

שלושה חלקים:

חלק א' - הוכחת שני משפטים מתוך שלושה (20 נקודות כל אחד). השאלה תהיה על טענה ספציפית מתוך משפט מסובך ולא לכתוב משפטים מאוד מסובכים.

חלק ב' - כל מיני טענות ודברים שהוכחו בתרגילים ובכיתה שהם ברמה בינונית, שתי טענות מתוך שלוש (15 נקודות כל אחד).

חלק ג' - שלוש מתוך ארבע טענות (10 נקודות כל אחד).