

סיכום - אלגברה לינארית 2

21 במאי 2010

מרצה: צליל סלע,
מתרגלות: גילי שול,

אין המרצה או המתרגלים קשורים לסיכום זה בשום דרך.
סוכם ע"י נגה רוטמן בשעות לא הגיוניות בעליל, ולכן יכול להיות והנתונים לא תמיד מדויקים...
אינני לוקחת אחריות על מה שכתוב מטה. השימוש באחריות הקורא בלבד.

הערות יתקבלו בברכה - noga.rotman@gmail.com

תוכן עניינים

0.1	מנהלות	4
0.2	השלמה מלינארית 1 - מטריצות מצורפות	4
1	לכסון	5
1.1	וקטורים עצמיים וערכים עצמיים	5
1.1.1	וקטורים עצמיים וערכים עצמיים של העתקה לינארית	5
1.1.2	וקטורים עצמיים וערכים עצמיים של מטריצה	8
1.2	חוג הפולינומים	9
1.2.1	פעולות בחוג פולינומים	9
1.2.2	הפולינום האופייני	11
1.3	משפט קיילי המילטון	14
1.3.1	משפט קיילי המילטון עבור מטריצה אלכסונית	14
1.3.2	עבור מטריצות דומות למטריצות אלכסוניות	14
1.3.3	הוכחה עבור המקרה הכללי	15
1.3.4	הפולינום המינימלי	15
1.3.5	הוכחה פורמלית - משפט קיילי המילטון	17
1.4	עוד על הפולינום המינימלי והאופייני	19
1.5	תרגולים	23
2	מרחבי מכפלה פנימית	29
2.1	המרחב האוקלידי	29
2.1.1	דוגמאות למרחבים בעלי מכפלה פנימית	30
2.1.2	משפט הקוסינוסים	31
2.2	מרחב אוניטרי - מעל השדה המרוכב	31
2.2.1	משפט קושי שוורץ	33
2.2.2	אי שיוויון המשולש	34
2.2.3	מטריקה	35
2.2.4	מערכת אורתונורמלית	35
2.2.5	תהליך גרהם שמידט	39
2.2.6	המשלים הניצב	40
2.3	פונקציונלים לינאריים	44
2.3.1	תכונות נוספות של מרחב אוניטרי	44
2.3.2	תבניות בילינאריות	45
2.3.3	ההעתקה הצמודה	47
2.3.4	טרנספורמציה צמודה לעצמה - הרמיטית	48
2.3.5	טרנספורמציות אוניטריות ואורתוגונליות	50
2.4	משפחת הטרנספורמציות הנורמליות	53
2.5	מרחב אוקלידי - מעל שדה הממשיים	58

59	בניית המרחב האוניטרי $\hat{V}$	2.5.1	
61	הוכחת המשפט המרכזי	2.5.2	
63	מסקנות מהמשפט המרכזי	2.5.3	
65	תרגולים	2.6	
66	צורת ז'ורדן	3	
66	תת מרחב ציקלי	3.0.1	
68	צורת ז'ורדן של טרנספורמציות נילפוטנטיות	3.1	
68	טרנספורמציות נילפוטנטיות	3.1.1	

0.1 מנהלות

- ספר - כרגיל, עמיצור.
- צליל סלע, שעת קבלה - יום ג' 13 : 00 – 12 : 00, שפרינצק 108.

0.2 השלמה מלינארית 1 - מטריצות מצורפות

מתוך סיכומים קודמים:

הגדרה 0.1 מטריצה $B \in M_n(F)$ תקרא צמודה (דומה) למטריצה $A \in M_n(F)$, אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(F)$ כך ש- $A = P^{-1}BP$.

יחס הדימיון הוא יחס שקילות, כלומר הוא מקיים את התכונות הבאות:

- רפלקסיבי - כל מטריצה דומה לעצמה, כלומר מתקיים $A = IAI^{-1}$.
- סימטרי - אם A דומה ל- B אז B דומה ל- A .
- טרנזיטיבי - אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C אז A גם דומה ל- C .

המשמעות של הדימיון היא ששתי המטריצות מייצגות את אותה ההעתקה, רק בבסיסים שונים!

1.1 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

1.1.1 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים של ההעתקה לינארית

הגדרה 1.1 יהי V מ"ו מעל שדה F ,

ותהי $T : V \rightarrow V$ ה"ל¹.

וקטור $v \in V$ יקרא וקטור עצמי (ו"ע) של ההעתקה T ,

אם קיים סקלר $\lambda \in F$ כך ש- $Tv = \lambda v$.

במקרה כזה, λ יקרא ערך עצמי (ע"ע) של הוקטור v .

הערה 1.2 מוגדר כי וקטור האפס אינו וקטור עצמי לעולם.

דוגמא:

יהיו v_1, v_2 בסיס ל- V , וכמו כן מתקיים:

$$Tv_1 = 2v_1, Tv_2 = v_1 + v_2$$

מכיוון ו- $Tv_1 = 2v_1$, v_1 ו"ע, ו- 2 ע"ע שלו. וכמו כן:

$$T(v_1 - v_2) = Tv_1 - Tv_2 = 2v_1 - (v_1 + v_2) = v_1 - v_2$$

לכן $v_1 - v_2$ ו"ע עם ע"ע 1 .

הערה 1.3 אם v ו"ע של ההעתקה T ,

אזי לכל $c \in F$, $c \neq 0$ הוא ו"ע עם אותו ע"ע כמו v .

מדוע?

$$T(cv) = c(Tv) = c - \lambda v = \lambda(cv)$$

הגדרה 1.4 מטריצה $A \in M_n(F)$ תקרא אלכסונית,

אם כל האיברים שאינם על האלכסון הם 0 .

כלומר, אם היא מהצורה:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נשים לב שכשנכפיל מטריצה אלכסונית בעצמה n פעמים, נקבל:

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & & 0 \\ & a_{22}^n & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_{nn}^n \end{pmatrix}$$

¹אלו ההנחות בכל הפרק הזה.

טענה 1.5 תהי $T : V \rightarrow V$ ה"ל.

אם ל- T בסיס של ו"ע $v_1, \dots, v_n$,

אזי T ניתנת לייצוג ע"י מטריצה אלכסונית.

במקרה זה, נאמר: T לכסינה, או ניתנת ללכסון.

הוכחה: נתבונן במטריצה המייצגת את T בבסיס $v_1, \dots, v_n$:

$$Tv_i = \lambda_i v_i$$

ולכן כל עמודה i של המטריצה תהיה מהצורה:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

בסה"כ נקבל:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

כפי שרצינו. ■

הערה 1.6 הטענה מעלה היא אמ"מ -

הטענה ההפוכה מושארת כתרגיל².

טענה 1.7 תהי $T : V \rightarrow V$ ה"ל.

נניח כי $v_1, \dots, v_k$ ו"ע בעלי ע"ע $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ בהתאמה,

לכל $i \neq j$ $\lambda_i \neq \lambda_j$.

אזי $v_1, \dots, v_k$ בת"ל.

מסקנה 1.8 נניח ש- $\dim V = n$,

וקיימים ו"ע $v_1, \dots, v_n$ עם ע"ע $\lambda_1, \dots, \lambda_n$,

כך שלכל $i \neq j$ $\lambda_i \neq \lambda_j$.

אזי $v_1, \dots, v_n$ הינו בסיס של ו"ע של V ,

ולפי טענה קודמת 1.5,

T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס זה.

מסקנה 1.9 להעתיקה $T : V \rightarrow V$, $\dim V = n$,

ישנם לכל היותר n ע"ע שונים³.

²כמו תמיד, "זה טריוויאלי".

³ניתן להניח בשלילה שיש $n+1$ ולהגיע לסתירה של המימד.

כעת נוכיח את הטענה: **הנחה:** נניח בשלילה כי $v_1, \dots, v_k$ תלויים לינארית. כלומר, קיימת תלות לינארית:

$$\sum_{i=1}^k a_i v_i = 0$$

כאשר לא כל $a_i = 0$.

נתבונן בתלות מינימלית כזו,

כלומר, מספר האיברים השונים מאפס הוא המינימלי.

נסמן את התלות הזו כך:

$$\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$$

אז, $m \leq k$.

כמו כן $m > 1$, כי $v_1, \dots, v_k$ הם ו"ע, ולכן אינם וקטור האפס.

נפעיל את ההעתקה T על התלות הלינארית. נקבל:

$$0 = T \left(\underbrace{\sum_{i=1}^m a_i v_i}_{=0} \right) = \sum_{i=1}^m a_i T v_i = \sum_{i=1}^m a_i \lambda_i v_i$$

כמו כן, נשים לב:

$$\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_i \lambda_1 v_i = 0$$

כי פשוט הכפלנו בסקלר.

כעת, משני השוויונות מעלה, נקבל:

$$0 = \underbrace{\sum_{i=1}^m a_i \lambda_i v_i}_{=0} - \underbrace{\sum_{i=1}^m a_i \lambda_1 v_i}_{=0} = \sum_{i=1}^m a_i (\lambda_i - \lambda_1) v_i = \sum_{i=2}^m a_i (\lambda_i - \lambda_1) v_i = 0$$

כשהמעבר השני מימין הוא כי עבור $i = 1$, $\lambda_1 - \lambda_1 = 0$,

ולכל $i \neq 1$, $\lambda_i \neq \lambda_1$.

בסה"כ, קיבלנו קומבינציה לינארית לא טריוויאלית,

שהרי לא כל $a_i = 0$, שמכילה $m - 1$ איברים,

בסתירה לכך שמספר האיברים המינימלי הוא m .

■

1.1.2 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים של מטריצה

הגדרה 1.10 תהי $a \in M_n(F)$, ויהי $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$, $0 \neq$

יקרא וקטור עצמי של המטריצה A , אם:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

עבור $0 \neq \lambda \in F$ כלשהוא.

טענה 1.11 יהי V מ"ו מעל F , $v_1, \dots, v_n$ בסיס ל- V ,

ותהי $T : V \rightarrow V$ ה"ל,

וכמו כן $A \in M_n(F)$ מטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$.

וקטור $V \ni \sum_{i=1}^n x_i v_i = v \neq 0$

הוא וקטור עצמי של T עם ע"ע λ ,

אמ"מ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ הוא ו"ע של A עם ע"ע λ .

מסקנה 1.12 תהי $T : V \rightarrow V$ ה"ל,

ותהי $A \in M_n(F)$ מטריצה המייצגת את T ,

אזי ל- T ול- A אותם ע"ע.

נוכיח את הטענה: **הוכחה:** נוכיח כיוון אחד -

נשים לב שאם נהפוך את החצים, ההוכחה זהה לכיוון השני.

נניח כי $\sum_{i=1}^n x_i v_i = v$ הוא ו"ע של T עם ע"ע λ . אזי:

$$Tv = \lambda v \Rightarrow Tv = \lambda \sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n \lambda x_i v_i$$

לכן:

$$v \xrightarrow{T} Tv$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

לכן $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ הוא ו"ע של המטריצה A .

■

מסקנה 1.13 יהיו A, B מטריצות דומות.

אזי ל- A ול- B אותם ע"ע.

הוכחה: נניח כי $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ הוא ו"ע של A עם ע"ע λ .

נתבונן בוקטור $P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$:

$$AP^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P^{-1}BP \left(P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = P^{-1}\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

■

1.2 חוג הפולינומים

24.02.2010

הגדרה 1.14 $F[x]$ - חוג הפולינומים מעל שדה.

האיברים הם מהצורה:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_i \in F$$

חוג הפולינומים מכיל את פולינום האפס.

לדוגמא:

$F_7 = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$, אזי פולינום בחוג הפולינומים יכול להיות:

$$p(x) = 3x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 1$$

1.2.1 פעולות בחוג פולינומים

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, \quad p_2(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

אם $n > m$, אזי "נרפד" את השאריות באפסים, ואז נוכל לכתוב את $p_1(x)$ כך:

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

אזי חיבור הפולינומים יוגדר להיות:

$$p_1(x) + p_2(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$$

וכפל פולינומים יוגדר להיות:

$$p_1(x) \cdot p_2(x) = \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n b_j x^j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j x^{i+j} = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \right) x^k$$

נשים לב שכל האקסיומות לשלמים מתקיימים לכפל ולחיבור,

ובנוסף מתקיים חוק הפילוג, כלומר:

$$(p_1(x) + p_2(x)) \cdot p_3(x) = p_1(x)p_3(x) + p_2(x)p_3(x)$$

הגדרה 1.15 בהינתן פולינום כלשהו:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

אזי מעלת הפולינום - $\deg(p(x))$ תוגדר להיות

ה- i המקסימלי שעבורו $a_i \neq 0$.

הגדרה 1.16 פולינום $p(x)$ נקרא מתוקן אם $a_n = 1$.

מעלת מכפלת פולינומים תהיה:

$$\deg(p_1(x)p_2(x)) = \deg(p_1(x)) + \deg(p_2(x))$$

ובצורה דומה, דרגת חיבור פולינומים תהיה:

$$\deg(p_1(x) + p_2(x)) \leq \max(\deg(p_1(x)), \deg(p_2(x)))$$

הגדרה 1.17 יהיו $F[x] \ni h(x), p(x)$.

נאמר ש- $h(x)$ מחלק את $p(x)$ - $h(x) | p(x)$

אם קיים פולינום $q(x)$ כך ש:

$$p(x) = q(x) \cdot h(x)$$

במקרה זה:

$$\deg(h(x)) \leq \deg(p(x))$$

הגדרה 1.18 פולינום $F[x] \ni p(x)$ יקרא אי פריק,

אם לכל זוג פולינומים $h(x), r(x)$ המקיימים:

$$p(x) = h(x)r(x)$$

$h(x)$ או $r(x)$ הם קבועים.

דוגמאות:

מעל כל F - פולינומים לינאריים (ממעלה 1) $ax + b$ הוא אי פריק.

מעל $\mathbb{C}$ - פולינום אי פריק $\Leftrightarrow$ לינארי.

מעל $\mathbb{R}$ לעומת זאת -

נביט בפולינום $p(x) = x^2 + 1$.

מעל $\mathbb{C}$ פולינום זה פריק:

$$p(x) = (x + i)(x - i)$$

אילו $p(x)$ היה פריק מעל $\mathbb{R}$, אזי:

$$p(x) = l_1(x) \cdot l_2(x)$$

כאשר שני הפולינומים l_1, l_2 בהכרח לינאריים (סכום הדרגות 2,

ואף אחד מהם לא טריוויאלי - דהיינו קבוע).

אבל ל- $p(x)$ אין שורשים מעל $\mathbb{R}$!

ולכן לא יכול להיות שיש לו פירוק לא טריוויאלי.

טענה 1.19 - (ללא הוכחה) -

כל פולינום מעל $\mathbb{R}$ ניתן לפירוק

למכפלה של פולינומים לינאריים ופולינומים ריבועיים.

לכל זוג פולינומים $p(x), h(x) \in F[x]$ נוכל לכתוב:

$$p(x) = q(x)h(x) + r(x), \deg(r(x)) < \deg(h(x))$$

1.2.2 הפולינום האופייני

תהי מטריצה $A \in M_n(F)$,

ויהי $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ו"ע של A , כלומר מתקיים:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

נוכל לרשום זאת גם כך:

$$\lambda I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

כי כפל סקלר במטריצת היחידה לא משנה כלום.

אזי:

$$\lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow (\lambda I_n - A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $B = (\lambda I_n - A)$.

אזי B סינגולרית (לא הפיכה),

כלומר $\det(B) = 0 \Leftrightarrow \text{rank}(B) < n$.

בכיוון השני, נניח כי B סינגולרית,

$$\text{אזי קיים } 0 \neq \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ כך ש-} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ לכן:}$$

$$\lambda I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{דהיינו } \lambda \text{ הוא ע"ע של הוקטור } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

כלומר הכיוון השני גם הוא נכון!

כעת נביט בביטוי $\det(\lambda I_n - A)$ - הוא שווה ל:

$$\det \begin{pmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (\lambda - a_{22}) & & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (\lambda - a_{nn}) \end{pmatrix} = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + b_0$$

כלומר תמיד נקבל כי הדטרמיננטה היא פולינום מתוקן ממעלה n .

הגדרה 1.20 תהי $A \in M_n(F)$. אזי הפולינום:

$$\det(\lambda I - A) = p_A(x)$$

נקרא הפולינום האופייני של A .

הערה 1.21 λ הוא ע"ע של $A \Leftrightarrow \lambda$ הוא שורש של $p_A(x)$.

הערה 1.22 כאמור, לפי ההגדרה, זהו תמיד פולינום מתוקן ממעלה n .

02.03.2010

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$

למטריצה A אין ע"ע מעל $\mathbb{R}$.

מעל $\mathbb{C}$ ל- A יש שני ע"ע - $i, -i$.

מכיוון שכך, ומספר השורות הוא שתיים,

יש בסיס של ע"ע, ועל כן היא לכסינה. נקבל:

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

נמשיך לנתח את פולינום האופייני:

$$A \in M_n(F), A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, p_A(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_0$$

$$b_{n-1} = - \sum_{i=1}^n a_{ii} = -(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots)$$

לדוגמא:

$$(x-a)(x-b) = x^2 - ax - bx + ab$$

העיקבה - Tr

הגדרה 1.23 תהי $A \in M_n(F)$, אזי:

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} = Tr(A)$$

יקרא העיקבה של A .

תכונות ה- $Tr(A)$ (נובעות ישירות מההגדרה):

$$1. Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$$

$$2. Tr(-A) = -Tr(A)$$

$$3. Tr(AB) = Tr(BA)$$

המקדם החופשי של הפולינום הפולינום האופייני - b_0 :

$$p_A(x) = x^2 + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$$

$$p_A(0) = b_0 \stackrel{?}{=} \det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

למה סימן השאלה נכון?

$$p_1(x)p_2(x) = p(x)$$

$$\forall c \in F \quad p_1(c)p_2(c) = p(c)$$

$$p_1(x) + p_2(x) = h(x)$$

$$p_1(c) + p_2(c) = h(c)$$

טענה 1.24 למטריצות דומות אותו פולינום אופייני, כלומר:

$$B = PAP^{-1} \Rightarrow p_B(x) = p_A(x)$$

הערה 1.25 הכיוון השני של הטענה אינו נכון!

הוכחה:

$$p_A(x) = \det(xI - A) (*)$$

נזכור כי הדטרמיננטה כיפלית, ומתקיים:

$$1 = \det(PP^{-1}) = \det(P) \cdot \det(P^{-1})$$

לכן:

$$(*) = \det(P) \cdot \det(xI - A) \cdot \det(P^{-1}) = \det(P(xI - A)P^{-1})$$

$$= \det((P(xI) - PA) \cdot P^{-1}) = \det(P(xI)P^{-1} - PAP^{-1})$$

$$PAP^{-1} = B \Rightarrow P(xI)P^{-1} = (xI)PP^{-1} = xI$$

$$\Rightarrow p_A(x) = \det(xI - B) = p_B(x)$$

■

איך נמצא פתרון למערכת משוואות בעזרת ע"ע?

$$Ax = \lambda x = (\lambda I - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.3 משפט קיילי המילטון

משפט 1.26 מטריצה $A \in M_n(F)$ מאפסת את הפולינום האופייני שלה. כלומר:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0 = I \cdot x^n + b_{n-1} \cdot I \cdot x^{n-1} + \dots + b_0 \cdot I \\ \Rightarrow p_A(A) &= b_n \cdot I \cdot A^n + b_{n-1} \cdot I \cdot A^{n-1} + \dots + b_0 \cdot I = 0 \in M_n(F) \end{aligned}$$

1.3.1 משפט קיילי המילטון עבור מטריצה אלכסונית

הוכחה: תהי $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, λ_i ע"ע של A , וכמו כן

$$\begin{aligned} p_A(x) &= x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0 \\ \Rightarrow p_A \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^n + b_{n-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^{n-1} + \dots + \begin{pmatrix} b_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{n-1} \lambda_1^{n-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{n-1} \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} b_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1^n + b_{n-1} \lambda_1^{n-1} + \dots + b_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n + b_{n-1} \lambda_n^{n-1} + \dots + b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_A(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_A(\lambda_n) \end{pmatrix} (*) \\ p_A(\lambda_i) &= 0 \Rightarrow (*) = 0 \in M_n(F) \end{aligned}$$

■

1.3.2 עבור מטריצות דומות למטריצות אלכסוניות

תהי A אלכסונית, $B = PAP^{-1}$,

$p_A(x) = p_B(x)$ מטענה קודמת,

וכמו כן מלמעלה $p_A(x) = 0$,

ולכן:

$$p_B(B) = P p_A(A) P^{-1} = 0$$

כלומר משפט קיילי המילטון נכון גם עבור מטריצות הדומות למטריצות אלכסוניות.

1.3.3 הוכחה עבור המקרה הכללי

הוכחה בה לא נעסוק (חורג מתחומי הקורס הזה):

לכל $\varepsilon > 0$ תהי $U \in M_n(F)$ מטריצה,

אזי קיימת מטריצה B כך ש- $B - U$ כך שכל אחד מהאיברים בה קטן מ- ε , לכן:

$$|p_u(u)| < f(\varepsilon)$$

אבל אנחנו לא יודעים לקרב כך מטריצות, ולכן לא נשתמש בהוכחה זו⁴.

תחילה נרחיב את ארגז הכלים שלנו,

ואז נשתמש בהם להוכחה פורמלית של המשפט למקרה הכללי.

יהי $f(x) \in F[x]$, נסמנו:

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$$

נרצה לחשוב על כל פולינום שכזה כמטריצה סקלרית:

$$\hat{f}(x) = b_n I x^n + b_{n-1} I x^{n-1} + \dots + b_n I, \quad \hat{f}(A), \quad A \in M_n(F)$$

$$f(x) \in F[x] \rightarrow \hat{f}(x) \in M_n(f)[x] = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + C_{n-2} x^{n-2} + \dots + C_0, \quad C_i \in M_n(F)$$

המקדמים יהיו גם כן מטריצות סקלריות ואלכסוניות.

1.3.4 הפולינום המינימלי

הגדרה 1.27 תהי $A \in M_n(F)$.

פולינום $m(x) \in F[x]$ יקרא הפולינום המינימלי של A ,

אם הוא פולינום מתוקן בעל הדרגה המינימלית המקיים:

$$F[x] \ni m(x) \rightarrow \hat{m}(x) \in M_n(F), \quad \hat{m}(A) = 0$$

טענה 1.28 פולינום מינימלי קיים ויחיד.

הוכחה: תחילה, נוכיח קיום:

$$\dim(M_n(F)) = n^2$$

נתבונן באוסף המטריצות:

$$I, A, A^2, \dots, A^{(n^2)}$$

אוסף זה תלוי לינארית, כלומר קיימים:

$$C_0, \dots, C_{n^2}$$

שלא כולם אפס, כך שמתקיים:

$$C_0 I + C_1 A + C_2 A^2 + \dots + C_{n^2} A^{n^2} = 0 \in M_n(F)$$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{n^2} x^{n^2} \Rightarrow \hat{f}(A) = 0$$

⁴"ולכן נוכיח בדרך הרבה יותר קשה" - צליל סלע מאוד אופטימי.

לכן קיים פולינום $f(x)$ המתאפס ע"י A ,
ולכן קיים פולינום כזה מדרגה מינימלית.
נוכיח יחידות:

נניח בשלילה כי קיימים $m_1(x), m_2(x)$ -
שניהם מתוקנים בעלי דרגה מינימלית, כך ש:

$$\begin{aligned}\hat{m}_1(A) &= \hat{m}_2(A) = 0 \\ \deg(m_1(x) - m_2(x)) &< \deg(m_i(x)) \\ \Rightarrow 0 &= \hat{m}_1(A) - \hat{m}_2(A) = (\hat{m}_1 - \hat{m}_2)(A)\end{aligned}$$

ולכן הם זהים, מ.ש.ל.

03.03.2010

למה 1.29 תהי $A \in M_n(F)$ מטריצה,

ויהי $f(x) \in F[x]$ פולינום שעבורו $\hat{f}(A) = 0$.

אזי, $m_A(x) | f(x)$,

כלומר $f(x) = q(x)m_A(x)$.

מסקנה 1.30 מהלמה וממשפט קיילי המילטון:

יהי $p_A(x)$ - הפולינום האופייני של A ,

אזי ממשפט קיילי המילטון:

$$\hat{p}_A(A) = 0$$

ומהלמה:

$$m_A(x) | p_A(x)$$

הוכחה: נשתמש בתכונות החלוקה בחוג הפולינומים.

$$f(x) = q(x)m(x) + r(x)$$

כאשר $\deg(r(x)) < \deg(m(x))$.

בשביל להוכיח את הלמה, נרצה להראות כי $r(x) = 0$. אזי:

$$\begin{aligned}f(x) &= q(x)m(x) + r(x) \Rightarrow \hat{f}(x) = \hat{q}(x)\hat{m}(x) + \hat{r}(x) \\ \Rightarrow \hat{f}(A) &= \hat{q}(A)\hat{m}(A) + \hat{r}(A)\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון כי מטריצות סקלריות מתחלפות עם כל מטריצה.

מההנחה $\hat{f}(A) = 0$, וכמו כן מההגדרה, $\hat{m}(A) = 0$, לכן בסה"כ:

$$\hat{r}(A) = 0$$

אבל, $r(x)$ הוא מדרגה קטנה מהפולינום המינימלי,

ולכן בהכרח הוא פולינום האפס⁵, כפי שרצינו להוכיח!

⁵אם היה אחרת, היינו מקבלים סתירה להיות m_A הפולינום המינימלי.

$$2I_n = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix} = D, \quad p_D(x) = (x-2)^n, \quad m_D(x) = x-2$$

$$x-2 \mid (x-2)^n$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_B(x) = (x-2)^3(x-1), \quad m_B(x) = (x-2)^2(x-1)$$

1.3.5 הוכחה פורמלית - משפט קיילי המילטון

הוכחה: תחילה, נזכר כי נרצה להוכיח כי המטריצה A מאפסת את הפולינום האופייני שלה.

כמו כן:

$F[x]$ - חוג הפולינומים מעל שדה.

$M_n(f)[x]$ - חוג הפולינומים מעל חוג מטריצות,

כלומר פולינומים שמקדמיהם הם מטריצות, לדוגמא:

$$B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_0, \quad B_i \in M_n(f)$$

$M_n(F[x])$ - חוג המטריצות מעל חוג הפולינומים,

כלומר מטריצות שהאיבריהם הם פולינומים, לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & f_{22}(x) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \dots & \dots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

טענה 1.31 קיימת התאמה חז"ע ועל בין:

$$M_n(F[x]) \xrightarrow{\varphi} M_n(f)[x]$$

הוכחה: ניקח פולינום:

$$B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + \dots + B_0$$

ונרצה להתאימו למטריצה:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & f_{22}(x) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \dots & \dots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

אם כך:

$$f_{11}(x) = b_{11}^k x^k + b_{11}^{k-1} x^{k-1} + \dots + b_{11}^0$$

$$\Rightarrow f_{ij}(x) = b_{ij}^k x^k + b_{ij}^{k-1} x^{k-1} + \dots + b_{ij}^0$$

נשים לב שנוכל לעשות את אותו התהליך בכיוון ההפוך.

מושאר לקורא הנלהב להוכיח כי ההתאמה משמרת פעולות:

$$\begin{aligned}\varphi(p_1(x)) + \varphi(p_2(x)) &= \varphi(p_1(x) + p_2(x)) \\ \varphi(p_1(x)) \cdot \varphi(p_2(x)) &= \varphi(p_1(x) \cdot p_2(x))\end{aligned}$$

■

נשים לב:

$$p_1(x) \cdot p_2(x) = p(x) \Rightarrow p_1(A) \cdot p_2(A) \neq p(A)$$

למה 1.32 יהי $G(x) \in M_n(f)[x]$

$$G(x) = B_k x^k + \dots + B_0$$

ותהי $A \in M_n(f)$. $G(A) = 0 \Leftrightarrow$ קיים פולינום $H(x) \in M_n(f)[x]$ כך ש:

$$G(x) = H(x) \cdot (xI - A)$$

הוכחה: תחילה, ניתוח אלגברי שיעזור לשני הכיוונים:

$$\begin{aligned}G(x) - G(A) &= B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + \dots + B_0 - (B_k A^k + B_{k-1} A^{k-1} + \dots + B_0) \\ &= B_k (x^k - A^k) + B_{k-1} (x^{k-1} - A^{k-1}) + \dots + B_1 (x - A) \quad (*) \\ x^i I_n - A^i &= \underbrace{(x^{i-1} + x^{i-2} A + x^{i-3} A^2 + \dots + x A^{i-2} + A^{i-1})}_{U_i(x) \in M_n(f)[x]} (xI - A) = U_i(x) \cdot (xI - A) \\ \Rightarrow (*) &= B_k U_k(x) \cdot (xI - A) + B_{k-1} U_{k-1}(x) \cdot (xI - A) + \dots + B_1 \cdot (xI - A) \\ &= (B_k U_k(x) + B_{k-1} U_{k-1}(x) + \dots + B_1) (xI - A) = V(x) (xI - A)\end{aligned}$$

בכיוון הראשון, נניח כי $G(A) = 0$, אזי:

$$G(x) = V(x) (xI - A)$$

בכיוון השני, נניח כי מתקיים:

$$G(x) = S(x) (xI - A)$$

ונרצה להוכיח כי $G(A) = 0$. ראינו למעלה כי תמיד מתקיים:

$$G(x) - G(A) = V(x) (xI - A)$$

נחסר שורה אחת מהשניה ונקבל:

$$G(A) = (S(x) - V(x)) (xI - A)$$

נביט בשני הצדדים:

מצד שמאל יש לנו פולינום שמעלתו היא אפס, שהרי הוא מטריצה - אין בו אף חזקה של x .

בצד השני מופיע בסוגריים הימניים גורם לינארי של x .

אם דרגת הפולינום $(S(x) - V(x))$ לא היתה אפס,

אזי היינו מקבלים פולינום שדרגתו גדולה מאחד - בסתירה לצד השמאלי.

לכן $(S(x) - V(x))$ דרגתו אפס - כלומר הינו פולינום האפס,

ולכן $G(A) = 0$, כמתבקש.

■

כעת, נסיים את הוכחת המשפט:

נתונה מטריצה $A \in M_n(F)$, וכמו כן:

$$p_A(x) = \det(xI - A) \in M_n(F[x])$$

תהי $U \in M_n(F)$. נשתמש במטריצה המצורפת:

$$U \cdot \text{Adj}(U) = \det(U) \cdot I_n = \text{Adj}(U) \cdot U$$

כעת:

$$\text{Adj}(xI - A)(xI - A) = p_A(x) \cdot I_n$$

על ידי ההעתקה שהגדרנו בהתחלה φ :

$$\text{Adj}(xI - A) \xrightarrow{\varphi} H(x)$$

כאשר $H(x) \in M_n(F)[x]$. לכן:

$$H(x) \cdot (Ix - A) = \hat{p}_A(x)$$

כאשר $Ix - A \in M_n(F)[x]$.

לכן, לפי הלמה:

$$\hat{p}_A(x) = 0$$

כפי שרצינו להוכיח!

■

09.03.2010

1.4 עוד על הפולינום המינימלי והאופייני

במהלך הדיון במשפט קיילי המילטון,

ראינו כי הפולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני.

מסקנה 1.33 יהי $\lambda \in F$ סקלר המאפס את הפולינום המינימלי.

אזי הוא גם מאפס את הפולינום האופייני.

הוכחה:

$$m_A(\lambda) = 0 \Rightarrow p_A(\lambda) = q(\lambda) m_A(\lambda) = 0$$

■

מסקנה 1.34 כל שורש של הפולינום המינימלי הוא ע"ע!

נרצה כרגע להראות את הכיוון השני.

טענה 1.35 כל ע"ע של מטריצה מאפס את הפולינום המינימלי שלה.

הוכחה: עפ"י הגדרת הפולינום המינימלי:

$$m_A(A) = 0$$

ישנה העתקה חח"ע (שיכון) אשר מעבירה:

$$m_A(x) \in F[x] \rightarrow \hat{m}_A(x) \in M_n(f)[x]$$

הוכחנו את הלמה:

יהי $G(x) \in M_n(f)[x]$ ותהי $A \in M_n(f)$.
 $G(A) = 0 \Leftrightarrow$ קיים פולינום $H(x) \in M_n(f)[x]$ כך ש:
 $G(x) = H(x) \cdot (xI - A)$

אזי, כשנעביר את הפולינום המינימלי להצגה שלו כ- $\hat{m}_A(x)$,
 נוכל להשתמש בלמה ולקבל כי:

$$\hat{m}_A = 0 \Rightarrow \hat{m}_A(x) = H(x)(xI - A)$$

עכשיו נרצה לעבור מ- $M_n(f)[x]$ ל- $M_n(F[x])$

באמצעות ההעתקה φ שראינו בפרק הקודם.

נזכור כי ההעתקה זו משמרת את הכפל והחיבור. לכן:

$$\varphi(\hat{m}_A(x)) = \varphi(H(x)) \cdot \varphi(xI - A)$$

נפעיל אותה ונקבל:

$$\begin{aligned} m_A(x) &= x^k + b_{k-1}x^{k-1} + b_{k-2}x^{k-2} + \dots + b + 0 \\ \Rightarrow \hat{m}_A(x) &= I \cdot x^k + b_{k-1}Ix^{k-1} + b_{k-2}Ix^{k-2} \dots + b_0I \\ &\xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} x^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{k-1}x^{k-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{k-1}x^{k-1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} b_n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_A(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_A(x) \end{pmatrix} = m_A(x) \cdot I \end{aligned}$$

כלומר קיבלנו:

$$\begin{pmatrix} m_A(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_A(x) \end{pmatrix} = \varphi(\hat{m}_A(x)) = \varphi(H(x)) \cdot \varphi(xI - A) = \varphi(H(x)) \cdot \begin{pmatrix} x - a_{11} & & -a_{1j} \\ & \ddots & \\ -a_{ij} & & x - a_{nn} \end{pmatrix}$$

ובחוג הזה, נוכל לקחת את הדטרמיננטה של המטריצה.

הדטרמיננטה היא כיפולית, ולכן:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} m_A(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_A(x) \end{pmatrix} &= \det(\varphi(H(x))) + \det \begin{pmatrix} x - a_{11} & & -a_{1j} \\ & \ddots & \\ -a_{ij} & & x - a_{nn} \end{pmatrix} \\ (m_A(x))^n &= q(x) \cdot p_A(x) \end{aligned}$$

1.36 מסקנה

$$p_A(x) \mid (m_A(x))^n$$

ובפרט, אם $\lambda \in F$ הוא ערך עצמי, אזי:

$$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow (m_A(\lambda))^n = 0 \Rightarrow m_A(\lambda) = 0$$

■

ולכן לפוליוס המינימלי והאופייני בדיוק אותם שורשים, והם הע"ע!

$$p_A(x) = (x - \lambda_1)^{u_1} \cdot (x - \lambda_2)^{u_2} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)^{u_n}$$

כאשר

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = n$$

הוכחנו כי הפולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני, ולכן:

$$m_A = (x - \lambda_1)^{v_1} \cdot (x - \lambda_2)^{v_2} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)^{v_n}, \quad 1 \leq v_i \leq u_i$$

כאשר v_i לפחות אחד כי הרי כל ע"ע מאפס את הפולינום המינימלי.

דוגמאות

.1

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & & 0 \\ & & & \lambda_2 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \lambda_n & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(x) &= (x - \lambda_1)^{u_1} (x - \lambda_2)^{u_2} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)^{u_n} \\ m_A(x) &= (x - \lambda_1) \cdot (x - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n) \end{aligned}$$

.2

$$A = I_n, \quad p_{I_n}(x-1)^n, \quad m_{I_n} = (x-1)$$

.3

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A = (x - \lambda)^n, \quad m_A(x - \lambda)^n = p_A$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & & & \\ & 2 & 0 & & & & & & 0 \\ & & 2 & & & & & & \\ & & & 4 & 0 & & & & \\ & & & & 4 & & & & \\ & & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & & 5 & 1 & \\ & & & & & & & 5 & 0 \\ 0 & & & & & & & & 5 & 0 \\ & & & & & & & & & 5 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = (x-2)^3 \cdot (x-4)^2 \cdot (x-5)^4$$

$$m_A(x) = (x-2)^2 \cdot (x-4) \cdot (x-5)^3$$

נשים לב שהפולינומים הללו אינם מגדירים את המטריצה!
ישנן עוד מטריצות בעלות הפ"א והפ"מ הנ"ל.

חוג הפולינומים

הגדרה 1.38 אם $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ו- $a_n = 1$ אזי $f(x)$ יקרא פולינום מתוקן.

הגדרה 1.39 פולינום לינארי הוא פולינום ממעלה 1,

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0$$

$$x = a^{-1}(-b) \text{ (תמיד יש לו שורש)}$$

משפט 1.40 יהיו f, g פולינומים מעל השדה F ,

$$g \neq 0$$

אזי קיימים $q, r \in F[x]$ כך ש- $f = g \cdot q + r$,

כאשר מתקיים $r = 0$ או $\deg(r) < \deg(g)$.

אם $f = 0$ או $\deg(f) < \deg(g)$,

$$f = 0 \cdot g + f.$$

אחרת, מבצעים חילוק ארוך.

דוגמא:

נתונים ב- $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^4 + x - 1, \quad g(x) = x - 1$$

$$\frac{x^4 + x - 1}{x - 1} = x^3 + x^2 + x + 2 \Rightarrow x^4 + x - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 2)$$

דוגמא נוספת:

מעל $\mathbb{Z}^5$ (נשים לב- $2^{-1} = 3$ ב- $\mathbb{Z}^5$, וכו'):

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = 2x + 4$$

$$\frac{x^2 + 1}{2x + 4} = 3x + 4 \Rightarrow x^2 + 1 = (2x + 4)(3x + 4), \quad r = 0$$

סימון: $g(x) | f(x) \Leftrightarrow$ קיים $q(x)$ כך ש- $f(x) = g(x)q(x)$.

טענה 1.41 $\alpha \in F, f(x) \in F[x]$,

אז α שורש של $f(x)$ $\Leftrightarrow x - \alpha | f(x)$.

הוכחה: בכיוון אחד - אם $x - \alpha | f(x)$ אזי:

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) \Rightarrow f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0$$

בכיוון השני, נניח $f(\alpha) = 0$.

נבצע חילוק עם שארית של f ב- $x - \alpha$:

$$f(x) - (x - \alpha)q(x) + r$$

כאשר r סקלר.

נציב α ונקבל:

$$0 = f(\alpha) = r \Rightarrow f(x) = (x - \alpha)q(x)$$

הגדרה 1.42 פולינום $f(x) \in F[x]$ ממעלה $1 \leq$ נקרא אי פריק מעל F , אם כאשר $f(x) = g(x)h(x)$ כאשר $g(x), h(x) \in F[x]$, אז h או g הם ממעלה 0.

טענה 1.43 תהי $f(x) \in F[x]$.

אם f ממעלה 1 אז f אי פריק.

אם f מדרגה 2 או 3 אז f אי פריק מעל F אמ"מ אין ל- f שורש ב- F .

הוכחה: בכיוון אחד - אם ל- f יש שורש אז הוא פריק,

כי $x - \alpha | f(x)$.

בכיוון השני, אם f פריק והוא מדרגה 2, 3,

אז אחד מהגורמים שלו הוא מדרגה 1,

ולכן יש לו שורש.

לדוגמא:

הפולינום $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$ מעל $\mathbb{R}$,

הוא פולינום מדרגה 4, הוא פריק ואין לו שורשים.

תרגיל:

פרקו את הפולינום $x^3 + x - 2$ לגורמים אי פריקים מעל $\mathbb{R}$.

פתרון:

1 הוא שורש. נבצע חילוק:

$$\frac{x^2 + x - x}{x - 1} = x^2 + x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + x)$$

כאשר הפולינום שקיבלנו אי פריק מעל $\mathbb{R}$,

שהרי הוא מדרגה שניה ואין לו שורשים.

פולינומים מעל $\mathbb{C}$

משפט 1.44 המשפט היסודי של האלגברה:

יהי $f(x) \in \mathbb{C}$ פולינום $0 \neq$.

אז הפולינום ניתן לכתיבה כמכפלה:

$$f(x) = k(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_m)$$

כאשר $k, r_i \in \mathbb{C}$.

לא מוכיחים משפט זה בשנה הראשונה -

נקבל אותו כעקרון כאקסיומה.

טענה 1.45 אם $z \in \mathbb{C}$ שורש של $f(x) \in \mathbb{R}[x]$,

אז גם $\bar{z}$ שורש של $f(x)$.

הוכחה: נסמן $f(z) = 9, a_i \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ אזי:

$$\sum_{i=0}^n a_i z^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i z^i = 0 = \bar{0} \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i \bar{z}^i = 0 \Rightarrow f(\bar{z}) = 0$$

■

נשים לב:

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z}$$

$$z\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}, (z + \bar{z}) = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R} \text{ וכמו כן } z\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$$

מסקנה 1.46 יהי $f(x) \in \mathbb{R}[x]$.

אזי $f(x)$ ניתן לכתיבה כמכפלה:

$$f(x) = kp_1(x) \dots p_m(x)$$

כאשר $k \in \mathbb{R}$, ו- $p_i(x)$ פולינומים מתוקנים ב- $\mathbb{R}[x]$ ממעלה 1 או 2.

הוכחה: מעל $\mathbb{C}$ אפשר לרשום:

$$f(x) = a_n(x - r_1) \dots (x - r_k)(x - z_1)(x - \bar{z}_1) \dots (x - z_l)(x - \bar{z}_l)$$

$$\text{כאשר } z_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, r_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{אבל } (x - z_j)(x - \bar{z}_j) = p_j(x) \text{ פולינום ממעלה 2 ב- } \mathbb{R}$$

שהוא אי פריק מעל $\mathbb{R}$ (אין לו שורשים ב- $\mathbb{R}$).

■

העתקות

בסמסטר הקודם דיברנו על העתקות $T: V \Rightarrow W$

בסמסטר הזה נתרכז בהעתקות $T: V \rightarrow V$

כאשר נייצג העתקה לינארית לפי בסיס,

נבחר אותו בסיס במקור ובטווח:

$$[T]_{(v_i)}^{(v_i)}$$

תהיה מטריצת הייצוג של T לפי הבסיס $v_1, \dots, v_n$.

הגדרה 1.47 מטריצות $M_n(F) \ni A, B$ נקראות דומות

אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(F)$ כך ש:

$$P^{-1}AP = B$$

הערה 1.48 דימיון בין מטריצות הוא יחס שקילות:

1. A דומה לעצמה ע"י מטריצת הזהות.

2. אם A דומה ל- B אז B דומה ל- A .

3. אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C אז A דומה ל- C .

טענה 1.49 $A, B \in M_n(F)$ דומות $\Leftrightarrow$ הן מייצגות את אותה ה"ל

(במטריצת הייצוג בסיס המקור = בסיס הטווח).

הוכחה: בכיוון אחד, נניח:

$$A = [T]_{(v_i)}^{(v_i)}, \quad B = [T]_{(u_i)}^{(u_i)}$$

אז:

$$[T]_{(u_i)}^{(u_i)} = [Id]_{(u_i)}^{(v_i)} \cdot [T]_{(v_i)}^{(v_i)} \cdot [Id]_{(v_i)}^{(u_i)}$$

כאשר:

$$[Id]_{(u_i)}^{(v_i)} [Id]_{(v_i)}^{(u_i)} = [Id]_{(u_i)}^{(u_i)} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

בכיוון השני, ההרכבה תיתן באותה הצורה

$$[Id]_{(v_i)}^{(v_i)} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן המטריצות דומות.

בכיוון השני, נניח $B = P^{-1}AP$ נגדיר:

$$T_A : F^n \rightarrow F^n, \quad T_A(x) = Ax$$

אז:

$$A = [T_A]_{(e_i)}^{(e_i)}$$

נסמן את עמודות P ב- $v_1, \dots, v_n$.

P הפיכה $\Leftrightarrow v_i$ בת"ל $\Leftrightarrow$ בסיס ל- F^n . מתקיים:

$$P = [Id]_{(e_i)}^{(e_i)}, \quad P^{-1} = [Id]_{(v_i)}^{(e_i)}$$

מתקיים:

$$[T]_{(u_i)}^{(u_i)} = [Id]_{(v_i)}^{(e_i)} \cdot [T]_{(e_i)}^{(e_i)} \cdot [Id]_{(e_i)}^{(v_i)} = P^{-1}AP = B$$

■

כלומר, A, B מייצגות את T_A .

הגדרה 1.50 יהי V מ"ו מעל שדה F ,

ותהי $T : V \rightarrow V$ ה"ל.

אם עבור וקטור $V \ni v \neq 0$ קיים סקלר $\lambda \in F$ כך ש- $Tv = \lambda v$,

אזי λ נקרא ע"ע של T ,

ו- v נקרא ו"ע של T השייך לע"ע λ .

הגדרה 1.51 המרחב העצמי של הערך העצמי λ הוא:

$$V_\lambda = \{v \in V | T(v) = \lambda v\}$$

הגדרה 1.52 באופן דומה, אם $A \in M_n(F)$,

ועבור וקטור עמודה $v \in F^n$ קיים סקלר $\lambda \in F$ כך ש- $Av = \lambda v$,

אז λ נקרא ע"ע של A ,

ו- v נקרא ו"ע של A השייך לע"ע λ .

מטרה:

בהינתן ה"ל T ,

היינו רוצים למצוא בסיס של ו"ע.

אם $v_1, \dots, v_n$ בסיס של ו"ע, $T(v_i) = \lambda_i v_i$ אזי:

$$[T]_{(v_i)}^{(v_i)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

או אם נתונה לנו מטריצה A ,

היינו רוצים למצוא מטריצה אלכסונית B שדומה לה.

נשים לב - לא תמיד זה אפשרי!

הגדרה 1.53 הפולינום האופייני של מטריצה $A = (a_{ij})$ הוא:

$$f_A = \det(xI - A) = \det \begin{pmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ & \ddots & & \\ -a_{n1} & & & x - a_{nn} \end{pmatrix}$$

טענה 1.54 $\lambda \in F$ הוא ע"ע של $A \in M_n(F)$,

אמ"מ λ הוא שורש של $f_A(x)$.

טענה 1.55 למטריצות דומות יש את אותו פולינום אופייני.

הגדרה 1.56 בהינתן $A \in M_n(F)$ ו- $\lambda \in F$ ע"ע

הריבוי האלגברי הוא ה- m הגדול ביותר עבורו:

$$(x - \lambda)^m \mid f_A(x)$$

הגדרה 1.57 הריבוי הגיאומטרי הוא:

$$\dim(V_\lambda), \quad V_\lambda = \{v \in F^n \mid Av = \lambda v\}$$

טענה 1.58 הריבוי הגיאומטרי $\geq$ הריבוי האלגברי.

הוכחה: נניח $\dim V_\lambda = k$.

אז יש $v_1, \dots, v_k$ ו"ע של הע"ע λ בת"ל.

נוכל להשלים אותם לבסיס ל- F^n .

אז A דומה ל- B , כאשר:

$$[T]_{(v_i)}^{(v_i)} = B = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} *$$

כאשר יש k עמודות λ .

לשתיהן אותו פולינום אופייני, כי הן דומות, כלומר:

$$f_A(x) = f_B(x) = (x - \lambda)^k \cdot g(x)$$

כלומר $|f_A(x)|^k = (x - \lambda)^k$, כפי שרצינו להראות.

■

טענה 1.59 יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ע"ע שונים זה מזה,

ויהיו $v_i \in V_{\lambda_i}$ וקטורים עצמיים, $0 \neq v_i$

אז $v_1, \dots, v_k$ הם בת"ל.

אלגוריתם לליכסון מטריצה ריבועית A אם אפשר

נתונה מטריצה $A \in M_n(F)$

1. מצא את $f_A(x)$.

2. מצא את השורשים של $f_A(x)$. אלו הם הע"ע של A .

3. עבור כל ע"ע λ נמצא בסיס למערכת המשוואות $(\lambda I - A)x = 0$.

4. נתבונן באוסף $v_1, \dots, v_m$ של כל הוקטורים העצמיים שהתקבלו ב-3 (כל הע"ע).

א. אם $m < n$ אז A לא ניתנת לליכסון.

ב. אם $m = n$:

תהי P המטריצה שעמודותיה הם הו"ע $v_1, \dots, v_n$ כאשר $A \cdot v_i = \lambda_i v_i$ (יש אולי חזרות ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$).

אז מתקיים:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, f_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-4 & -2 \\ -3 & x+1 \end{pmatrix} = (x-4)(x+1) - 6 = x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$$

$$\lambda_1 = 55I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(5I - A)x = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 - 2I - A = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(-2I - A)x = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P = (v_1 | v_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2 מרחבי מכפלה פנימית

2.1 המרחב האוקלידי

10.03.2010

נדבר על:

1. אורך של וקטורים.
2. זווית בין זוג וקטורים.

נדון ב- V מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

דוגמא - המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$\mathbb{R}^n$ - כזכור, כל וקטור הוא מהצורה:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{R}$$

נגדיר מכפלה פנימית (סקלרית):

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

וכמו כן נגדיר אורך:

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

נסמן:

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

אז, הזווית בין v_1 ל- v_2 תוגדר להיות:

$$\cos(v_1, v_2) = \frac{(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}$$

וכמו כן, מתקיים:

$$-1 \leq \cos(v_1, v_2) \leq 1$$

הגדרה 2.1 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

הגדרה 2.2 העתקה $F: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ תקרא מכפלה פנימית (על המרחב הוקטורי V),

אם מתקיימות התכונות הבאות:

1. סימטריות. כלומר:

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad (v_1, v_2) = (v_2, v_1)$$

2. הומוגניות:

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \forall v_1, v_2 \in V \quad (cv_1, v_2) = c(v_1, v_2)$$

3. אדטיביות:

$$(v_1 + \hat{v}_1, v_2) = (v_1, v_2) + (\hat{v}_1, v_2)$$

4. חיוביות:

$$\forall 0 \neq v \in V \quad (v, v) > 0$$

למה 2.3 מתקיים:

1. $(cv_1, v_2) = (v_1, cv_2) = c(v_1, v_2)$
2. $(v_1, v_2 + \hat{v}_2) = (v_1, v_2) + (v_1, \hat{v}_2)$

הוכחה: נוכיח את 1, 2 מושאר כתרגיל:

$$(v_1, cv_2) \stackrel{Symmetry}{=} (cv_2, v_1) \stackrel{Commutative}{=} c(v_2, v_1) \stackrel{Symmetry}{=} c(v_1, v_2)$$

■

הערה 2.4 נשים לב כי מעל המרוכבים זה לא יתקיים!!

הערה 2.5 מ"ו עם מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ נקרא מרחב אוקלידי.

2.1.1 דוגמאות למרחבים בעלי מכפלה פנימית

1. כפי שעשינו מעלה:

$$\mathbb{R}^n, \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

2. יהי V מ"ו מממד n מעל $\mathbb{R}$,

ויהיו $v_1, \dots, v_n$ בסיס. נסמן:

$$v = \sum \alpha_i v_i, \quad w = \sum \beta_i v_i, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$$

$$(v, w) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$$

3. דוגמא נוספת למכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}^n$:

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^n c_i x_i y_i, \quad c_i > 0$$

4. יהי V אוסף הפונקציות הרציפות בקטע $[0, 1]$,

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

נגדיר לדוגמא שתי מכפלות פנימיות שונות:

$$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

ומכפלה שניה:

$$(f(x), g(x))_k = \int_0^1 k(x) f(x) g(x) dx$$

2.1.2 משפט הקוסינוסים

משפט 2.6

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

הגדרה 2.7 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ עם מכפלה פנימית $(\cdot, \cdot)$.

אורך של וקטור $v \in V$ יוגדר להיות:

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}$$

בנוסף, יהיו $v_1, v_2 \in V$, אזי:

$$\cos(v_1, v_2) = \frac{(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

למה 2.8

$$-1 \leq \cos(v_1, v_2) \leq 1$$

טענה 2.9 (משפט הקוסינוסים במרחב אוקלידי):

$$\|v_2 - v_1\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - 2\|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \frac{(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

הוכחה: לפי ארבעת האקסיומות של המכפלה הפנימית:

$$\begin{aligned} \|v_2 - v_1\|^2 &= (v_2 - v_1, v_2 - v_1) = (v_2, v_2 - v_1) - (v_1, v_2 - v_1) \\ &= (v_2, v_2) - (v_2, v_1) - (v_1, v_2) + (v_1, v_1) \\ &= \|v_2\|^2 - 2(v_1, v_2) + \|v_1\|^2 \end{aligned}$$

■

2.2 מרחב אוניטרי - מעל השדה המרוכב

הגדרה 2.10 יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

פונקציה $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ תקרא מכפלה פנימית (מכפלה הרמיטית),

אם התכונות הבאות מתקיימות:

$$\forall c \in \mathbb{C}, \forall v_1, \hat{v}_1, v_2 \in V :$$

1. הרמיטיות:

$$(v_1, v_2) = \overline{(v_2, v_1)}$$

2. הומוגניות:

$$(cv_1, v_2) = c(v_1, v_2)$$

3. אדטיביות:

$$(v_1 + \hat{v}_1, v_2) = (v_1, v_2) + (\hat{v}_1, v_2)$$

4. חיוביות:

$$\begin{aligned} \forall v \neq 0 \quad (v, v) &> 0 \\ 1 &\Rightarrow (v, v) = \overline{(v, v)} \end{aligned}$$

הערה 2.11 מרחב וקטורי V בעל מכפלה הרמיטית,

הערה 2.12 נקרא מרחב אוניטרי.

דוגמא:

$$\mathbb{C}^n, \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \overline{y_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i > 0$$

הגדרה 2.13 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{C}$ עם מכפלה פנימית $(\cdot, \cdot)$.

אורך של וקטור $v \in V$ יוגדר להיות:

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}$$

בנוסף, יהיו $v_1, v_2 \in V, 0 \neq$ אזי:

$$\cos(v_1, v_2) = \frac{(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

כאשר קוסינוס תמיד יהיה מספר מרוכב.

הגדרה 2.14 תזכורת:

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

למה 2.15

$$-1 \leq |\cos(v_1, v_2)| \leq 1$$

טענה 2.16

$$\forall c \in \mathbb{C}, \forall v_1, v_2, \hat{v}_2 \in V :$$

$$1. (v_1, cv_2) = \overline{c} (v_1, v_2)$$

$$2. (v_1, v_2 + \hat{v}_2) = (v_1, v_2) + (v_1, \hat{v}_2)$$

הוכחה:

$$1. (v_1, cv_2) = \overline{(cv_2, v_1)} = \overline{c(v_2, v_1)} = \overline{\overline{\overline{c}(v_2, v_1)}} = \overline{\overline{c}(v_2, v_1)} = \overline{c}(v_1, v_2)$$

$$2. (v_1, v_2 + \hat{v}_2) = \overline{(v_2 + \hat{v}_2, v_1)} = \overline{(v_2, v_1)} + \overline{(\hat{v}_2, v_1)} = (v_1, v_2) + (v_1, \hat{v}_2)$$

■

למה 2.17

1. $v = 0 \Leftrightarrow \|v\| = 0$
2. $\forall c \in \mathbb{C} \quad \|cv\| = |c| \|v\|$
3. $\|v_1 \pm v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 \pm 2\operatorname{Re}(v_1, v_2)$

16.03.2010

הגדרה 2.18 זוג וקטורים $v_1, v_2 \in V$ יקראו אורתוגונליים (ניצבים)

אם $(v_1, v_2) = 0$.

משפט 2.19 פתגורס:

יהי V מרחב אוניטרי, ויהיו $v_1, v_2 \in V$ אורתוגונליים. אזי:

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2, \quad \|v_2\|^2 = \|-v_2\|^2$$

הוכחה:

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2\operatorname{Re}(v_1, v_2)$$

אבל הוקטורים אורתוגונליים, ולכן $(v_1, v_2) = 0$.

■

2.2.1 משפט קושי שוורץ

משפט 2.20 יהי V מרחב אוניטרי, $v_1, v_2 \in V$. נזכור כי:

$$0 \leq \left| \frac{(v_1, v_2)}{\|v_1\| \|v_2\|} \right| = |\cos(v_1, v_2)| \leq 1$$

אזי:

$$|(v_1, v_2)| \leq \|v_1\| \|v_2\|$$

כאשר שיוויון מתקיים אם"מ v_2, v_1 תלויים לינארית.

דוגמאות:

1.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

$$|(x, y)| = \left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$$

2.

$$f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\left| \int_0^1 f(x) \bar{g}(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_0^1 |f^2(x)| dx} \sqrt{\int_0^1 |g^2(x)| dx}$$

הוכחה: נסמן $\hat{v}_1$ וקטור היחידה בכיוון v_1 :

$$v_1 \neq 0 \quad \hat{v}_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad (\hat{v}_1, \hat{v}_1) = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right) = \frac{(v_1, v_1)}{\|v_1\| \|v_1\|} = 1$$

נרצה לחשב את ההיטל של v_2 בכיוון v_1 :

$$t = (v_2, \hat{v}_1) \cdot \hat{v}_1 = \left(v_2, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right) \cdot \frac{v_1}{\|v_1\|} = (v_2, v_1) \cdot \frac{v_1}{\|v_1\|^2}$$

בנוסף נגדיר:

$$u := v_2 - (v_2, v_1) \cdot \frac{v_1}{\|v_1\|^2} = v_2 - t$$

למה 2.21 הוקטורים u, v_1 אורתוגונליים.

הוכחה:

$$(u, v_1) = \left(v_2 - (v_2, v_1) \cdot \frac{v_1}{\|v_1\|^2}, v_1 \right) = (v_2, v_1) - \frac{(v_2, v_1)}{\|v_1\|^2} \cdot (v_1, v_1) = (v_2, v_1) - (v_2, v_1) = 0$$

■

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u\|^2 = (u, u) = (u, v_2 - t) = (u, v_2) - (u, t) = (u, v_2) \\ &= \left(v_2 - (v_2, v_1) \frac{v_1}{\|v_1\|^2}, v_2 \right) = (v_2, v_2) - \frac{(v_2, v_1)}{\|v_1\|^2} (v_1, v_2) \\ &\Rightarrow 0 \leq \|v_2\|^2 - \frac{|(v_1, v_2)|^2}{\|v_1\|^2} \Rightarrow |(v_1, v_2)|^2 \leq \|v_2\|^2 \|v_1\|^2 \end{aligned}$$

כאשר $(u, t) = 0$ כי u, v_1 אורתוגונליים,

ו- t הוא פשוט סקלר מסויים כפול v_1 .

■

2.2.2 אי שיוויון המשולש

משפט 2.22

$$\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

שיוויון מתקיים אמ"מ $v_1 = 0$ או $v_2 = c \cdot v_1$ כאשר $c \geq 0$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|^2 &= (v_1 + v_2, v_1 + v_2) = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2\operatorname{Re}(v_1, v_2) \\ &\leq \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2|(v_1, v_2)| \stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2\|v_1\| \|v_2\| \\ &= (\|v_1\| + \|v_2\|)^2 \end{aligned}$$

כאשר אם ניקח שורש נקבל את א"ש המבוקש.

נשאר לתלמיד להראות את השיוויון בתנאי הנ"ל (להציב $v_2 = cv_1$).

■

מסקנה 2.23

$$||v_1|| - ||v_2|| \leq ||v_1 + v_2||$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_1 + v_2) - v_2 \\ \Rightarrow ||v_1|| &\leq ||v_1 + v_2|| + ||-v_2|| \\ \Rightarrow ||v_1|| - ||v_2|| &\leq ||v_1 + v_2|| \\ ||v_2|| - ||v_1|| &\leq ||v_1 + v_2|| \end{aligned}$$

■

2.2.3 מטריקה

הגדרה 2.24 ניתן להגדיר על המרחב האוניטרי V פונקציית מרחק (מטריקה):

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

המקיימת את התכונות הבאות:

1. $\forall v_1 \neq v_2 \quad d(v_1, v_2) > 0, \quad \forall v_1 \quad d(v_1, v_1) = 0$
2. $d(v_1, v_2) = d(v_2, v_1)$
3. $d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3) \geq d(v_1, v_3)$

טענה 2.25 נגדיר:

$$d(v_1, v_2) := ||v_1 - v_2||$$

הפונקציה הנ"ל הינה מטריקה.

17.03.2010

2.2.4 מערכת אורתונורמלית

הגדרה 2.26 קבוצת וקטורים $v_1, \dots, v_k$ תקרא מערכת אורתונורמלית אם

$$\forall 1 \leq i, j \leq k \quad (v_i, v_j) = \delta_{ij}$$

כאשר:

$$\delta_{ij} = (v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

למה 2.27 תהי מערכת אורתונורמלית, ויהי $v = \sum_{i=1}^k a_i v_i$. אזי:

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^k |a_i|^2$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= (v, v) = \left(\sum_{i=1}^k a_i v_i, \sum_{j=1}^k a_j v_j \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (a_i v_i, a_j v_j) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i \bar{a}_j (v_i, v_j) = \sum_{i=1}^k a_i \bar{a}_i (v_i, v_i) = \sum_{i=1}^k |a_i|^2 \end{aligned}$$

■

מסקנה 2.28 תהי מערכת אורתונורמלית.

אזי $v_1, \dots, v_k$ בת"ל.

הוכחה: תהי מערכת אורתונורמלית.

נניח כי:

$$0 = \sum_{i=1}^k a_i v_i$$

לפי הלמה:

$$0 = \sum_{i=1}^k |a_i|^2$$

לכן $a_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq k$,

ולכן $v_1, \dots, v_k$ בת"ל.

■

הגדרה 2.29 יהי V מרחב אוניטרי, ותהי $B \subseteq V$.

נאמר ש- $u \in V$ ניצב (אורתוגונלי) לקבוצה B (או $u \perp B$),

אם לכל וקטור $v \in B$ מתקיים $(u, v) = 0$.

טענה 2.30 יהיו $b_1, \dots, b_l \in V$.

אזי u ל- $\{b_1, \dots, b_l\}$ אמ"מ u ניצב ל- $\text{span}(b_1, \dots, b_l)$.

הוכחה: בכיוון הקל, נניח כי u ניצב ל- $\text{span}(b_1, \dots, b_l)$.

אזי u ניצב ל- $b_1, \dots, b_l$.

בכיוון השני, נניח כי u ניצב ל- $b_1, \dots, b_l$,

ויהי $\text{span}(b_1, \dots, b_l) \ni v = \sum c_i b_i$. אזי:

$$(u, v) = \left(u, \sum_{i=1}^l c_i b_i \right) = \sum_{i=1}^l c_i \underbrace{(u, b_i)}_{=0} = 0$$

■

למה 2.31 תהי מערכת אורתונורמלית. $v_1, \dots, v_k$

יהי $v \in V$, ויהי:

$$u = v - \sum_{i=1}^k (v, v_i) v_i$$

אזי:

$$1. u \perp \{v_1, \dots, v_k\}$$

$$2. \|v\|^2 = \|u\|^2 + \sum_{i=1}^k |(v, v_i)|^2$$

הוכחה: תחילה נוכיח את 1:

$$\begin{aligned} (u, v_i) &= \left(v - \sum_{j=1}^k (v, v_j) v_j, v_i \right) = (v, v_i) - \left(\sum_{j=1}^k (v, v_j) v_j, v_i \right) \\ &= (v, v_i) - \sum_{j=1}^k (v, v_j) (v_j, v_i) = (v, v_i) - (v, v_i) \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

נוכיח את 2:

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \left(v - \sum_{j=1}^k (v, v_j) v_j, v - \sum_{j=1}^k (v, v_j) v_j \right) = (v, u) = \left(v, v - \sum_{j=1}^k (v, v_j) v_j \right) \\ &= (v, v) - \sum_{j=1}^k (v, (v, v_j) v_j) = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^k \overline{(v, v_j)} \cdot (v, v_j) = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^k |(v, v_j)|^2 \end{aligned}$$

■

טענה 2.32 תהי מערכת אורתונורמלית. אזי:

1. לכל $v \in V$:

$$\sum_{i=1}^k |(v, v_i)|^2 \leq \|v\|^2$$

2. $v_1, \dots, v_k$ הם בסיס אמ"מ לכל $v \in V$:

$$\sum_{i=1}^k |(v, v_i)|^2 = \|v\|^2$$

הוכחה: נוכיח תחילה את 1:

$$0 \leq \|u\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^k |(v, v_i)|^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^k |(v, v_i)|^2 \leq \|v\|^2$$

נוכיח את 2 - תחילה נניח כי $v_1, \dots, v_k$ הם בסיס. אזי:

$$u = v - \sum_{i=1}^k (v, v_i) v_i = 0$$

$$v \in \text{span}(v_1, \dots, v_k) \Rightarrow v = \sum (v, v_i) v_i$$

$$\Rightarrow 0 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^k |(v, v_i)|^2$$

$$\Rightarrow \|v\|^2 = \sum_{i=1}^k |(v, v_i)|^2$$

■

טענה 2.33 תהי $v_1, \dots, v_k$ מערכת אורתונורמלית, ויהי $v \in V$.

יהי

$$u = v - \sum_{i=1}^k (v, v_i) v_i$$

הוקטור הניצב $((u, v_j) = 0)$.

אזי, לכל וקטור $t \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$

$$\|u\| \leq \|v - t\|$$

ושיויון יתקבל אם"מ

$$v - t = u \Rightarrow t = \sum_{i=1}^k (v, v_i) v_i$$

הוכחה: נסמן:

$$s = t - \sum_{i=1}^k (v, v_i) v_i$$

אזי:

$$v - t = v - \sum_{i=1}^k (v, v_i) v_i + \left(\sum_{i=1}^k (v, v_i) v_i - t \right) = u - s$$

$$\Rightarrow \|v - t\| = \|u - s\| = \sqrt{\|u\|^2 + \|s\|^2} \geq \|u\|$$

מתי יתקיים שיויון? אם"מ $s = 0$! וזה לפי ההגדרה של s מתרחש כאשר:

$$t = \sum_{i=1}^k (v, v_i) v_i$$

■

2.2.5 תהליך גרהם שמידט

יהי V מרחב אוניטרי מממד סופי,

ויהי $v_1, \dots, v_n$ בסיס ל- v .

נרצה למצוא מערכת אורתונורמלית $u_1, \dots, u_n \in V$,

המקיימת לכל $1 \leq l \leq n$:

$$\forall 1 \leq l \leq n \quad \text{span}(v_1, \dots, v_l) = \text{span}(u_1, \dots, u_l)$$

מסקנה 2.34 כל בסיס ניתן "להעביר" לבסיס אורתונורמלי.

מסקנה 2.35 כל מערכת אורתונורמלית ניתן להשלים לבסיס אורתונורמלי.

במידה וחלק מהוקטורים הם כבר אורתונורמליים,

התהליך שנמצא ישאיר אותם כמו שהם.

התהליך

יהיו $v_1, \dots, v_k$ בת"ל במרחב אוניטרי V .

$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} \Rightarrow \text{span}(v_1) = \text{span}(u_1)$$

נמשיך:

$$\hat{u}_2 = v_2 - (v_2, u_1) u_1$$

$$\Rightarrow (\hat{u}_2, u_1) = 0$$

$$\text{span}(u_1, \hat{u}_2) = \text{span}(v_1, v_2) :$$

$$u_1 \in \text{span}(v_1, v_2), \quad u_2 = v_2 - c \cdot v_1 \in \text{span}(v_1, v_2)$$

$$\Rightarrow \text{span}(u_1, \hat{u}_2) \subseteq \text{span}(v_1, v_2)$$

$$u_2 := \frac{\hat{u}_2}{\|\hat{u}_2\|}$$

u_2, u_1 מערכת אורתונורמלית, ולכן:

$$(\hat{u}_2, u_1) = 0 \Leftrightarrow (u_2, u_1) = 0$$

ולכן גם

$$\text{span}(u_1, u_2) \supseteq \text{span}(v_1, v_2)$$

ולכן בסה"כ

$$\text{span}(u_1, u_2) = \text{span}(v_1, v_2)$$

23.03.2010

בהמשך, נניח כי $u_1, \dots, u_l$ מערכת אורתונורמלית, כך שלכל $i \leq l$:

$$\text{span}(v_1, \dots, v_i) = \text{span}(u_1, \dots, u_i)$$

$$\Rightarrow \hat{u}_{l+1} = v_{l+1} - \sum_{j=1}^l (v_{l+1}, u_j) u_j$$

$$v_{l+1} \notin \text{span}(v_1, \dots, v_l) = \text{span}(u_1, \dots, u_l) \Rightarrow \hat{u}_{l+1} \neq 0$$

כעת אנו יודעים כי $\hat{u}_{l+1}$ ניצב לתת המרחב $\text{span}(u_1, \dots, u_l)$, ולכן הוא ניצב לוקטורים $u_1, \dots, u_l$.
 וכמו כן, מהכלה דו צדדית,

$$\text{span}(v_1, \dots, v_{l+1}) = \text{span}(u_1, \dots, u_l, u_{l+1})$$

ושלישית, נסמן:

$$u_{l+1} = \frac{\hat{u}_{l+1}}{\|\hat{u}_{l+1}\|}$$

ולכן $u_1, \dots, u_{l+1}$ מערכת אורתונורמלית.

מסקנה 2.36 $u_1, \dots, u_k$ מערכת אורתונורמלית $\supseteq$ מרחב V אוניטרי מממד n , אזי ניתן להשלים את המערכת לבסיס אורתונורמלי של V - $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$.

הוכחה: $u_1, \dots, u_k$ בת"ל, לכן ניתן להשלימה לבסיס של V :

$$u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n$$

נבצע את תהליך גרהם שמידט לבסיס זה, ונסיים. ■

הערה 2.37 יהי V מרחב אוניטרי

ויהי $u_1, \dots, u_n$ בסיס אורתונורמלי ל- V .

אזי עבור כל $v \in V$:

$$v = \sum_{i=1}^n c_i u_i = \sum_{i=1}^n (v, u_i) u_i$$

נרצה להביע את המכפלה הפנימית. אזי עבור $s \in V$:

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^n d_i u_i = \sum_{i=1}^n (s, u_i) u_i \\ (v, s) &= \left(\sum_{i=1}^n c_i u_i, \sum_{j=1}^n d_j u_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (c_i u_i, d_j u_j) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \bar{d}_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{(v, u_i)}_{c_i} \underbrace{\overline{(s, u_i)}}_{\bar{d}_i} = \sum_{i=1}^n (v, u_i) (u_i, s) \end{aligned}$$

2.2.6 המשלים הניצב

הגדרה 2.38 יהי V מרחב אוניטרי מממד סופי,

יהי $U \subseteq V$ תת מרחב. אזי:

$$U^\perp = \{v \in V | \forall u \in U \ (v, u) = 0\}$$

יוגדר המשלים הניצב - קל לראות כי זהו תת מרחב.

בצורה דומה נוכל להגדיר את הניצב-ניצב:

$$(U^\perp)^\perp = U^{\perp\perp} = \{v \in V | \forall \hat{u} \in U^\perp \ (v, \hat{u}) = 0\}$$

למה 2.39 אם V ממימד סופי:

1. $U \subseteq U^{\perp\perp}$
2. $U \cap U^{\perp} = \{0\}$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
 1. U^{\perp} &= \{v \in V \mid \forall u \in U \ (v, u) = 0\} \\
 &\Rightarrow \forall v \in U^{\perp} \ \forall u \in U \ (v, u) = 0 \\
 &\Rightarrow \forall u \in U \ \forall v \in U^{\perp} \ (v, u) = 0 \\
 &\Rightarrow \forall u \in U \ u \in (U^{\perp})^{\perp} \\
 &\Rightarrow U \subseteq (U^{\perp})^{\perp} \\
 2. v &\in U \cap U^{\perp} \\
 &\Rightarrow \left(\underbrace{v}_{\in U}, \underbrace{v}_{\in U^{\perp}} \right) = 0
 \end{aligned}$$

■

טענה 2.40 אם V ממימד סופי:

$$V = U + U^{\perp}$$

כלומר לכל $v \in V$ קיימים $u \in U$, $\hat{u} \in U^{\perp}$ כך ש:

$$v = u + \hat{u}$$

הוכחה: U תת מרחב ממימד סופי של V .

אזי קיים בסיס אורתונורמלי $u_1, \dots, u_k$ של U .

יהי $v \in V$. ונסמן:

$$\hat{u} = v - \sum_{i=1}^k (v, u_i) u_i$$

$\hat{u}$ ניצב לוקטורים $u_1, \dots, u_k$, ולכן ל- U , ולכן $\hat{u} \in U^{\perp}$. אזי:

$$v = \underbrace{\hat{u}}_{\in U^{\perp}} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^k (v, u_i) u_i \right)}_{\in U}$$

■

קצת על סכום ישר⁶

הגדרה 2.41 יהי V מ"ו, U_1, U_2 תתי מרחבים של V .

נאמר כי $V = U_1 \oplus U_2$ אם

1. $V = U_1 + U_2$
2. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

⁶עוד על הנושא הזה בתרגיל הראשון לקורס

הערה 2.42 אם V מרחב אוניטרי (ממימד סופי),

ויהי U תת מרחב של V . אזי:

$$V = U \oplus U^\perp$$

טענה 2.43 V מ"ו, U_1, U_2 תת מרחב של V .

אזי $V = U_1 \oplus U_2$ אם"מ על וקטור $v \in V$ ניתן להצגה יחידה כ:

$$v = u_1 + u_2$$

הוכחה: נניח כי כל וקטור $v \in V$ ניתן להצגה יחידה כ:

$$v = u_1 + u_2$$

נניח כי $v \in U_1 \cap U_2$. אזי:

$$v = v + 0 = 0 + v \Rightarrow v = 0$$

בכיוון השני, נניח כי $V = U_1 \oplus U_2$,

ונניח בשלילה כי קיימות שתי הצגות לכל $v \in V$, כלומר מתקיים:

$$v = u_1 + u_1 = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$$

אזי:

$$0 = v - v = u_1 + u_2 - \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 = (u_1 - \tilde{u}_1) + (u_2 - \tilde{u}_2) \Rightarrow \tilde{u}_1 - u_1 = u_2 - \tilde{u}_2$$

■

משפט 2.44 יהי V מ"ו ממימד סופי,

ויהיו U_1, U_2 תתי מרחבים כך ש:

$$V = U_1 \oplus U_2$$

אזי:

$$\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$$

הוכחה: יהיו $u_1, \dots, u_l$ בסיס ל- U_1 ו- $s_1, \dots, s_m$ בסיס ל- U_2 .

למה 2.45 $u_1, \dots, u_l, s_1, \dots, s_m$ בסיס ל- V .

דרך שניה להוכחה - דרך משפט המימדים -

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

■

משפט 2.46 יהי V מרחב אוניטרי ממימד סופי,

ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב. אזי:

$$1. V = U \oplus U^\perp$$

$$2. \dim V = \dim U + \dim U^\perp$$

$$3. U = (U^\perp)^\perp$$

הוכחה: 1,2 נובעים ישירות מהדיון הכללי בסכום ישר.

נוכיח אם כך את 3:

$$V = U \oplus U^\perp, \quad V = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp$$

מלמה קודמת ומ-2 במשפט זה:

$$U \subseteq (U^\perp)^\perp$$

$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp = \dim U^\perp + \dim (U^\perp)^\perp$$

$$\Rightarrow U = (U^\perp)^\perp$$

■

2.3.1 תכונות נוספות של מרחב אוניטרי

למה 2.47 יהי V מרחב אוניטרי, ותהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית.

אזי, לכל $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $v_1, v_2, u_1, u_2 \in V$ יתקיים:

1. $(T(v_1 + v_2), u) = (Tv_1, u) + (Tv_2, u)$
2. $(Tv, u_1 + u_2) = (Tv, u_1) + (Tv, u_2)$
3. $(T(cv), u) = c(Tv, u)$
4. $(Tv, cu) = \bar{c}(Tv, u)$

הוכחה: נוכיח רק את התכונה הראשונה. הוכחות האחרות מושארות לקורא השקדן:

$$(T(v_1 + v_2), u) = (Tv_1 + Tv_2, u) = (Tv_1, u) + (Tv_2, u)$$

■

למה 2.48 לכל ממ"פ מתקיים:

1. לכל $v \in V$ מתקיים:

$$(v, u) = (v, \hat{u}) \Leftrightarrow u = \hat{u}$$

וכמו כן לכל $u \in V$ מתקיים:

$$(v, u) = (\hat{v}, u) \Leftrightarrow v = \hat{v}$$

כלומר, אם המכפלה הפנימית מזדהה לכל וקטור בקואורדינטה כלשהיא, אז שני הוקטורים בקואורדינטה השניה שווים.

2. יהיו $T : V \rightarrow V$, $R : V \rightarrow V$ אזי:

$$\forall v, u \in V \quad (Tv, u) = (Rv, u) \Leftrightarrow R = T$$

כלומר, אם התבנית הבינארית זהה - אז זוהי אותה העתקה.

3. תהי $T : V \rightarrow V$ אזי:

$$\forall v, u \in V \quad (Tv, u) = 0 \Leftrightarrow T \equiv 0$$

הוכחה: 1. לכל $v \in V$ נניח כי $(v, \hat{u}) = (v, u)$.

אזי לכל $v \in V$, $(v, u - \hat{u}) = 0$, כלומר זה מתקיים גם לוקטור $v = u - \hat{u}$, דהיינו $(u - \hat{u}, u - \hat{u}) = 0$, כלומר $u - \hat{u} = 0$, ולכן $u = \hat{u}$ כנדרש.

2. נניח כי לכל $v, u \in V$, $(Tv, u) = (Rv, u)$.

נבחר $v \in V$ כלשהו ונקבע אותו. אזי לכל $u \in U$:

$$(Tv, u) = (Rv, u) \stackrel{1}{=} Tv = Rv$$

כלומר:

$$\forall v \in V \quad Tv = Rv \Rightarrow T \equiv R$$

■

3. מקרה פרטי של 2, כאשר לוקחים את R להיות טרנספורמצית האפס.

2.3.2 תבניות בילינאריות

הגדרה 2.49 (מתוך וויקיפדיה) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$,

ותהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית.

פונקציה $g : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$, $(u, v) \rightarrow (Tv, u)$ המקיימת:

1. $u \in V$ היא לינארית עבור כל $v \in V$.

2. $v \in V$ היא לינארית עבור כל $u \in V$.

נקראת תבנית בילינארית. נסמנה ב- g_T .

תהי $g_T : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ תבנית בילינארית המעבירה וקטורים $v, u \in V$ ל- (Tv, u) (כאשר T העתקה לינארית כלשהיא).

נסמן $(Tv, u) = (v, Ru)$. עולה השאלה, מי היא ההעתקה R ?

זוהי השאלה המנחה אותנו במסגרת דיון זה.

בהמשך נראה כי העתקה זו נקראת הטרנספורמציה הצמודה ל- T .

דוגמה לתבנית בילינארית

יהי $V = \mathbb{C}^2$, ונסמן $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

כאשר המכפלה הפנימית תהיה המכפלה הסטנדרטית:

$$(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2$$

ניקח את וקטורי הבסיס הסטנדרטי:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אזי:

$$Tv_1 = v_1 + v_2, Tv_2 = 2v_1 + iv_2$$

נסמן:

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

אזי:

$$v = av_1 + bv_2, u = cv_1 + dv_2$$

$$Tv = aTv_1 + bTv_2 = a(v_1 + v_2) + b(2v_1 + iv_2)$$

$$= (a + 2b)v_1 + (a + ib)v_2$$

$$(Tv, u) = ((a + 2b)v_1 + (a + ib)v_2, cv_1 + dv_2) = \bar{c}(a + 2b) + \bar{d}(a + ib)$$

הגדרה 2.50 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$,

העתקה לינארית $T : V \rightarrow \mathbb{F}$ תקרא T פונקציונל.

יהי V מרחב אוניטרי.

נקבע וקטור $u \in V$, וגדיר פונקציונל לינארי $\varphi_u : V \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש- $\varphi_u(v) = (v, u)$.
מהיות הפונקציונל לינארי, הוא מקיים את התכונות הבאות:

1. $\forall v_1, v_2 \in V \quad \varphi_u(v_1) + \varphi_u(v_2) = \varphi_u(v_1 + v_2)$
2. $\forall v \in V, c \in \mathbb{C} \quad \varphi_u(cv) = c\varphi_u(v)$

נראה שזה נכון:

$$\varphi_u(v_1) = (v_1, u), \quad \varphi_u(v_2) = (v_2, u), \quad \varphi_u(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2, u)$$

יהי $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$ - כלומר בסימונים מלינארית 1 - $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$.
נוכל להגדיר העתקה $\tau : V \rightarrow \text{Hom}(V, \mathbb{C})$ כך שלכל $u \in V$ יתקיים $\tau(u) = \varphi_u$.
נשים $\heartsuit$ - העתקה זו לינארית מעל $\mathbb{R}$ אך אינה לינארית מעל $\mathbb{C}$.
אזי, יתקיים:

$$\tau(u_1) + \tau(u_2) = \tau(u_1 + u_2) \Rightarrow \varphi_{u_1} + \varphi_{u_2} = \varphi_{u_1 + u_2}$$

וכמו כן:

$$\forall c \in \mathbb{C}, u \in V \quad \tau(cu) = \bar{c}\tau(u) \Rightarrow \varphi_{cu} = \bar{c}\varphi_u$$

משפט 2.51 ההעתקה $\tau : V \rightarrow \text{Hom}(V, \mathbb{C})$ (שכאמור אינה לינארית) היא חח"ע ועל.

הוכחה: תחילה נראה כי τ היא חח"ע:

$$\varphi_{u_1} = \varphi_{u_2} \Rightarrow v \in V \quad \varphi_{u_1}(v) = \varphi_{u_2}(v) \Leftrightarrow \forall v \in V \quad (v, u_1) = (v, u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$$

כעת, נוכיח שהיא על:

נרצה להראות כי לכל פונקציונל ב- $\text{Hom}(V, \mathbb{C})$ ישנו מקור ב- V .

תהי $\nu : V \rightarrow \mathbb{C}$ העתקה לינארית. אם נראה כי קיים $u \in V$ כך ש- $\nu = \varphi_u$ נסיים.

רגע לפני שנמשיך, נדגיש כי ההעתקה החדשה היא לינארית והתוצר שלה הוא ב- $\mathbb{C}$.

נבחר בסיס אורתונורמלי ל- $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. נסמן $\nu(v_i) = c_i$, כאשר לכל $1 \leq i \leq n$ $c_i \in \mathbb{C}$.

נגדיר: $u = \bar{c}_1 v_1 + \dots + \bar{c}_n v_n$.

טענה 2.52 $\varphi_u = \nu$ הוכחה: הגדרנו: $\nu(v_i) = c_i$. אזי:

$$\varphi_u(v_i) = (v_i, u) = (v_i, \bar{c}_1 v_1 + \dots + \bar{c}_n v_n) = (v_i, \bar{c}_1 v_1) + \dots + (v_i, \bar{c}_n v_n)$$

מכיוון והבסיס אורתונורמלי, לכל $i \neq j$ $(v_i, \bar{c}_j v_j) = 0$, ועבור $i = j$ $(v_i, \bar{c}_i v_i) = 1$, ולכן:

$$(v_i, \bar{c}_i v_i) = (c_i v_i, v_i) = c_i (v_i, v_i) = c_i \cdot 1$$

כלומר, בסה"כ:

$$\varphi_u(v_i) = c_i = \nu(v_i)$$

זה כאמור נכון לכל וקטור בבסיס האורתונורמלי.

כעת, יהי $v \in V$. אזי נוכל לבטאו כצ"ל של אברי הבסיס הנ"ל:

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \Rightarrow \nu(v) = \nu(b_1 v_1 + \dots + b_n v_n)$$

ν היא כאמור ה"ל, ולכן מתקיימות עבורה תכונות האדטיביות והומוגניות. לכן, נקבל:

$$= b_1 \nu(v_1) + \dots + b_n \nu(v_n)$$

כעת:

$$\varphi_u(v) = (b_1 v_1 + \dots + b_n v_n, u)$$

בקואורדינטה השמאלית, מתכונות המ"פ, מתקיימות גם הומוגניות וגם אדטיביות. לכן:

$$= b_1 \underbrace{(v_1, u)}_{c_1} + \dots + b_n \underbrace{(v_n, u)}_{c_n} = b_1 c_1 + \dots + b_n c_n$$

ולכן $\varphi_u(v) = \nu(v)$ לכל $v \in V$.

■

■

2.3.3 ההעתקה הצמודה

14.4.2010

משפט 2.53 יהי V מרחב אוניטרי (אוקלידי), ותהי $T : V \rightarrow V$ ה"ל.

אזי קיימת העתקה (לינארית) יחידה $T^* : V \rightarrow V$ כך ש:

$$\forall v, u \in V \quad (Tv, u) = (v, T^* u)$$

הגדרה 2.54 ההעתקה T^* נקראת הטרנספורמציה הצמודה ל- T (*adjoint*).

הוכחה: יחידות - נניח כי קיימת ה"ל המקיימת את המסקנה, ונראה כי העתקה כזו היא יחידה:

$$\begin{aligned} \forall v, u \in V \quad (Tv, u) &= (v, M_1 u) = (v, M_2 u) \\ \Rightarrow (v, M_1 u) &= (v, M_2 u) \Rightarrow \overline{(M_1 u, v)} = \overline{(M_2 u, v)} \\ \Rightarrow (M_1 u, v) &= (M_2 u, v) \Rightarrow ((M_1 - M_2)u, v) = 0 \\ \Rightarrow M_1 - M_2 &= 0 \end{aligned}$$

קיום - נתבונן ב- (Tv, u) . אם נקבע את u , נקבל:

$$\begin{aligned} (T(v_1 + v_2), u) &= (Tv_1, u) + (Tv_2, u) \\ (T(cv), u) &= c(Tv, u) \end{aligned}$$

ההעתקה השולחת את $v \in V$ היא פונקציונל לינארי על המרחב V !

לפי ההעתקה ??, קיים וקטור $\tilde{u}$ התלוי ב- u , כך ש:

$$\forall v \in V \quad \text{Hom}(V, \mathbb{C}) \ni (Tv, u) = (v, \tilde{u}) \in \{\varphi_u(v)\}$$

■

...

2.3.4 טרנספורמציה צמודה לעצמה - הרמיטיות

טענה 2.55 יהי V מרחב אוניטרי (אוקלידי), ותהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה צמודה לעצמה ($T^* = T$). אזי:

$$\forall v \in V \quad (Tv, v) = 0 \Rightarrow T \equiv 0$$

נשים ♡ - טענה זו אינה נכונה לטרנספורמציות שאינן צמודות לעצמן!

דוגמא:

תהי $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ טרנספורמציה המסובבת כל וקטור ב- 90° :

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \quad (Tv, v) = 0$$

נביט בוקטורים הסטנדרטיים:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Te_1 = e_2, \quad Te_2 = -e_1$$

$$(T(ae_1 + be_2), ae_1 + be_2) = (-be_1 + ae_2, ae_1 + be_2) = -ab + ab = 0$$

ולכן היא אינה צמודה לעצמה! הוכחה:

$$\forall u, v \in V \quad (T(u+v), u+v) = 0$$

$$\Rightarrow (T(u+v), u+v) = (Tu+Tv, u+v) = (Tu, u+v) + (Tv, u+v)$$

$$= \underbrace{(Tu, u)}_{=0} + (Tu, v) + (Tv, u) + \underbrace{(Tv, v)}_{=0} = (Tu, v) + (Tv, u) = 0$$

כעת נחלק למקרים - אם אנחנו מעל $\mathbb{R}$:

$$(Tv, u) + (v, T^*u) = (Tv, u) + (v, Tu) = (Tu, v)$$

$$0 = (Tu, v) + (Tv, u) = (Tu, v) + (Tu, v) = 2(Tv, u) \Rightarrow T \equiv 0$$

מעל $\mathbb{C}$:

$$\forall u, v \in V \quad (T(v+u), v+u) = 0$$

$$= \underbrace{(Tiv, iv)}_{=0} + (iTv, u) + (iT u, iv) + \underbrace{(Tu, u)}_{=0} = 0$$

$$i(Tv, u) - i(Tu, v) = 0$$

$$i(Tv, u) + i(Tu, v) = 0$$

$$\Rightarrow 2i(Tv, u) = 0$$

$$\Rightarrow \forall v, u \quad (Tv, u) = 0 \Rightarrow T \equiv 0$$

■

נשים ♡- בהוכחה מעל $\mathbb{C}$ הוכחנו ללא שימוש בכך ש- T צמודה לעצמה, ועל כן הטענה מעל $\mathbb{C}$ נכונה לכל טרנספורמציה.

תהי $T : V \rightarrow V$ במרחב אוניטרי,

ויהי $v_1, \dots, v_n$ בסיס אורתונורמלי ל- V

תהי A המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס הנ"ל.

אם $T = T^*$ אזי $A = A^*$ ולכן A אלכסונית,

כאשר האיברים על האלכסון יהיו ב- $\mathbb{R}$.

טענה 2.56 יהי V מרחב אוניטרי (מעל $\mathbb{C}$ בלבד!),

ותהי $T : V \rightarrow V$ לינארית. אזי:

$$\forall v \in V \quad (Tv, v) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow T = T^*$$

הוכחה: בכיוון הראשון, נניח כי $T = T^*$. אזי:

$$\forall v \in V \quad (Tv, v) = (v, T^*v) = (Tv, Tv) = \overline{(Tv, v)} \Rightarrow (Tv) \in \mathbb{R}$$

בכיוון השני, נניח כי לכל $v \in V$ $(Tv, v) \in \mathbb{R}$. אזי:

$$\begin{aligned} (v, Tv) &= \overline{(Tv, v)} = (Tv, v) = (v, T^*v) \\ \Rightarrow \forall v \in V \quad (v, (T^* - T)v) &= 0 \end{aligned}$$

נסמן $M = T^* - T$. מעל $\mathbb{C}$ נובע כי $M = 0$, ולכן $T^* = T$. ■

הגדרה 2.57 יהי V מרחב אוניטרי (אוקלידי).

טרנספורמציה $T : V \rightarrow V$ תקרא אנטי הרמיטית, אם:

$$T^* = -T$$

למה 2.58 1. T הרמיטית אמ"מ iT אנטי הרמיטית.

2. T אנטי הרמיטית אמ"מ לכל $v \in V$ (Tv, v) מדומה.

הוכחה: 1. בכיוון הראשון, נניח כי T הרמיטית. אזי:

$$(iT)^* = \bar{i}T^* = -(iT)$$

לכן iT אנטי הרמיטית.

בכיוון השני, נניח כי iT היא אנטי הרמיטית. אזי:

$$-iT = (iT)^* = \bar{i}T^* = -iT^* \Rightarrow T = T^*$$

ולכן T הרמיטית.

2. בכיוון הראשון, נניח כי T אנטי הרמיטית. נסמן $T = iM$, כאשר M אם כך תהיה הרמיטית.⁷

אזי:

$$\forall v \in V \quad \mathbb{C} \ni (Tv, v) = (iMv, v) = i(Mv, v)$$

בכיוון השני, נניח כי לכל $v \in V$ (Tv, v) מדומה.

נסמן $M = iT$. נתבונן בביטוי:

$$(iTv, v) = \underbrace{i(Tv, v)}_{\in \mathbb{R}}$$

ומכאן כי M הרמיטית, ומ-1 לכן היא אנטי הרמיטית. ■

⁷טריגוניאלי ומושאר לקורא השקדן

2.3.5 טרנספורמציות אוניטריות ואורתוגונליות

הגדרה 2.59 יהי V מרחב אוניטרי (אוקלידי), ותהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית.

אזי T תקרא אוניטרית (אורתוגונלית) אם לכל $u, v \in V$:

$$(u, v) = (Tu, Tv)$$

טרנספורמציה אוניטרית משמרת אורכים! נסמן $v = w - u$. אזי:

$$(w - u, w - u) = (T(w - u), T(w - u)) \Rightarrow d(w, u) = \|w - u\| = \sqrt{(w - u, w - u)}$$

משפט 2.60 יהי V מרחב אוניטרי (אוקלידי), ותהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית.

אזי התנאים הבאים שקולים:

1. T אוניטרית (אורתוגונלית).

2.

$$\forall v \in V \quad \|Tv\| = \|v\|, \quad (v, v) = (Tv, Tv)$$

3.

$$T * T = I$$

כאשר I היא העתקת הזהות.

4. T מעתיקה כל בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.

5. T מעתיקה בסיס אורתונורמלי מסויים לבסיס אורתונורמלי.

הערה 2.61 עבור 3 -

$$T * T = I \Rightarrow T^* = T^{-1}$$

הוכחה: $2 \Leftarrow 1$:

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V \quad (u, v) &= (Tu, Tv) \\ \Rightarrow \forall v \in V \quad (v, v) &= (Tv, Tv) \end{aligned}$$

$3 \Leftarrow 2$:

$$\begin{aligned} \forall v \in V \quad (T * Tv, v) &= (Tv, (T^*) * v) = (Tv, Tv) \stackrel{2}{=} (v, v) \\ \Rightarrow (T * Tv, v) &= (Iv, v) \Rightarrow ((T * T - I)v, v) = 0 \\ \Rightarrow (T * T - I)^* &= (T * T)^* - I^* = T^* (T^*)^* - I = T^* T - I \\ \Rightarrow T * T - I &= T^* T - I = 0 \Rightarrow T * T = I \end{aligned}$$

$4 \Leftarrow 3$:

יהי $v_1, \dots, v_n$ בסיס אורתונורמלי. נזכור:

$$(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

צריך להוכיח: $(Tv_i, Tv_j) = \delta_{ij}$. נראה זאת:

$$(Tv_i, Tv_j) = (v_i, T^*Tv_j) \stackrel{3}{=} (v_i, Iv_j) = (v_i, v_j) = \delta_{ij}$$

5 $\Leftarrow$ 1:

יהי $v_1, \dots, v_n$ בסיס אורתונורמלי שאותו מעבירה T לבסיס אורתונורמלי. אזי:

$$(v_i, v_j) = \delta_{ij}, \quad (Tv_i, Tv_j) = \delta_{ij}$$

צריך להראות כי לכל u, w $(u, w) = (Tu, Tw)$. נסמן:

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$$

אזי:

$$\begin{aligned} (u, w) &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i v_i, \beta_i v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i \\ Tu &= T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i Tv_i, \quad Tw = T \left(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right) = \sum_{j=1}^n \beta_j Tv_j \\ \Rightarrow (Tu, Tw) &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i Tv_i, \sum_{j=1}^n \beta_j Tv_j \right) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i Tv_i, \beta_i Tv_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i \end{aligned}$$

■

21.04.2010

הגדרה 2.62 מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C}) \setminus M_n(\mathbb{R})$ נקראת אוניטרית (אורתוגונלית) אם $AA^* = A^*A = I_n$.

טענה 2.63 יהי V מרחב אוניטרי (אוקלידי).

אזי העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$ היא אוניטרית (אוקלידית)

אמ"מ המטריצה A המייצגת את T ביחס לבסיס אורתונורמלי היא מטריצה אוניטרית.

הוכחה: יהי $v_1, \dots, v_n$ בסיס אורתונורמלי.

אזי, אם A היא המטריצה שמייצגת את T ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$,

אזי הוכחנו בטענה קודמת⁸ כי המטריצה שתייצג את T^* היא A^* .

אזי, המטריצה המייצגת את TT^* תהיה AA^* . אזי:

$$AA^* = I_n \Leftrightarrow TT^* = I$$

■

טענה 2.64 $A \in M_n(\mathbb{C}) \setminus M_n(\mathbb{R})$ היא מטריצה אוניטרית (אורתוגונלית),

אמ"מ שורות (או עמודות) A מהוות בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$

עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

⁸ כאן מגיע הצורך שהבסיס יהיה אורתונורמלי. טענה זו אינה נכונה ביחס לבסיסים אחרים!

הוכחה: בכיוון הראשון - A אוניטרית, ולכן לפי ההגדרה $AA^* = I_n$. נסמן $AA^* = r_{ij}$. נשים לב:

$$v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad v_j^* = (\bar{a}_{j1}, \bar{a}_{j2}, \dots, \bar{a}_{jn})$$

אזי (נזכור כי מדובר במכפלה הסטנדרטית):

$$r_{ij} = a_{i1}\bar{a}_{j1} + a_{i2}\bar{a}_{j2} + \dots + a_{in}\bar{a}_{jn} = (v_i, v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = I_n$$

כלומר $v_1, \dots, v_n$ היא מערכת אורתונורמלית.

$\mathbb{C}^n$ (או $\mathbb{R}^n$) הוא מממד n , ולכן $v_1, \dots, v_n$ הוא בסיס אורתונורמלי.

הכיוון השני זהה - פשוט קראו מלמטה למעלה.

דוגמא:

$\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

נבט ב- $M_2(\mathbb{R})$, ונמצא את אוסף המטריצות האורתוגונליות מתוכן:

$$\begin{aligned} AA^t &= A^t A = I_n \Rightarrow A^t = A^{-1} \\ A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ AA^t &= I_n \Rightarrow 1 = \det(AA^t) = \det(A) \cdot \det(A^t) = \det(A^2) \\ A^t &= A^{-1} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כאמור $\det(A) = 1$ ולכן $\det(A) = 1$ או $\det(A) = -1$.

1. אם $\det(A) = 1$, ואז לפי הנוסחא מעלה:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow a = d, \quad b = -c \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

נשים לב כי לפי המכפלה הסטנדרטית $a^2 + b^2 = 1$. לכן נוכל לסמן $a = \cos(\theta)$, $b = \sin(\theta)$. נקבל:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

מוכר? זוהי הטרנספורמציה המסובבת וקטור ב- 90° !

2. אם $\det(A) = -1$, אזי:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \Rightarrow a = -d, \quad c = b$$

נסמן שוב $a = \cos(\theta)$, $b = \sin(\theta)$. נקבל:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

מהי הטרנספורמציה הזו? מושאר לקורא השקדן למצוא.

2.4 משפחת הטרנספורמציות הנורמליות

תחילה - מוטיבציה:

תהי $T : V \rightarrow V$ מעל מרחב אוניטרי או אוקלידי, ויהי $v_1, \dots, v_n$ בסיס אורתונורמלי ל- V .

תהי D המטריצה המייצגת את T לפי בסיס זה, וכמו כן:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אזי, T^* תהיה מיוצגת על ידי D^* , שתקיים:

$$D^* = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

$$DD^* = D^*D \Rightarrow TT^* = T^*T$$

מסקנה 2.65 אם $T : V \rightarrow V$ מיוצגת על ידי מטריצה אלכסונית ביחס לאיזשהו בסיס אורתונורמלי $v_1, \dots, v_n$,

אזי $TT^* = T^*T$.

נזכור כי בתחילת הסמסטר ראינו כי מטריצה לכסינה אמ"מ יש לה בסיס של וקטורים עצמיים.

בהמשך נראה כי מעל $\mathbb{C}$, אם מטריצה היא **נורמלית** (הגדרה מטה), אזי היא לכסינה,

וקיים לה בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{R}$ לעומת זאת, הדבר אינו נכון. אבל כל זאת בהמשך. נתחיל:

הגדרה 2.66 יהי V מרחב אוניטרי (אוקלידי), ותהי $T : V \rightarrow V$ לינארית.

T תקרא **טרנספורמציה נורמלית** אם $TT^* = T^*T$.

נשים $\heartsuit$ - מההגדרה, טרנספורמציות צמודות לעצמן,

וטרנספורמציות אוניטריות ואורתוגונליות הינן נורמליות.

לדוגמא:

יהי $\mathbb{C}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נביט ב:

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

הטרנספורמציה המתאימה ל- A היא נורמלית,

אבל איננה צמודה לעצמה ואינה אוניטרית.

טענה 2.67 יהי V מרחב אוניטרי (אוקלידי). ותהי $T : V \rightarrow V$ נורמלית.

אם λ הוא ע"ע של T עם ע"ע v , אזי v הוא ו"ע של T^* המתאים לע"ע $\bar{\lambda}$. כלומר:

$$\forall v \in V \quad Tv = \lambda v \Rightarrow T^*v = \bar{\lambda}v$$

הוכחה: יהי $u \in V$

טענה 2.68 $\|Tu\|^2 \stackrel{(*)}{=} \|T^*u\|^2$.

הוכחה:

$$\|Tv\|^2 = (Tv, Tv) = (u, T^*Tu) \stackrel{T \text{ is normal}}{=} (u, TT^*u) = (\overline{TT^*u}, u) = (\overline{T^*u}, \overline{T^*u}) = (T^*u, T^*u) = \|T^*u\|^2$$

■

נסמן $(T - \lambda I) = M$ אזי:

$$\begin{aligned} MM^* &= (T - \lambda I)(T - \lambda I)^* = (T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda}I) = TT^* + \lambda\bar{\lambda}I - \lambda T^* - \bar{\lambda}T \\ M^*M &= (T - \lambda I)^*(T - \lambda I) = (T^* - \bar{\lambda}I)(T - \lambda I) = \underbrace{T^*T}_{TT^*} + |\lambda|^2 I - \lambda T^* - \bar{\lambda}T \end{aligned}$$

$$\Rightarrow MM^* = M^*M$$

$$\begin{aligned} Tv = \lambda v &\Leftrightarrow (T - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow Mv = 0 \Leftrightarrow \|Mv\| = 0 \stackrel{(*)}{=} \|M^*v\| = 0 \Leftrightarrow M^*v = 0 \\ &\Leftrightarrow (T - \lambda I)^*v = 0 \Leftrightarrow T^*v = \bar{\lambda}v \end{aligned}$$

■

27.04.2010

טענה 2.69 תהי $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה נורמלית, כלומר $TT^* = T^*T$,

ויהי v ו"ע של T עם הע"ע λ , ויהי u ו"ע של T עם הע"ע ε . אזי:

$$\lambda \neq \varepsilon \Rightarrow (v, u) = 0$$

כלומר, ו"ע עם ע"ע שונים הינם ניצבים זה לזה.

הוכחה: נביט ב- (Tu, v) . מצד אחד:

$$(Tu, v) = (\varepsilon u, v) = \varepsilon(u, v)$$

ומצד שני:

$$(Tu, v) = (u, T^*v) = (u, \bar{\lambda}v) = \lambda(u, v)$$

כלומר:

$$\lambda(u, v) = (Tu, v) = \varepsilon(u, v) \Rightarrow (\varepsilon - \lambda)(u, v) = 0$$

■

הנחנו כי $\lambda \neq \varepsilon$, ולכן בהכרח $(u, v) = 0$, כנדרש.

משפט 2.70 יהי V מרחב אוניטרי (מעל $\mathbb{C}$ בלבד!), ותהי $T: V \rightarrow V$ טרנס' נורמלית.

אזי ל- T קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים.

ראינו בעבר כי תחת בסיס זה, המטריצה המייצגת של הטרנס' T הינה אלכסונית.

נשאלת השאלה - מדוע המשפט מעלה נכון אך ורק ל- $\mathbb{C}$ ולא ל- $\mathbb{R}$?

ישנם הרבה נימוקים, אולם נימוק אחד אנו כבר מכירים -

המשפט היסודי של האלגברה

משפט 2.71 יהי $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ פולינום, $a_i \in \mathbb{C}$.

אזי ל- $p(x)$ ישנו שורש מעל $\mathbb{C}$:

$$\exists z \in \mathbb{C} \ p(z) = 0$$

הדבר אינו תקף עבור פולינומים מעל $\mathbb{R}$!

מסקנה 2.72 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{C}$, $T : V \rightarrow V$ ט"ל.

אזי ל- T ישנו ו"ע.

הוכחה: יהי $p(x)$ הפ"א של הטרנס' T . V מעל $\mathbb{C}$, אזי $p(x) \in \mathbb{C}[x]$.

לפי המשפט היסודי של האלגברה, ל- $p(x)$ ישנו שורש λ_0 , כלומר $p(\lambda_0) = 0$.

תהי A המטריצה המייצגת את T לפי איזשהו בסיס של V . אזי:

$$p(x) = \det(\lambda I - A) \Rightarrow p(\lambda_0) = \det(\lambda_0 I - A) = 0$$

אזי המטריצה $(\lambda_0 I - A)$ אינה הפיכה, ולכן $\dim \text{Ker}(\lambda_0 I - A) \geq 1$.

$$\forall v \in V \quad p(v) = \det(vI - A) = 0 = \det(\lambda_0 I - A) \Rightarrow Tv = \lambda_0 v$$

■

המשפט היסודי נשאר ללא הוכחה בקורס זה.

נוכיח את המשפט ממנו התחלנו: **הוכחה:** תהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה נורמלית, ויהי λ ע"ע של T ,

ונסמן ב- V_λ את המרחב העצמי המתאים לע"ע λ , כלומר:

$$V_\lambda = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$$

קל לראות כי V_λ הינו תת מרחב של V .

לכל V_λ נשתמש בתהליך גרהם שמידט ונמצא בסיס אורתונורמלי:

$$v_1^\lambda, v_2^\lambda, \dots, v_{n_\lambda}^\lambda \quad n_\lambda = \dim(V_\lambda)$$

נבית באיחוד בסיסים אלה:

$$\{v_1^{\lambda_1}, v_2^{\lambda_1}, \dots, v_{n_{\lambda_1}}^{\lambda_1}\} \cup \{v_1^{\lambda_2}, v_2^{\lambda_2}, \dots, v_{n_{\lambda_2}}^{\lambda_2}\} \cup \dots \cup \{v_1^{\lambda_n}, v_2^{\lambda_n}, \dots, v_{n_{\lambda_n}}^{\lambda_n}\}$$

על פי הטענה מתחילת השיעור, זוהי מערכת אורתונורמלית!

תת המרחב הנפרש ע"י קבוצה זו הינו:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$$

נרצה להוכיח כי:

$$\bigoplus_{i=1}^n V_{\lambda_i} = V$$

ונסיים, כי אז בסיס זה יהיה הבסיס האורתונורמלי שאנו מחפשים.

יהי $U = \bigoplus_{i=1}^n V_{\lambda_i}$. נניח בשלילה כי $U \subsetneq V$, ויהי $U^\perp$ תת המרחב הניצב ל- U . אזי, $U \oplus U^\perp = V$.

למה 2.73 $U^\perp$ אינוריאנטי תחת T , כלומר $Tu^\perp \in U^\perp$. **הוכחה:** יהי $\hat{u} \in U^\perp$, צריכים להראות כי $T\hat{u} \in U^\perp$.

יהי v_i וקטור מתוך הבסיסים האורתונורמליים של $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_n}$. אזי:

$$(T\hat{u}, v_i) = (\hat{u}, T^* v_i) = (\hat{u}, \bar{\lambda}_i v_i) = \lambda(\hat{u}, v_i) = 0$$

מכאן ש- $T\hat{u}$ ניצב לבסיסי $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_n}$, לכן $T\hat{u}$ ניצב ל- $\bigoplus_{i=1}^n V_{\lambda_i}$.

ולכן $T\hat{u} \in U^\perp$, כלומר $T\hat{u} \in U^\perp$.

■

כעת, תהי $T|_{U^\perp} : U^\perp \rightarrow U^\perp$ הצמצום של T ל- $U^\perp$.

ל- $T|_{U^\perp}$ קיים ו"ע $\hat{\lambda}$ עם $v \in U^\perp$ קיים ו"ע $\hat{\lambda}$ (קיים בשל המסקנה מהמשפט היסודי). אזי:

$$T\hat{v} = T|_{U^\perp} \hat{v} = \hat{\lambda} \hat{v}$$

מכאן ש- $\{0\} \neq V_\lambda \cap U^\perp$, בסתירה לכך ש- $\{0\} = U \cap U^\perp$.

ולכן בהכרח $U^\perp = 0$, כלומר $U = V$, כנדרש.

■

נוכיח כעת את הכיוון השני של המשפט:

טענה 2.74 $T : V \rightarrow V$ תהי

ונניח כי קיים בסיס אורתונורמלי של V המורכב כולו מוקטורים עצמיים של T . אזי T נורמלית.

הוכחה: יהי $v_1, v_2, \dots, v_n$ בסיס אורתונורמלי של V המורכב כולו מוקטורים עצמיים של T . נייצג את T לפי בסיס זה:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

לכן, המטריצה הייצגת את T^* תהיה:

$$D^* = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

היות ואלו מטריצות אלכסוניות, הן מתחלפות זו עם זו, כלומר $DD^* = D^*D$, ומכאן $TT^* = T^*T$ כלומר T נורמלית, כנדרש.

■

מסקנה 2.75 יהי V ממ"פ אוניטרי, $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה נורמלית. אזי קיים בסיס אורתונורמלי של V שביחס אליו T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית.

מסקנה 2.76 משפט הלכסון האוניטרי:

תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה נורמלית, כלומר $AA^* = A^*A$. אזי, קיימת מטריצה אוניטרית $U \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש- $AU = U^*A$ אלכסונית.

הוכחה: נביט ב- A , מטריצה הפועלת על המרחב $\mathbb{C}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. A מייצגת העתקה נורמלית, ולכן, לפי המשפט הקודם, קיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^n$, המורכב כולו מוקטורים עצמיים של המטריצה A .

יהי $v_1, \dots, v_n$ הבסיס הנ"ל. אזי מתקיים $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$, וכמו כן $Av_i = \lambda_i v_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.

נסמן ב- U את המטריצה $\begin{pmatrix} | & \dots & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & \dots & | \end{pmatrix}$ אזי יתקיים:

$$AU = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) \Rightarrow U^*AU = \begin{pmatrix} \sim & v_1 & \sim \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sim & v_n & \sim \end{pmatrix} (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = \lambda_i \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

כנדרש!

■

תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה נורמלית. כיצד נלכסן אותה?

1. נחשב את $p_A(x)$ - הפולינום האופייני של A .
2. נחשב את שורשי הפולינום $p_A(x) = \lambda_1, \dots, \lambda_k$.
3. נחשב את V_{λ_i} עבור $1 \leq i \leq k$, ונמצא בסיס לכל מרחב עצמי.
4. נפעיל את גרעם שמידט ונמצא בסיס אורתונורמלי ל- V_{λ_i} .

28.04.2010

טענה 2.77 יהי V ממ"פ אוניטרי ו- $T : V \rightarrow V$ טרנספ' נורמלית. אזי:

1. T צמודה לעצמה אמ"מ כל הע"ע של T ממשיים.
2. T אוניטרית אמ"מ כל הע"ע של T מקיימים $|\lambda| = 1$.

הוכחה: T היא טרנספ' נורמלית, V מרחב אוניטרי, ולכן לפי ממשפט קודם קיים בסיס אורתונורמלי של V , שביחס אליו T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית D , כאשר:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

נוכיח את 1:

$$T = T^* \Leftrightarrow D = D^* \Leftrightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n \lambda_i = \bar{\lambda}_i$$

נוכיח את 2:

$$TT^* = I \Leftrightarrow DD^* = I_n \Leftrightarrow AA^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n \lambda_i \cdot \bar{\lambda}_i = 1 \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n |\lambda_i| = 1$$

■

טענה 2.78 תהי $H : V \rightarrow V$ טרנספורמציה הרמיטית⁹, V מרחב אוניטרי,

ותהי $U : V \rightarrow V$ טרנספורמציה אוניטרית, ונניח כי $HU = UH$.

אזי $T = HU$ היא טרנספורמציה נורמלית.

הוכחה: נרצה להוכיח כי $TT^* = T^*T$, כלומר: $(HU)(HU)^* = (HU)^*(HU)$. אזי, מהנתון:

$$UH = HU \Rightarrow (HU)^* = (UH)^* \Rightarrow U^*H^* = H^*U^* \xrightarrow{H=H^*} U^*H = HU^*$$

כלומר H מתחלפת גם עם U^* . לכן:

$$(HU)(UH)^* = UHU^*H = UU^*HH = H^2 = U^*UHH = U^*HHU = (HU)^*(HU)$$

■

נביט בהצגה הפולרית של מספר מרוכב, כפי שראינו בלינארית 1:

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

כאנלוגיה להצגה הנ"ל, נציג את הכיוון השני של הטענה הקודמת:

⁹כלומר צמודה לעצמה - $H = H^*$

טענה 2.79 יהי V נרחב אוניטרי ו- $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה נורמלית.

אזי קיימת טרנספורמציה הרמיטית H וטרנספורמציה אוניטרית U כך ש- $HU = UH$, וכמו כן $T = UH$.

הוכחה: T נורמלית, ולכן קיים בסיס אורתונורמלי של V של ו"ע, שביחס אליו T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית D , כלומר:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

כל $\lambda_i \in \mathbb{F}$ ניתן לרשום בצורה הבאה:

$$\lambda_j = r_j \overbrace{(\cos \theta_j + i \sin \theta_j)}^{z_j, |z_j|=1}$$

ולכן נוכל לכתוב את D בצורה הבאה:

$$D = \overbrace{\begin{pmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n \end{pmatrix}}^H \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix}}^U$$

מהטענה הראשונה לשיעור זה, מכיוון ומטריצות אלו הן ביחס לבסיס האורתונורמלי,

נקבל כי H צמודה לעצמה ו- U אוניטרית, כנדרש.

כעת נעבור לדיון במרחב האוקלידי, כלומר מרחבי מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ בלבד.

2.5 מרחב אוקלידי - מעל שדה הממשיים

נראה את השוני בין הטענות שהוכחנו עד כה מעל $\mathbb{C}$ לבין הטענות מעל $\mathbb{R}$.

המצב בו נתון בפרק זה, כאמור, הוא העתקות $T : V \rightarrow V$ נורמליות.

ננסה לקשור בין הטרנספורמציה הנ"ל לבין טרנספורמציה אחרת, הקשורה אליה באופן טבעי, $\hat{T} : \hat{V} \rightarrow \hat{V}$, כאשר $\hat{V}$ אוניטרי.

מתוך הקשר הזה נוכל לראות מה יהיה המבנה של הטרנספורמציה ממנה התחלנו T מעל המרחב האוקלידי.

נשאף להוכיח את המשפט הבא, שהינו אנלוגי למשפט שהוכחנו מעל $\mathbb{C}$:

משפט 2.80 יהי V מרחב אוקלידי, ותהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה נורמלית.

אזי קיים בסיס אורתונורמלי $v_1, \dots, v_n$, שביחס אליו T מיוצגת ע"י המטריצה:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k & \\ \hline & & \text{2} \times \text{2 cell} & \\ & & \text{no. 1} & \\ \hline & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ \hline 0 & & & & & \text{2} \times \text{2 cell} \\ & & & & & \text{no. r} \end{pmatrix}, \text{ 2} \times \text{2 cell is } \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}, a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

2.5.1 בניית המרחב האוניטרי $\hat{V}$

נבנה מרחב וקטורי $\hat{V}$ אוניטרי ע"י מרכוב - קומפלקסיפיקציה, של המרחב האוקלידי V .
נבנה אותו כך שהוא יהיה דומה ל- $V \times V$, וכמו כן $V \subseteq \hat{V}$. נגדיר:

$$\hat{V} = \{[u, v] \mid u, v \in V\}$$

כדי לקבל מבנה שכזה, תחילה נגדיר כיצד פעולות חיבור וכפל של $\mathbb{C}$ על $\hat{V}$:
פעולת חיבור - פשוט חיבור קואורדינטה קואורדינטה.
נגדיר אם כך את פעולת הכפל:

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \underbrace{z}_{=a+ib} \cdot [u, v]$$

נחשוב על הוקטורים הנ"ל בצורה הבאה:

$$[u, v] = u + iv$$

אזי, נגדיר את הכפל בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} z \cdot [u, v] &= (a + ib) \cdot (u + iv) = au - bv + i(bu + av) \\ \Rightarrow z \cdot [u, v] &= (a + ib) \cdot [u, v] = [au - bv, bu + av], \quad i \cdot [v, 0] = [0, v] \end{aligned}$$

למה 2.81 (ללא הוכחה) $\hat{V}$ עם הכפל בסקלר שהוגדר מעלה, מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

תרגיל: הוכיחו כי המימד של V שווה למימד של $\hat{V}$.

כעת, נגדיר מבנה אוניטרי מעל $\hat{V}$.

$$([u_1, v_1], [u_2, v_2]) = (u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) := (u_1, u_2) + (v_1, v_2) + i((v_1, u_2) - (u_1, v_2))$$

למה 2.82 (ללא הוכחה) הגדרה זו מהווה מכפלה פנימית.

כעת קיבלנו **מרחב מכפלה פנימית אוניטרי**.

טענה 2.83 יהיו:

$$z \in \mathbb{C}, \gamma, \eta \in \hat{V}, \eta = [u, v] = u + iv, \bar{\eta} = [u, -v] = u - iv$$

אזי השיויונות הבאים מתקיימים:

$$\overline{\gamma + \eta} = \bar{\gamma} + \bar{\eta} \quad (1)$$

$$\overline{z \cdot \eta} = \bar{z} \cdot \bar{\eta} \quad (2)$$

$$\eta + \bar{\eta} = 2\operatorname{Re}(\eta) \quad (3)$$

$$\eta - \bar{\eta} = 2i\operatorname{Im}(\eta) \quad (4)$$

$$\overline{(\gamma, \eta)} = (\bar{\gamma}, \bar{\eta}) \quad (5)$$

$$\eta = \bar{\eta} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\eta) = 0, \text{ meaning } \eta \in \mathbb{R} \quad (6)$$

הוכחה: נוכיח שתי תכונות, השאר מושאר כתרגיל:

$$(1) \gamma = [u_1, v_1], \eta = [u_2, v_2]$$

$$\bar{\gamma} + \bar{\eta} = [u_1, -v_1] + [u_2, -v_2] = [u_1 + u_2, -v_1 - v_2] = \overline{[u_1 + u_2, v_1 + v_2]} = \overline{\gamma + \eta}$$

$$(5) \left(\overbrace{[u_1, 0v_1]}^{\bar{\gamma}}, \overbrace{[u_2, -v_2]}^{\bar{\eta}} \right) = (u_1, u_2) + \overbrace{(v_1, v_2)}^{=(v_1, v_2)} - i((v_1, u_2) - (u_1, v_2)) = \overline{([u_1, v_1], [u_2, v_2])}$$

■

יהי V מרחב אוקלידי, $\hat{V}$ מרחב אוניטרי כפי שהגדרנו מעלה, ותהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית.

נרצה להגדיר הרחבה של T לטרנספורמציה לינארית $\hat{T} : \hat{V} \rightarrow \hat{V}$, כך ש:

$$\hat{T}([u, 0]) = [Tu, 0]$$

טענה 2.84 קיימת הרחבה יחידה $\hat{T} : \hat{V} \rightarrow \hat{V}$ המקיימת את התנאי הנ"ל.

הוכחה: תחילה נראה **קיום**: נגדיר:

$$\hat{T}([u, v]) = ([Tu, Tv])$$

קל לבדוק שזו טרנספורמציה לינארית, והיא מקיימת:

$$\hat{T}([u, 0]) = ([Tu, 0])$$

יחידות: תהי $S : \hat{V} \rightarrow \hat{V}$ כך שגם היא מקיימת $S([u, 0]) = [Tu, 0]$. אזי:

$$S([u, 0]) = S([u, 0] + i[v, 0]) = S([u, v]) + iS([v, 0]) = [Tu, 0] + i[Tv, 0] = [Tu, Tv] = \hat{T}([u, v])$$

■

4.5.2010

יש להשלים שיעור זה...

טענה 2.85 יהי V מרחב אוקלידי, ויהי $\hat{V}$ מרחב אוניטרי שהינו המרכוב של V ,

ויהיו $T : V \rightarrow V$ ו- $\hat{T} : \hat{V} \rightarrow \hat{V}$ הרחבה של T .

אזי T נורמלית אם ורק אם $\hat{T}$ נורמלית.

■

הוכחה: להשלים.

טענה 2.86 $\lambda \in \mathbb{R}$ ע"ע של $T \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ ע"ע של $\hat{T}$.

כמו כן, אם $u_1, \dots, u_m$ בסיס של V_λ אזי $[u_1, 0], [u_2, 0], \dots, [u_m, 0]$ בסיס ל- $\hat{V}_\lambda$.

■

הוכחה: בהמשך...

טענה 2.87 יהי $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ע"ע של $\hat{T}$, ויהי $v_1, \dots, v_k$ בסיס אורתונורמלי של $\hat{V}_\zeta$,

אזי $\bar{\zeta}$ הוא גם ע"ע של $\hat{T}$, וכמו כן $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ יהיה בסיס אורתונורמלי של $\hat{V}_{\bar{\zeta}}$.

כעת, נוכל להוכיח את המשפט המרכזי של הפרק הזה. נזכיר מהו:

משפט 2.88 יהי V מרחב אוקלידי, ותהי $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה נורמלית.

אזי קיים בסיס אורתונורמלי $v_1, \dots, v_n$, שביחס אליו T מיוצגת ע"י המטריצה:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k & \\ \hline & & 2 \times 2 \text{ cell} & \\ & & \text{no. 1} & \\ \hline & & & \ddots \\ & & & \ddots \\ \hline 0 & & & 2 \times 2 \text{ cell} \\ & & & \text{no. } r \end{pmatrix}, \quad 2 \times 2 \text{ cell is } \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}, \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

הוכחה: יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הע"ע השונים (והממשיים) של T .

לכל λ_i מתאים מרחב עצמי V_{λ_i} . לכל מרחב עצמי נשתמש בתהליך גרהם שמידט ונמצא בסיס אורתונורמלי:

$$\underbrace{V_{\lambda_1}}_{u_1^1, \dots, u_{n_1}^1}, \underbrace{V_{\lambda_2}}_{u_1^2, \dots, u_{n_2}^2}, \dots, \underbrace{V_{\lambda_m}}_{u_1^m, \dots, u_{n_m}^m}$$

כאשר n_i הינם הגדלים של בסיסים אורתונורמליים אלו.

מההוכחה שעשינו למקרה המרוכב, וקטורים אלו הם אכן בת"ל.

נזכר כי ב- $\mathbb{C}$ ראינו כי $\bigoplus_{i=1}^n V_{\lambda_i} = V$. במקרה הנוכחי - $\bigoplus_{i=1}^n V_{\lambda_i} \subseteq V$.

נרצה להשלים את הבסיס הנ"ל כך שהמטריצה המייצגת תושלם ע"י בלוקים בגודל 2×2 , כפי שמופיע לעיל.

אזי, נתבונן ב- $\hat{T}$ - אם $\bigoplus_{i=1}^n V_{\lambda_i} \subsetneq V \Leftrightarrow \hat{V} \subsetneq \hat{V}$.

במקרה זה, ל- $\hat{T}$ יש ע"ע לא ממשיים. נתבונן אם כך ב- $\zeta \notin \mathbb{R}$ ע"ע לא ממשי של $\hat{T}$.

נזכור כי לפי טענה מהשיעור הקודם, גם $\bar{\zeta} \notin \mathbb{R}$ גם הוא ע"ע לא ממשי של $\hat{T}$.

אזי, יהיו $\{v_1, \dots, v_c\}$ בסיסים אורתונורמליים ל- $\hat{V}_{\bar{\zeta}}, \hat{V}_{\zeta}$ בהתאמה.

נתבונן בזוג $v_1, \bar{v}_1 \in \hat{V}$, ונגדיר את הוקטורים הבאים:

$$u = \frac{v_1 + \bar{v}_1}{\sqrt{2}}, \quad w = \frac{v_1 - \bar{v}_1}{i\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \bar{u} = \frac{\overline{v_1 + \bar{v}_1}}{\sqrt{2}} = \frac{\bar{v}_1 + v_1}{\sqrt{2}} = u = [t, 0] \in \mathbb{R}$$

ובאותה הצורה:

$$\Rightarrow \bar{w} = \frac{\overline{v_1 - \bar{v}_1}}{i\sqrt{2}} = \frac{-\bar{v}_1 + v_1}{\sqrt{2}} = w = [s, 0] \in \mathbb{R}$$

מצאנו אם כך שני וקטורים ממשיים. מהו האורך של הוקטורים הללו? נראה עבור u , פעולה זהה עבור w :

$$(u, u) = \left(\frac{\bar{v}_1 + v_1}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{v}_1 + v_1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{(v_1, v_1)}_{=1} + \underbrace{(\bar{v}_1, \bar{v}_1)}_{=1} + \underbrace{(v_1, \bar{v}_1)}_{=0} + \underbrace{(\bar{v}_1, v_1)}_{=0} \right] = 1$$

כלומר וקטורים אלו הינם גם מערכת אורתונורמלית.

נרצה לראות כיצד הטרנספורמציה T עובדת על u, w הנ"ל:

$$\begin{aligned} v_1 &= (u + iw) \cdot \sqrt{2}, \quad \zeta = (a + ib) \in \mathbb{C} \\ \hat{T}v_1 &= \zeta v_1 \Rightarrow \hat{T}(u + iw) \cdot \sqrt{2} = (a + ib) \cdot (u + iw) \cdot \sqrt{2} \\ \Rightarrow T(u + iw) &= (a + ib) \cdot (u + iw) \Rightarrow Tu + iTw = au - bw + i(bu + aw) \\ \Rightarrow Tu &= au + bw, \quad Tw = bu + aw \\ \Rightarrow T|_{\text{span}(u, w)} &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

נעשה תהליך זה עבור כל זוג $v_i, \bar{v}_i$ מתוך הבסיסים האורתונורמליים שמצאנו, עבור כל מרחב עצמי של $\zeta, \bar{\zeta}$ ע"ע כלשהם.

אזי, קיבלנו $2c$ וקטורים ב- V , שאיחודם הינו בסיס אורתונורמלי ל- $\oplus_{i=1}^m V_{\lambda_i}$, כאשר λ_i לא ממשיים.

בתחילת ההוכחה מצאנו בסיס אורתונורמלי למרחבים עצמיים לערכים עצמיים ממשיים.

נטען כי איחוד קבוצת הוקטורים הזו הינה בסיס אורתונורמלי ל- V ,

והמטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס זה תהיה $Tv_i = \lambda_j v_i, v_i \in V_{\lambda_j}$, כלומר הצורה המבוקשת.

נוכל להראות פריסה ישירות, וכי זהו בסיס ממשפט המימד, וסיימונו. ■

מסקנה 2.89 יהי V מרחב אוקלידי. טרנספורמציה $T : V \rightarrow V$ נורמלית אמ"מ T היא מהצורה $T = SO$,

כאשר S צמודה לעצמה ו- O טרנספורמציה אוקלידית, וכמו כן S מתחלפת עם O .

הוכחה: בכיוון הראשון,

$$\begin{aligned} T &= (SO)(OS)^* = SOO^*S = S^2 \\ T^* &= (SO)^*(SO) = O^*SSO = S^2 \\ \Rightarrow T &= T^* \end{aligned}$$

בכיוון השני, נניח ש- T נורמלית. אזי מהמשפט הקודם, קיים בסיס אורתונורמלי שביחס אליו T מיוצגת ע"י:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & 2 \times 2 \text{ cell} & \\ & & & \text{no. 1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad 2 \times 2 \text{ cell is } \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}, \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

נרצה לכתוב את המטריצה הנ"ל המכפלה של שתי מטריצות.

ראשית, כל בלוק $\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$ נבטא בצורה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix} = r_i \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \Rightarrow r_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

נגדיר שתי מטריצות:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k & \\ r_1 & 0 & & \\ 0 & r_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & r_l \\ & & & & r_l \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & & \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & \cos\theta_l & \sin\theta_l \\ & & & -\sin\theta_l & \cos\theta_l \end{pmatrix}$$

נשים לב ששתי המטריצות הן מטריצות בלוקים, ולכן, כפי שראינו בלינארית 1, הן מתחלפות אחת עם השנייה,

כלומר מתקיים $AB = BA$. כמו כן, כפל שלהן שווה ל- T מהבניה.

כעת, עבור A קיימת טרנספורמציה S שאותה היא מייצגת, ובצורה דומה,

עבור B קיימת טרנספורמציה O אותה היא מייצגת. לכן $AB = BA \Leftrightarrow SO = OS$.

לפי בסיס אורתונורמלי, המטריצה המייצגת היא מטריצה אלכסונית, ולכן S צמודה לעצמה!

כמו כן, עבור O , קל לראות ש- $BB^* = I$, שהרי כל בלוק הינו מטריצה אורתוגונלית, וזה נכון אמ"מ $OO^* = I$.

כלומר O אורתוגונלית, כנדרש. ■

2.5.3 מסקנות מהמשפט המרכזי

11.5.2010

נביט במשפט אותו הוכחנו בשיעור הקודם -

במידה ו- T צמודה לעצמה, אזי יתקיים:

$$T = T^* \Rightarrow (\hat{T})^* = (\hat{T}^*) = (\hat{T})$$

כלומר T צמודה לעצמה אמ"מ $\hat{T}$ צמודה לעצמה.

כלומר, אם S צמודה לעצמה במרחב אוניטרי, אזי כל הע"ע של S ממשיים.

מסקנה 2.90 יהי V מרחב אוקלידי, $T : V \rightarrow V$ צמודה לעצמה.

אזי קיים בסיס אורתונורמלי ל- V שביחס אליו T מיוצגת ע"י המטריצה האלכסונית:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

מדוע? הרי ראינו, כי במידה ו- T צמודה לעצמה, אזי כל הע"ע שלה ממשיים, כלומר נקבל רק צורה אלכסונית ללא הבלוקים.

מסקנה 2.91 תהי $A = M_n(\mathbb{R})$ סימטרית, כלומר $A = A^T$, וכמו כן ההעתקה T המיוצגת ע"י המטריצה צמודה לעצמה.

אזי, ניתן למצוא מטריצה $P \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית כך ש- $D = P^{-1}AP$.

נניח כי T טרנספורמציה אורתוגונלית, אזי:

$$(\hat{T}^*) = (\hat{T})^* \Rightarrow \hat{T}(\hat{T})^* = (\hat{T})(\hat{T}^*) = (T\hat{T}^*) = \hat{I}_V = I_{\hat{V}}$$

מסקנה 2.92 T אורתוגונלית אמ"מ $\hat{T}$ אוניטרית.

נזכור כי ראינו שאם S טרנספורמציה אוניטרית, אזי כל הע"ע של S הם על מעגל היחידה, כלומר הערך המוחלט שלהם הוא 1.

כלומר אם T אורתוגונלית, אזי $\hat{T}$ אורתוגונלית, וכל הע"ע שלה הם על מעגל היחידה.

אזי, קיים בסיס אורתונורמלי ל- V שביחס אליו T מיוצגת ע"י המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 2 \times 2 \text{ cell} \\ & & & & \text{no. 1} \\ 0 & & & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & 2 \times 2 \text{ cell} \\ & & & & \text{no. 1} \end{pmatrix}, 2 \times 2 \text{ cell is } \begin{pmatrix} \cos \theta_j & \sin \theta_j \\ -\sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$$

3 צורת ז'ורדן

המקרה בו נדון בפרק זה:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ כלשהוא, ותהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית. נרצה למצוא בסיסים אשר ביחס אליהם ל- T תהיה הצגה כמעט יחידה. אנו יודעים שאם קיים בסיס של V המורכב מו"ע של T , אזי ביחס לבסיס זה T תהיה מיוצגת ע"י המטריצה האלסונית:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

עבור מטריצה אלכסונית שכזו מתקיים:

$$D_T^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k^m \end{pmatrix}$$

הבעיה - לא תמיד קיים בסיס שכזה.

נשאל, איזה בסיס יכול להיות תחליף לו.

נרצה גם למצוא כך צורה קנונית (כך שעד שינוי סדר המטריצה המייצגת תהיה יחידה). בעזרת צורה קנונית זו נוכל להבין איך מטריצה פועלת, איך חזקות פועלות עליה, וכו'... אנו נלמד שיטה אחת (מבין מספר שיטות) במסגרת הקורס הזה - צורת ז'ורדן. נבנה אותה, אבל לפני כן:

הערה 3.1 תהי $T : V \rightarrow V$ ט"ל, ונניח כי $V = \bigoplus_{i=1}^l U_i$,

ונניח כי כל U_i הוא מרחב T אינווריאנטי, כלומר $TU_i \subseteq U_i$.

נבנה בסיס ל- V שהוא איחוד של בסיסי U_i :

$$U_i = \text{span}(v_1^i, \dots, v_{n_i}^i)$$

המטריצה המייצגת את הטרנספורמציה T ביחס לבסיס זה היא מטריצת בלוקים,

כאשר כל בלוק הוא בגודל n_i עבור $1 \leq i \leq l$ (כאשר l הוא כאמור מספר המרחבים).

איך נמצא תתי מרחבים T אינווריאנטים שכאלה?

ראשית נשאל, איך מוצאים איזשהו תת מרחב T אינווריאנטי?

3.0.1 תת מרחב ציקלי

תהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית, ויהיה $v \in V$.

וכמו כן יהי $v \in U$ תת מרחב T אינווריאנטי של V .

אזי $U \supseteq \text{span}\{v, Tv, T^2v, \dots\}$.

הגדרה 3.2 תת מרחב הנפרש ע"י $\{v, Tv, T^2v, \dots\}$ נקרא תת מרחב ציקלי T אינווריאנטי.

נמצא "הגדרה סופית" של אותו מרחב ציקלי T אינווריאנטי.

נסמן $\dim V = n$. אזי קיימת חזקה $n \geq k \in \mathbb{N}$ כלשהיא כך ש- $T^k v$ יהיה הראשון שתלוי לינארית בקודמיו $v, Tv, T^2v, \dots, T^{k-1}v$. כלומר:

$$T^k v \in \text{span}(v, Tv, T^2v, \dots, T^{k-1}v)$$

למה 3.3

$$\text{span}(v, Tv, T^2v, \dots, T^{k-1}v) = \text{span}(v, Tv, T^2v, \dots)$$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על $k \leq m \in \mathbb{N}$, כלומר:

$$\text{span}(v, Tv, T^2v, \dots, T^{k-1}v) = \text{span}(v, Tv, T^2v, \dots, T^m v)$$

עבור $m = k$ - ישירות מהנתון.

נניח כי:

$$\text{span}(v, Tv, T^2v, \dots, T^{k-1}v) = \text{span}(v, Tv, T^2v, \dots, T^{m-1}v)$$

ונוכיח כי $T^m v \in \text{span}(v, Tv, T^2v, \dots, T^{k-1}v)$

$$T^k v = a_0 \cdot v + a_1 \cdot Tv + \dots + a_{k-1} \cdot T^{k-1}v$$

נפעיל את T^{m-k} על שני הצדדים ונקבל:

$$T^{m-k} \circ T^k v = a_0 \cdot T^{m-k} v + a_1 \cdot T^{m-k+1} v + \dots + a_{k-1} \cdot T^{m-k} \circ T^{k-1} v$$

$$\Rightarrow T^m v = a_0 \cdot T^{m-k} v + a_1 \cdot T^{m-k+1} v + \dots + a_{k-1} T^{m-1} v \in \text{span}(v, Tv, \dots, T^{m-1}v) \stackrel{\text{Induction}}{=} \text{span}(v, Tv, \dots, T^{k-1}v)$$

■

נבדוק מהי המטריצה המייצגת את הצמצום של T לתת מרחב ציקלי T אינטטריאנטי יחס לבסיס:

$$U_c = \{v, Tv, \dots, T^{k-1}v\}, T|_{U_c} : U_c \rightarrow U_c$$

אזי עבור הצמצום הנ"ל נקבל:

$$Tv = Tv, T(Tv) = T^2v, \dots, T(T^{k-1}v) = c_0 \cdot v + \dots + c_{k-1} T^{k-1}v$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & c_0 \\ 1 & 0 & & c_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 & c_{k-1} \end{pmatrix}$$

כלומר קיבלנו מטריצת אפסים מלבד אלכסון של 1 מתחת לאלכסון המטריצה, והעמודה האחרונה המכילה את המקדמים $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$.

3.1 צורת ז'ורדן של טרנספורמציות נילפוטנטיות

3.1.1 טרנספורמציות נילפוטנטיות

הגדרה 3.4 טרנספורמציה $T : V \rightarrow V$ נקראת טרנספורמציה נילפוטנטית,

אם קיים $m \in \mathbb{N}$ עבורו $T^m = 0$.

הגדרה 3.5 תהי $T : V \rightarrow V$ נילפוטנטית. אזי $r > 0$ שהוא השלם המינימלי עבורו $T^r = 0$ נקרא אינדקס הנילפוטנטיות של T .

למה 3.6 יהי $\dim V = n$, ותהי $T : V \rightarrow V$ נילפוטנטית. אזי r , אינדקס הנילפוטנטיות, מקיים: $r \leq n$.

הוכחה: ראשית, T טרנספורמציה סינגולרית (הפיכה), אזי $\ker T \neq \{0\}$, ולכן $T^{k-1}v \subseteq \ker T$,

לכן $U \supsetneq TV$, כי ממשפט המימדים

$$\underbrace{\dim(\ker T)}_{\geq 1} + \underbrace{\dim(\operatorname{Im} T)}_{\leq \dim V - 1} = \underbrace{\dim V}_{=n}$$

וכמו כן:

$$V \supsetneq Tv \supsetneq T^2v = T(Tv) \supsetneq T^3v = \dots \Rightarrow T|_{TV} : TV \rightarrow TV$$

■

לכן לכל היותר נוכל לבצע באי השיוויון מעלה n צעדים, ולכן $r \leq n$.