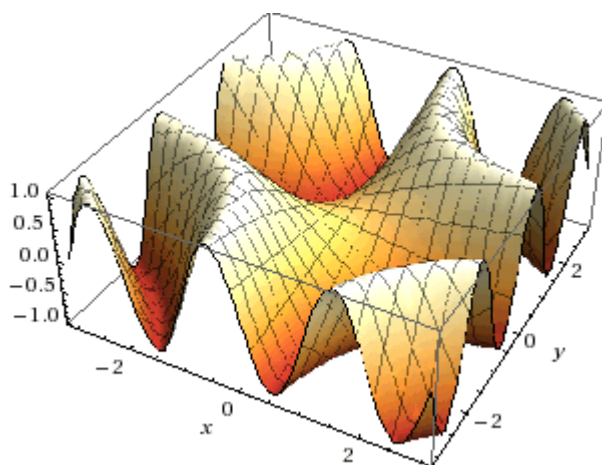


## חשבון אינפיטסימאלי מתקדם (1) - 80315

26 בפברואר 2012

גרסא סופית

"אני לא רוצה להפחיד אתכם, אבל לעניות דעתי הקורס הזה הכי קשה  
בתואר"  
(שנקובסקי ברגע של כנות)



איני לוקחת אחריות על מה שכתוב כאן, so tread lightly - סוכס בהרצאות  
וכן נלקח חומר מהסיכומים הרישמיים של שנקובסקי.  
אין המרצה או המתרגל קשורים לסיכום זה בשום דרך.  
הערות יתקבלו בברכה - [noga.rotman@gmail.com](mailto:noga.rotman@gmail.com). אהבתם? יש עוד!  
[www.cs.huji.ac.il/~nogar02](http://www.cs.huji.ac.il/~nogar02)  
שרטוטים - <http://www.wolframalpha.com/>

---

## תוכן עניינים

| 5   | I שיעורים                                                                    |
|-----|------------------------------------------------------------------------------|
| 5   | 0.1 הקדמה - על מה נלמד, ספרים, וכו' . . . . .                                |
| 8   | 1 מרחבים מטריים . . . . .                                                    |
| 8   | 1.1 מושגי יסוד . . . . .                                                     |
| 8   | 1.1.1 מרחב מטרי, נורמה, מרחב נורמי . . . . .                                 |
| 11  | 1.1.2 קבוצות סגורות ופתוחות, כדורים . . . . .                                |
| 16  | 1.2 פונקציות רציפות . . . . .                                                |
| 20  | 1.3 קומפקטיות . . . . .                                                      |
| 25  | 1.4 שלמות . . . . .                                                          |
| 27  | 1.4.1 נקודות שבת והעתקות מכווצות . . . . .                                   |
| 31  | 2 חשבון דיפרנציאלי מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}^m$ . . . . .             |
| 31  | 2.1 פונקציות מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}$ . . . . .                     |
| 34  | 2.1.1 תיאור גיאומטרי של פונקציות מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}$ . . . . . |
| 37  | 2.1.2 הגרדיאנט . . . . .                                                     |
| 38  | 2.2 פונקציות מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}^m$ . . . . .                   |
| 40  | 2.2.1 כלל השרשרת . . . . .                                                   |
| 42  | 2.2.2 משפט הערך הממוצע . . . . .                                             |
| 44  | 2.2.3 נגזרות מעורבות . . . . .                                               |
| 46  | 2.2.4 נוסחת טיילור . . . . .                                                 |
| 47  | 2.2.5 נקודות קיצון . . . . .                                                 |
| 50  | 2.2.6 היעקוביאן . . . . .                                                    |
| 51  | 2.3 משפטים יסודיים בחשבון דיפרנציאלי של מספר משתנים . . . . .                |
| 51  | 2.3.1 משפט הפונקציה ההפוכה . . . . .                                         |
| 55  | 2.3.2 משפט ההעתקה הפתוחה . . . . .                                           |
| 57  | 2.3.3 משפט כופלי לגראנז' . . . . .                                           |
| 59  | 2.3.4 משפט הפונקציה הסתומה . . . . .                                         |
| 62  | 2.4 יריעות ב- $\mathbb{R}^n$ . . . . .                                       |
| 68  | 3 אינטגרציה ב- $\mathbb{R}^n$ . . . . .                                      |
| 68  | 3.1 הגדרות ותכונות יסודיות - לפי רימן . . . . .                              |
| 68  | 3.1.1 תיבות . . . . .                                                        |
| 73  | 3.1.2 דיון על קבוצות זניחות - מידת אפס, תכולת אפס . . . . .                  |
| 75  | 3.1.3 משפט לבג . . . . .                                                     |
| 77  | 3.1.4 נפח של קבוצה ב- $\mathbb{R}^n$ לפי ג'ורדן . . . . .                    |
| 78  | 3.2 משפטים יסודיים על אינטגרציה ב- $\mathbb{R}^n$ . . . . .                  |
| 78  | 3.2.1 משפט פוביני . . . . .                                                  |
| 82  | 3.2.2 מסקנות ממשפט פוביני ועקרון קווליארי <i>Cavaglieri</i> . . . . .        |
| 87  | 3.2.3 משפט חילוף המשתנה . . . . .                                            |
| 90  | 3.3 אינטגרציה על מסילות ועל משטחים ב- $\mathbb{R}^3$ . . . . .               |
| 100 | 3.3.1 הקשר לפונקציות מרוכבות . . . . .                                       |
| 101 | 3.3.2 משפט גרין . . . . .                                                    |
| 104 | 3.3.3 שטח של משטחים (יריעות) ב- $\mathbb{R}^3$ . . . . .                     |
| 107 | 3.3.4 משפט\נוסחת סטוקס . . . . .                                             |
| 110 | 3.3.5 משפט הדיברגנץ = משפט גאוס . . . . .                                    |

| 112 | II תרגולים |                                                      |
|-----|------------|------------------------------------------------------|
| 117 | 4          | חשבון דיפרנציאלי מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}^m$ |
| 117 | 4.1        | גבולות ב- $\mathbb{R}^n$                             |
| 120 | 4.2        | נגזרות חלקיות                                        |
| 120 | 4.2.1      | נגזרות כיווניות                                      |
| 121 | 4.3        | דיפרנציאביליות                                       |
| 123 | 4.3.1      | מישור משיק                                           |
| 125 | 4.4        | כלל השרשרת                                           |
| 126 | 4.4.1      | אפליקציות בגיאומטריה דיפרנציאלית - מסילות במרחב      |
| 129 | 4.4.2      | אפיון נוסף לנקודות אקסטremום                         |
| 131 | 4.4.3      | פונקציות הפוכות                                      |
| 132 | 4.5        | פונקציות סתומות                                      |
| 136 | 4.5.1      | פונקציות סתומות וכופלי לגראנג'                       |
| 139 | 4.6        | משטחים                                               |
| 140 | 4.6.1      | משטחים רגולריים                                      |
| 144 | 4.6.2      | איך לטנגרל                                           |
| 145 | 4.7        | אינטגרלים מסילתיים                                   |
| 151 | 4.7.1      | משפט גרין                                            |
| 153 | 4.7.2      | אינטגרל משטחי                                        |
| 154 | 4.7.3      | משפט ג'ורדן                                          |
| 154 | 4.7.4      | משפט גאוס                                            |
| 155 | 4.7.5      | משפט סטוקס                                           |
| 157 | 4.8        | תרגול חזרה!                                          |

## חלק I

### שיעורים

#### 0.1 הקדמה - על מה נלמד, ספרים, וכו'

80135 = חדו"א של פונקציות מ- $R^n$  ל- $R^m$ , או באופן רשמי:

$$f : U \rightarrow R^m, U \subset R^n$$

ישנם שלושה מקרים:

•  $n = 1$ :

$$f : [a, b] \rightarrow R^m$$

רציפה = מסילה ב- $R^m$ . ראינו באינפי 2 מסילות שכאלו, למשל הבורג:

$$f(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in [0, 2\pi]$$

•  $n, m = 1$  כללי.

זוהי פונקציה סקלרית של  $n$  משתנים. למשל בתרמודינמיקה דנים בפונקציות התלויות במספר משתנים, למשל:

$$f(p, V, T, t)$$

כאשר כל המשתנים חיוביים (תלות בנפח, טמפרטורה וכו' ביחס לזמן). במקרים כאלו המושגים מקסימום ומינימום אמביוולנטיים - כי מינימום ביחס למשתנה אחד יכול להיות מקסימום ביחס למשתנה השני, וכו'. את רב המאמץ נקדיש למקרה השלישי (חלק 2 בסילבוס).

•  $n, m$  כללים. מקרה זה מסובך יותר מהקודם, אך לא בהרבה. זאת מכיוון והסיבוכיות נמצאת במרחב המקור ולא במרחב הטווח! לכן, אם מתגברים על המקרה השני, אין צורך להוסיף הרבה כדי להגיע למקרה זה.

$$f : U \rightarrow R^m, U \subset R^n, f = (f_1, \dots, f_m)$$

כאשר  $f_j : U \rightarrow R$  עבור  $j = 1, \dots, m$ . לדוגמא:

$$f(x, y) = (x^2 - y + \tan xy, x + y^2)$$

מקרה זה מכיל בהרבה בחינות הרבה תיאוריות ושאלות מאוד עמוקות. ניתן מספר דוגמאות:

-  $y_m = f_m(x_1, \dots, x_n), \dots, y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$  - זהו בעצם ייצוג של מערכת משוואות!

אם יש יותר מידי אילוצים, כלומר, יותר מידי  $y$ -אים, אי אפשר לפתור את הבעיה. לעומת זאת, אם יש מעט מידי אילוצים, אזי יש שפע פתרונות. אם אנחנו רוצים פתרון ספציפי, המקרה הכי מעניין הוא המקרה בו  $n = m$ , ובדברים אלו נעסוק - כמה פתרונות יש? מהם?

- דינמיקה - זוהי בעיה קצת מסובכת. נחשוב על מפות מזג אויר באיזור מסויים, בזמנים שונים - נביט בתזוזות של הנקודות. זוהי העתקה:

$$(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow (y_1, \dots, y_n)$$

נקבל את אותה המפה אך מנקודת מבט אחרת. נרצה לדעת איך "העננים" זזים ומה קורה לתמונה.

- שינוי קורדינטות (חילוף משתנה).

ניתן כאן את אחת הדוגמאות הקלאסיות ע"מ להסביר בעיה זו -  $n = m = 3$  והקורדינטות הקרטזיות  $(x, y, z)$ . לדוגמא, המרצה שלנו היה בנ"מ בצבא עויין לישראל. הוא היה צריך לדעת מה הזווית בהן צריך לסובב את התותח בשלושת המימדים ע"מ ליירט הטיל.

$$(x, y, z) = f(r, \eta, \theta) = r(\cos\eta\cos\theta, \sin\eta\cos\theta, \sin\theta)$$

זוהי פונקציה להמרת קורדינטות לקורדינטות ספריות, כאשר במערכת זו  $\eta$  הוא האורך הגיאוגרפי,  $\theta$  הוא הרוחב הגיאוגרפי, ו- $r = \frac{20,000}{\pi}$  (עבור כדור הארץ).

הרבה פעמים נשתמש בשפה של פיזיקה - המרצה אינו פיסיקאי ולא למד פיסיקה, הוא חובבן בלבד, לכן אין צורך להבהל, השימוש יהיה במושגים אינטואיטיביים שיוגדרו בצורה מסודרת (שהפיסיקאים לא דווקא יאהבו).

ספרים - לינדנשטראוס בעברית (כדאי לקנות), ועוד ספרים באנגלית בסילבוס, כולם מצויינים בסגנונם שלו -

רודין מומלץ, אך לא ממש נוגע בחומר של הקורס הזה. הספר של קוראנט מכיל היסטוריה כך שהוא לא ממש נוגע בחומר גם כן. ספיבק מביא את החומר בהצגה מודרנית, כך שהוא הרבה יותר קשה, אך מומלץ.

נשים לב כי ייתכן והמרצה יטעה מידי פעם באינדקסים, סימונים וכד' - לא להבהל, כולנו בני אדם.

סימונים קבועים:

$X$  - קבוצה לא ריקה.

$$x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n), \{x_k\} \in R^n$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

המרצה מעלה את רשימות ההרצאה שלו בעברית לאתר, ניתן ומומלץ להשתמש בהם.  
גם שם יהיו שגיאות, יש לשים!♥  
כמו כן, בסוף השבוע המרצה יעלה פרקים שנעסוק בשבוע הקרוב לפי לינדנשטראוס.  
שעת קבלה - יום ראשון אחרי השיעור חדר 105.

## 1 מרחבים מטריים

### 1.1 מושגי יסוד

#### 1.1.1 מרחב מטרי, נורמה, מרחב נורמי

30/10/2011

**הגדרה 1.1** מרחב מטרי הוא זוג  $(X, d)$ , כאשר  $X \neq \emptyset$  קבוצה לא ריקה, וכן:

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$$

היא פונקציה המקיימת לכל  $x, y, z \in X$ :

- $d(x, y) = 0$  אם  $x = y$ .
  - סימטריה  $d(x, y) = d(y, x)$ .
  - אי שוויון המשולש  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .
- פונקציה  $d$  כנ"ל נקראת המטריקה או (פונקצית) המרחק.

**דוגמאות:**

- $X = \mathbb{R}$  (יכול להיות גם  $\mathbb{C}, \mathbb{Q}$ ), והפונקציה  $d(x, y) = |x - y|$ .
- "הדבר בו נעסוק" - המרחק האוקלידי ב- $\mathbb{R}^n$ :

$$d(x, y) = \left( \sum |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

את ההוכחה של קיום אי שוויון המשולש עשינו באלגברה לינארית 2 - כמעט ישירות מאי שוויון קושי שורץ.

- $X \neq \emptyset$  קבוצה, ונגדיר:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

זוהי מטריקה דיסקרטית<sup>1</sup>.

- תהי  $S$  קבוצה כלשהיא,  $X = S$  קבוצת כל הפונקציות הממשיות החסומות על  $\mathbb{R}$ . עבור  $f, g \in X$  נגדיר:

$$d(f, g) = \sup_{s \in S} |f(s) - g(s)|$$

ברור ששתי האקסיומות הראשונות מתקיימות. מדוע מתקיים אי שוויון המשולש? נביט בשלוש פונקציות  $f, g, h$ . עלינו להראות כי:

$$\sup |f(s) - h(s)| \leq \sup |f(s) - g(s)| + \sup |g(s) - h(s)|$$

<sup>1</sup>לא להתלהב מזה" - זוהי מטריקה קלה ביותר, ונחמד להדגים ולבדוק בה דברים כלליים, מושגים וכו'. - אם "נופל" פה, יפול במקרה הכללי.

אם נקבע את ה- $s$ , נקבל כי:

$$\sup |f(s) - h(s)| \leq \sup (|f(s) - g(s)| + |g(s) - h(s)|)$$

ומכאן ניתן להשתמש במשפט מאינפי 1 - סופרימום של סכומים קטן מסכום של סופרימום, ואז נקבל את אי השיוויון הנדרש.

- הדוגמא הבאה מאוד פופולרית היום במדמ"ח:  
יהי גרף קשיר  $(V, E)$  (קודקודים וצלעות). אזי, נגדיר את המרחק בין קודקודים  $d(v, w)$  להיות אורך המסילה (הקצרה ביותר) מ- $v$  ל- $w$ .

**הגדרה 1.2** יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי, ותהי  $\{x_i\}_{i=1}^\infty \in X$ . אומרים שסדרה  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  מתכנסת ל- $x$  (ומסמנים  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ .

נשתמש בדוגמאות הקודמות להדגמת המושג:

- עבור הדוגמא הראשונה נקבל את ההגדרה משנה א'.
- נטען כי  $x = (x^1, \dots, x^n) \leftarrow x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$  עבור  $j = 1, \dots, n$   
בכיוון  $\Leftarrow$ , לכל  $j$   $|x_k^j - x^j| \geq d(x_k, x)$ , לכן הגרירה בכיוון זה מתקיימת.  
בכיוון השני, אם  $|x_k^j - x^j| \rightarrow 0$  לכל  $j = 1, \dots, n$ , אזי  $\sum_{j=1}^n |x_k^j - x^j|^2 \rightarrow 0$  ולכן גם:

$$\left( \sum |x_k^j - x^j|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0$$

- תהי  $x_n \rightarrow x, x_n \in X$  במטריקה דיסקרטית אמ"מ  $x_n = x$  החל מ- $n$  מסויים.
- בדוגמא השלישית, נטען כי  $f_n \rightarrow f$  אמ"מ  $f_n(s) \rightarrow f(s)$  במ"ש על  $S$  - עשינו זאת באינפי 2, כאשר השאיפה הראשונה היא למעשה שקולה מההגדרה ל- $d(f_n, f) \rightarrow 0$ . נעשה זאת בקצרה:  
בכיוון  $\Leftarrow$ , יהי  $\varepsilon > 0$ , צ"ל שקיים  $N$  כך ש:  $|f_n(s) - f(s)| \leq \varepsilon$  לכל  $n > N$  וכל  $s \in S$ . יהי כך ש- $\varepsilon \leq d(f_n, f)$  לכל  $n > N$  (קיים מההנחה). הנה טוב לנו. בכיוון השני בערך אותו דבר - נניח התכנסות במ"ש, צ"ל שלכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $N$  כך ש- $\varepsilon \leq d(f_n, f)$  לכל  $n > N$ . מההנחה, יהי  $N$  כך שלכל  $n > N$  ולכל  $s \in S$  מתקיים  $|f_n(s) - f(s)| \leq \varepsilon$ . לכל  $n > N$  מתקיים:

$$\|f_n - f\| \leq \varepsilon$$

אזי  $d(f_n, f) \leq \varepsilon$  כנדרש.

- הדוגמא הרביעית - כמו השלישית.

נשים לב כי הדוגמאות הראשונה והשלישית שייכות לסוג מיוחד של מטריקות - קודם כל, נעיר כי בשני המקרים האלה,  $X$  הוא מרחב וקטורי.

<sup>2</sup>כאן מדובר, כמובן, על התכנסות מספרים ממשיים.

**הגדרה 1.3** יהי  $X$  מרחב וקטורי (מעל  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ). פונקציה  $p : X \rightarrow [0, \infty)$  נקראת נורמה ונסמנה ב- $\|\cdot\|$ , אם לכל  $x, y \in X$ :

$$\bullet \quad p(x) = 0 \text{ אם } x = 0$$

$$\bullet \quad p(tx) = |t|p(x) \text{ לכל } t \in \mathbb{F}, \text{ ובפרט } p(-x) = p(x)$$

$$\bullet \quad \text{א"ש המשולש:}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**דוגמאות:**

•

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

•

$$p(x) = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ for } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

•

$$\|x\|_p = \left( \sum |x_j|^p \right)^{1/p} \text{ for } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

•

$$\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$$

**הערה 1.4** ההוכחה כי הדוגמא השלישית (גם נקראת "נורמה  $p$ ") הינה נורמה כלל אינה טריוויאלית עבור  $1 < p < \infty$ , ונובעת מאי שיוויון הולדר.

**הגדרה 1.5** יהי  $X$  מ"ו,  $\|\cdot\|$  נורמה ב- $X$ . אזי המטריקה ב- $X$  הנוצרת ע"י  $\|\cdot\|$  היא המטריקה:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

**הערה 1.6** מטריקה במרחב וקטורי הנוצרת ע"י נורמה הינה אינווריאנטית תחת הזזות, כלומר, לכל  $x, y, a \in X$ :

$$d(x + a, y + a)$$

למשל, המטריקה האוקלידית היא המטריקה הנוצרת ע"י נורמה  $\|\cdot\|_2$  ב- $\mathbb{R}^n$ . צ"ל ש- $d$  הנ"ל היא מטריקה:

$$\bullet x = y \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0$$

$\bullet$  ברור.

$\bullet$  יהיו  $x, y, z \in X$ . אזי:

$$d(x, z) = \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$$

כמו כן, המטריקה השלישית מהדוגמאות הקודמות נוצרת ע"י הנורמה:

$$\|f\|_\infty = \sup_{s \in S} |f(s)| = \|f\|_{sup}, \quad \mathbb{R}^n = \{f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}, \|x\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|\}$$

הוכחה שזו מטריקה מושארת כתרגיל.

1/11/2011

#### דוגמא:

במערכת בחירות יש 10 מפלגות, משה ושמוליק מנחשים כמה מנדטים תקבל כל מפלגה. כיצד נחשב של מי הניחוש היה הקרוב ביותר? כאן יש מספר אסכולות - כמו שיש מספר דרכים להגדרת המטריקה, כפי שראינו בשיעור הקודם - האסכולה המתאימה לנורמה האחרונה שהבאנו "תעניש יותר" את האדם שהיתה לו טעות אחת גדולה מאוד, גם אם צדק בכל שאר הניחושים. נורמה אחרת "תעניש יותר" על טעויות across the board, וכו'.

**הגדרה 1.7** יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי,  $X \supset Y \neq \emptyset$ . אזי  $(Y, d|_Y)$  הוא גם מרחב מטרי. אומרים ש- $d|_Y$  היא המטריקה המושרית על  $Y$  ע"י  $d$ .

**אזהרה:** המרחק על פני כדור ב- $\mathbb{R}^3$  אינו המטריקה המושרית מ- $\mathbb{R}^3$ ! למה מזכירים את המטריקה המושרית? רב הפונקציות שנגדיר יהיו אלו שנגדיר על תתי קבוצות ב- $\mathbb{R}^n$ , כאשר ניקח את המטריקה המושרית מ- $\mathbb{R}^n$  - המטריקה האוקלידית.

#### 1.1.2 קבוצות סגורות ופתוחות, כדורים

מעטה הסימון  $(X, d)$  יתייחס תמיד למרחב מטרי.

**הגדרה 1.8** יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי,  $x \in X$ ,  $r > 0$ .

$$B_r(x) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$$

$$\bar{B}_r(x) = \{y \in X | d(x, y) \leq r\}$$

<sup>3</sup>זאת כי אם הקבוצה שלנו הוא רק פני הכדור, אזי המרחק ב- $\mathbb{R}^3$  הוא "מרחב אווירי", אבל לא ניתן להשתמש בו על פני הגדור שכן "הנקודות באמצע הכדור" דרכן יעבור המסלול הקצר ביותר לא כלולות בו - המרחב על פני כדור מוגדר בצורה אחרת לגמרי.

**הערה 1.9** (פשוטה אך חשובה) -  $B_r(x) \subset \overline{B_r(x)}$ , אך לכל  $r > s$ ,  $\overline{B_s(x)} \subset B_r(x)$ .

**דוגמא:**

$$1. \text{ בהנתן } X \text{ דיסקרטי, } \overline{B_r(x)} = \begin{cases} \{x\} & r < 1 \\ X & r \geq 1 \end{cases}, B_r(x) = \begin{cases} \{x\} & r \leq 1 \\ X & r > 1 \end{cases}$$

2. בהנתן  $X$  מרחב נורמי,  $B_r(x) = x + rB_1(0)$ , כאשר  $B_1(0)$  הוא כדור היחידה, ואותו דברים עם  $\overline{B}$ . במילים אחרות, כדור היחידה קובע את כל הכדורים.

**הגדרה 1.10** יהי  $A \subset X$ ,  $\phi \neq A$ . הקוטר של  $A$  הוא  $diam(A) = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ .

**הערה 1.11**  $diam(B_r(x)) \leq diam(\overline{B_r(x)}) \leq 2r$ . במרחב נורמי יש שיוויון, בדיסקרטי - לא.

**הערה 1.12**  $diam(A) \leq diam(B) \Leftrightarrow A \subset B$

**הגדרה 1.13**  $A \subset X$  נקראת חסומה אם קיים  $x \in X$ ,  $r > 0$  כך ש- $A \subset B_r(x)$ .

**הערה 1.14** תנאים שקולים להיות  $A$  חסומה:

$$1. diam(A) < \infty$$

$$2. \text{ לכל } x \in X \text{ קיים } r > 0 \text{ כך ש-} A \subset B_r(x)$$

$$3. \text{ קיים } r > 0 \text{ כך שלכל } x \in A, A \subset B_r(x)$$

**הערה 1.15** סופי  $\Leftarrow$  חסום, אבל לא ההפך!

**הגדרה 1.16** קבוצה  $A \subset X$  נקראת פתוחה אם לכל  $x \in A$  קיים  $r > 0$  כך ש- $B_r(x) \subset A$ .

**הערה 1.17** זה שקול ל:

$$\overline{B_r(x)} \subset A \quad \forall x \in A$$

**הגדרה 1.18**  $A \subset X$  נקראת קבוצה סגורה, אם  $X \setminus A = A^c$  (המשלים של  $A$ ) פתוחה.

**נשים לב!** ישנם קבוצות שאינן פתוחות ואינם סגורות - כמו קטע מהצורה  $[a, b)$ . הרציונלים והאי רציונלים גם כן אינן קבוצות פתוחות או סגורות (בין כל רציונלי יש אי רציונלי, ולהפך).

ישנן גם קבוצות שהן גם פתוחות וגם סגורות - למשל במרחב דיסקרטי, כל  $X \supset A$  הינה פתוחה מהגדרת הנורמה במרחב זה, לכן גם כל קב' היא סגורה (כי כל קבוצה פתוחה, ולכן גם משלים של כל קבוצה היא קבוצה פתוחה). במרחב אוקלידי לעומת זאת, רק המרחב והקבוצה הריקה גם פתוחות וגם סגורות.

## דוגמאות

• קבוצה סופית הינה סגורה.

• לכל  $x \in X, r > 0, B_r(x)$  פתוחה.

**הוכחה:** תהי  $y \in B_r(x)$ . נסמן  $s = r - d(x, y) > 0$ , כלומר  $d(x, y) = r - s$ . נראה ש:  $B_r(x) \supset B_s(y)$  בעזרת אי שיוויון המשולש - שכן אם  $z \in B_s(y)$ , אזי  $d(z, y) < s$  ולכן:

$$d(z, x) \stackrel{\Delta}{\leq} d(z, y) + d(y, x) < s + r - s = r$$

ולכן  $z \in B_r(x)$ . כלומר מצאנו  $s > 0$  כך ש:  $B_r(x) \supset B_s(x)$ , ולכן  $B_r(x)$  פתוחה, כנדרש. ■

• לכל  $x \in X, r > 0, \overline{B_r}(x)$  סגורה.

**הוכחה:** צ"ל ש-  $\overline{B_r}(x) = X \setminus \overline{B_r}(x)^c$  פתוחה. יהי  $y \in (\overline{B_r}(x))^c$ . אזי  $d(y, x) > r$ . נסמן  $s = d(x, y) - r > 0$ . נטען כי  $(B_r(x))^c \supset B_s(y)$ . זה נכון, כי אם  $z \in B_s(y)$ , אזי  $d(z, y) < s$  ולכן  $d(z, x) \geq d(y, x) - d(z, y) > r$  ולכן  $z \in (\overline{B_r}(x))^c$  כלומר  $z \in (\overline{B_r}(x))^c$  כנדרש. ■

**תמיד** קבוצה סופית הינה סגורה - נובע מטענה קודמת.

שימו לב - פרופ' שנקובסקי שינה את מה שעשה בכיתה כאן!

**תכונות (Boolean) של קבוצות פתוחות וסגורות** א - איחוד כל אוסף של קבוצות פתוחות הינו פתוח.

ב - חיתוך של מספר סופי של קבוצות פתוחות הינו פתוח.

ג - חיתוך של אינסוף קבוצות פתוחות לא תמיד פתוח, למשל:  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$  לא

קבוצה פתוחה.

על ידי כללי דה מורגן מקבלים טענות שקולות:

א' - חיתוך כל אוסף של קבוצות סגורות הינו סגור.

ב' - איחוד של מספר סופי של קבוצות סגורות הינו סגור.

ג' - איחוד של אינסוף קבוצות סגורות לא תמיד סגור. **הוכחה:** נוכיח התכונות:

א. יהי  $A \neq \emptyset$  אוסף של קב' פתוחות, ויהי  $x \in A$ . אזי קיימת קבוצה  $A \ni x$  כך ש-  $x \in A$  פתוחה, לכן קיים  $r > 0$  כך ש-  $B_r(x) \subset A$ . ולכן  $A \supset B_r(x)$ .

ב. תהיינה  $A_1, \dots, A_n$  קב' פתוחות, ויהי  $x \in \bigcap_{j=1}^n A_j$  (נקבע אותו).  $A_j$  פתוחות, לכן

קיימים  $r_1, \dots, r_n > 0$  כך ש-  $B_{r_j} \subset A_j$ . ניקח  $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$ . אזי, ברור כי  $\bigcap_{j=1}^n A_j \subset B_r(x)$ . ■

**הערה 1.19** לכל קב'  $A \subset X$  קיימות:

1. קבוצה סגורה מינימלית, המכילה את  $A$ , דהיינו החיתוך של כל הקב' הסגורות המכילות את  $A$ .

2. קבוצה פתוחה מקסימלית, המוכלת ב- $A$ , דהיינו האיחוד של כל הקב' הפתוחות המוכלות ב- $A$ .

**הגדרה 1.20** הקבוצה 1 נקראת הסגור של  $A$ , ונסמנה ב- $\bar{A}$ .  
הקבוצה 2 נקראת הפנים של  $A$ , ונסמנה ב- $\overset{\circ}{A}$ .

**לדוגמא**,  $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ ,  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

**הערה 1.21**  $A$  סגורה אם"מ  $\bar{A} = A$ ,  $A$  פתוחה אם"מ  $\overset{\circ}{A} = A$ .

יש לשים לב כי המושגים קבוצה פתוחה וסגורה הם יחסיים - למשל, הספרה  $S^2$  ב- $R^3$  לעומת הספרה כמרחב עצמו (מול עצמו סגור ופתוח, מול  $R^3$  אין לו פנים והסגור הוא עצמו).  
בשבוע הבא - לינדנשטראוס ארבע סעיף 1-4.

**הערה 1.22** לגבי מושג "גבול": גבול הינו יחיד, ז"א אם  $x_k \rightarrow x$  וגם  $x_k \rightarrow y$ , אזי  $x = y$ .

**הוכחה:** יהיו  $\varepsilon > 0$ , ויהיו  $M, K$  כך ש- $x_k \in B_\varepsilon(x)$  לכל  $k > K$ ,  $x_k \in B_\varepsilon(y)$  לכל  $k > M$ . אזי, עבור  $k > \max\{K, M\}$  מתקיים:

$$d(x, y) \leq d(x, x_k) + d(x_k, y) < 2\varepsilon$$

מכיוון וזה נכון לכל  $\varepsilon > 0$ , חייב להיות  $d(x, y) = 0$ , לכן  $x = y$ . ■

**טענה 1.23** קב'  $A$  הינה סגורה אם"מ לכל  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset A$  כל נק' הצטברות  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  גוררת ש- $x \in A$ .

**הוכחה:** נוכיח הטענה בעזרת השלילה:

נוכיח כי קב'  $A$  איננה סגורה אם"מ קיים  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset A$  מתכנסת כך ש- $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \notin A$ .  
 $A$  איננה סגורה  $\Leftrightarrow A^c$  איננה פתוחה  $\Leftrightarrow$  קיים  $x \in A^c$  כך שלכל  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in B_{\frac{1}{n}}(x)$  אינו מוכל ב- $A^c$   $\Leftrightarrow$  יש  $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$  כך ש- $x_n \in A$ ,  $x_n \rightarrow x$ .  
הוכחה אלטרנטיבית:

$\Leftrightarrow$  נניח ש- $\{x_k\} \subset A$ ,  $x_k \rightarrow x$ ,  $x \notin A$ , אזי  $x \in A^c$ . פתוחה  $A^c$  (כי  $A$  סגורה), לכן קיים  $\varepsilon > 0$  כך ש- $B_\varepsilon(x) \subset A^c$ , לכן לא קיים  $k$  כך ש- $x_k \in B_\varepsilon(x)$ , בסתירה.  
 $\Rightarrow$  נניח בשלילה כי  $A$  איננה סגורה (זה לא אומר שהיא פתוחה!). אזי  $A^c$  איננה פתוחה, לכן קיים  $x \in A^c$  כך ש- $B_k(x)$  איננו מוכל ב- $A^c$  לכל  $k$ , כלומר לכל  $n$ ,  $B_n(x) \cap A \neq \emptyset$ . עבור  $k \in \mathbb{N}$  נבחר נקודה  $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(x) \cap A$ . אזי,  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset A$ , וכן  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in A^c$ , בסתירה להנחה. ■

6/11/2011

בשעתיים הקרובות -  $(X, d)$  תמיד מרחב מטרי,  $A \subset X$ ,  $\bar{A} =$  סגור של  $A$  - הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את  $A$ .

**מסקנה 1.24**  $x \in \bar{A}$  אם"מ קיימת  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset A$  כך ש- $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ .

**הוכחה:** נסמן:  $B = \left\{ x \mid \exists x_k \text{ s.t. } x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right\}$  אוסף נק' הצטברות של  $A$ , ונראה להוכיח  $B = \bar{A}$ . נוכיח הכלה דו כיוונית:

" $\subset$ " נובע מהטענה הקודמת - שכן ממנה נקבל כי  $B$  מוכלת בכל קבוצה סגורה המכילה את  $A$ .

" $\supset$ " צריך להוכיח ש- $B$  סגורה, כי ברור ש- $\bar{A} \subset B$ . תהי  $\{y_k\}_{k=1}^\infty$  סדרה, ויהי  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$  צ"ל כי  $y \in B$ , כלומר שקיימת  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset A$  כך ש- $y = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ . נתבונן ב- $y_k$  כלשהוא.  $y_k$  הוא גבול של סדרת איברים של  $A$  (כי הוא ב- $B$ ), ובפרט קיים  $x_k \in A$  כך ש- $d(y_k, x_k) < \frac{1}{k}$ . מתקיים:

$$d(y, x_k) \leq \overbrace{d(y, y_k)}^{\rightarrow 0} + \overbrace{d(y_k, x_k)}^{\rightarrow 0}$$

לכן  $d(y, x_k) \rightarrow 0$ , כלומר  $x_k \rightarrow y$ , על כן  $y \in B$ , ולכן  $B$  סגורה, כנדרש. ■

### תכונות של $\bar{A}$

$$\begin{aligned} 0. A \subset B &\Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}, \bar{A} \subset \bar{B} \\ \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} &= (A \cap B)^\circ, \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B} \\ \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} &\subset (A \cup B)^\circ, \bar{A} \cap \bar{B} \supset \overline{A \cap B} \end{aligned}$$

ב' - בדרכ"כ אין שיויון ב"ב.

**הגדרה 1.25** הקבוצה  $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$  נקראת השפה של  $A$ .

**הערה 1.26**  $\partial A = \bar{A} \cap \bar{A}^c$ , כי  $\overset{\circ}{A} = (\bar{A}^c)^c$  - נראה זאת ע"י הכלה דו כיוונית:

$\supset$  הצד הימני פתוח, ממקסימליות  $\overset{\circ}{A}$  מספיק להראות ש- $\overset{\circ}{A} \subset (\bar{A}^c)^c$  (שהרי  $\overset{\circ}{A}$  מכיל כל קבוצה פתוחה ב- $A$ ). זה שקול ל- $\bar{A}^c \subset A^c$ , וזה נובע ישירות מההגדרה.

$\supset$  נראה דבר שקול:  $\bar{A}^c \supset (\overset{\circ}{A})^c$ . הצד השמאלי סגור, ממנימליות  $\bar{A}^c$  מספיק להראות ש- $(\overset{\circ}{A})^c \supset A^c$ , וזה ברור.

### דוגמאות:

•

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \Rightarrow \partial A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

המעגל המלא ושפתו - המעגל החיצוני.

• גם עבור  $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$  השפה היא אותה השפה.

**הערה 1.27** השפה, כמו הסגור הפנים תלויים ב- $X$ , המרחב בו מבצעים את הפעולות: אם  $X = \mathbb{Q}$ , אזי  $\partial\mathbb{Q}$  פתוחה וסגורה, לכן  $\partial\mathbb{Q} = \phi$ , אם  $X = \mathbb{R}$ , אזי  $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \phi$ ,  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ , לכן  $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ .

**הערה 1.28** א.  $\partial A = \partial(A^c)$ , ב.  $\partial A$  היא תמיד קבוצה סגורה.

חומר למחשבה - במרחב דיסקרטי,  $\partial A = \phi$  לכל  $A \subset X$ . מה הן (כל) הקבוצות ב- $\mathbb{R}^n$  שעבורן  $\partial A = \phi$ ? (ב- $\mathbb{R}^n$  לוקחים כמובן מטריקה אוקלידית).

**הגדרה 1.29** אומרים שקבוצה  $A \supset B$  היא צפופה ב- $A$ , אם  $\overline{B} \supset A$ .

**הערה 1.30** בפרט,  $A$  צפופה בעצמה.

**הדוגמא -  $\mathbb{Q}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .**  
 $\{(\frac{p}{2^m}, \frac{q}{2^m}) : p, q \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$  צפופה ב- $\mathbb{R}^2$ .

**טענה 1.31**  $B \subset A$  צפופה ב- $A$  אם ורק אם  $x \in A$  ולכל  $r > 0$   $B_r(x) \cap B \neq \phi$ .

**הוכחה:**  $\Leftarrow$  נניח בשלילה שקיימים  $x \in A, r > 0$  כך ש- $B_r(x) \cap B = \phi$ . אזי  $B_r(x) \cap \overline{B} = \phi$ , בפרט  $\overline{B} \supset A, x \notin \overline{B}$ , בסתירה להנחתנו.  
 $\Rightarrow$  יהי  $x \in A$ . לכל  $k$  קיים  $x_k \in B$  כך ש- $d(x_k, x) < \frac{1}{k}$  (מההנחה כי לכל  $r > 0$  החיתוך של הכדור עם  $B$  אינו ריק), לכן  $x_k \rightarrow x$ , ועל כן  $x \in \overline{B}$ . ■

## 1.2 פונקציות רציפות

**הגדרה 1.32** יהיו  $(X, d)$ ,  $(Y, \rho)$  מרחבים מטריים,  $f : X \rightarrow Y$ . אומרים שהפונקציה  $f$  רציפה בנקודה  $x \in X$  אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$  כך ש- $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$  אם  $d(x, y) < \delta$ .

הגדרה זו שקולה להגדרת הרציפות ע"י המונחים החדשים שהכרנו:

**הגדרה 1.33** אומרים שהפונקציה  $f$  רציפה בנקודה  $x \in X$  אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$  כך ש- $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ .

**הערה 1.34** במקום כדורים פתוחים ניתן לקחת כדורים סגורים, ולקבל את אותה ההגדרה!

**הערה 1.35** שקול להגדרה הסדרתית:

לכל סדרה  $X \supset \{x_k\}_{k=1}^\infty$ , אם  $x_n \rightarrow x$  אזי  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

**הגדרה 1.36** אומרים ש- $f : X \rightarrow Y$  רציפה אם היא רציפה בכל נקודה ב- $X$ .

**הגדרה 1.37** אומרים ש- $f$  מקיימת תנאי ליפשיץ (עם קבוע  $K$ ) אם לכל  $x, y \in X$  מתקיים:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y)$$

ברור שפונקציה ליפשיצית היא רציפה, כי עבור  $\varepsilon > 0$  ניקח  $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ .

**הערה 1.38** עבור  $X$  עם מטריקה דיסקרטית ו- $Y$  כלשהוא, כל פונקציה  $f : X \rightarrow Y$  רציפה (לוקחים  $\delta \leq 1$ ).

**הערה 1.39** עבור  $Y$  דיסקרטית - חומר למחשבה: מתי  $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$  רציפה?

**טענה 1.40** יהיו  $(X, d)$ ,  $(Y, \rho)$  מ"מ,  $f : X \rightarrow Y$  פונקציה. התנאים הבאים שקולים: א.  $f$  רציפה.

ב. לכל קבוצה פתוחה  $U \subset Y$ , הקבוצה  $f^{-1}(U)$  גם כן פתוחה.  
ג. לכל קבוצה סגורה  $A \subset Y$ , הקבוצה  $f^{-1}(A)$  סגורה.

**הערה 1.41** נשים לב כי  $f^{-1}$  איננה הפונקציה ההפכית, כי אם  $f^{-1}(A) = \{x \mid f(x) \in A\}$  - מקור של קבוצה.

**הוכחה:** שני התנאים ב', ג' שקולים כי  $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$ .  
נותר להוכיח שא', ב' שקולים.

א'  $\Leftarrow$  ב': נניח כי  $f$  רציפה, ותהי  $U$  קבוצה פתוחה ב- $Y$ , ויהי  $x \in f^{-1}(U)$ . עלינו להוכיח כי קיים  $\delta > 0$  כך ש- $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$ .  
 $U$  פתוחה, לכן קיים  $\varepsilon > 0$  כך ש- $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$ . רציפה, לכן ל- $\varepsilon$  הנ"ל קיים  $\delta > 0$  כך ש- $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(U)$ . לכן:

$$B_\delta(x) \subset f^{-1}f(B_\delta(x)) \subset f^{-1}(U)$$

כנדרש.

ב'  $\Leftarrow$  א': יהי  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$ , צריך למצוא  $\delta > 0$  כך ש- $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ .  
תהי  $U = B_\varepsilon(f(x))$  קבוצה פתוחה ב- $Y$ . מההנחה,  $f^{-1}(U)$  פתוחה.  $x \in f^{-1}(U)$ , לכן קיים  $\delta > 0$  כך ש- $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$ . לכן

$$f(B_\delta(x)) \subset ff^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset B_\varepsilon(f(x)) = U$$

כנדרש. ■

**מסקנה 1.42** א. תהי  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה. אזי הקבוצות:

$$\{x : f(x) = a\}, \{x : f(x) \leq a\}$$

הן סגורות (לכל  $a \in \mathbb{R}$ ), ו- $\{x \in X \mid f(x) < a\}$  פתוחה.

**הערה 1.43** כל קבוצה סגורה ב- $X$  ניתנת להצגה כזו - נראה כיצד:  
עבור  $X \supset A \neq \emptyset$  נגדיר:

$$f(x) = \text{dist}(x, A) = \inf \{d(y, x) \mid y \in A\}$$

היא מקיימת תנאי ליפשיץ (עם קבוע 1), לכן היא רציפה. נוכיח זאת - צריך להראות שלכל  $x, y \in X$ :

$$\left| \overbrace{d(x, A)}^{=f(x)} - \overbrace{d(y, A)}^{=f(y)} \right| \leq d(x, y)$$

נניח בה"כ ש- $f(x) \geq f(y)$ . יהיו  $A \ni y_1, y_2, \dots$  נקודות המקיימות: כך ש:  $d(y, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y, y_n)$  מתקיים:

$$|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) \\ \Rightarrow f(x) - d(y, y_n) \leq d(x, y_n) - d(y, y_n) \leq d(x, y)$$

כמו כן,  $\{x | f(x) = 0\} = \bar{A}$ , לכן אם  $A$  סגורה אז  $A = \{x | f(x) = 0\}$ . תכונה זו ברורה, כי  $f(x) = 0$  אמ"מ קיימת  $A \supset \{x_n\}_{n=1}^\infty$  כך ש- $x = \lim x_n$ , וזה אמ"מ  $x \in \bar{A}$ .

**טענה 1.44** ההרכבה של פונקציות רציפות הינה רציפה.

**הוכחה:** נסמן  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$ , ונביט ב- $g \circ f$ :

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

מאלגברה של קבוצות  $g^{-1}(U)$  פתוחה ב- $Y$ , ו- $f^{-1}(g^{-1}(U))$  פתוחה ב- $X$  (מהטענה הקודמת ומרציפות  $f, g$ ).

8/11/2011 ■

**טענה 1.45** העתקות לינאריות מ- $\mathbb{R}^n$  ל- $\mathbb{R}^m$  הינן רציפות; הן אף ליפשיציות.

**הוכחה:** מדובר בפונקציה מהצורה:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left( \overbrace{\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j}^{f_2}, \overbrace{\sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j}^{f_1} \right)$$

לכן  $f(x) - f(y) = f(x - y)$ , כך שמספיק להראות שקיים קבוע  $K$  כך שלכל  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|f(x)\| \leq K \|x\|$  נחשב:

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{k=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot x_j \right|^2 \stackrel{C.S.}{\leq} \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{kj}^2 \right) \cdot \|x\|^2$$

לכן  $\|f(x)\| \leq K \|x\|$ , כאשר  $K = \sqrt{\sum_{k,j} a_{kj}^2}$ . ■

**הערה 1.46**  $K$  הנ"ל אינו אופטימלי. למשל, עבור  $f(x) = x$  יוצא  $K = \sqrt{n}$  כאשר מספיק, כמובן,  $K = 1$ .

נמשיך לדון בהעתקות לינאריות:

**טענה 1.47** יהיו  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $(Y, \|\cdot\|)$  מרחבים נורמיים,  $T : X \rightarrow Y$  העתקה לינארית. התנאים הבאים שקולים:

- $T$  רציפה.
- $T$  רציפה ב-0.
- $T$  מקיימת את תנאי ליפשיץ.

**הוכחה:** ברור שג' גורר את א', ושא' גורר את ב'. נותר אם כך להוכיח כי ב' גורר את ג'.  
יהי  $\delta > 0$  כך שלכל  $\|z\| \leq \delta$  מתקיים  $\|Tz\| \leq 1$  (נכון לכל  $\varepsilon > 0$  מהרציפות ב-0 ולכן בפרט עבור  $\varepsilon = 1$ ). נראה כי  $T$  תלויה לינארית בקבוע  $K = \frac{1}{\delta}$ :

$$Tx - Ty = T(x - y) = \|x - y\| T\left(\frac{x - y}{\|x - y\|}\right)$$

נסמן  $z = \delta \cdot \frac{x - y}{\|x - y\|}$ . מכיוון ש- $\|z\| = \delta$ , מתקיים  $\|Tz\| \leq 1$ , ואז:

$$\|Tx - Ty\| = \|x - y\| \left\| T\left(\frac{\frac{1}{\delta} \cdot z}{\frac{\|x - y\|}{\delta}}\right) \right\| = \|x - y\| \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \|Tz\| \leq \frac{1}{\delta} \|x - y\|$$

■

**הגדרה 1.48** תהי  $T$  כנ"ל. הנורמה האופרטורית של  $T$  מוגדרת להיות:

$$\|T\| = \sup \{ \|Tx\| \mid \|x\| \leq 1 \}$$

**הערה 1.49** מתקיים לכל  $x \in X$ :

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$$

הקשר עם קושי שוורץ: אם  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י  $Tx = \langle a, x \rangle$  עבור  $a \in \mathbb{R}^n$ , אזי, לפי קושי שוורץ,  $\|T\| = \|a\|$  (עבור כל הנורמות האוקלידיות).

תהי  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ . אזי  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  כאשר  $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  עבור  $1 \leq j \leq m$ .

**טענה 1.50**  $f$  רציפה אמ"מ כל אחת מן הפונקציות  $f_j$  רציפה.

**הוכחה:**  $\Rightarrow$  בהנתן  $\varepsilon > 0$ , יהי  $\delta > 0$  כך שאם  $d(x, y) < \delta$  אז  $|f_j(x) - f_j(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$  עבור  $1 \leq j \leq m$ . אזי:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$  מתקיים  $f_j = P_j \circ f$  כאשר  $P_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י  $P_j(x) = x_j$ . ברור כי  $P_j$  ליפשיצית עם קבוע 1, ולכן  $f_j$  רציפה. ■

## 1.3 קומפקטיות

**הגדרה 1.51** יהי  $X$  מרחב מטרי,  $A \subset X$ . משפחת קבוצות  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in D}$  נקראת כיסוי של  $A$ , אם  $\bigcup_{\alpha \in D} U_\alpha \supset A$ .

למשל:  $\{X\}$  הוא כיסוי,  $\{A\}$  הוא כיסוי,  $\{\{x\} | x \in A\}$  הוא כיסוי.

**הגדרה 1.52** כיסוי נקרא כיסוי פתוח אם כל  $U_\alpha$ -אים הן קבוצות פתוחות.

למשל  $\{X\}$  הוא כיסוי פתוח,  $\{\{x\} | x \in A\}$  בדרך"כ לא כיסוי פתוח (אלא אם  $A$  קבוצה דיסקרטית).

דוגמא משמעותית: נניח שלכל  $a \in A$  מותאם מספר  $r_a > 0$ . אזי  $\{B_{r_a}(a) | a \in A\}$  הוא כיסוי פתוח של  $A$ .

**הגדרה 1.53** תת כיסוי הוא תת קבוצה של כיסוי, שהיא גם כיסוי.

**הערה 1.54** שימו לב: כי משפחה מהצורה  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in D}$  עם  $U_\alpha \supset V_\alpha$  איננה תת כיסוי! תת כיסוי של  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in D}$  הוא כל אוסף מהצורה  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in D'}$  עבור  $D' \subset D$  כך ש- $\bigcup_{\alpha \in D'} U_\alpha \supset A$ .

דוגמא:  $\{n, n+2\}_{n \in \mathbb{N}}$  הוא כיסוי פתוח של  $\mathbb{R}$  שאין לו תת כיסוי ממש. לכיסוי  $\{(-\infty, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  של  $\mathbb{R}$  יש הרבה תת כיסויים: לכל סדרה  $n_k \rightarrow \infty$ , המשפחה  $\{(-\infty, n_k)\}$  היא תת כיסוי. **אזהרה:** כפי שנאמר קודם,  $\{(n, n+1.5)\}$  איננו תת כיסוי של הכיסוי הראשון.

**הגדרה 1.55** קבוצה  $A \subset X$  נקראת קומפקטית אם לכל כיסוי פתוח של  $A$  יש תת כיסוי סופי.

למשל:

- $\mathbb{R}$  איננו קומפקטי, כי ל- $\{n, n+2\}_{n \in \mathbb{N}}$  אין אף תת כיסוי סופי.

- קבוצה סופית הינה קומפקטית.

- מרחב דיסקרטי קומפרטי אמ"מ הוא סופי, לדוגמא:

-  $\{\{\frac{1}{n}\} | n \in \mathbb{N}\}$  איננה קומפקטית כי ל- $\{(-\infty, \frac{1}{n}) | n \in \mathbb{N}\}$  אין תת כיסוי סופי.

-  $\{0\} \cup \{\{\frac{1}{n}\} | n \in \mathbb{N}\}$  אכן קומפקטית - אם  $\{U_\alpha\}$  כיסוי פתוח של  $X$ , יהי  $\alpha_0$  כך ש- $0 \in U_{\alpha_0}$ . אזי קיים  $r > 0$  ש:  $(-r, r) \in U_{\alpha_0}$ . עבור  $\frac{1}{r} \geq n$  יהי  $\frac{1}{n} \in U_{\alpha_0}$ .

כך ש- $\frac{1}{n} \in U_{\alpha_n}$ . אזי  $\bigcup_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{r} \rfloor} U_{\alpha_k} \supset X$  כאשר  $\lfloor \cdot \rfloor$  הוא החלק השלם.

**טענה 1.56** אם  $A$  קומפקטית, אזי  $A$  סגורה.

**הוכחה:** נוכיח כי  $A^c$  פתוחה. יהי  $x \in A^c$ . לכל  $a \in A$  נתבונן בכדור  $B_{\frac{1}{2}d(a,x)}(a) = U_a$ .  $\{U_a\}_{a \in A}$  הוא כיסוי פתוח של  $A$ . בגלל קומפקטיות  $A$ , קיימים  $a_1, a_2, \dots, a_n$  כך ש- $\{U_{a_j}\}_{j=1}^n$  הוא כיסוי של  $A$ , כלומר  $A \subset \bigcup_{j=1}^n U_{a_j}$ . יהי  $r = \frac{1}{2} \min \{d(a_1, x), d(a_2, x), \dots, d(a_n, x)\}$ . ברור ש- $\phi = B_r(x) \cap \bigcup_{j=1}^n U_{a_j}$ , לכן  $B_r(x) \subset A^c$ . ■

**טענה 1.57** אם  $A$  קומפקטית, אזי  $A$  חסומה.

**הוכחה:** יהי  $x \in A$  כלשהוא. מתקיים  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x)$ , ז"א  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  הוא כיסוי פתוח של  $A$ . אזי, מהקומפקטיות של  $A$ , קיים  $N$  כך ש:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^N B_n(x) = B_N(x)$$

ולכן  $A$  חסומה. ■

**טענה 1.58** אם  $A$  קומפקטית ו- $A \supset B$  סגורה, אזי  $B$  קומפקטית.

**הוכחה:** יהי  $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in D}$  כיסוי פתוח של  $B$ . אזי  $\{B^c\} \cup \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in D}$  הוא כיסוי פתוח של  $A$  (איחוד של כיסוי פתוח וקבוצה פתוחה). יהי  $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}, B^c$  תת כיסוי של  $A$  (קיים מהקומפקטיות של  $A$ ). אזי ברור כי  $B \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$ . כלומר  $B \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$ . מתברר שב- $\mathbb{R}^n$  אפשר להפוך חלק מהטענות שראינו מעלה: ■

**משפט 1.59** קבוצה  $A \subset \mathbb{R}^n$  הינה קומפקטית אם"מ  $A$  סגורה וחסומה (במטריקה אוקלידית).

**הערה 1.60** בדר"כ זה לא נכון - חומר למחשבה: מה קורה עבור  $X$  דיסקרטית?

ישנה גם הגדרה שקולה לקומפקטיות - ההגדרה הסדרתית:

**הגדרה 1.61** מרחב מטרי  $X$  יקרא קומפקטי אם לכל סדרה של נקודות בו קיימת תת סדרה המתכנסת לנקודה ב- $X$ . קבוצה  $X \supset A$  נקראת קומפקטית אם לכל סדרה של נקודות ב- $A$  קיימת תת סדרה השואפת לגבול ב- $A$ .

13/11/2011

**הגדרה 1.62** תיבה ב- $\mathbb{R}^n$  היא קבוצה מהצורה:

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n], \quad -\infty < a_j \leq b_j < \infty$$

החלוקה הבינארית של תיבה  $A$  היא חלוקת הקואורדינטות לשניים  $2^n$  תיבות שקדקודיהן הם מהצורה  $(c_1, \dots, c_n)$ , כאשר:

$$c_j = \begin{cases} a_j & \text{or} \\ \frac{1}{2}(a_j + b_j) & \text{or} \\ b_j & \text{or} \end{cases}$$

**הערה 1.63** לכל תיבה מהחלוקה הזו קוטר = קוטר של  $A \cdot \frac{1}{2}$ .

נזכר בלמה של קנטור:

**למה 1.64** תהי  $c_1 \leq c_2 \leq \dots$  סדרה עולה,  $d_1 \geq d_2 \geq \dots$  סדרה יורדת כך ש- $c_j \leq d_j$  לכל  $j$ . אזי  $\phi \neq \cap [c_j, d_j]$ .

**מסקנה 1.65** תהיינה  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  תיבות. אזי  $\phi \neq \cap A_j$ .

**הוכחה:** יהי:

$$A_j = [a_j^1, b_j^1] \times \dots \times [a_j^n, b_j^n]$$

מההנחה,  $a_1^j \leq a_2^j \leq \dots$  וכן  $b_1^j \geq b_2^j \geq \dots$  בברור ש:

$$\phi \neq \cap A_j = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$$

כאשר

$$b^k = \lim b_j^k, \quad a^k = \lim a_j^k$$

■

**טענה 1.66** כל תיבה  $I$  הינה קומפקטית.

**הוכחה:** תהי:

$$I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

תיבה, ונניח בשלילה כי איננה קומפקטית, כלומר קיים כיסוי פתוח  $\{U_\alpha\}$  של  $I$  שאין לו תת כיסוי סופי.

נתבונן בחלוקה (בינרית?) של  $I$ :

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

הקטעים  $[a_j, c_j], [c_j, b_j]$  מגדירים  $2^n$  תיבות  $Q_1, \dots, Q_{2^n}$  כך ש- $I = \bigcup_{j=1}^{2^n} Q_j$ , המקיימות

$$\text{diam}(Q_j) = \frac{1}{2} \text{diam}(I)$$

לפחות לאחת מהתיבות שהתקבלו אין תת כיסוי סופי של  $U_\alpha$ . כך באינדוקציה נקבל סדרת תיבות  $I = I_0, I_1, I_2, \dots$  המקיימות:

• התיבות מוכלות אחת בשניה, כלומר:  $I = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$

•  $diam(I_j) \rightarrow 0$  לכן  $diam(A_{j+1}) = \frac{1}{2}diam(A_j)$

• ל- $I_j$  אין תת כיסוי סופי של  $\{U_\alpha\}$  לכל  $j$ .

לפי המסקנה מהלמה של קנטור,  $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j \neq \emptyset$ . מהתכונה השנייה של התיבות הנ"ל נקבל כי

$\{x\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$  (נקודה אחת בלבד). לכן קיים  $\alpha$  כך ש- $x \in U_\alpha$  ו- $U_\alpha$  פתוח, לכן קיים  $r > 0$  כך ש- $U_\alpha \supset B_r(x)$ .

מכאן נקבל שתירה - שכן אם ניקח  $j$  כך ש- $diam(I_j) < r$ , נקבל כי  $x \in I_j \subset U_\alpha$ . כלומר ל- $I_j$  יש תת כיסוי סופי (בעל איבר אחד), בסתירה לתכונה השלישית של התיבות שהתקבלו. ■

הוכחת המשפט (תיבה ב- $\mathbb{R}^n$  קומפקטית אמ"מ היא סגורה וחסומה): **הוכחה:**  $\Leftarrow$  נכון תמיד (מטענות קודמות).

בכיוון השני  $\Rightarrow$ , תהי  $A \subset \mathbb{R}^n$  חסומה, לכן קיימת תיבה  $I$  שמכילה את  $A$ .

מהטענה הקודמת  $I$  קומפקטית, אנו מניחים כי  $A$  סגורה, לכן לפי טענה קודמת  $A$  קומפקטית, כנדרש. ■

**טענה 1.67** קומפקטיות נשמרת תחת העתקות רציפות, ז"א אם  $A \subset X$  קומפקטית, ו- $f: X \rightarrow Y$  רציפה, אזי  $f(A)$  קומפקטית.

**הוכחה:** יהי  $\{U_\alpha\}$  כיסוי פתוח (ב- $Y$ ) של  $f(A)$ .  $A$  קומפקטי, לכן לכל כיסוי פתוח, ובפרט ל- $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$  (שהוא פתוח מרציפות  $f$ ), קיים תת כיסוי סופי  $\{f^{-1}(U_{\alpha_i})\}$  של  $A$ , כלומר  $A \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i})$ . אזי:

$$f(A) \subset f\left(\bigcup_{\alpha \in E} f^{-1}(U_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in E} f(f^{-1}(U_\alpha)) \subset \bigcup_{\alpha \in E} U_\alpha$$

■ על כן  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in E}$  הוא תת כיסוי סופי של  $f(A)$ .

**מסקנה 1.68** משפט ויירשטראס: תמונה רציפה של קבוצה קומפקטית הינה חסומה וסגורה - אם  $f: [a, b] \rightarrow X$  רציפה, אזי  $f([a, b])$  קומפקטית, ולכן חסומה וסגורה.

**הגדרה 1.69** יהיו  $(X, d)$ ,  $(Y, \rho)$  מ"מ. אומרים שפונקציה  $f: X \rightarrow Y$  הינה רציפה במ"ש אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$  כך ש:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

**טענה 1.70** אם  $X$  קומפקטית, אזי כל  $f: X \rightarrow Y$  רציפה הינה רציפה במ"ש.

**הוכחה:**  $f$  רציפה, ולכן לכל  $x \in X$  קיים  $\delta_x > 0$  כך ש:

$$f(B_{\delta_x}(x)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x)), \quad d(x, y) < \delta_x \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

המשפחה  $\{B_{\frac{1}{2}\delta_x}(x)\}$  היא כיסוי פתוח של  $X$ , קיימים  $x_1, \dots, x_n$  כך ש:

$$X \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\frac{1}{2}\delta_{x_j}}(x_j) \quad (*)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \min \{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}\}$$

יהיו  $x, y \in X$  כך ש- $d(x, y) < \delta$ . כאמור  $\{B_{\frac{1}{2}\delta_{x_i}}\}_{i=1}^n$  הוא כיסוי פתוח של  $X$ , לכן קיים  $i$  כך ש- $d(x, x_i) < \frac{1}{2}\delta_{x_i}$ . מאי שיוויון המשולש:

$$d(y, x_i) \leq d(x, y) + d(x, x_i) < \delta_{x_i}$$

מ-, (\*) מתקיים:

$$\rho(f(y), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

וכן מההגדרות שלנו  $\rho(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ . לכן  $\rho(f(x), f(y)) < \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), f(y)) < \varepsilon$  כנדרש. ■

למרחבים קומפקטיים ופונקציות רציפות עליהם יש את התכונה המיסתורית הבאה:

**טענה 1.71** יהיו  $X, Y$  מ"מ,  $X$  קומפקטי, ותהי  $f: X \rightarrow Y$  בייקציה (כלומר חח"ע ועל) רציפה. אזי הפונקציה ההופכית  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  גם כן רציפה!

**דוגמא:**

ללא הנחת הקומפקטיות הנ"ל בדרכי איננו נכון:  
ניקח  $X = [0, 2\pi]$ ,  $Y = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ , ותהי  $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . אזי  $f$  היא בייקציה רציפה, אך  $f^{-1}$  איננה רציפה ב- $(1, 0)$ !  
נוכיח את הטענה: **הוכחה:** היא בעצם מיידית - נוכיח שמקור של כל קבוצה סגורה ב- $X$  ע"י  $f^{-1}$  הוא סגור:  
 $A \subset X$  סגורה, לכן קומפקטית.  $f$  רציפה, לכן:  $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$  קומפקטית, ולכן סגורה. ■

**הגדרה 1.72** יהיו  $(X, d), (Y, \rho)$  מ"מ.  $f: X \rightarrow Y$  נקראת הומאומורפיזם<sup>4</sup> אם:

- $f$  היא בייקציה - כלומר חח"ע (איניאקציה) ועל (סוריאקציה).
- $f$  רציפה וגם  $f^{-1}$  רציפה.

**הערה 1.73**  $f$  הומאומורפיזם שקול לכל אחת מהעובדות הבאות (!!):

- $U \subset X$  פתוחה אם"מ  $f(U) \subset Y$  פתוחה.

<sup>4</sup>הומאומורפיזם - homeo - אותן, morphizm - מבנה.

•  $x_n \rightarrow x$  ב- $X$  אמ"מ  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  ב- $Y$ .

**הגדרה 1.74**  $X, Y$  הומאומורפים אם קיים הומאומורפיזם  $f : X \rightarrow Y$  על.

הטענה הנ"ל אומרת שתמונה רציפה וחח"ע של מרחב קומפקטי הינה הומאומורפית אליו; זה בדר"כ אינו נכון כאשר המרחב איננו קומפקטי!

**דוגמאות:**

•

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tan(x)$$

•

$$f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (\cos t, \sin t)$$

## 1.4 שלמות

**הגדרה 1.75** סדרה  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  ב- $X$  נקראת סדרת קושי אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $M$  כך ש:  
 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$  לכל  $n, m > M$ .

**הגדרה 1.76** אומרים שמ"מ  $(X, d)$  הוא שלם, אם כל סדרת קושי ב- $X$  מתכנסת ב- $X$ , כלומר לכל  $\{x_n\} \subset X$  סדרת קושי קיים  $x \in X$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

בהמשך יתברר לנו ששלמות היא תכונה מאוד דומה לקומפקטיות, אך שלמות אינה אינווריאנטה של הומאומורפיזם!

**משפט 1.77** א. יהי  $X$  שלם,  $A \subset X$  סגור  $A \Leftarrow$  שלם.  
 ב. כלשהו,  $A \subset X$  שלם (במטריקה המושרית מ- $X$ )  $A \Leftarrow$  סגור.

**הוכחה:** א. תהי  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  ס"ק ב- $A \subset X$ .  
 $X$  שלם, לכן קיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ . אך  $A$  סגור, לכן  $x \in A$ .  
 ב. תהי  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$  סדרה שיש לה גבול ב- $X$ , נניח  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ , צ"ל  $x \in A$ .  
 ■  $\{x_n\}$  מתכנסת, לכן היא ס"ק,  $A$  שלם, לכן הגבול של  $\{x_n\}$  שייך ל- $A$ .

## דוגמא

א. בניגוד לקומפקטיות, שלמות לא נשמרת בד"כ תחת הומאומורפיזמים:  
 $\mathbb{R}$  שלם,  $(a, b)$  עם  $-\infty < a, \infty > b$  אינו שלם (כי למשל  $\{b - \frac{1}{n}\}$  היא סדרת קושי).  
 עם זאת, קטע פתוח הומאומורפי ל- $\mathbb{R}$ :  $f(t) = \tan(t)$  היא הומאומורפיזם בין  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ל- $\mathbb{R}$  (ברור שכל שני קטעים פתוחים הומאומורפיים דרך העתקה אפינית מתאימה).  
 ב.  $\mathbb{Q}$  אינו שלם.  
 ג.  $\mathbb{R}^n$  הינו שלם.

**מסקנה 1.78**  $A \subset \mathbb{R}^n$  שלם אמ"מ  $A$  סגור (במטריקה אוקלידית).

**הערה 1.79**  $A$  קומפקטי אמ"מ כל משפחה של קבוצות סגורות  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in D}$  היא בעלת התכונה הבאה:

לכל  $n$ , לכל  $D \ni \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ,  $\bigcap_{j=1}^n A_{\alpha_j} \neq \emptyset$  מתקיים  $\bigcap_{\alpha \in D} A_\alpha \neq \emptyset$  (תכונת חיתוכים סופיים - FIP) - זה מידי מהגדרת הקומפקטיות מחוקי De Morgan.

**טענה 1.80** מרחב קומפקטי  $X$  הינו שלם.

**הוכחה:** תהי  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  סדרת קושי ב- $X$ . נסמן  $A_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$ . תנאי קושי שקול לעובדה ש:

$$\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$$

גם ברור ש- $A_1 \cap \dots \cap A_n = A_n \neq \emptyset$ , לכן לסדרת הקבוצות  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  יש תכונת FIP. מקומפקטיות נובע ש- $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \neq \emptyset$ . זוהי קבוצה בעלת קוטר 0, זאת אומרת  $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \{x\}$ . עבור  $x \in X$  מסויים. ברור ש- $x_n \rightarrow x$  אם  $\varepsilon > \text{diam}(A_n)$  אזי  $d(x, x_m) < \varepsilon$  לכל  $m \geq n$ . ■

דוגמא נוספת למרחב שלם:

עבור  $K$  קומפקטי,  $C(K)$  מסמן מרחב פונקציות ממשיות רציפות על  $K$ , עם נורמה  $\|\cdot\|_\infty$

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

(המקסימום קיים, לפי ויירשטראס).

**טענה 1.81**  $C(K)$  הינו מרחב שלם.

**הוכחה:** תהי  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C(K)$  סדרת קושי. לכל  $x \in K$  (מהגדרת הנורמה):

$$\|f_n - f\|_\infty \geq |f_n(x) - f(x)|$$

לכן  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  היא גם סדרת קושי. נגדיר פונקציה  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  ע"י  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

עלינו להוכיח שני דברים:

א.  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ . ב.  $f$  רציפה (ואז הגבול של סדרת קושי יהיה ב- $C(K)$ , ולכן המרחב שלם).

א. יהי  $\varepsilon > 0$ , ויהי  $N$  כך ש- $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$  לכל  $n, m > N$ , לכן  $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$  לכל  $n, m > N$ ,  $x \in K$ . נשאיף את  $m$  לאינסוף, ונקבל:

$$\forall n > N \quad \forall x \in K \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

לכן  $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$  לכל  $n > N$ .

<sup>5</sup>קיים כי זוהי סדרת קושי

ב. נרצה להוכיח דבר שהוא מעניין בעצמו - גבול במ"ש של סדרת פונקציות רציפות הינו רציף (ראינו באינפי 2 - זה לא תלוי בקומפקטיות, וגם לא בזה ש- $f$  ממשי). יהי  $x \in K$ ,  $\varepsilon > 0$ , ויהי  $n$  כך ש:  $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$ . יהי  $\delta > 0$  כך ש:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow f_n(x) - f_n(y) < \frac{\varepsilon}{3}$$

אזי עבור  $d(x, y) < \delta$ :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

■

**הערה 1.82** מרחב דיסקרטי תמיד שלם!

**הערה 1.83** יהי  $K < 1$ . אם  $M \cdot K^n > d(x_n, x_{n+1})$  אזי הסדרה  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  הינה סדרת קושי!

#### 1.4.1 נקודות שבת והעתקות מכווצות

**מוטיבציה** מושג השלמות נוצר באופן טבעי כאשר מנסים לפתור משוואה ע"י קירובים: תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה כך ש:  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . רוצים לפתור את המשוואה  $f(x) = 0$ . גישה טבעית - שיטת החציה ("איד למצוא אריה במדבר"): מגדירים ברקורסיה  $a_j, b_j, c_j$  כך ש- $c_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j)$ ,  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ , כך שמתקיים:  $f(a_j) f(b_j) < 0$  (אם מתקבל 0, פגענו בפתרון). ברור ש:

$$d(a_{j+1}, a_j) < 2^j$$

לכן  $\{a_j\}_{j=1}^\infty$  היא סדרת קושי. מכיון ש- $[a, b]$  שלם, קיים  $x = \lim a_j$ , והוא הפתרון שאנו מחפשים.

**הגדרה 1.84** תהי  $f : X \rightarrow X$  (אותה הקבוצה!). נקודה  $x_0 \in X$  נקראת נקודת שבת של  $f$ , אם  $f(x_0) = x_0$ .

**הערה 1.85** בהגדרה זו אין הנחות לגבי המבנה של  $X$  או של  $f$ .

דוגמא (בהקשר בין נקודת שבת לפתרון משוואה):

**טענה 1.86** תהי  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  פונקציה רציפה. אזי ל- $f$  יש נקודת שבת.

**הוכחה:** נתבונן בפונקציה  $F(x) = f(x) - x$ . זוהי פונקציה רציפה על  $[0, 1]$ ,  $F(0) \geq 0$ ,  $F(1) \leq 0$ . לכן, לפי משפט ערך הביניים קיים  $x$  כך ש- $F(x) = 0$ , לכן  $x$  נק' שבת של  $f$ . ■

**הגדרה 1.87** נגיד שלמרחב מטרי  $X$  יש תכונת נקודת שבת  $(FPP)$ , אם לכל פונקציה רציפה  $f : X \rightarrow X$ , ל- $f$  יש נקודת שבת.

משפט חשוב של Brouwer אומר שלכדור סגור ב- $\mathbb{R}^n$  יש FPP. מכך קל לראות שלכל קבוצה קמורה קומפקטית ב- $\mathbb{R}^n$  יש FPP. לעומת זאת, לספרה ב- $\mathbb{R}^n$ :  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$  אין FPP - למשל להעתקה אנטיפודלית  $f(x) = -x$  אין נקודת שבת. גם ל- $\mathbb{R}^n$  כולו אין FPP: לכל הזהה  $f(x) = x + a$  כאשר  $a \neq 0$  אין נקודת שבת.

קיים קשר בין פתרון משוואה  $f(x) = 0$  ונקודת שבת אם  $X$  הוא מרחב וקטורי.  $f(x_0) = 0$  אמ"מ  $F_\lambda(x_0) = x_0$  עבור הפונקציה  $F_\lambda(x) = x - \lambda f(x)$ ,  $\lambda \neq 0$ . מתברר שהרעיון הזה מוצלח מעל כל ציפיה!

**הגדרה 1.88** יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי. פונקציה המקיימת תנאי ליפשיץ עם קבוע  $K < 1$  נקראת גם העתקה מכווצת, ז"א  $f: X \rightarrow X$  היא העתקה מכווצת אם לכל  $x, y \in X$ :

$$d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$$

**דוגמא עיקרית** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה. אזי  $f$  היא העתקה מכווצת אמ"מ  $\|f'\|_\infty < 1$ .  
 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$   
 זה נובע ישירות ממשפט ערך הביניים מאינפי 1:  
 לכל  $x, y$  קיים  $c$  כך ש:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(c)| |x - y|$$

**משפט העתקה מכווצת:**

**משפט 1.89** יהי  $X$  שלם,  $f: X \rightarrow X$  העתקה מכווצת. אזי ל- $f$  יש נקודת שבת יחידה.

**הוכחה:** פשוטה מאוד!

יהי  $x_0 \in X$  כלשהו. נגדיר באינדוקציה  $x_{j+1} = f(x_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots$  - במילים אחרות,  
 $x_j = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{j \text{ times}}(x_0)$   
 נטען:  $\{x_j\}_{j=1}^\infty$  היא סדרת קושי, כי מתקיים:

$$d(x_{j+1}, x_j) \leq Kd(x_j, x_{j-1}) \leq K^2 \dots \leq K^j d(x_1, x_0)$$

כאשר  $n > m$  מקבלים:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_m, x_n) \\ &\leq (K^{n-1} + K^{n-2} + \dots + K^m) d(x_1, x_0) \leq K^m \sum_{j=0}^\infty K^j d(x_1, x_0) = \frac{K^m}{1-K} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

זה יהיה קטן כרצוננו אם  $m$  מספיק גדול, לכן זוהי אכן סדרת קושי.

מכיוון ו- $X$  שלם, לסדרה  $\{x_j\}$  יש גבול. נסמן  $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j$ . כמובן גם  $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{j+1}$ .  
 $f$  רציפה, לכן:

$$x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{j+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) = f\left(\lim_{j \rightarrow \infty} x_j\right) = f(x)$$

כלומר  $x$  היא נקודת שבת.

**יחידות** נקודת שבת היא דבר מידי: נניח  $f(x) = x^{-1}$ ,  $f(y) = y^{-1}$ . אזי:

$$0 \leq d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$$

מכיוון ש:  $K < 1$ , זה אפשרי רק אם  $d(x, y) = 0$ .

■

20/11/2011

נתרגם את זה לפתרון משוואות:

**מסקנה 1.90** יהי  $V$  מרחב וקטורי,  $f : V \rightarrow V$  פונקציה (ללא הנחות טופולוגיות בינתיים).  
 נסמן:

$$F(x) = x - \lambda f(x) \quad (\lambda \neq 0)$$

נניח שקיים  $X \subset V$  ומטריקה שלמה  $d$  על  $X$  כך ש:

א.  $F(X) \subset X$ . ב.  $F$  היא העתקה מכווצת על  $X$ .

אזי, למשוואה  $f(x) = 0$  יש פתרון  $x_\infty \in X$ , הוא יחיד ומתקבל כ-  $x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  
 כאשר  $x_0 \in X$  כלשהו ו-  $x_{n+1} = f(x_n)$  עבור  $n = 0, 1, \dots$ . יתר על כן, מתקיים:

$$d(x_\infty, x_n) \leq \frac{K^n}{1-K} d(x_1, x_0)$$

כאשר  $K$  הוא קבוע ליפשיץ של  $f$ .

**דוגמא** אלגוריתם לחישוב  $\sqrt{2}$ :

ניקח  $a > 0$ ,  $X = [a, b]$ ,  $f(x) = x^2 - 2$ .  
 קבוע ליפשיץ של  $F$  הוא:

$$\max \{|F'(x)| \mid a \leq x \leq b\}$$

ברור שצריך לקחת  $\lambda > 0$ ,  $F'(x) = 1 - 2\lambda x$ , לכן:

$$K = \max \{|F'(a)|, |F'(b)|\}$$

אחרי קצת נסיונות אפשר להגיע לזה:

$\lambda = \frac{1}{4}$ ,  $X = [1, 2]$ , לכן  $\sqrt{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  עם  $x_0 = 1, x_{n+1} = x_n - \frac{1}{4}(x_n^2 - 2)$ .  
 השגיאה  $\frac{1}{4} \cdot 2^{n-2} \geq 0$ .

השיטה המתוארת בהערה הנ"ל קרובה לשיטת ניוטון:

**טענה 1.91** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים,  $f(a) < 0 < f(b)$ ,  $f' > 0$ ,  $f'' > 0$ .  
 אזי, הפתרון  $x_\infty$  של המשוואה  $f(x) = 0$  ב- $[a, b]$  מתקבל כ-  $x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , כאשר  
 $x_0 = b, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .

**הערה 1.92** ההבדל הוא שבמקום  $\lambda$  קבוע לוקחים גודל משתנה כפול  $f'(x_n)$  שנותן קצב התכנסות טוב יותר אצל ניוטון, אך חייבים לקחת  $x_0 = b$  ולא כל  $x_0 \in [a, b]$ . אם ניקח  $x_0 = a$  למשל, נצא מהתמונה במקרה זה בשלב  $n = 1$ .

## 2 חשבון דיפרנציאלי מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}^m$

### 2.1 פונקציות מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}^m$

**הגדרה 2.1** תהי  $O \in V \subset \mathbb{R}^n$  קבוצה פתוחה (=סביבת אפס ב- $\mathbb{R}^n$ ), ותהי  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  פונקציה.

אומרים ש- $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = b \in \mathbb{R}^m$  אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$  כך ש:

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \|g(h) - b\| < \varepsilon$$

(הנורמות ב- $\mathbb{R}^n$  או ב- $\mathbb{R}^m$  בהתאמה).

בהמשך נניח תמיד את ההנחה הפורמלית הבאה:  
 $\frac{0}{0} = 0$  כאשר המונה ב- $\mathbb{R}^k$  והמכנה ב- $\mathbb{R}$ .

**הגדרה 2.2** מסמנים את המרחב של כל ההעתקות הלינאריות מ- $\mathbb{R}^n$  ל- $\mathbb{R}^m$  ב- $\text{Hom}(n, m)$ , כאשר הוא נורמי עם הנורמה האופרטורית:

$$\|T\| = \sup \{ \|Tx\| \mid \|x\| \leq 1 \}$$

לנורמה זו כמה אפיונים שקולים.

**הערה 2.3**  $\|T\|$  שווה לכל אחד מהביטויים הבאים (התלמיד השקדן מוזמן להוכיח השקילות):

$$\bullet \|T\| = \inf \{ K \mid \|Tx - Ty\| \leq K \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \}$$

$$\bullet \|T\| = \sup \left\{ \left\| \frac{Tx}{\|x\|} \right\| \mid x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} = \sup \{ \|Tx\| \mid \|x\| = 1 \}$$

**הגדרה 2.4** תהי  $U \in \mathbb{R}^n$  קבוצה פתוחה,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in U$ . אומרים ש- $f$  דיפרנציאבילית ב- $a$  אם קיימת  $T \in \text{Hom}(n, m)$  כך ש:

$$\lim_{h \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\|h\|} (f(a+h) - f(a) - Th) = 0 \in \mathbb{R}^m$$

ביטוי זה שקול ל:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Th\|}{\|h\|} = 0 \in \mathbb{R} \quad (*)$$

ניסוח שקול:

$$f(a+h) = f(a) + Th + r(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0 \text{ כאשר } r(h) = o(h) \text{ כותבים}$$

**הערה 2.5**  $T$  כנ"ל הינו יחיד (אם קיים): כי נניח שקיימת  $S \in \text{Hom}(n, m)$  עבורה:

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|f(a+h) - f(a) - S\|$$

אזי  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|Sh - Th\|}{\|h\|} = 0$  אם  $S \neq T$ , קיים  $v \in \mathbb{R}^n$  כך ש:  $Sv - Tv \neq 0$ , אזי  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|Stv - Ttv\|}{\|tv\|} = 0$  כי  $\|tv\| \rightarrow 0$ , אך:

$$\frac{\|Sv - Tv\|}{\|v\|} = \frac{\|Stv - Ttv\|}{\|tv\|} = \text{constant} \neq 0$$

**הגדרה 2.6** אם  $f$  דיפרנציאבילית ב- $a$ ,  $T$  הנ"ל מסומן ע"י  $D_f(a)$ , וזה נקרא הדיפרנציאל של  $f$  ב- $a$ .

רואים שלמעשה מהנ"ל מתקיים:

$$Th = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \quad (**)$$

22/11/2011

#### דוגמאות:

• עבור  $m = n = 1$ ,  $f : (\gamma, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T \in (1, 1)$  אמ"מ  $Th = \alpha h$  עבור  $\alpha \in \mathbb{R}$ . מקבלים ש:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(a+h) - f(a) - \alpha h}{h} \right| = 0$$

וזה שקול ל- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha$ , קרי  $f$  דיפרנציאבילית ב- $a$  אמ"מ  $f$  גזירה ב- $a$ , ומתקיים  $D_f(a)(h) = f'(a)h$ . ההבדל בין הנגזרת לדיפרנציאל הוא שהנגזרת היא מספר, והדיפרנציאל הוא העתקה לינארית (במקרה זה מ- $\mathbb{R}$  ל- $\mathbb{R}$ ).

• תהי  $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש:

$$r(h, k) = \alpha h^2 + \beta hk + \gamma k^2$$

זהו  $r$  טיפוס. מדוע? נטען:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{|r(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

צריך להראות נכונות לגבי כל אחד מהרכיבים בנוסחא של  $r(h, k)$ . לדוגמא, ברור כי:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

מכיוון ו:

$$\left| \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| < |k| \rightarrow 0$$

ובצורה דומה:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

כי:

$$\begin{aligned} |hk| &\leq h^2 + k^2 \\ \Rightarrow \left| \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| &\leq \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

• אם  $f(x) = b \in \mathbb{R}^m$ ,  $b$  קבוע, אזי  $T = 0$  של  $Hom(n, m)$  מקיים את  $(*)$ , לכן  $D_f(a) = 0$  לכל  $a \in \mathbb{R}^n$ .

• אם  $f \in Hom(n, m)$ , אזי  $f(a+h) = f(a) + f(h)$  לכל  $a, h$ , לכן  $T = f$  מקיים את  $(*)$ , לכן  $D_f(a) = f$  לכל  $a \in \mathbb{R}^n$ .

• משתי הדוגמאות הקודמות מקבלים את הדיפרנציאל של העתקה אפינית - זוהי העתקה מהצורה  $S = T + b$  כאשר  $T \in Hom(n, m)$  ו- $b \in \mathbb{R}^m$  קבוע, קרי  $D_S(a) = T$  לכל  $a \in \mathbb{R}^n$ .

**טענה 2.7** א. אם  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  דיפרנציאביליות ב- $a$ , אזי  $\alpha f + \beta g$  גם כן דיפרנציאבילית, ומתקיים:

$$D_{\alpha f + \beta g}(a) = \alpha D_f(a) + \beta D_g(a)$$

ב.  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  דיפרנציאבילית אמ"מ  $f_1, \dots, f_m$  דיפרנציאביליות ב- $a$ , ומתקיים  $D_f(a) = (D_{f_1}(a), \dots, D_{f_m}(a))$  ובכתיבה מטריציונית:

$$D_f(a) = \begin{pmatrix} D_{f_1}(a) \\ \vdots \\ D_{f_m}(a) \end{pmatrix}$$

**הוכחה:** א. נניח ש:

$$f(a+h) = f(a) + Th + r(h), \quad g(a+h) = g(a) + Sh + q(h)$$

כאשר

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(h)}{\|h\|} = 0$$

אזי נקבל:

$$(\alpha f + \beta g)(a + h) = \alpha f(a) + \beta g(a) + (S + T)h + \alpha r(h) + \beta q(h)$$

וכמו כן:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha r(h) + \beta q(h)}{\|h\|} = 0$$

ב. יהי  $Hom(n, m) \ni T = (T_1, \dots, T_m)$  נסמן:

$$r(h) = f(a + h) - f(a) - Th, \quad r(h) = (r_1(h), \dots, r_m(h))$$

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{r_1(h)}{\|h\|} = 0, \dots, \frac{r_m(h)}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow T_j = 0 \quad \text{אמ"מ} \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{r_j(h)}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow D_f(a) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

**מסקנה 2.8** מב' - אם  $(f_1, \dots, f_m) = f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , אזי  $f$  דיפרנציאבילית ב- $a$  אמ"מ כל אחת מהפונקציות  $f_1, \dots, f_m$  גזירה ב- $a$ , ומתקיים:

$$D_f(a)h = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ \vdots \\ f'_m(a) \end{pmatrix} h$$

מקובל לסמן  $f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_m(a))$ , לכן  $D_f(a)h = hf'(a)$ .

### 2.1.1 תיאור גיאומטרי של פונקציות מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}$

תהי  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

**הגדרה 2.9** הגרף של  $f$  הוא הקבוצה:

$$\mathbb{R}^{n+1} \supset \Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$$

**הגדרה 2.10** קו (משטח) גובה של  $f$  הוא הקבוצה:

$$\mathbb{R}^n \supset f^{-1}(c) = \{x \mid f(x) = c\}$$

**הערה 2.11** הגרף של  $f$  קובע את  $f$ ; אוסף קווי הגובה - לא.

**הגדרה 2.12** כיוון ב- $\mathbb{R}^n$  הוא וקטור בעל נורמה אוקלידית 1.

**הגדרה 2.13** יהי  $v \in \mathbb{R}^n$  כיוון, ותהי  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in U$ . הגודל  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$  (אם קיים) נקרא הנגזרת הכיוונית של  $f$  בכיוון  $v$ .

במידה והנגזרת הכיוונית בכיוון  $v$  קיימת, נסמנה ב:

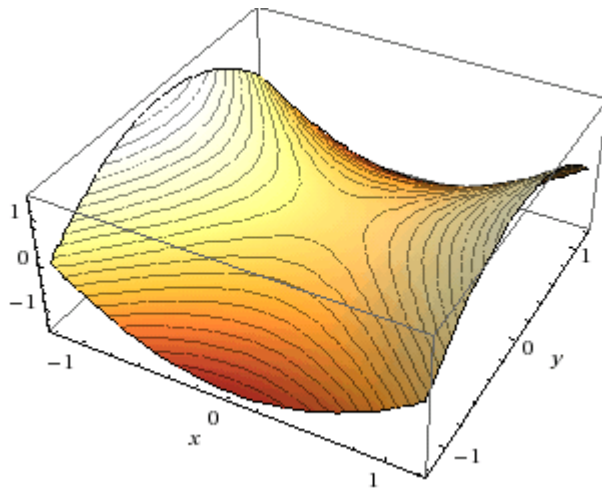
$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

לפי נוסחא (\*\*), אם  $f$  דיפרנציאבילית ב- $a$ , אזי ל- $f$  יש ב- $a$  נגזרת כיוונית בכל כיוון. ההפך בדר"כ איננו נכון.

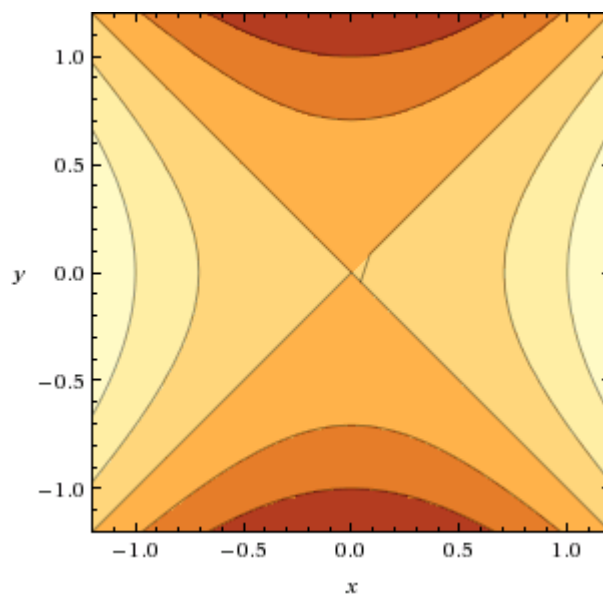
תהי  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . נראה שתי הצגות גיאומטריות.

נביט בגרף של  $f$ :

נביט בדוגמא קונקרטית - למשל  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . נקבל:



הצגה שניה - בעזרת קווי מתאר:



הפירוש הגיאומטרי:  $D_v f(a)$  הוא השיפוע של הגרף  $\Gamma(f)$  בנקודה  $(a, f(a))$  בכיוון  $v$ . פירוש פורמלי: נגדיר פונקציה של משתנה אחד  $\varphi(t) = f(a + tv)$  - היא מוגדרת בסביבה של  $a$ . אזי  $D_v f(a) = \varphi'(0)$  (קיימים או לא קיימים בו זמנית).

**הגדרה 2.14** הנגזרות הכיווניות  $D_{e_j} f(a)$ , כאשר  $e_j = \left( 0, \dots, 0, \overbrace{1}^{\text{j'th spot}}, 0, \dots, 0 \right)$  נקראות הנגזרות החלקיות. נסמן אותן ב:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a)}{t} = \varphi'(a_j)$$

כאשר:

$$\varphi(x) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

**דוגמא**

$$f(x, y) = x^y, \quad x, y > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} x^y = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial}{\partial y} x^y = \ln x \cdot x^y$$

## 2.1.2 הגרדיאנט

**הגדרה 2.15** תהי  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . אם קיימות כל הנגזרות החלקיות של  $f$  ב- $a$ , מגדירים את הגרדיאנט של  $f$  ב- $a$  להיות:

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

נביט שוב במקרה בו  $m = 1$ . אם  $f$  דיפרנציאבילית ב- $a$  אזי מהלינאריות של  $D_f(a)$  נקבל:

$$Df(a)e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \quad \sum_j x_j e_j = (x_1, \dots, x_n) = x \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle \nabla f(a), x \rangle = \sum x_j \cdot Df(a)e_j = Df(a)(x)$$

אנחנו מנסים להשתכנע כי ברגע שמשתמשים בסימון הנכון, כמעט כל הדברים משנה א' בנוגע לפונקציה במשתנה אחד, עוברים לפונקציות של  $n$  משתנים. אם נסמן  $\langle x, y \rangle = x \cdot y$ , נקבל עבור הנוסחא מעלה:

$$\nabla f(a) \cdot x = \langle \nabla f(a), x \rangle$$

זה נראה כמו במימד 1.

ישנם שני פירושים גיאומטריים לגרדיאנט. נניח  $\nabla f(a) \neq 0$ :

- כיוון הגרדיאנט  $\left( \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} \right)$  הוא כיוון העליה המקסימלית של  $f$  ב- $a$ , והוא שווה ל- $\|\nabla f(a)\|$ ; בכל כיוון אחר קצב הגידול את  $f$  קטן מזה. זה נובע מקושי שוורץ:

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle \leq \|\nabla f(a)\|$$

זהו קצב העליה בכיוון  $v$ , וידוע ששיויון בא"ש קושי שוורץ מתקיים רק עבור  $v = \frac{w}{\|w\|}$ .

- כיוון הגרדיאנט ניצב ב- $a$  לקו הגובה של  $f$ , זאת אומרת: נסמן  $M = \{x \in U \mid f(x) = f(a)\}$ . אזי, לכל סדרה  $a_n \in M$ ,  $a_n \neq a \rightarrow a$ , הזווית בין  $a_n - a$  ו- $\nabla f(a)$  שואפת ל- $\frac{\pi}{2}$ , ז"א  $\cos(a_n) \rightarrow 0$ :

$$\cos(a_n) = \frac{\langle \nabla f(a), a_n - a \rangle}{\|\nabla f(a)\| \cdot \|a_n - a\|}$$

אנו יודעים כי:

$$0 = f(a_n) - f(a) = \langle \nabla f(a), a_n - a \rangle + r(a_n - a)$$

כאשר  $\lim_{\|a_n - a\| \rightarrow 0} \frac{r(a_n - a)}{\|a_n - a\|} = 0$ , וזה נותן את הדרוש.

2.2 פונקציות מ- $\mathbb{R}^n$  ל- $\mathbb{R}^m$ 

ובחזרה לדיפרנציאביליות - עבור  $m$  כללי,  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  דיפרנציאבילית, נקבל:

$$\begin{aligned} Df(a) &= (Df_1(a), \dots, Df_m(a)) \\ Df_j(a)x &= \langle \nabla f_j(a), x \rangle = Df(a)(x) = \begin{pmatrix} Df_1(a)x \\ \vdots \\ Df_m(a)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(a), x \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_m(a), x \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

זה נותן לנו נוסחא לדיפרנציאל כאשר  $f$  דיפרנציאבילית, אך אין לנו בינתיים קריטריון נוח לדיפרנציאביליות.

**הגדרה 2.16** תהי  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . אומרים ש- $f$  דיפרנציאבילית ברציפות ב- $U$ , ומסמנים  $f \in C^1(U)$ , אם:  
א.  $f$  דיפרנציאבילית בכל נקודה של  $U$ .  
ב. ההעתקה:

$$Df : U \rightarrow \text{Hom}(n, m)$$

הינה רציפה<sup>6</sup>.

**טענה 2.17** פונקציה  $F : X \rightarrow \underbrace{\text{Hom}(n, m)}_{=\mathbb{R}^{nm}}$ , כאשר  $X$  מרחב מטרי, הניתנת להצגה ע"י:

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{mn} \end{pmatrix}, \quad \varphi_{ij} : X \rightarrow \mathbb{R}$$

אזי  $F$  הינה רציפה, אמ"מ כל אחת מן הפונקציות  $\varphi_{ij}$  רציפה.

**הוכחה:** לכל  $x, y \in X$ , לכל  $i, j$ :

$$|\varphi_{ij}(x) - \varphi_{ij}(y)| \leq \|F(x) - F(y)\| \leq \left( \sum |\varphi_{ij}(x) - \varphi_{ij}(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

■

**משפט 2.18** תהי  $U \subset \mathbb{R}^n$  פתוחה,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  רציפה. אם קיימות כל הנגזרות החלקיות של  $f$  ב- $U$ , והן רציפות, אזי  $f$  דיפרנציאבילית ב- $U$ .

שנקובסקי אומר - זוהי הוכחה לא טריוויאלית ו"ממש יפה לבחינה".

<sup>6</sup>ב- $\text{Hom}(n, m)$  לוקחים את הנורמה הסטנדרטית של  $\mathbb{R}^n$ .

**מסקנה 2.19**  $f$  דיפרנציאבילית ברציפות אמ"מ  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  רציפה לכל  $i, j$  - זה מידי מהמשפט וההערה הקודמת. הדבר בכלל לא מובן מאליו!

**הערה 2.20** יכול להיות שהנגזרות קיימות אך הפונקציה  $f$  אינה דיפרנציאבילית - דוגמאות ניתן למצוא באינפי 2.

### 2.21 הערה

$$(\beta - \alpha) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma) = f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, \beta, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, \alpha, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

עבור  $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ . זהו בעצם משפט ערך הביניים משנה א'.

**הגדרה 2.22** קבוצה  $V \supset K$  (מרחב וקטורי) נקראת קמורה אם לכל  $a, b \in K$  גם:

$$[a, b] = \{t \cdot a + (1 - t) \cdot b \mid t \in [0, 1]\}$$

**הערה 2.23** הכדור  $B_r(a)$  היא קבוצה קמורה.

קעת נוכיח את המשפט: **הוכחה:** נקבע  $a \in U$ , ויהי  $\rho > 0$  כך ש-  $B_\rho(a) \subset U$ ,  $B_\rho(0) \subset U$ .  
בה"כ  $m = 1$ .<sup>7</sup> אנו רוצים להעריך את הביטוי:

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - \langle \nabla f, h \rangle, \quad Th = \langle \nabla f, h \rangle$$

נגדיר:

$$a = (a_1, \dots, a_n), \quad h = (h_1, \dots, h_n)$$

$$k = 0, 1, \dots, n \quad A_k = (a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad A_n = a + h, \quad A_0 = a$$

$$\Rightarrow r(h) = \underbrace{\sum_{k=1}^n f(A_k) - f(A_{k-1})}_{f(a+h) - f(a)} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k}_{\langle \nabla f(a), h \rangle}$$

לפי משפט הערך הממוצע,<sup>8</sup> עבור  $k = 1, \dots, n$  קיים  $c_k \in [A_{k-1}, A_k]$  כך ש:

$$f(A_k) - f(A_{k-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) \cdot h_k$$

נעיר ש-  $B_\rho(a) \supset [A_{k-1}, A_k]$ , לכן, הפונקציה  $\varphi(t) = f(a_1 + h, \dots, a_{k-1} + h_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n)$  מוגדרת וגזירה ברציפות בכל הקטע  $[a_k, a_k + h_k]$ . נציב ונקבל:

$$r(h) = \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right] \cdot h_k = \langle v(h), h \rangle$$

<sup>7</sup>שכן אם  $f = (f_1, \dots, f_m)$ , אם נוכיח עבור  $m = 1$  נקבל שכל הפונקציות הללו דיפרנציאביליות ולכן גם  $f$  כולה.  
<sup>8</sup>כאן השימוש ברציפות

כאשר:

$$v(h) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(A_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(A_0) \right)$$

לפי א"ש קושי שוורץ:  $\frac{|r(h)|}{\|h\|} \leq \|v(h)\| \Leftarrow |r(h)| \leq \|v(h)\| \|h\|$ . צריך להוכיח:

$$\lim_{h \rightarrow 0} v(h) = 0$$

מרציפות  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ , קיים  $\delta > 0$  כך ש:

$$\forall 1 \leq k \leq n \quad \|c_k - A_0\| \leq \|h\| < \delta \Rightarrow \|v(h)\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \|v(h)\| = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r(h)|}{\|h\|} = 0$$

כנדרש. ■

### 2.2.1 כלל השרשרת

**משפט 2.24** תהינה  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  פתוחות,  $f: U \rightarrow V$ ,  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$  פונקציות, ויהי  $a \in U$ .

אם  $f$  דיפרנציאבילית ב- $a$  ו- $g$  דיפרנציאבילית ב- $f(a)$ , אזי ההרכבה  $\varphi = g \circ f$  דיפרנציאבילית ב- $a$ , ומתקיים:

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad D\varphi(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

כאשר  $Df(a) \in \text{Hom}(n, m)$ ,  $Dg(b) \in \text{Hom}(m, k)$ ,  $D\varphi(a) \in \text{Hom}(n, k)$ . כלומר:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

**הערה 2.25** ראינו וריאציה של משפט זה באינפי 2:

$$\varphi'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$$

**הערה 2.26** אם  $f, g: (\alpha, \beta) \rightarrow U$  גזירות, אזי:

$$\frac{d}{dt} \langle f(t), g(t) \rangle = \langle f(t), g'(t) \rangle + \langle f'(t), g(t) \rangle$$

מחישוב מייד. בפרט,  $\frac{d}{dt} \langle f(t), v \rangle = \langle f'(t), v \rangle$ .

**מקרה פרטי**  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, g \circ f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Df(a)h = f'(a)h$ ,  $Dg(b)v = \langle \nabla g(b), v \rangle$

$$(g \circ f)'(a) = \langle \nabla g(b), f'(a) \rangle = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}(b), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_m}(b) \right) \cdot \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ \vdots \\ f'_m(a) \end{pmatrix}$$

נוכיח את המשפט<sup>9</sup>: **הנחה**: נגדיר:

$$f(a+x) = f(a) + Df(a)x + r_1(x)$$

$$g(b+y) = g(b) + Dg(b)y + r_2(y)$$

מכיוון ו- $f, g$  דיפרנציאביליות ב- $a, b = f(a)$  בהתאמה, ועל כן:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_1(x)}{\|x\|} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{r_2(y)}{\|y\|} = 0$$

נשתמש בכתוב מעלה:

$$\begin{aligned} \varphi(a+x) &= g(f(a+x)) = g\left(\underbrace{f(a)}_b + \underbrace{Df(a)x + r_1(x)}_y\right) \stackrel{Linear}{=} \\ &g(b) + Dg(b)y + r_2(y) = \underbrace{g(b)}_{\varphi(a)} + \underbrace{Dg(b)Df(a)x}_{=D\varphi(a)} + \underbrace{Dg(b)r_1(x) + r_2(Df(a)x + r_1(x))}_{=r(x)} \end{aligned}$$

צריך להוכיח כי:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|r(x)|}{\|x\|} = 0$$

כעת:

$$\frac{r(x)}{\|x\|} = \frac{Dg(b)r_1(x)}{\|x\|} + \frac{r_2(Df(x) + r_1(x))}{\|x\|}$$

מכיוון ו- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_1(x)}{\|x\|} = 0$  ו- $Dg(b)$  (גם) רציפה, נקבל כי הביטוי השמאלי שואף לאפס. נותר להראות:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_2(Df(a)x + r_1(x))}{\|x\|} = 0$$

נראה כי זה מתקיים בעזרת טריק שעשינו באינפי 2 (בה"כ  $\|Df(a)x + r_1(x)\| \neq 0$ ):

$$\frac{r_2(Df(a)x + r_1(x))}{\|x\|} = \underbrace{\frac{r_2(Df(a)x + r_1(x))}{\|Df(a)x + r_1(x)\|}}_{:=\alpha(x)} \cdot \underbrace{\frac{\|Df(a)x + r_1(x)\|}{\|x\|}}_{:=\beta(x)}$$

<sup>9</sup>שנקובסקי מבקש לציין כי יש כאן "קושי קונסטרואלי" עם המושג של דיפרנציאביליות, "ואפילו אם קושי וניוטון היו יושבים כאן הם היו צריכים לחשוב על זה כמה דקות", ועל כן אין סיבה לבהלה.

כאשר  $\|x\| \rightarrow 0$   $Df(a) \cdot x + r_1(x) \rightarrow 0$  , לכן  $\alpha(x)$  שואף לאפס כאשר  $\|x\| \rightarrow 0$ .  
כמו כן,  $\beta(x)$  חסום:

$$\frac{\|Df(a)x + r_1(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Df(a)x\|}{\|x\|} + \frac{\|r_1(x)\|}{\|x\|}$$

ושני הביטויים האלו חסומים.  
אם כך מצאנו כי הביטוי  $\frac{r_2(Df(a)x + r_1(x))}{\|x\|}$  מורכב ממכפלת שני ביטויים, כאשר האחד חסום והשני שואף לאפס, על כן ביטוי זה שואף לאפס, כנדרש. ■

### 2.2.2 משפט הערך הממוצע

**משפט 2.27** תהי  $U \subset \mathbb{R}^n$  קבוצה פתוחה,  $a, b \in U$  כך ש:  $\left\{ \underbrace{(1-t)a + tb}_{a+t(b-a)} \mid 0 \leq t \leq 1 \right\}$

אזי:  $[a, b] \in U$  ותהי  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  דיפרנציאבילית. אזי:  
א. עבור  $m = 1$ , קיים  $c \in (a, b)$  כך ש:

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c) \cdot (b - a) = \langle \nabla f(c), b - a \rangle$$

ב. לכל  $m$ , קיים  $c \in (a, b)$  כך ש:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(c)\| \cdot \|b - a\|$$

ב'. עבור  $m > 1$ , בדרכ אין  $c \in (a, b)$  כך ש:

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$$

**מסקנה 2.28** אם  $U$  קמור ו- $\|Df(x)\| \leq K$  לכל  $x \in U$ , אזי  $f$  מקיימת את תנאי ליפשיץ עם קבוע  $K$  ב- $U$ .

**מסקנה 2.29** עבור  $U$  כנ"ל<sup>10</sup>, אם  $Df(x) = 0$  לכל  $x$ , אזי  $f$  קבועה.

הוכחה: נסמן<sup>11</sup>:

$$\varphi: [0, 1] \rightarrow U \quad \varphi(t) = t \cdot b + (1 - t) \cdot a$$

$$F(t) = f \circ \varphi(t) = f(\varphi(t))$$

אזי, לפי כלל השרשרת:

$$\varphi'(t) = b - a \Rightarrow F'(t) = Df(\varphi(t))(b - a)$$

<sup>10</sup>הקמירות היא overkill, אפשר להוכיח עם קשירות בלבד.  
<sup>11</sup>נשים לב לחשיבות ההגדרות הללו - בכך שאנו מבטיחים כי  $0 \leq t \leq 1$ , בשימוש במשפט הערך הממוצע בהמשך נשתמש ב- $a = 0, b = 1$  ואז  $b - a = 1$  כלומר  $F'(t_0) = 1 \cdot F'(t_0)$  עבור  $t_0 \in (0, 1)$ .

במקרה א' נקבל,

$$F'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), b-a \rangle$$

במקרה זה  $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , לכן לפי משפט הערך הממוצע, קיים  $t_0 \in (0, 1)$  כך ש:

$$f(b) - f(a) = F(1) - F(0) = \left\langle \nabla f \left( \overbrace{\varphi(t_0)}^c \right), b-a \right\rangle$$

במקרה ב', נתבונן בפונקציה סקלרית:

$$g(t) = \left\langle \overbrace{F(1)}^{=f(b)} - \overbrace{F(0)}^{=f(a)}, F(t) \right\rangle, \quad 0 \leq t \leq 1$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \langle f(b) - f(a), Df(\varphi(t)) \cdot (b-a) \rangle + \langle 0, F(t) \rangle \\ &= \langle f(b) - f(a), Df(\varphi(t)) \cdot (b-a) \rangle \end{aligned}$$

לפי משפט הערך הממוצע הרגיל, קיים  $0 < t_0 < 1$  כך ש:

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\|^2 &= g(1) - g(0) = \left\langle f(b) - f(a), Df \left( \overbrace{\varphi(t_0)}^c \right) (b-a) \right\rangle \\ &\leq \|f(b) - f(a)\| \|Df(c)\| \|b-a\| \end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון הוא לפי א"ש קושי שורץ, וסיימנו!

לגבי ב' - נשאל, מדוע מקרה א ומקרה ב שונים, כלומר, למה לא ניתן לקבל שיוויון? נוכיח בכך שנראה דוגמה עבורה השיוויון המבוקש לא מתקיים - נביט לדוגמה על חצי מעגל  $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (cost, sint)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , כך ש  $f(0) = (1, 0)$ ,  $f(\pi) = (-1, 0)$  הם קצוותיו. אזי הנגזרות תמיד יהיו משיקות למעגל. נקבל:

$$f(\pi) - f(0) = f'(c) \cdot \pi$$

נוכל להגדיר את  $f$  בצורה שכזו כך ש"זה יהיה בעייתי שהדברים יסכימו" - כלומר שגודל המשיק יהיה כרצוננו. אם ניקח את הקו  $(cost, sint, t)$  הבורג ב- $\mathbb{R}^3$  נקבל בעייתיות אפילו יותר גדולה - כאן לא נוכל אפילו לוודא שכיוון המשיק יהיה כרצוננו. ■

**מסקנה 2.30** אם  $U \subset \mathbb{R}^n$  קמורה,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  דיפרנציאבילית, ו- $\|Df(a)\| \leq K$  לכל  $a \in U$ , אזי  $f$  מקיימת ב- $U$  את תנאי ליפשיץ עם הקבוע  $K$ .

**מסקנה 2.31** אם  $U \subset \mathbb{R}^n$  קמורה,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  דיפרנציאבילית ומתקיים  $Df(a) = 0$  לכל  $a \in U$ , אזי  $f$  קבועה (וברור שההפך נכון גם כן).

## 2.2.3 נגזרות מעורבות

**הגדרה 2.32** תהי  $U \subset \mathbb{R}^n$  פתוחה,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , ויהיו  $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$ . מגדירים באינדוקציה:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right) (a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} (a)$$

**הערה 2.33** כדי שההגדרה תהיה אפשרית, צריכה להתקיים בסביבה של  $a$ .

אלה הן נגזרות חלקיות מסדר  $k$ .

למשל:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (x^y) = x^{y-1} + y \cdot \ln(x) \cdot x^{y-1}$$

נניח ש- $f$  דיפרנציאבילית ב- $U$ , והדיפרנציאל  $Df: U \rightarrow \text{Hom}(n, m)$  בעצמו דיפרנציאבילי ב- $a$ . אזי מגדירים את הדיפרנציאל השני של  $f$  ב- $a$  כ- $D(Df)(a) = D^2 f(a)$ . נשים לב ש:

$$\mathbb{R}^{mn^2} = \text{Hom}(n, \text{Hom}(m, n)) \ni D^2 f(a)$$

באינדוקציה מגדירים את הדיפרנציאל ה- $k$  אי להיות:

$$D(D^{k-1} f)(a) = D^k f(a)$$

נשים לב ש:

$$\mathbb{R}^{mn^k} = \text{Hom}(n, \text{Hom}(n, \text{Hom}(n, \dots, \text{Hom}(m, n)))) \ni D^k f(a)$$

**הגדרה 2.34** אומרים ש- $f$  דיפרנציאבילית  $k$  פעמים ברציפות ב- $U$ , ונסמן  $f \in C^k(U)$ , אם ההעתקה:

$$D^k f: U \rightarrow \mathbb{R}^{mn^k}$$

הינה רציפה.

ממשפט קודם מקבלים מיד באינדוקציה את ההערה הבאה:

**הערה 2.35**  $f \in C^k(U)$  אמ"מ כל הנגזרות החלקיות של  $f$  מסדר  $k$  הינן רציפות.

**משפט 2.36** תהי  $U \subset \mathbb{R}^2$  פתוחה,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , ונניח כי הנגזרות המעורבות  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  קיימות ב- $U$  ורציפות בנקודה  $(a, b) \in U$ . אזי:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (a, b)$$

**הערה 2.37** הדבר בכלל לא מובן מאליו - למשל אם נביט בפונקציה  $f(x, y) = x^y$  - שיויון הנגזרות כאן נראה די מפתיע. מצד שני, עבור פולינום, זוהי פונקציה מהצורה  $\sum_{n,m \leq N} a_{nm} x^n y^m$ . הדבר אכן טריוויאלי.

**הוכחה:** יהי  $\delta > 0$  כך ש:

$$U \supset [a - \delta, a + \delta] \times [b - \delta, b + \delta]$$

עבור  $x, y < \delta$  נגדיר<sup>12</sup>:

$$\Delta^2 f(x, y) = f(a + x, b + y) - f(a + x, b) - f(a, b + y) + f(a, b)$$

**טענה 2.38** לכל  $x, y < \delta$  קיים  $(c, d) \in (a - x, a + x) \times (b - y, b + y)$  כך ש:

$$\Delta^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c, d) \cdot x \cdot y$$

מטענה זו נובע המשפט: בגלל הסימטריה, נכון גם שקיים  $(c', d') \in (a - x, a + x) \times (b - y, b + y)$  כך ש:

$$\Delta^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c', d') \cdot y \cdot x$$

כאשר  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , בגלל רציפות הנגזרות המעורבות, נקבל כי:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c, d), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c', d')$$

מצד שני:

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c', d') = \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{\Delta^2(x, y)}{xy} = \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c, d)$$

נוכיח את הטענה אם כך, ונסיים: **הוכחה:** נגדיר פונקציה של משתנה אחד  $\varphi$  בצורה הבאה:

$$\varphi(t) = f(t, b + y) - f(t, b)$$

היא גזירה בקטע  $(a, a + x)$ , ומתקיים:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, b + y) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, b)$$

$\varphi$  גם רציפה ב- $[a, a + x]$ , ולכן, לפי משפט הערך הממוצע, קיים  $a < c < a + x$  כך ש:

$$\Delta^2(x, y) = \varphi(a + x) - \varphi(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(c, b + y) - \frac{\partial f}{\partial x}(c, b)$$

■ אותו שיקול לגבי הפונקציה  $\psi(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(c, t)$  בקטע  $[b, b + t]$  מוכיח את הטענה. ■

<sup>12</sup>אינטואיטיבית, הגודל הזה קרוב מאוד ל- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)xy$

**מסקנה 2.39** אם  $f \in C^k(U)$ , אזי:

$$\frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}} = \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}$$

אם  $(j_1, \dots, j_k)$  היא פרמוטציה של  $(i_1, \dots, i_k)$ . למשל:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_7 \partial x_5^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_5 \partial x_7 \partial x_5}$$

זוהי מסקנה מיידית: הרי כל פרמוטציה היא הרכבה של סדרה של החלפות, ושיויון נגזרות חלקיות כאשר רק שני מקומות מוחלפים הוא שיקול דו מימדי. למשל, בדוגמא הנ"ל, מספיק לדעת כי:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_7 \partial x_5} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_5 \partial x_7}$$

#### 2.2.4 נוסחת טיילור

תהי  $U \subset \mathbb{R}^n$  פתוחה,  $[a, a+h] \subset U$ ,  $f \in C^k(U)$ ,  $h = (h_1, \dots, h_n)$ . נסתפק בשתי גרסאות פשוטות של נוסחת טיילור:

א.  $k=2$ , כללי.  $n$  קיים  $0 < \theta < 1$  כך ש:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a+\theta h) h_i h_j$$

ב.  $k$  כללי,  $n=2$ . אזי קיים  $0 < \theta < 1$  כך ש:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} \frac{\partial^j f(a)}{\partial y^{j-i} \partial x^i} + \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k f(a+\theta h)}{\partial y^{k-i} \partial x^i}$$

4/12/2011

**הוכחה:** באינפי 2 ראינו את הנוסחה עבור  $F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  הגזירה  $k$  פעמים (ב- $0,1$  נגזרות חד צדדיות), קיים  $0 < \theta < 1$  כך ש:

$$F(1) = F(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} F^{(j)}(0) + \frac{1}{k!} F^{(k)}(\theta)$$

נגדיר פונקציית עזר:

$$F(t) = f(a+th)$$

נשים לב כי היא מקיימת את התנאים הנ"ל.

א. לפי כלל השרשרת,  $F'(t) = \langle \nabla f(a+th), h \rangle$ . נסמן  $\varphi(t) = \nabla f(a+th)$ , לפי כלל השרשרת:  $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$F''(t) = \langle D(\nabla f)(a+th)h, h \rangle$$

רואים ש:

$$D(\nabla f)(x)h = H(x)$$

כאשר  $H(x)$  היא ההסיאן (מטריצת הנגזרות המעורבות). אזי:

$$F''(t) = \langle Hh, h \rangle = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a+th)}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j$$

הצבה של הנ"ל בנוסחא של טיילור משנה א' נותנת את הנוסחא בסעיף זה.  
ב. נוכיח באינדוקציה את הנוסחא:

$$F^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \underbrace{\frac{\partial^j f(a+th)}{\partial y^{j-1} \partial x^i}}_{\varphi(a+th)} h_1^i h_2^{j-1-i}$$

באינדוקציה על  $j$ , בעזרת כלל השרשרת:  
 $j=0$  ברור.

נניח נכונות עבור  $j$ , צ"ל עבור  $j+1$ :

$$\begin{aligned} F^{(j+1)} &= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \langle \nabla \varphi(a+th), h \rangle h_1^i h_2^{j-i} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^{j+1} f(a+th)}{\partial x \partial y^{j-1} \partial x^i} h_1^{i+1} h_2^{j-1-i} + \frac{\partial^{j+1} f(a+th)}{\partial y^{j+1} \partial x^i} h_1^i h_2^{j+1-i} \\ &= \frac{\partial^{j+1} f(a+th)}{\partial y^{j-1} \partial x^{i+1}} h_1^{i+1} h_2^{j-1-i} + \frac{\partial^{j+1} f(a+th)}{\partial y^{j+1} \partial x^i} h_1^i h_2^{j+1-i} \end{aligned}$$

המקדם (ב- $F^{(j+1)}(t)$ ) של  $h_1^i h_2^{j+1-i}$  יבוא משני הביטויים מעלה, ולכן נקבל  $\binom{j}{i-1} + \binom{j}{i}$  ומנוסחאת הבינום סכום זה שווה ל- $\binom{j+1}{i}$ . ■

נוסחא זו לא יעילה במיוחד. עם זאת, לנוסחא מהשיעור הקודם יש דווקא שימוש:

$$(a, a+h) \subset U \subset \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a+\theta h) \cdot h_i h_j$$

כאשר לכל  $h$  קיים  $\theta$  המתאימה לו.

## 2.2.5 נקודות קיצון

כמו שבשנה הקודמת עשינו שימוש בנגזרות למטרת מציאת נקודות אקסטרים, נעשה שימוש דומה כעת:

**הגדרה 2.40** תהי  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in U$  תקרא נקודת קיצון של  $f$  אם קיים  $r > 0$  כך שלכל  $x \in B_r(a) \setminus \{a\}$ ,  $f(x) > f(a)$  (מינימום) או  $f(x) < f(a)$  (מקסימום).

**הערה 2.41** אם  $a \in U$  נקודת קיצון של  $f$ , וקיימת  $D_v f(a)$ , אזי  $D_v f(a) = 0$ , כי  $\varphi'(0) = D_v f(a)$  עבור  $\varphi(t) = f(a + tv)$  (אם  $a$  נקודת קיצון של  $f$ , אזי  $0$  היא נקודת קיצון של  $\varphi$ ).

**הערה 2.42** (תנאי הכרחי לקיצון) אם  $f$  דיפרנציאבילית ב- $a$ , ו- $a$  נק' קיצון, אזי  $\nabla f(a) = 0$  ( $\in \mathbb{R}^m$ ).

**הגדרה 2.43** אם  $\nabla f(a) = 0$ , אזי  $a$  נקראת נקודה סטציונרית של  $f$ <sup>13</sup>.

**הגדרה 2.44** פונקציה  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  מהצורה  $f(x) = \sum a_{i,j} x_i x_j$  נקראת תבנית ריבועית. צורה זו שוות ערך לצורה  $\langle Mx, x \rangle$  כאשר  $M \in \text{Hom}(n, n)$  ניתנת ע"י המטריצה:

$$M = (a_{i,j})$$

**הגדרה 2.45** תבנית ריבועית  $f$  נקראת מוגדרת אם ל- $f(x)$  סימן קבוע ב- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  (מוגדרת חיובית אם הסימן חיובי, מוגדרת שלילית אם הסימן שלילי, ולא מקבלת אפס בשום מקום פרט ל- $0$ ).

**הגדרה 2.46** תבנית ריבועית  $f$  תקרא בלתי מוגדרת אם קיימים  $x, y \in \mathbb{R}^n$  כך ש:  $f(x) < 0 < f(y)$ .

**הערה 2.47** נשים לב כי אם תבנית ריבועית  $f$  אינה רק מוגדרת או בלתי מוגדרת - ישנו מקרה נוסף:

**הגדרה 2.48** תבנית ריבועית  $f$  נקראת מוגדרת למחצה, אם אינה מוגדרת ואינה בלתי מוגדרת (כלומר או ש- $f(x) \geq 0$  לכל  $x$ , או  $f(x) \leq 0$  לכל  $x$ , וקיים  $x \neq 0$  כך ש:  $f(x) = 0$ ).

**הערה 2.49** עבור  $n = 1$   $f$  חייבת להיות מוגדרת או מוגדרת למחצה - נקבל  $a \cdot x^2$ , אם  $a = 0$  אזי  $f$  מוגדרת למחצה (כל הערכים שנקבל יהיו  $0$ ), אחרת הערך שנקבל תמיד יהיה חיובי, ואז  $f$  מוגדרת.

**הערה 2.50** לתבנית מסויימת ישנן הצגות שונות - אפשר "לשחק" עם ערכי המטריצה.

#### דוגמא

תבנית ריבועית  $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$  היא מוגדרת חיובית אם  $\lambda_i > 0$  לכל  $i$ , מוגדרת שלילית אם  $\lambda_i < 0$  לכל  $i$ , בלתי מוגדרת אם יש  $i, j$  כך ש- $\lambda_i > 0$ ,  $\lambda_j < 0$ , והיא מוגדרת למחצה אם  $\lambda_i \leq 0$  לכל  $i$ , ו- $\lambda_i = 0$  עבור  $i$  מסויים.

<sup>13</sup> כמו באינפי 2, רק יותר חזק - אם נסתכל על מערכת המשוואות מהן הן מתקבלות, נקבל מערכת של  $n$  משוואות של  $n$  נעלמים - כלומר מספר הנקודות הוא סופי, דהיינו נקודות אלו "די נדירות".

## טענה 2.51 א.

$$|f(x)| = |\langle Mx, x \rangle| \leq \|M\| \cdot \|x\|^2$$

ב. עבור  $x \in \mathbb{R}^n$  קבוע, ההעתקה  $\langle Mx, x \rangle \in \text{Hom}(n, n) \ni M \rightsquigarrow$  היא רציפה (ליפשיצית עם קבוע  $\|x\|^2$ )

ג. אוסף המטריצות המוגדרות חיובית (שלילית) פתוח ב- $\text{Hom}(n, n)$ .

ד. לכל  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\{M \in \text{Hom}(n, n) \mid \langle Mx, x \rangle < 0 < \langle My, y \rangle\}$  היא קבוצה פתוחה ב- $\text{Hom}(n, n)$ .

**הערה 2.52** מד' נובע שאוסף כל המטריצות של התבניות הבלתי מוגדרות פתוח, אולם תנאי ד' חזק יותר.

**הוכחה:** א' - לפי קושי שורץ והגדרת הנורמה האופרטורית, נקבל:

$$|f(x)| = |\langle Mx, x \rangle| \leq \|Mx\| \cdot \|x\| \leq \|M\| \cdot \|x\| \cdot \|x\| = \|M\| \cdot \|x\|^2$$

ב' - מתקיים:

$$|\langle Mx, x \rangle - \langle M_1x, x \rangle| = |\langle (M - M_1)x, x \rangle| \leq \|M - M_1\| \cdot \|x\|^2$$

כלומר ההעתקה ליפשיצית, ולכן בפרט רציפה.

ג' - נניח  $M$  מוגדרת חיובית, ויהי  $\{x \mid \|x\| = 1\}$ . הספחה  $\alpha = \inf \{\langle Mx, x \rangle \mid \|x\| = 1\}$ . ניקח  $\alpha > 0$ .  $B_{\frac{\alpha}{2}}(M) \ni M_1$  עבור  $x$  עם  $\|x\| = 1$ , מתקיים:

$$\langle M_1x, x \rangle \geq \langle Mx, x \rangle - |\langle (M - M_1)x, x \rangle| \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

זאת אומרת  $\langle M_1x, x \rangle > 0$  לכל  $x$  מהספירה. אולם, עבור  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ :

$$\langle M_1y, y \rangle = \|y\|^2 \left\langle M_1 \left( \frac{y}{\|y\|} \right), \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \geq \|y\|^2 \frac{\alpha}{2} > 0$$

ד. נובע מיידית מא'.

נרצה לתת קריטריון לגבי נקודות קיצון:

## תנאי מספיק לקיצון:

**משפט 2.53** תהי  $f \in C^2(U)$ , ותהי  $a$  נקודה סטציונרית של  $f$ .

א. אם ההסיאן<sup>14</sup> של  $f$  ב- $a$  מוגדר, אזי היא נקודת קיצון - אם חיובית אז נק' מינימום, אם שלילית אז נק' מקסימום<sup>15</sup>.

<sup>14</sup>תזכורת: מטריצה של נגזרות שניות.

<sup>15</sup>למה ההסיאן לא חייב להיות אפס? למשל אם נביט בפונקציה מהצורה  $ax^2 + by^2$  כאשר  $a, b \neq 0$ . אזי הנקודה הסטציונרית היחידה היא  $(0, 0)$ , ונקבל שההסיאן הוא:

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$$

אם  $a, b$  בעלי אותו הסימן, אזי אם הוא חיובי אז ההסיאן מוגדר חיובי, אם שניהם בסימן שלילי, ההסיאן מוגדר שלילי, ואם הסימן של  $a$  שונה מהסימן של  $b$ , אזי ההסיאן אינו מוגדר.

ב. אם  $H(a)$  בלתי מוגדר, אזי  $a$  איננה נק' קיצון.  
ג. אם  $H(a)$  מוגדר למחצה, אין הכרעה.<sup>16</sup>

**הוכחה:** נשים לב ששימוש בנוסחת טיילור שהבאנו בתחילת השיעור מפשט לנו עד מאוד את הוכחת המשפט - מכיוון  $a$  סטציונרית, קיים  $0 < \theta < 1$  (התלוי ב- $h$ ) כך ש:

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a+\theta h) \cdot h_i h_j$$

$$\Rightarrow f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} \langle H(a+\theta h)h, h \rangle$$

א. נניח כי  $H(a)$  מוגדר חיובית. מסעיף ג' של הטענה הקודמת, נובע שקיים  $\varepsilon > 0$  כך ש  $M(x)$  מוגדרת חיובית לכל  $x \in B_\varepsilon(a)$ . לכן לכל  $h$  המקיים  $\|h\| < \varepsilon$ , מתקיים  $0 < \langle H(a+\theta h)h, h \rangle$  (כי  $\|\theta h\| < \varepsilon$ ), כלומר  $f(a+h) > f(a)$ , על כן  $f(a)$  היא נקודת מינימום.  
ב. ההסיאן אינו מוגדר, לכן קיימים  $x, y \in \mathbb{R}^n$  כך ש:

$$H(a)y > 0 > H(a)x \Rightarrow \langle H(a)x, x \rangle < 0 < \langle H(a)y, y \rangle$$

מסעיף ד' של הטענה הקודמת, קיים  $\varepsilon > 0$  כך ש:

$$\langle H(z)x, x \rangle < 0 < \langle H(z)y, y \rangle$$

לכל  $z \in B_\varepsilon(a)$ . ניקח  $h = tx$ . עבור  $\|x\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$ , ולכן (מסעיף א' של הטענה):

$$0 > \langle H(a+\theta h)x, x \rangle = \frac{1}{t^2} \langle H(a+\theta h)h, h \rangle$$

לכן  $f(a+tx) < f(a)$ . באותה הצורה, נקבל כי  $f(a+ty) > f(a)$ , על כן  $a$  איננה נקודת קיצון. ■

## 2.2.6 היעקוביאן

סימון:  $GL(n) = \{T \in Hom(n, n) \mid \det T \neq 0\}$ .

**הערה 2.54** הפונקציה  $\det T : Hom(n, n) \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה, לכן  $GL(n) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  הינה פתוחה.

**הערה 2.55** ההעתקה  $T \rightsquigarrow T^{-1}$ , כלומר  $\Phi : GL(n) \rightarrow GL(n)$  המוגדרת  $\Phi(T) = T^{-1}$  הינה רציפה.  
זה נכון לפי אותו שיקול, כמו רציפות הדטרמיננטה:

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} (d_{ij}(T))$$

כאשר לכל  $i, j$ ,  $d_{ij}$  הוא פולינום ב- $x_{ii}$  (כאשר  $T = (x_{ii})$ ). לכן  $d_{ij}(T)$  רציף לכל  $i, j$ . ולכן גם  $\Phi$  רציף.

<sup>16</sup>למשל  $f(x) = x^3$ .

**הגדרה 2.56** אם  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  דיפרנציאבילית ב- $a$ , היעקוביאן של  $f$  ב- $a$  מוגדר להיות:

$$Jf(a) = \det Df(a)$$

**טענה 2.57** תהי  $T \in GL(n)$ . אזי:

$$||T^{-1}|| \geq ||T||^{-1}.$$

א.

$$\begin{aligned} ||T^{-1}|| &\stackrel{A}{=} \max \left\{ \frac{||x||}{||Tx||} \mid x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} \stackrel{B}{=} \max \left\{ ||Tx||^{-1} \mid ||x|| = 1 \right\} \\ &\stackrel{C}{=} [\min \{ ||Tx|| \mid ||x|| = 1 \}]^{-1} \end{aligned}$$

ג. לכל  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$||T^{-1}||^{-1} ||x|| \leq ||Tx|| \leq ||T|| ||x||$$

**הוכחה:** א.  $I = T^{-1}T$ , לכן  $||I|| \leq ||T^{-1}|| ||T||$ .  $1 = ||I||$ .

$$B. \left\{ \frac{||x||}{||Tx||} \mid x \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{||Ty||}{||y||} \mid y \neq 0 \right\}$$

שתי קבוצות המספרים שוות:

C. אם  $D$  קבוצת מספרים אי שליליים, אז  $\max \{ t^{-1} \mid t \in D \} = \min \{ t \in D \}^{-1}$ .  
 ג. כי:

$$||x|| = ||(T^{-1}T)x|| = ||x|| \leq ||T^{-1}|| ||Tx||$$

■

## 2.3 משפטים יסודיים בחשבון דיפרנציאלי של מספר משתנים

ישנם 3 משפטים חשובים בפרק זה שהם "פחות או יותר שקולים". נתחיל היום לעבוד עליהם.

### 2.3.1 משפט הפונקציה ההפוכה

נזכר במשפט משנה א' - משפט הפונקציה ההפוכה:

**משפט 2.58** תהי  $f \in C^1((a, b))$ ,  $f'(a) \neq 0$ ,  $b = f(a)$ . אזי קיים  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  כך שלכל  $y \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  קיים  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  כך ש- $f(x) = y$  (או:  $f^{-1}(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \rightarrow (a - \delta, a + \delta)$  מוגדרת היטב, בנוסף  $f^{-1} \in C^1$ ).

**הוכחה:** נניח  $f'(a)$  חיובית.  $f'$  רציפה מהנתון, לכן קיים  $\delta > 0$  כך ש- $f'(x) > 0$  עבור  $x \in (a - \delta, a + \delta)$ .  $f$  מונוטונית עולה ב- $(a - \delta, a + \delta)$ . ניקח  $\varepsilon$  כך ש- $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset f((a - \delta, a + \delta))$ . ברור ש- $f$  ח"ע בתחומים אלו.

■

<sup>17</sup>נשים לב כי זהו בד"כ זהו אי שיוויון (ויש לכך כל מיני השלכות)

ננסח את המשפט הנ"ל עבור פונקציות ב- $n$  מימדים.  
 במקרה המקורי החח"ע ברורה מהמונוטוניות - הפעם תהיה לנו בעיה, ונצטרך להוכיח באופן מפורש את התכונה הזו. נשתמש בקשר בין סדר ספציפי למטריקה - נמצא סדר יעיל שיעזור לנו בכך (לדוגמא, הסדר של "קודם להסתכל על משתנה  $x$  ואח"כ על  $y$  לא ממש יעזור לנו).  
 6/12/2011

**משפט 2.59** תהי  $W \subset \mathbb{R}^n$  קבוצה פתוחה,  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  דיפרנציאבילית ברציפות, ותהי  $a \in W$  כך ש- $Df(a) \in GL(n)$  (אזי:  $Jf(a) \neq 0$ ). אזי:  
 א. קיימות קבוצות פתוחות:  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in U$ ,  $f(a) \in V$  כך ש- $f : U \rightarrow V$  היא בייקציה (חח"ע ועל).  
 ב. הפונקציה ההופכית  $f^{-1}$  דיפרנציאבילית, ומתקיים:

$$Df^{-1}(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1}$$

למשל:

$$Df^{-1}(b) = [Df(a)]^{-1}$$

ג.  $f^{-1}$  דיפרנציאבילית ברציפות<sup>18</sup>.

מה המשפט אומר?  
 ניתן לחשוב על  $f$  כמערכת משוואות:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= y_1 = b_1 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= y_n = b_n \end{aligned}$$

המשפט למעשה אומר שקיים פתרון למשוואה זו, וכן כי פתרון זה יחיד.  
 עם זאת, המשפט הזה לא נותן איזה דרך להגיע לפתרון כללי. אם נקבל הסטה של  $b$  (כלומר איזשהוא שיבוש של  $b$ ), אז נוכל להגיע לפתרון שהוא קרוב לפתרון של  $b$ , וכאמור יהיה רק פתרון אחד כזה. **הוכחה:** א. <sup>19</sup>עבור  $y \in \mathbb{R}^n$ . נגדיר פונקציית עזר:

$$F = F_y : W \rightarrow \mathbb{R}^n, F(x) = x - Df(a)^{-1}(f(x) - y)$$

נרצה להשתמש במסקנה ממשפט ההעתקה המכווצת עבור  $g(x) = f(x) - y$ . אם כך, יש לעסוק בשתי בעיות:

1. מתי  $F$  מכווצת.
2. מציאת  $X$  כך ש- $F(X) \subset X$ .
1. מתקיים:

$$\begin{aligned} DF(x) &= I - Df(a)^{-1} Df(x) \Rightarrow Df(a)^{-1}(Df(a) - Df(x)) \\ \Rightarrow \|DF(x)\| &\leq \|Df(a)^{-1}\| \cdot \|Df(a) - Df(x)\| \end{aligned}$$

<sup>18</sup>מדוע ההפרדה בין הסעיפים? אם יודעים את קיום א' וב', אז אפשר להוכיח את ג' בצורה פורמלית כמעט מיידית.  
<sup>19</sup>זהו ביצוע של הרמז שמופיע בלינדשטראוס

$\|Df(x)^{-1}\|^{-1} \leq, x \in \mathbb{R}^n$  לכל יודעים כי  $Df(x) \in GL(n)$ , לכן מטענה קודמת  $\|Df(a) - Df(x)\| \leq \delta > 0$  קיים  $\delta > 0$  כך ש:  $\|Df(a)^{-1}\|^{-1} \leq \frac{1}{2}$  עבור כל  $x \in \bar{B}_\delta(a)$  אזי  $\|Df(x)\| \leq \frac{1}{2}$  לכל  $x \in \bar{B}_\delta(a)$ . נשים לב כי  $\delta$  איננו תלוי ב- $y$ .

לפי משפט הערך הממוצע ( $n$  מימדי, הכדור הוא קבוצה קמורה ועל כן ניתן להשתמש במשפט),  $F$  מקיימת את תנאי לפישיץ עם קבוע  $\frac{1}{2}$  במרחב שלם  $X := \bar{B}_\delta(a)$ , כלומר מכווצת.

2. אנו צריכים למצוא תנאי על  $y$  כך ש- $F(X) \subset X$ , כלומר לכל  $x$  כך ש- $\|x - a\| < \delta$ , מתקיים  $\|F(x) - a\| < \delta$ . להערכת  $\|F(x) - a\|$  נשתמש בעובדה ש:

$$F(x) - a = F(x) - F(a) + F(a) - a$$

ולכן:

$$\|F(x) - a\| \leq \|F(x) - F(a)\| + \|F(a) - a\| \leq \frac{1}{2} \|x - a\| + \left\| -Df(a)^{-1} \left( \overbrace{f(a)}^b - y \right) \right\|$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש- $F$  ליפשיצית עם קבוע  $\frac{1}{2}$  ב- $X$ . האיבר הראשון  $\frac{1}{2} \delta \geq$  השני  $\|Df(a)^{-1}\| \cdot \|y - b\|$ , לכן, אם:

$$\|y - b\| \leq \left\| Df(a)^{-1} \right\|^{-1} \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

אזי  $F(X) \subset X$ . נעיר שאם  $\|y - b\| < \varepsilon$  אזי  $F(B_\delta(a)) \subset B_\delta(a)$ . כמסקנה ממשפט העתקה מכווצת, מקבלים:

יהי  $V = B_\varepsilon(b)$ ,  $U = f^{-1}(V) \cap B_\delta(a)$ . אזי, לכל  $y \in V$  קיים  $x \in U$  יחיד כך ש- $y = f(x)$ , וזהו טענה א' של המשפט. ב. תחילה נוכיח:

**למה 2.60**  $f^{-1} : V \rightarrow U$  מקיימת את תנאי לפישיץ.

**הוכחה:** יהיו  $u, v \in V$  כך ש- $f^{-1}(v) = x$ ,  $f^{-1}(u) = y$ . אזי  $x, y \in \bar{B}_\delta(a)$ ,  $u = f(x)$ ,  $v = f(y)$ . עבור  $z \in \bar{B}_\delta(a)$  נגדיר  $r(z)$  ע"י:

$$f(z) = f(a) + Df(a)(z - a) + r(z)$$

אזי מתקיים:

$$\begin{aligned} v - u &= f(y) - f(x) = Df(a)(y - x) + r(y) - r(x) \\ \Rightarrow \|v - u\| &\geq \|Df(a)(y - x)\| - \|r(y) - r(x)\| \\ &\geq \left\| Df(a)^{-1} \right\|^{-1} \|y - x\| - \|r(y) - r(x)\| \end{aligned}$$

להערכת  $\|r(y) - r(x)\|$  נשים לב כי מתקיים (שירות מההגדרה של  $f(z)$ ):

$$Dr(z) = Df(z) - Df(a)$$

לכן, לפי משפט הערך הממוצע:

$$\|r(y) - r(x)\| \leq \sup_{z \in \overline{B}_\delta(a)} \|Df(z) - Df(a)\| \cdot \|y - x\| \leq \frac{1}{2} \|Df(a)^{-1}\|^{-1} \|y - x\|$$

$$\Rightarrow \|v - u\| \geq \frac{1}{2} \|Df(a)^{-1}\|^{-1} \|y - x\|$$

כלומר  $\|f^{-1}(v) - f^{-1}(u)\| \geq K \|v - u\|$  עבור  $K = 2 \|Df(a)^{-1}\|$ , כלומר  $f^{-1}$  מקיימת את תנאי ליפשיץ.

11/12/2011

יהי  $y = f(x)$ , כלומר  $x = f^{-1}(y)$ . בהנתן  $k \in \mathbb{R}^n$  כך ש- $x+k \in V$ , נגדיר  $h(k)$ ,  $r(k)$  בצורה הבאה:

$$f^{-1}(y+k) = f^{-1}(y) + Df(x)^{-1}k + r(k)$$

$$f^{-1}(y+k) = f^{-1}(y) + h(k)$$

יש להוכיח:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{r(k)}{\|k\|} = 0$$

כמו כן, אם  $x+h \in U$ , נגדיר  $\rho(h)$  ע"י:

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \rho(h)$$

אזי  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(h)}{\|h\|} = 0$  (כיוון ו- $f$  דיפרנציאבילית).

נרצה להשתמש ברשום מעלה ע"מ לבטא את המונחים המתאימים ל- $f^{-1}$ . אזי:

$$\begin{aligned} r(k) &= h(k) - Df(x)^{-1}k = h(k) - Df(x)^{-1} \overbrace{[f(x+h(k)) - f(x)]}^{=k} \\ &= h(k) - Df(x)^{-1}(Df(x)(h(k)) + \rho(h(k))) = -Df(x)^{-1}(\rho(h(k))) \\ \Rightarrow \frac{r(k)}{\|k\|} &= -Df(x)^{-1} \frac{\rho(h(k))}{\|k\|} \xrightarrow{?} 0 \Leftrightarrow \frac{\rho(h(k))}{\|k\|} \xrightarrow{?} 0 \text{ when } k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

אנו יודעים כי  $Df(x)^{-1}$  רציפה,  $A$  נכון. על כן עלינו להוכיח את צד ימין. נשים לב:

$$\frac{\rho(h(k))}{\|k\|} = \frac{\rho(h(k))}{\|h(k)\|} \cdot \frac{\|h(k)\|}{\|k\|}$$

הוכחנו כי  $f^{-1}$  ליפשיצית, לכן:

$$\|h(k)\| = \|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)\| \leq K \|k\|$$

ולכן בפרט כאשר  $k \rightarrow 0$ , גם  $h(k) \rightarrow 0$ , לכן:

$$\frac{\rho(h(k))}{\|k\|} \leq K \cdot \frac{\rho(h(k))}{\|h(k)\|} \rightarrow 0$$

זוהי מה שרצינו להוכיח.

ג. רציפות  $Df^{-1} : V \rightarrow GL(n)$  נובעת משיקול "רד":

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{Df^{-1}} & GL(n) \\ f^{-1} \downarrow & & \uparrow \Phi(T) = T^{-1} \\ U & \xrightarrow{Df} & GL(n) \end{array}$$

כאשר  $Df^{-1} = \Phi \circ Df \circ f^{-1}$  כלומר  $Df^{-1}(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1}$ .  
דהיינו, קיבלנו כי  $Df^{-1}$  הוא הרכבה של שלוש העתקות רציפות, לכן גם היא רציפה, כנדרש. ■

### 2.3.2 משפט ההעתקה הפתוחה

יש חשיבות רבה למושג "דואלי" של "פונקציה רציפה".

**הגדרה 2.61** יהיו  $X, Y$  מ"מ. העתקה  $f : X \rightarrow Y$  נקראת (פונקציה) העתקה פתוחה, אם לכל קבוצה פתוחה  $U \subset X$ , הקבוצה  $f(U)$  פתוחה ב- $Y$ .

**הערה 2.62** בתוך  $U$ , מספיק לקחת כדורים  $B_\delta(x)$ .

### דוגמאות

1. אם  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  יש נקודת קיצון, אז  $f$  איננה פתוחה.

2. אם  $f$  מונוטונית ממש ורציפה, אזי  $f$  פתוחה,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

3. תהי  $f : X \rightarrow Y$  בייקציה (חח"ע ועל) פתוחה אמ"מ  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  רציפה.

4.  $T \in Hom(n, m)$  פתוחה אמ"מ  $T$  על (בפרט  $n \geq m$ ), כי אם היא לא על, אזי  $T(\mathbb{R}^n)$  הוא תת מרחב ממש של  $\mathbb{R}^m$ , והוא לא פתוח.

מצד שני, אם  $T$  על, אזי יש ב- $\mathbb{R}^n$  וקטורים  $e_1, \dots, e_m$  כך ש- $\overbrace{\text{span}(e_1, \dots, e_m)}^H$ .  
אזי גם  $T : H \rightarrow \mathbb{R}^m$  חח"ע ו- $T^{-1}$  רציפה, לכן  $T$  פתוחה.

**הערה 2.63** יהי  $f : X \rightarrow Y \subset Z$ . יתכן ש- $f$  פתוחה כהעתקה מ- $X$  ל- $Y$ , אך לא פתוחה כהעתקה מ- $X$  ל- $Z$  - למשל תהי  $f(x) = x^2$ . העתקה זו אינה פתוחה כהעתקה מ- $\mathbb{R}$  ל- $\mathbb{R}$ , אך פתוחה כהעתקה מ- $\mathbb{R}$  ל- $[0, \infty)$ . כלומר ע"י הוספה לטווח של פונקציה נוכל להפוך פונקציה מפתוחה ללא פתוחה.

בהמשך אנו נתעניין רק בהעתקות מ- $\mathbb{R}^n$   $U \subset \mathbb{R}^m$  פתוחה לתוך  $A \subset \mathbb{R}^m$  פתוחה.

### משפט ההעתקה הפתוחה

**משפט 2.64** תהי  $U \subset \mathbb{R}^n$  פתוחה,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  פונקציה דיפרנציאבילית ברציפות. אם  $\text{rank}(Df(x)) = m$  (בפרט  $n \geq m$ ) לכל  $x \in U$ , אזי  $f$  פתוחה.

**הערה 2.65** נביט ב:

$$\text{rank} \left( \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} \right) = \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = m$$

התנאי מעלה שקול לכך שקיימים  $i_1, \dots, i_m$  כך שהמינור:

$$\frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_{i_1}, \dots, x_{i_m})}(a) \in GL(m)$$

**הערה 2.66** אם  $\text{rank}(Df(x)) = m$ , אזי כמובן  $m \leq n$ . עבור  $m = n$  המשפט נובע מיידיית ממשפט הפונקציה ההפוכה.

**הוכחה:** מספיק להוכיח שלכל  $a \in U$ ,  $f(U)$  מכיל סביבה פתוחה של  $f(a)$ . הרעיון הוא למצוא קבוצה פתוחה  $\mathbb{R}^m \supset U_1$ , פונקציה  $g : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$  ו- $a' \in U_1$  כך ש:

$$g(a') = f(a), \quad g(U_1) \subset f(U), \quad Dg(a') \in GL(m)$$

אזי, לפי משפט הפונקציה ההפוכה, קיימות קבוצות פתוחות  $a' \in W \subset \mathbb{R}^m$ ,  $a' \in V \subset \mathbb{R}^m$  כך ש:  $g(V) = W$ . זה מספיק, כי:

$$f(a) = g(a') \in V = g(W) \subset g(U_1) \subset f(U)$$

נבנה את  $g$ :

תהי  $a \in U$ . מכיוון ש- $m = \text{rank}(Df(a))$ , במטריצה  $Df(a)$  יש  $m$  עמודות בת"ל. בה"כ נניח שאלו הן העמודות הראשונות, כלומר:

$$\frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_m)}(a) \in GL(m)$$

נגדיר  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ע"י:

$$T(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, a_{m+1}, \dots, a_n)$$

ברור כי  $a = Ta'$  כאשר  $a' \in \mathbb{R}^m$  מוגדרת ע"י  $a' = (a_1, \dots, a_m)$ . נגדיר העתקה חדשה:

$$g = f \circ T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

וכן נגדיר  $U_1 = PU$ , כאשר  $P(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ .

אזי  $U_1$  פתוחה ב- $\mathbb{R}^m$ , כי  $P$  לינארית ועל. לפי כלל השרשרת,  $Dg(a') = Df(Ta') \circ$

$$DT(a') = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}^{-1}, a = Ta', \text{ כאמור } DT(a') \text{ ולכן:}$$

$$Dg(a') = Df(a) \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \in GL(m)$$

מצאנו אם כך  $g$  כפי שרצינו, לכן לפי משפט הפונקציה ההפוכה, נקבל כי  $f(U)$  אכן פתוחה ב- $Y$ , כנדרש. ■

### 2.3.3 משפט כופלי לגראנז'

**הגדרה 2.67** תהי  $U \subset \mathbb{R}^n$  קבוצה פתוחה,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_1, \dots, g_k: U \rightarrow \mathbb{R}$  אומרים  $a \in U$  היא נקודת מינימום (מקסימום) של  $f$  תחת תנאי אילוף  $g_1 = 0, \dots, g_k = 0$  אם:

$$1. (0, \dots, 0) = g(a) \stackrel{\text{notation}}{=} (g_1(a), \dots, g_k(a)).$$

2. קיים  $\varepsilon > 0$  כך שאם  $x \in B_\varepsilon(a)$ ,  $g(x) = 0$ , אזי  $f(x) \geq f(a)$ . במקרה זה אומרים ש- $x$  מקיים את תנאי אילוף  $g$ .

### דוגמא

1. במקרים רבים מסתכלים על אילוף יחיד - דוגמא טיפוסית היא בהנתן משטח  $M$ :

$$M = \{(x, y, z) | x^2 + 3y^2 + 2z^4 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

רוצים למצוא את הנקודה  $a$  על  $M$  הקרובה ביותר לראשית הצירים  $(0, 0, 0)$ . אזי,  $a$  צריכה להיות המינימום של הפונקציה  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  (זוהי פונקציית המרחק) תחת תנאי אילוף:

$$g(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^4 - 1 = 0$$

2. תהי  $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in Hom(2, 3)$ . אם התבקשנו למצוא את  $\|T\|$ , עלינו למצוא מקסימום של הפונקציה:

$$f(x, y) = \left[ (x + 2y)^2 + (3x + 4y)^2 + (5x + 6y)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

תחת תנאי האילוף  $x^2 + y^2 = 1$ .

**משפט 2.68** יהיו  $f : U \rightarrow \mathbb{R}, g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  פונקציות דיפרנציאביליות ברציפות. אם  $a \in U$  היא נקודת קיצון של  $f$  תחת האילוץ  $g = 0$ , אזי

$$\text{rank} \frac{\partial (f, g_1, \dots, g_k)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(a) \leq k$$

**הערה 2.69** מהיכן השם? במקרה סביר ש:  $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_k(a)$  ב"ת לינארית, פירושו של התנאי הוא ש- $\nabla f$  הוא צ"ל של  $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_k(a)$ , כלומר קיימים  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  כך ש:

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(a)$$

כאשר  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  נקראים "כפלי לגראנג'".

13/12/2011

**הוכחה:** נניח בשלילה ש:

$$\text{rank} \frac{\partial (f, g_1, \dots, g_k)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = k + 1$$

נגדיר  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$  ע"י  $F(x) = (f(x), g_1(x), \dots, g_k(x))$ . ברור ש:

$$DF(a) = \frac{\partial (f, g_1, \dots, g_k)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}$$

כלומר מהנחתנו היא מדרגה מלאה, ועל כן, ממשפט הפונקציה הפתוחה,  $F$  היא העתקה פתוחה בסביבה של  $a$ . לכן, לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$  כך ש:

$$(f(a) \pm \delta, 0, \dots, 0) \in \overline{B_\delta}(F(a)) \subset F(B_\varepsilon(a))$$

■

בסתירה!

פירוש גיאומטרי של כופלי לגראנג' - המינימום של  $f$  תחת האילוץ  $g = 0$ . משמעות אנליטית של כופלי לגראנג' - צריך לפתור את מערכת המשוואות:

$$\lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a) + \dots = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$$

⋮

$$\lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(a) + \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

$$g_1(a) = 0$$

⋮

$$g_k(a) = 0$$

כאשר במשוואה זו יש  $n + k$  נעלמים:  $a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ .

**דוגמה לשימוש - הוכחת אי שוויון אריתמטי-גיאומטרי (אי שוויון הומוגני):**

בהנתן  $x_1, \dots, x_n \geq 0$ , אזי  $(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$ .

כיצד נוכיח?

נבחר  $f(x) = (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$ ,  $g(x) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) - 1$  ב- $U = \{x \in \mathbb{R}^n | x_j > 0 \forall 1 \leq j \leq n\}$ .  
 נרצה למצוא את הערך המקסימלי של  $f$  תחת האילוץ  $g = 0$  ב- $A = \{x \in \mathbb{R}^n | x_j \geq 0\}$ .  
 הוא מתקבל ב- $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists j \text{ s.t. } x_j = 0\}$  או ב- $U$ . נשים לב כי לפי ההגדרה, ב- $\partial A$   $f \equiv 0$ , לכן המקסימום יתקבל בנקודה  $U \ni a$  שהיא מקסימום של  $f$  תחת האילוץ  $g = 0$ .  
 לכן  $\nabla f(a)$ ,  $\nabla g(a)$ :

$$\nabla f(a) = \frac{1}{n} f(a) \left( \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n} \right), \quad \nabla g(a) = \frac{1}{n} (1, \dots, 1)$$

הם פורפוזיוניים, דהיינו, קיים  $\lambda$  כך ש- $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$ .  
 מכיוון ש- $g(a) = 0$ , נקבל כי  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$  ולכן  $f(a) = 1$ . לכן, לכל  $A \ni x$  כך ש- $g(x) = 0$  מתקיים:

$$f(x) \leq \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n)$$

כנדרש.

### 2.3.4 משפט הפונקציה הסתומה

18/12/2011

המקרה החד מימדי

**משפט 2.70** יהיו  $A, B \in \mathbb{R}$  קבוצות פתוחות,  $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ברציפות,  $a \in A$ ,  $b \in B$  כך ש- $f(a, b) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ .  
 אזי, קיימות קב' פתוחות  $V, U$  כך ש- $a \in U, b \in V$  והפונקציה יחידה  $g: U \rightarrow V$  כך ש- $f(x, g(x)) = 0$  לכל  $x \in U$ .

פירוש גיאומטרי:

נסמן  $M = \{(x, y) | f(x, y) = 0\}$ . המשפט אומר שהקבוצה  $M \cap U \times V$  הוא גרף של פונקציה  $g$ .  
 פירוש אנליטי:

מהמשוואה  $f(x, y) = 0$  אפשר לחלץ את  $y$  כפונקציה של  $x$ .  
 נוכיח את המשפט: **הוכחה:** בה"כ נניח כי  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) > 0$ . בגלל רציפות  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , קיים  $\varepsilon > 0$  כך ש- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$  עבור כל  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ,  $y \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ .  
 נסמן  $\varphi_x(y) = f(x, y)$ . לכל  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  ש- $\varphi'_x(y) > 0$  (איקס כאן פרמטר) לכל  $y \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ , כלומר  $\varphi_x$  מונוטונית עולה בקטע  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ . בפרט  $\varphi_a(b - \varepsilon) < 0 = \varphi_a(b) < \varphi_a(b + \varepsilon)$ .  
**רציפה,** לכן קיים  $\varepsilon > \delta > 0$  כך ש- $\varphi_x(b - \varepsilon) < 0 < \varphi_x(b + \varepsilon)$  עבור כל  $x \in (a - \delta, a + \delta)$ . מכיוון ש- $f$  רציפה, לכל  $x$  כזה קיים  $y = g(x)$  יחיד בקטע  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  כך ש- $f(x, g(x)) = 0$ . ■

**הערה 2.71** במקרה,  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ , דברים שונים עלולים לקרות:

1.  $(a, b) = (1, 0)$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ : אין בכלל ערכים עבור  $x < 1$ .

2.  $(a, b) = (0, 0)$ ,  $f(x, y) = y^2 - x^2$ : אין יחידות באף סביבה של 0.

במשפט הבא נשתמש בסימון כדלקמן:

לנקודה ב- $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  הקואורדינטות יסומנו ב- $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ .  
עבור פונקציה  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  נסמן:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (y_1, \dots, y_n)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (x_1, \dots, x_m)}$$

כך שאם  $f$  דיפרנציאבילית,  $Df = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ .

### המקרה הרב מימדי

**משפט 2.72** יהיו  $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$  קבוצות פתוחות, יהיו  $a \in A, b \in B$  ותהי  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$  דיפרנציאבילית ברציפות, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in GL(n)$ ,  $f(a, b) = 0$ . אזי קיימות סביבות  $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$  פתוחות ופונקציה יחידה  $g : U \rightarrow V$  כך ש:

$$\forall x \in U \quad f(x, g(x)) = 0$$

מה בעצם הולך כאן?

ישנה מערכת משוואות:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &= 0 \end{aligned}$$

אנו מעוניינים לחלץ ממנה את  $y_1, \dots, y_n$  כלומר לכתוב את ה- $y$ -אים כפונקציה של  $x$ :

$$y_n = g_n(x_1, \dots, x_m), \dots, y_1 = g_1(x_1, \dots, x_m)$$

**הערה 2.73** המשפט נותן פתרון לוקלי (לא גלובלי): בהנתן  $b = g(a)$ , אפשר לקבל  $g(x)$  עבור  $x$  קרובים ל- $a$ .

**הערה 2.74** במקרה בו  $f$  לינארית, המשפט תואם את מה שאנו כבר יודעים - קיים פתרון לכל

$x = (x_1, \dots, x_m)$  אם (ורק אם)  $\det \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$  כאשר  $b_{ij}$  הם המקדמים של המשתנים במערכת. מטריצה זו היא בדיוק  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

**הוכחה:** נגדיר פונקציית עזר:

$$F : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}, \quad F(x, y) = (x, f(x, y))$$

אילו היינו יודעים ש- $F$  הפיכה, היינו מגדירים  $g(x) = PF^{-1}(x, 0)$ , כאשר  $P : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ההטלה  $P(x, y) = y$ .

נבדוק באיזה מידה  $F$  מקיימת את ההנחות של משפט הפונקציה ההפוכה:

$$F(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_m, f_1(x, y), \dots, f_n(x, y))$$

$$DF(x, y) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \hline & \frac{\partial f}{\partial x} & & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right)$$

כאשר התא השמאלי העליון הוא בגודל  $m \times m$ , הימני התחתון בגודל  $n \times n$ . ברור ש- $DF(a, b) \in GL(n+m)$ , ועל כן אפשר להשתמש במשפט הפונקציה הפוכה: נסמן  $c = d = F(a, b)$ ,  $d = F(c)$ . לפי המשפט, קיימות קב' פתוחות  $c \in U_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $d \in V_1 \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $c \in U_1$ ,  $d \in V_1$  כך ש:  $F : U_1 \rightarrow V_1$  כאשר  $F$  חח"ע ועל שם. עכשיו צריך למצוא  $U \in \mathbb{R}^m$ ,  $V \in \mathbb{R}^n$  כך ש:

$$1. (x, 0) \in V_1 \Leftrightarrow x \in U \text{ (כדי ש-} F^{-1}(x, 0) \text{ יהיה מוגדר).}$$

$$2. U_1 \ni (x, y), x \in U \Leftrightarrow y \in V \text{ (כדי ש-} g^{-1} \text{ תהיה יחידה).}$$

$$3. g(x) \in V \Leftrightarrow x \in U.$$

רואים שמספיק, למשל, קודם למצוא  $a \in U'$ ,  $b \in V$  כך ש- $a \in U'$ ,  $b \in V$  ו- $U' \times V \subset U_1$ , ו- $a \in U''$  כך ש- $\{(x, 0) | x \in U''\} \subset V_1$  ולקחת  $U = U' \cap U''$ ,  $V = V_1 \cap V'$  (ו- $V$  כנ"ל).

■

<sup>20</sup>כמובן,  $g$  דיפרנציאבילית ברציפות כי  $F^{-1}$  ו- $P$  כאלה.

את  $Dg(x)$  הכי נוח לחשב לפי החישוב הפורמלי הבא:

נכתוב  $G(x) = f(x, g(x))$ , כמובן  $G(x) = 0$  לכל  $x \in U$ . נגדיר  $h(x) = (x, g(x))$ . אזי מתקיים:

$$\begin{aligned} D(f \circ h)(x) &= Df(h(x)) \cdot Dh(x) = DG(x) \equiv 0 \\ \Rightarrow Dh(x) &= \left( \begin{array}{c|c} 1 & \\ \vdots & \\ 1 & \\ \hline & Dg(x) \end{array} \right), Df = \left( \begin{array}{c|c} \widehat{\frac{\partial f}{\partial x}}^m & \widehat{\frac{\partial f}{\partial y}}^n \end{array} \right) \\ &\in GL(n) \\ \Rightarrow 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(x)) + \widehat{\frac{\partial f}{\partial y}}(h(x)) Dg(x) \\ Dg(x) &= - \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x} \right] (h(x)) \end{aligned}$$

<sup>20</sup>נציין כי בכיתה שנקובסקי העיר כי הוא לא ישאל "על הדבר הזה בבחינה".

## דוגמא חישובית

$$\varphi(x, y, z, u, v) = 0, \psi(x, y, z, u, v) = 0, m = 3, n = 2$$

רוצים לגזור את  $u, v$  כפונקציות של  $x, y, z$  בסביבה מסויימת של  $p = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$  לזה צריך:

$$\det \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}(p) \neq 0$$

מקבלים:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y, z)}(x_0, y_0, z_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & -\frac{\partial \psi}{\partial v} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## אזהרה:

בסימונים הנ"ל יש סכנת בלבול: נגיד שעכשיו נרצה לקבל את  $u, z$  כפונקציה של  $x, y, v$ . אזי,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  הוא משהו שונה לגמרי מ- $\frac{\partial u}{\partial y}$  מהחישוב הקודם. לכן כאן מקובל לסמן את  $\frac{\partial u}{\partial y}$  כ- $\frac{\partial u}{\partial y|_z}$ , ואת  $\frac{\partial u}{\partial v}$  מהחישוב הקודם ע"י  $\frac{\partial u}{\partial y|_v}$ .

2.4 יריעות ב- $\mathbb{R}^n$ 

**הגדרה 2.75** קבוצה  $M \subset \mathbb{R}^n$  נקראת יריעה  $k$ -מימדית (או משטח  $k$ -מימדי) אם לכל  $p \in M$  קיים  $\varepsilon > 0$  כך שהקבוצה  $M \cap B_\varepsilon(p)$  היא הומאומורפית ל- $B_1(0)$  ב- $\mathbb{R}^k$ .

**הערה 2.76** כל הכדורים הפתוחים ב- $\mathbb{R}^k$  הומאומורפים בין עצמם, וכן הומאומורפים ל- $\mathbb{R}^k$ .

זאת אומרת, לכל  $p \in M \subset \mathbb{R}^n$  קיימת פונקציה  $f: U \rightarrow M$  כך ש- $p \in f(U)$ , פתוחה ב- $M$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  פתוחה כך ש- $f(U) = M \cap V$ , ו- $f$  היא הומאומורפיזם בין  $U$  ל- $f(U)$ . ל- $f$  כזה נקרא פרמטריזציה של  $M$  סביב  $p$ .

**למשל**, נסמן  $M = f([\alpha, \beta])$  עבור  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  מסילה סגורה פשוטה, כלומר רציפה,  $f(\alpha) = f(\beta)$ , ו- $f$  חח"ע על הקטע  $[\alpha, \beta]$ .

אזי  $M$  היא יריעה חד מימדית, כי אם  $\alpha \neq \beta$ , אזי קיים  $\varepsilon > 0$  כך ש:  $f|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$  היא חח"ע ועל כן הומאומורפיזם (כי  $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$  קומפקטי). אזי  $f: (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \rightarrow M$  הוא גם הומאומורפיזם על  $f((t-\varepsilon, t+\varepsilon))$ .

עבור  $t = \alpha$ , צריך לקחת  $g: [\alpha + \delta, \beta + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^k$  כאשר  $g([\alpha + \delta, \beta + \delta]) = f([\alpha, \beta])$ , ו- $f(t) = g(t)$  עבור  $t \in [\alpha + \delta, \beta]$ . לדוגמא:

$$f(x) = (\cos(x), \sin(x)), 0 \leq x \leq 2\pi$$

<sup>21</sup>יש גם יריעות לא ב- $\mathbb{R}^n$ , אבל לא נדון בהן במסגרת הקורס.

אם  $x \neq a, b$  אזי:

$$f : [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \rightarrow M = f([a, b])$$

עבור  $\varepsilon$  מספיק קטן היא הומאומורפיזם<sup>22</sup>. לכן, גם  $f : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \rightarrow M$  היא הומאומורפיזם על  $f(x) \in f((x - \varepsilon, x + \varepsilon))$ .

20/12/2011

**דוגמא** (טריוויאלית ולא מעניינת) - עבור  $k = n$ , מקבלים תת קבוצות פתוחות של  $\mathbb{R}^n$ .  
**שתי דוגמאות בסיסיות:**

1. **דוגמא א':**  $U \subset \mathbb{R}^k$  פתוחה,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  רציפה, אזי  $\Gamma(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in U\}$  הגרף של הפונקציה, הינו יריעה. מדוע? יהי  $V = U \times \mathbb{R}^{n-k}$ , ונגדיר  $f(x) = (x, \varphi(x))$ . ברור ש- $f$  רציפה, חח"ע ועל, וההפכית  $f^{-1}$  היא ההטלה:

$$P \left( \underbrace{x}_{\in U}, \underbrace{y}_{\in \mathbb{R}^{n-k}} \right) = x$$

ואפילו ליפשיצית עם הקבוע  $K = 1$ .

**הערה 2.77** אם  $\varphi$  דיפרנציאבילית ב- $x$ , אזי גם  $f$  דיפרנציאבילית ב- $x$ , וכן:

$$D_f(x) = \begin{pmatrix} Id_k \\ D_\varphi(x) \end{pmatrix}$$

$f$  כנ"ל כאמור נקראת פרמטריזציה  $U$  ל- $M$  סביב  $p$ , אם  $p \in f(U)$ .

**הגדרה 2.78** אומרים שפרמטריזציה  $f : U \rightarrow M$  רגולרית ב- $a$  אם  $f$  דיפרנציאבילית ב- $a$ , ו- $rank(D_f(a)) = k$ . פרמטריזציה נקראת רגולרית אם היא רגולרית בכל נקודה.  $M$  נקראת רגולרית אם לכל  $p \in M$  יש פרמטריזציה רגולרית סביב  $p$ .

**הערה 2.79** במקרה  $k = 1$  אומרים ש- $f$  חלקה ב- $a$ . למשל עבור  $f(x) = (x, |x|)$ ,  $-1 < x < 1$ ,  $f$  חלקה-רגולרית בכל  $x \neq 0$  ואין פרמטריזציה של הקודקוד, שהוא חלק ב- $f^{-1}(0, 0)$ . למשל נביט בפרמטריזציה  $g(x) = (sgn x^2, x^2)$  - לא דיפרנציאבילית ב- $0$ , כל הנקודות האחרות רגולריות, ו- $g$  דיפרנציאבילית בכל נקודה, אך לא רגולרית ב- $0$ . נלא נוכל למצוא ל- $f$  פרמטריזציה אחרת מ- $g$  כך שהיא תהיה רגולרית בנקודה המקבילה ל- $0$ . במקרה זה נקבל יריעה:

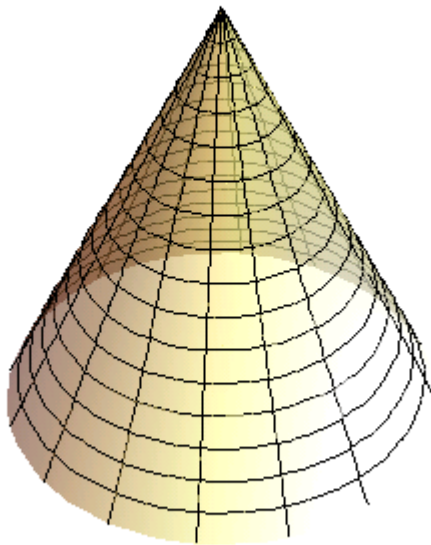
$$M = [(-1, 1), (0, 0)] \cup [(0, 0), (1, 1)]$$

הקו הישר המחבר בין ההצגות.

**דוגמא דו מימדית:** החרוט  $x^2 + y^2 < 1$  תהיה  $f$  הפונקציה  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ :

<sup>22</sup>ההומאומורפיזם כי זו העתקה רציפה מקטע קומפקטי

$$a = 1, h = 2$$



2. דוגמא ב:

תהי  $V \subset \mathbb{R}^n$  פתוחה,  $F: V \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ . דיפ' ברציפות. נסמן:

$$M = \{p \in V \mid F(p) = 0, \text{rank}(D_F(p)) = n - k\}$$

**משפט 2.80**  $M$  היא יריעה  $k$ -מימדית רגולרית.

**הוכחה:** בעזרת פיענוח נכון של הסימונים, נקבל את משפט הפונקציה הסתומה:  
תהי  $p \in M$ . מתקיים:  $\text{rank}(D_F(p)) = n - k$  ישירות מההגדרה - כלומר,  $D_F(p)$  (של) יש  $n - k$  עמודות ב"ת לינאריות. בה"כ נניח שאלה העמודות האחרונות, ז"א

$$GL(n - k) \ni \frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

לפי הסימון המקובל מהשיעור הקודם, ניקח שתי נקודות:

$$a = \left( \overbrace{p_1, \dots, p_k}^x \right), \quad b = \left( \overbrace{p_{k+1}, \dots, p_n}^y \right)$$

ובסימון של משפט הפונקציה הסתומה, ניקח:

$$n := n - k, \quad m = k$$

אזי, לפי המשפט הפונקציה הסתומה<sup>23</sup>, נקבל שקיימות קבוצות פתוחות  $a \in U \subset \mathbb{R}^k$ ,  $U \times V \subset W$ ,  $b \in V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ , ופונקציה דיפרנציאבילית ברציפות  $g : U \rightarrow V$  כך ש- $(x, g(x)) \in M$  לכל  $x \in U$ , וכן אם  $(x, y) \in M$ , אזי  $y = g(x)$ . כלומר  $\{(x, g(x)) \mid x \in U\} = U \times V \cap M$ . וזה בדיוק אומר ש- $f(x) = (x, g(x))$  מגדירה העתקה של  $U$  על  $M \cap U \times V$ . אנו יודעים כי  $f$  פרמטריזציה רגולרית מהדוגמא הקודמת, ולכן סיימנו. ■

**הערה 2.81** נשים לב כי הבה"כ בהוכחה מעלה נובע מכך שהמיקום של העמודות לא באמת משנה - אם הם היו ראשונות הפרמטריזציה היתה פשוט לפי המשתנה השני.

**הערה 2.82** בעצם יש קשר דו כיווני בין שתי הדוגמאות: הדוגמא הראשונה היא מקרה פרטי של השנייה, אם ניקח  $F(x, y) = y - \varphi(x)$ .

**מקרה פשוט** וחשוב של המשפט -  $k = n - 1$ . תהי  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  דיפרנציאבילית ברציפות. אם  $\nabla F(x) \neq 0$  לכל  $x \in M \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(0)$ , אזי  $M$  היא יריעה  $n - 1$  מימדית. או, ללא ההנחה,  $M \ni x \mid \nabla F(x) = 0$ . דוגמא סטנדרטית:  $F(x) = \|x\|^2 - 1$  - מקבלים ספרה ב- $\mathbb{R}^n$ . ניתוח של הדבר עבור  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ :  $\nabla F(x) = 2(x, y)$  ואז נקבל מעגל. **תרגיל:** מה קורה עבור  $F(x) = \|x\|^2 - 1$  ב- $\mathbb{R}^n$ ? עבור  $n = 3, k = 2$

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ \{p \mid F(p) = 0\} \\ \nabla F(x, y, z) &= 2(x, y, z) \neq (0, 0, 0) \end{aligned}$$

ובדוגמא שלנו:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \rightsquigarrow (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$$

קיבלנו ייצוג של החצי העליון של הספירה ללא קו המשווה. כדי להוסיף אותו, מוסיפים את הנקודות:

$$\{(x, z) \mid x^2 + z^2 < 1\} \rightsquigarrow (x, \sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z)$$

עדיין חסרות עוד שתי נקודות, פשוט יש לחזור על התהליך כדי להוסיף גם אותן.

<sup>23</sup> יכולנו להפעיל את משפט הפונקציה הסתומה, שכן הדרגה מלאה, וכן הקבוצה מוגדרת כך ש- $F(p) = 0$ .

**הגדרה 2.83** תהי  $M \subset \mathbb{R}^n$  (לאו דווקא יריעה). אומרים שוקטור  $v$  הוא משיק ל- $M$  בנקודה  $p \in M$ , אם קיימת מסילה גזירה  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow M$  ועבור  $t \in (\alpha, \beta)$  מתקיים  $\gamma'(t) = v$ ,  $\gamma(t) = p$ <sup>24</sup>. נסמן ב- $T_p(M)$  את אוסף כל הוקטורים המשיקים ל- $M$  בנקודה  $p$ .

מפריע לנו קצת הסימון הזה - האינטואיציה רוצה שהאוסף הזה יהיה תת מרחב וקטורי<sup>25</sup> (כך שיהיה לנו משטח שיהיה משיק ליריעה). בשלב זה נרצה להתעלם מהסוגיה הזו.

**טענה 2.84** תהי  $f : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^k$ , פרמטריזציה רגולרית של  $M$  בסביבה של  $f(a) = p$ .

א.  $\text{span} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right) = D_f(a)(\mathbb{R}^k) \subset T_p(M)$ .  
 ב. אם  $\text{rank}(DF(p)) = n - k$ ,  $M = F^{-1}(0) = \{p \in \mathbb{R}^n | F(p) = 0\}$  אזי  $T_p M = \ker D_F(p)$  וגם  $D_f(a)(\mathbb{R}^k) = T_p M$  לכל פרמטריזציה רגולרית של  $M$  בסביבת  $f(a) = p$  (כלומר כאשר  $M$  הוא קו גובה, זה לא חייב להיות אפס).

**הוכחה:** של א': יהי  $v \in \mathbb{R}^k$ . כדי להראות כי הוא משיק, נרצה להראות קיום מסילה מתאימה. נבנה אחת כזו -  $U$  פתוחה, לכן קיים  $\varepsilon > 0$  כך ש:  $U \supset [a - \varepsilon v, a + \varepsilon v]$ . נגדיר:

$$\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M, \quad \gamma(t) = f(a + tv)$$

אזי  $\gamma(0) = f(a) = p$ . כמו כן, לפי כלל השרשרת,  $\gamma'(0) = Df(a)v$ . השיויון בין ה- $\text{span}$  לביטוי ברור מאלגברה לינארית, שכן  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_f(a)e_i$ . נשים לב שכאן הרגולריות לא נדרשת (רק לסעיף הבא)<sup>26</sup>.

של ב': יהי  $v \in T_p(M)$ , כלומר  $v = \gamma'(t)$  עבור  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow M$ , כאשר עבור אותו  $t \in (a, b)$  מסויים מתקיים  $\gamma(t) = p$ . נתבונן בפונקציה  $(F \circ \gamma) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ . העתקה זו שווה זהותית ל- $0$ <sup>27</sup>, ולכן  $D_{F \circ \gamma}(t) = 0$ . אבל, לפי כלל השרשרת:

$$0 = D_{F \circ \gamma}(t) = D_F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = D_F(p) \cdot \gamma'(t)$$

מהנחה  $\text{rank}(DF(p)) = n - k$  לכן בפרט  $DF(p) \neq 0$ , כלומר  $v = \gamma'(t) \in \ker(D_F(p))$ . אזי, קיבלנו:

$$A = D_f(a)\mathbb{R}^k \subset T_p(M) \subset \ker(D_F(p)) = B$$

$A, B$  הם מרחבים וקטוריים,  $\dim A = k, \dim B = k$ , לכן  $A = B$ , כלומר  $A = B$ .  
 ■  $T_p(M)$

**הערה 2.85** במקרה ב', מקבלים  $T_p(M) = \nabla F(p)^\perp$  (רמזנו על כך בזמנו). נניח בהמשך ש- $T_p(M)$  הוא מרחב וקטורי  $k$ -מימדי (זה מתקיים כאשר  $p$  היא נקודה רגולרית והגדרת וקטור משיק קצת יותר מסובכת).

<sup>24</sup>הסבר: וקטור ב- $\mathbb{R}^n$  הוא אותו דבר כמו נקודה ב- $\mathbb{R}^n$ ; בהקשר זה טבעי לדבר על "וקטורים"; כמובן נקבל את אוסף הוקטורים המשיקים אם ניקח  $[a, b]$  קבוע, למשל  $[-1, 1]$  ו- $t$  קבוע, למשל  $t = 0$ .  
<sup>25</sup>אם זה יריעה מספיק טובה זה כן, ואם ההגדרה יותר טובה אז זה גם ליריעות פחות טובות.  
<sup>26</sup>שמעתם על הבדיחה של מתמטיקאים - למה הסולטן של איסטנבול שם שליקס ירוקים? כדי שלא יפלו לו המכנסיים. הירוקים... זה לא חשוב - שנקובסקי בנסיון להסביר שבעצם אין כאן צורך ברגולריות.  
<sup>27</sup>שכן  $0 = F^{-1}(0) = M$ .

**הגדרה 2.86** בהנתן  $f : \overset{\mathbb{R}^k}{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , אם  $f$  דיפרנציאבילית ב- $a$ , נסמן את העמודה ה- $i$  של  $D_f(a)$  ב:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_f(e_i), \quad e_i = \left(0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0\right)$$

ברור ש- $a$  רגולרית אם"מ הוקטורים  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  ב"ת לינארית.

**מסקנה 2.87** אם  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  היא פרמטריזציה רגולרית של  $M$  סביב  $p$ , אזי:

$$\text{span} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right) = T_p(M)$$

כי  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  הוא וקטור משיק:

כאשר  $\gamma'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  עבור  $\gamma(t) = f(a + te_i)$  עבור  $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  עם  $\varepsilon$  מספיק קטן. מזה מקבלים את התיאור הבא של  $T_p(M)$  במקרה של  $k=2, n=3$ :

$$T_p(M) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(a) \times \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right]^\perp$$

27/12/2012

נשים לב כי במקרים כאלה "המישור המשיק האמיתי" הוא בעצם  $p + T_p M$ , המישור שאנחנו מתייחסים אליו הוא מישור המקביל ל"משיק האמיתי". ההגדרה ה"אמיתית" מופיעה בספר.

נסיים את הנושא הזה בשתי דוגמאות:

1. תהי  $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = 0$ ,  $\nabla F(x) \neq 0$ . במקרה זה נקבל:

$$T_p(M) = \nabla F(p)^\perp$$

(כללית זה שווה ל- $\ker D_F(p)$  במקרה שלנו, מה עובר לקרנל? וקטורים שניצבים לגרדיאנט).

2.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  מסילה חלקה, אזי  $T_p(M) = \mathbb{R}f'(t)$  כאשר  $p = f(t)$ .

3. תהי  $f : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , רגולרית ב- $a$ , אזי כאמור ראינו כי<sup>28</sup>:

$$T_p(M) = \text{span} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right\} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a) \times \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)^\perp$$

<sup>28</sup>כי ידוע כי הוקטורים במידה  $f$  רגולרית אינם תלויים לינארית.

3 אינטגרציה ב- $\mathbb{R}^n$ 

## 3.1 הגדרות ותכונות יסודיות - לפי רימן

## 3.1.1 תיבות

הגדרה 3.1 קבוצה ב- $\mathbb{R}^n$  מהצורה:

$$A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}, \quad a_i \leq b_i$$

תקרא תיבה. תיבה  $A$  נקראת מנוונת אם  $a_i = b_i$  עבור  $i$  מסויים.

הגדרה 3.2 הנפח (במקרה  $n = 2$  זהו שטח) של התיבה  $A$  מסומן ב- $m(A)$  ומוגדר להיות  $m(A) = \prod (b_i - a_i)$ .

הערה 3.3 סגורה,  $A = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$  וכן  $\partial A$  היא איחוד סופי של תיבות מנוונות.

הערה 3.4  $A$  מנוונת אם  $m(A) = 0$ . במקרה זה גם מתקיים  $\overset{0}{A} = \emptyset$ .

מוטיבציה<sup>29</sup>

- מה עושים עם המושג של נפח? למשל, בהנתן  $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ , כאשר  $A_i$  תיבות שנפגשות רק בקצוות, כלומר  $\overset{0}{A_i} \cap \overset{0}{A_j} = \emptyset$  עבור  $i \neq j$ , אזי  $m(A) = \sum m(A_i)$ .
- הפרדוקס של האוסדורף - בנך - טרסקי.

נרצה למצוא מהו האינטגרל של תיבה.

הגדרה 3.5 חלוקה של  $A$  לא מנוונת מוגדרת להיות  $T := (T_1, \dots, T_n)$ , כאשר  $T_j$  היא חלוקה של  $[a_j, b_j]$ , כלומר:

$$T_j : a_j = t_j^0 < t_j^1 < \dots < t_j^{m_j} = b_j$$

הפירוק של  $A$  הנוצר ע"י  $T$  הוא קבוצת כל התיבות:

$$[t_1^{i_1-1}, t_1^{i_1}] \times \dots \times [t_n^{i_n-1}, t_n^{i_n}] = P(T)$$

הערה 3.6 מתקיים  $m(A) = \sum_{P(T)=\{A\}_{i=1}^k} m(A_i)$ .

הגדרה 3.7 חלוקה  $T' = (T'_1, \dots, T'_n)$  נקראת עידון של  $T$  אם  $T_j \subset T'_j$  עבור  $j = 1, \dots, n$ .

הערה 3.8 לכל שתי חלוקות יש עידון משותף (דהיינו האיחוד).

<sup>29</sup>השיעורים הבאים לפי שנקובסקי הולכים להיות מאוד, מאוד משעממים, ואפילו "איומים". על כן, נביא מספר דוגמאות לדברים שיהיה אפשר לעשות עם הפיתוחים הללו בעזרת הגדרות ופיתוח נוסף.

תהי  $A$  תיבה, ותהי  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.

**הגדרה 3.9** נגדיר סכום עליון וסכום תחתון בהתאמה להיות:

$$S(f, T) = \sum_{i=1}^k \sup_{x \in A_i} f(x) \cdot m(A_i), \quad \sigma(f, T) = \sum_{i=1}^k \inf_{x \in A_i} f(x) \cdot m(A_i)$$

**הערה 3.10** אם  $T'$  הוא עידון של  $T$ , אזי:

$$S(f, T') \leq S(f, T), \quad \sigma(f, T') \geq \sigma(f, T)$$

**הערה 3.11** לכל חלוקות  $T, T'$ :

$$\sigma(f, T') \leq S(f, T)$$

זה ברור אם  $T = T'$ . אחרת, ניקח עידון משותף של  $T, T'$  - נסמנו  $T''$ . מתקיים:

$$\sigma(f, T') \leq \sigma(f, T'') \leq S(f, T'') \leq S(f, T)$$

**הגדרה 3.12** נגדיר את האינטגרל העליון והתחתון להיות:

$$\overline{\int}_A f = \inf_T S(f, T), \quad \underline{\int}_A f = \sup_T \sigma(f, T)$$

**הגדרה 3.13** אומרים ש- $f$  אינטגרבילית על  $A$ , אם  $\underline{\int}_A f = \overline{\int}_A f$ , ואז מגדירים את האינטגרל של  $f$  על  $A$  להיות:

$$\int_A f := \underline{\int}_A f = \overline{\int}_A f$$

**דוגמא**

אם  $f$  קבועה,  $f(x) = k$  לכל  $x \in A$ , אזי  $f$  אינטגרבילית, ומתקיים:

$$\int_A f = k \cdot m(A)$$

**טענה 3.14** נניח ש- $f, g$  אינטגרביליות על  $A$ . אזי:  
א.  $f + g$  אינטגרבילית על  $A$ , ומתקיים:

$$\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$$

ב. עבור  $\alpha f, \alpha \in \mathbb{R}$  אינטגרבילית על  $A$ , ומתקיים  $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$ .  
מא' וב' מקבים כי לכל  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha f + \beta g$  אינטגרבילית, ומתקיים  $\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$ .  
כלומר קבוצת הפונקציות האינטגרביליות מהווה מרחב וקטורי, והאינטגרל הוא פונקציונל לינארי עליו.  
ג. אם  $0 \leq f \leq M$  אזי  $0 \leq \int_A f \leq Mm(A)$ , ובפרט אם  $0 \leq f$  אזי  $0 \leq \int_A f$ .  
וגם אם  $f \leq g$  אז  $\int_A f \leq \int_A g$ . כאן הפונקציונל הנ"ל הינו חיובי.

**הוכחה:** הכל כמו במימד אחד:  
א. מתקיים:

$$\sigma(f, T) + \sigma(g, T) \leq \sigma(f + g, T) \leq S(f + g, T) \leq S(f, T) + S(g, T)$$

ולכן:

$$\int_A f + \int_A g \leq \int_A (f + g) \leq \int_A f + \int_A g$$

הקצוות שווים, לכן  $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$ , ולכן נקבל כי  $f + g$  אינטגרבילית, וכן נקבל את השיויון הדרוש.  
ב. אם  $\alpha \geq 0$  אזי:

$$S(\alpha f, T) = \alpha S(f, T)$$

וכו', ולכן ברור.  
אם  $\alpha = -1$  אזי:

$$S(-f, T) = -\sigma(f, T), \quad \sigma(-f, T) = -S(f, T)$$

וכו'...

ג. בצורה דומה, נובע מכך ש- $m(A) = \sum_{A_i \in P(T)} m(A_i)$ .

נעבור לשתי טענות חשובות המסבירות היטב את מושג האינטגרביליות:

**טענה 3.15**  $f$  אינטגרבילית על  $A$  אם ומכאן לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $T$  של  $A$  כך ש:

$$S(f, T) - \sigma(f, T) < \varepsilon$$

**הוכחה:**  $\Leftarrow$  תהי  $T'$  חלוקה כך ש:  $\int_A f = \bar{\int}_A f > S(f, T') - \frac{\varepsilon}{2}$  ותהי  $T''$  חלוקה כך ש:  
 $\int_A f = \underline{\int}_A f < \sigma(f, T'') + \frac{\varepsilon}{2}$ . לכן:

$$\varepsilon > S(f, T') - \sigma(f, T'')$$

1/1/2012

ויהי  $T$  - עידון משותף - אזי  $T$  מקיים את הנדרש<sup>30</sup>.  
 $\Rightarrow$  נניח כי לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $T$  כנ"ל. נביט בפרמטר החלוקה של  $T$  - נסמנו ב- $\delta$ .  
 תהי  $T_\delta$  סדרת חלוקות כך ש- $\delta \rightarrow 0$ . אזי ישירות מהנתון נקבל:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S(f, T_\delta) - \sigma(f, T_\delta) = 0$$

כנדרש.

■

עכשיו נתמודד עם הבעיה הטכנית הבאה:  
 נגיד ש- $f$  (מוגדרת ו) אינטגרבילית על  $A$ . תהי  $A \subset B$  תיבה. האינטואיציה אומרת ש- $f$  אינטגרבילית על  $B$ , ו- $\int_B f = \int_A f$ . זה כמובן נכון, אך ההוכחה דורשת כמה שיקולים טכניים ודי משעממים.

**הגדרה 3.16** תהי  $X \neq \emptyset$  קבוצה, וכן  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה. התנודה של  $f$  ב- $X$  מוגדרת להיות:

$$\omega_f(X) = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) = \sup_{x, y \in X} (f(x) - f(y)) = \sup_{x, y \in X} |f(x) - f(y)|$$

**הערה 3.17**  $f$  חסומה על  $X$  אם ורק אם  $\omega_f(X) < \infty$ .

**הערה 3.18** תמיד מתקיים  $\omega_{|f|} \leq \omega_f$  כי  $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ .

**טענה 3.19** (תנאי רימן לאינטגרביליות)  $f$  אינטגרבילית על  $A$  אם ורק אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $T$  של  $A$  כך ש<sup>31</sup>:

$$S(f, T) - \sigma(f, T) = \sum_{A_i \in P(T)} \omega_f(A_i) m(A_i) < \varepsilon$$

**הוכחה:** ניקח את  $T$  מהטענה הקודמת. ברור כי:

$$S(f, T) - \sigma(f, T) = \sum \omega_f(A_i) m(A_i) < \varepsilon$$

■

**הערה 3.20** מהערה קודמת, ברור כי אם  $f$  אינטגרבילית, גם  $|f|$  אינטגרבילית.

<sup>30</sup> ובאופן כללי

$$S(f, t) \geq \int_A f, \quad \sigma(f, T) \leq \int_A f$$

$$\varepsilon > \int_A f, -\int_A f \geq 0$$

ולכן האינטגרל העליון שווה לתחתון, כנדרש.  
<sup>31</sup> כלומר, במובן הגיאומטרי,  $f$  יכולה "להשתולל", אבל רק במספר מסויים של תיבות.

"עכשיו מגיע משהו די טפל, הרבה כתיבה, אבל אני חייב לעשות את זה":

**הגדרה 3.21** תהי  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . התומך של  $f$  יוגדר להיות:

$$\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$$

אם  $\text{supp}(f)$  קבוצה חסומה, אומרים ש- $f$  היא בעלת תומך חסום.

**הערה 3.22**  $f$  בעלת תומך חסום אמ"מ קיימת תיבה  $A$  כך ש- $\text{supp}(f) \subset A$ .

**הגדרה 3.23** תהי  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה בעלת תומך חסום (וחסומה). אומרים ש- $f$  אינטגרבילית (לפי רימן) אם קיימת תיבה  $A$  כך ש- $\text{supp}(f) \subset A$  אינטגרבילית על  $A$ .

עכשיו נראה שאין פה תלות אמיתית ב- $A$ :

**למה 3.24** תהי  $A$  תיבה, ותהי  $C, A \supset C$  תיבה מנוונת. אם  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה, ו- $\int_A h = 0$ , אזי  $\int_C h = 0$  ואינטגרבילית על  $A$ , וכן:  $\int_A h = 0$ .

**הוכחה:** תהי  $C$  מנוונת בכיוון  $j$ , כלומר  $C = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_{j-1}, d_{j-1}] \times \{c_j\} \times \dots$ . נגדיר חלוקה  $T = (T_1, \dots, T_n)$  של  $A$  לשלוש תיבות בצורה הבאה:

$$T_j : a_j < c_j - \delta < c_j + \delta < b_j$$

והחלוקות האחרות יהיו הטריטוריות:  $T_k : a_k < b_k$  (כמובן, לוקחים  $\delta > 0$  כך שזה יתקיים). אם  $c_j = b_j$  או  $c_j = a_j$ , לוקחים חלוקה לשתי תיבות). נסמן:

$$D_\delta = [a_1, b_1] \times \dots \times [c_j - \delta, c_j + \delta] \times \dots \times [a_n, b_n], \quad M = \sup |h(x)|$$

מתקיים:

$$S(h, T) \leq M \cdot m(D_\delta)$$

$$\sigma(h, T) \geq -M \cdot m(D_\delta)$$

■

מכיוון ו- $\lim_{\delta \rightarrow 0} m(D_\delta) = 0$ , נקבל ש- $\int_A h = 0$ .

**מסקנה 3.25** אם  $A \subset B$  תיבות, ו- $\text{supp}(h) \subset A$  עבור  $h$  חסומה, אזי  $\int_B h = 0$  כי  $\partial A$  היא איחוד סופי של תיבות מנוונות.

**טענה 3.26** תהי  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה, ותהיינה  $A, B$  תיבות כך ש- $\text{supp}(f) \subset A \subset B$ . אזי  $\int_A f = \int_B f$  ואם כן,  $\int_A f = \int_B f$ .

**הוכחה:** נגדיר:

$$h = f \cdot 1_{\partial A}, \quad g = f \cdot 1_A$$

אזי,  $f = g + h$ . מטרת החלוקה - עבור  $h$  נוכל להשתמש בלמה הקודמת, דבר שנעשה מייד.

ברור שאפשר לכתוב את  $h$  כסכום סופי של פונקציות שנתמכות על תיבות מנוונות (דהיינו הדפנות של  $A$ ), ולכן, לפי הלמה,  $h$  אינטגרבילית גם על  $A$  וגם על  $B$ , ומתקיים:

$$\int_A h = \int_B h = 0$$

עבור החלק השני, נסמן:

$$A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

נגיד שחלוקה  $T$  של  $B$  "טובה" אם לכל  $j$ ,  $a_j, b_j \in T_j$ . אם  $T$  "טובה", נגדיר חלוקה  $T'$  של  $A$  ע"י  $T' = (T'_j)$ , כאשר  $T'_j = T_j \cap [a_j, b_j]$ . אזי, מתקיים<sup>32</sup>:

$$S(g, T') = S(g, T), \quad \sigma(g, T') = \sigma(g, T)$$

לכל חלוקה  $T''$  של  $A$ , ניתן בדרך זו למצוא חלוקה טובה  $T$  של  $B$ , כך ש- $T'' = T'$ . לכן,  $\bar{\int}_A g = \inf \{S(g, T') | T \text{ is good}\}$ . ברור שגם  $\bar{\int}_B g = \inf \{S(g, T') | T \text{ is good}\}$ . ולכן  $\bar{\int}_A g = \bar{\int}_B g$  מאותה הסיבה,  $\int_A g = \int_B g$ . אזי, נקבל כי  $g$  אינטגרבילית על  $A$  אם  $g$  אינטגרבילית על  $B$ , ובמקרה כזה,  $\int_A g = \int_B g$ .  $g, f$  אינטגרביליות בו זמנית (גם על  $A$  וגם על  $B$ ), ולכן אותו הדבר נכון עבור  $f$ . ■

### 3.1.2 דיון על קבוצות זניחות - מידת אפס, תכולת אפס

"כעת, דברים עדינים וחשובים". נדבר על קבוצות זניחות - איך נגדיר כאלו? מבחינה גיאומטרית, דבר הוא זניח אם יש לו נפח אפס. את הדבר הזה אפשר להגיד במספר דרכים:

**הגדרה 3.27**  $X \subset \mathbb{R}^n$  היא בעלת מידת 0 (לבג) אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת משפחה בת מניה של תיבות  $A_1, A_2, \dots$  כך ש- $X \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ , ו- $\sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) < \varepsilon$ .

**הגדרה 3.28**  $X \subset \mathbb{R}^n$  בעל תכולת 0 אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיימות תיבות  $A_1, A_2, \dots, A_N$  (מספר סופי) כך ש- $X \subset \bigcup_{j=1}^N A_j$ , ו- $\sum_{j=1}^N m(A_j) < \varepsilon$ .

ברור מההגדרות כי אם  $X$  בעלת תכולת אפס, אזי היא גם בעלת מידת אפס. הכיוון השני - תחת תנאים מסויימים, נראה בהמשך.

### דוגמאות

- קבוצה סופית היא בעלת תכולה 0.
- תיבה מנוונת היא בעלת תכולה 0.
- לנקודה  $\{p\} \subset \mathbb{R}^n$  תכולת 0, כי  $\{p\} \subset [p - \delta, p + \delta]^n$ , ו- $\lim_{\delta \rightarrow 0} ([p - \delta, p + \delta]^n) = 0$ .

**הערה 3.29** במושגים הנ"ל אפשר להשתמש בתיבות פתוחות במקום סגורות (רגילות), כי ברור שלכל תיבה  $A$  קיימת תיבה  $B$  כך ש- $B \supset A$ , ו- $m(B) < m(A) + \varepsilon$ .

<sup>32</sup>זנכור כי  $\text{supp}(f) \subset A$ , ולכן כל הנקודות ש"מחוץ" ל- $A$ ,  $f$  מקבלת עליהן אפס, ולכן הנקודות האלו לא משנות את  $\sigma(g, T)$ ,  $S(g, T)$ .

ראינו מעלה דוגמא לכך שהגדרה אחת מתקיימת אך השנייה לא. נרצה לדון בקשר בין ההגדרות.

**טענה 3.30** כאשר  $X$  קומפקטי, שני המושגים מתלכדים, כלומר, מידת אפס  $\Leftarrow$  תכולת אפס.

**הוכחה:** לכל  $\varepsilon > 0$  קיימות תיבות  $A_1, A_2, \dots$  כד ש- $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset X$ , ו- $\sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) < \varepsilon$ . בגלל הקומפקטיות, קיים  $N$  כך ש:

$$X \subset \bigcup_{j=1}^N A_j$$

■ וכן ברור ש- $\sum_{j=1}^N m(A_j) < \varepsilon$ .

**טענה 3.31** אם  $X_1, X_2, \dots$  בעלות מידת 0, אזי גם  $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$  (איחוד בן מניה) בעלת מידה 0.

**הוכחה:** תהיינה  $A_{j,1}, A_{j,2}, \dots$  תיבות כך ש- $X_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{j,i}$ , ו- $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_{j,i}) < \frac{\varepsilon}{2^j}$ . מתקיים  $X \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{j,i}$  ו- $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_{j,i}) < \varepsilon$ . ■

**מסקנה 3.32** כל קבוצה בת מניה היא בעלת מידה 0.

### דוגמא למסקנה

•  $X = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  בת מניה, לכן בעלת מידת 0. נראה שהיא לא בעלת תכולה 0. יהיו  $A_1, A_2, \dots, A_N$  קטעים סגורים כך ש:

$$X \subset A_1 \cup \dots \cup A_N = Y$$

$Y$  היא קבוצה סגורה,  $X$  צפופה ב- $[0, 1]$ , ולכן  $\overline{X} = [0, 1] \subset Y$ . לכן  $1_{[0,1]} \leq \sum_{j=1}^n 1_{A_j}(x)$  כעת, נעשה אינטגרל כמו בשנה א', ונקבל:

$$1 = \int_0^1 1_{[0,1]}(x) dx \leq \sum_{j=1}^N \int_0^1 1_{A_j}(x) dx \leq \sum_{j=1}^N m(A_j) \stackrel{NOT!}{<} \varepsilon$$

איפה הבעיה? אם נכסה ע"י מספר אינסופי של קטעים, הקבוצה לא תהיה סגורה.

**הגדרה 3.33** עבור חלוקה  $T$  של תיבה  $A$ ,  $\sum(T) := \bigcup_{A_i \in P(T)} \partial A_i$  יקרא השלד של  $T$ .

**הערה 3.34**  $\sum(T)$  הוא בעל תכולה 0 (ולכן גם מידת אפס), כאיחוד סופי של תיבות מנוונות.

כעת נוכל לנסח את "המשפט":

**3.1.3 משפט לבג**

**משפט 3.35** תהי  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה,  $A$  תיבה. נסמן את  $F(f)$  להיות קבוצת הנקודות אי הרציפות של  $f$ . אזי,  $f$  אינטגרבילית אמ"מ  $F$  קבוצה בעלת מידת 0.

נכין את הקרקע להוכחת המשפט:

**הגדרה 3.36** יהי  $X$  מרחב מטרי, ותהי  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in X$ . התנודה של  $f$  ב- $x$  מוגדרת להיות:

$$\omega_f(x) = \inf_{\delta > 0} \omega_f(B_\delta(x)) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(B_\delta(x))$$

**הערה 3.37**  $f$  רציפה ב- $x$  אמ"מ  $\omega_f(x) = 0$ .

**הערה 3.38** לכל קבוצה פתוחה  $U$ ,  $x \in U$ ,  $\omega_f(x) \leq \omega_f(U)$  (ישירות מההגדרה מעלה). נסמן עבור  $t > 0$ ,

$$F_t = F_t(f) = \{x \in A \mid \omega_f(x) \geq t\}$$

**הערה 3.39**

$$F(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$$

זהו איחוד בן מניה של קבוצות.

**טענה 3.40** אם  $f$  אינטגרבילית, אזי לכל  $t > 0$ ,  $F_t$  בעלת תכולה 0.

**הערה 3.41** אם הטענה נכונה, נקבל ממנה את הכיוון  $\Leftarrow$  של משפט לבג, שכן אז האיחוד מעלה הוא בעל תכולה 0 (בטענה נשתמש באינטגרביליות).

נוכיח את הטענה: **הוכחה:** יהי  $\varepsilon > 0$ . לפי תנאי ריפן, מהאינטגרביליות של  $f$ , קיימת  $T$  חלוקה כך ש:

$$\sum_{A_i \in P(T)} \omega_f(A_i) m(A_i) < \varepsilon t$$

כמו כן, מתקיים:

$$t \sum_{i: \omega_f(A_i) \geq t} m(A_i) \leq \sum_{i: \omega_f(A_i) \geq t} \omega_f(A_i) m(A_i) \leq \sum_{A_i \in P(T)} \omega_f(A_i) m(A_i) < \varepsilon t$$

לכן:

$$\sum_{i: \omega_f(A_i) \geq t} m(A_i) \leq \varepsilon$$

ברור ש:  $F_t \subset \sum(T) \cup \bigcup_{\omega_f(A_i) \geq t} A_i$  (כי אם  $x \in F_t \setminus \sum(T)$ , אזי  $x \in \overset{\circ}{A_i}$  עבור  $i$  מסויים, ואז  $\omega_f(x) \leq \omega_f(\overset{\circ}{A_i}) \leq \omega_f(A_i)$  לכן  $F_t$  בעלת תכולה אפס. ■

3/1/2012

**טענה 3.42** לכל  $t > 0$  הקבוצה  $F_t$  הינה סגורה (זה לא טריוויאלי, כי הפונקציה  $\omega_f$  איננה רציפה בדר"כ).

**הוכחה:** תהי  $a \in \overline{F_t}$ . צריך להוכיח ש- $a \in F_t$ . יהי  $\delta > 0$  כלשהוא. מכיוון ש- $a \in \overline{F_t}$ , קיים  $b \in B_\delta(a)$  כך ש:  $b \in F_t$ . יהי  $\eta > 0$  כך ש- $B_\eta(b) \subset B_\delta(a)$ . מכיוון ו- $b \in F_t$ ,  $\omega_f(B_\eta(b)) \geq t$ , לכן  $\omega_f(B_\delta(a)) \geq t$  מש"ל. ■

**הערה 3.43** הראנו למעשה ש- $\omega_f(x)$  היא פונקציה רציפה למחצה מלעיל.

**למה 3.44** (טכנית) תהינה  $A \supset B_1, \dots, B_N$  תיבות לא מנוונות המכסות את  $A$ . אזי, קיימת חלוקה  $T$  של  $A$  כך שכל אחת מהתיבות  $B_1, \dots, B_N$  הינה איחוד של תיבות מ- $P(T)$ .

**הוכחה:** יהי  $B_k = [c_1^k, d_1^k] \times \dots \times [c_n^k, d_n^k]$ . ניקח  $T_j = \{a_j, b_j\} \cup \{c_j^k, d_j^k\}_{k=1}^N$ .  $T = (T_1, \dots, T_n)$ . ■

נוכיח את הכיוון " $\Rightarrow$ " של משפט לבג: יהי  $\varepsilon > 0$ , ונרצה למצוא חלוקה של  $A$  כך ש:

$$\varepsilon > \sum_{A_i \in P(T)} \omega_f(A_i) m(A_i)$$

רעיון ההוכחה:

ניקח  $t$  "מספיק קטן". מטענה שהוכחנו,  $F_t$  בעלת תכולה 0, ולכן יש ל- $F_t$  כיסוי סופי ע"י תיבות שסכום נפחיהן קטן כרצוננו. על התיבות האלה אין שליטה לגבי התנודה, אך בכל אופן  $\omega_f(A) = K \geq \omega_f(B)$  כאשר  $x \notin F_t$ , אפשר למצוא תיבה  $B$  כך ש- $\omega_f(B) < t$ .

אם נכסה את  $A \setminus F_t$  ע"י תיבות כאלה, סכום נפחיהן כמובן יהיה  $m(A) \geq$  כפול התנודה זה יהיה  $tm(A) >$ .

למעשה, בדומה למה שעשינו באינפי 2, אנחנו מחלקים את התיבות שלנו לשני סוגים - תיבות שלא נוכל לתחום את התנודה שלהם, אך נוכל לתחום את הנפח שלהם (נובע מהטענה ש- $F_t$  בעלת תכולה אפס), ואת השארית נכסה בתיבות שכן נוכל לתחום את התנודה שלהם (מקומפקטיות של מה שנשאר).

למי שזוכר - זה מאוד דומה להוכחה מאינפי 2, עם החלוקה של הקטעים לקטעים "טובים" וקטעים "רעים" - שבטובים יכולנו לחסום את גובה הפונקציה, ולמרות שרעים לא יכולנו לעשות זאת, כן יכולנו לחסום את הגודל של הקטעים הללו. **הוכחה:** יהי  $\varepsilon > 0$ . ניקח  $t =$

$\frac{\varepsilon}{2K} > \sum_{i=1}^M m(B_i)$  :  $F_t$  בעלת תכולת אפס, ולכן קיימות  $B_1, \dots, B_M$  תיבות כך ש:  $\omega_f(A) = K$  - כאשר  $f$  מהנתון חסומה ולכן קיים  $K$  שבה  $U$  -  $F_t \subset \left(\bigcup_{i=1}^M B_i\right)^0$  (רוצים שהמשלים יהיה קומפקטי, כלומר סגור וחסום). הקבוצה  $X = A \setminus U$  הינה קומפקטית, ו- $F_t^c \supset X$ . לכל  $x \in X$  קיימת תיבה  $C(x)$  כך ש- $x \in C(x)^0$  ו- $\omega_f(C(x)) < t$ .<sup>33</sup>

בגלל הקומפקטיות של  $X$ , קיימים  $x_1, \dots, x_N$  כך ש- $X \subset \bigcup_{i=1}^N C(x_i)$ . נסמן

$C_i = C(x_i)$ . כמובן  $\omega(C_i) < t$  עבור  $i = 1, \dots, N$ . נשתמש עכשיו בלמה הטכנית לגבי התיבות  $B_1, \dots, B_M, C_1, \dots, C_N$ . נקבל חלוקה של  $T$  של  $A$  כך שלכל  $A_i \in P(T)$ ,  $A_i \subset B_j$  או  $A_i \subset C_j$  מסויים (יתכן גם זה וגם זה). נסמן:

$$P' = \{A_i \in P(T) \mid \exists j \text{ s.t. } A_i \subset B_j\}$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} \sum_{A_i \in P(T)} \omega_f(A_i) m(A_i) &= \sum_{A_i \in P'} + \sum_{A_i \notin P'} \\ \Rightarrow \sum_{A_i \in P'} \omega_f(A_i) m(A_i) &\leq K \sum_{A_i \in P'} m(A_i) \leq K \sum_{j=1}^M m(B_j) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

אם  $A_i \notin P'$ , אז  $A_i \subset C_j$  עבור  $j$  מסויים, לכן  $\omega_f(A_i) < t$  וכן:

$$\sum_{A_i \notin P'} \omega_f(A_i) m(A_i) < t \cdot \sum_{A_i \in P(T)} m(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

■

ואז החיבור קטן מ- $\varepsilon$ , כנדרש.

### 3.1.4 נפח של קבוצה ב- $\mathbb{R}^n$ לפי ג'ורדן

**הגדרה 3.45** אומרים שקבוצה  $X \subset \mathbb{R}^n$  היא בעלת נפח (לפי ג'ורדן) אם  $X$  חסומה, והפונקציה  $1_X$  אינטגרבילית.

במקרה זה, מגדירים את הנפח של  $X$  ע"י  $\nu(X) = \int 1_X$ .

**מסקנה 3.46** כמה מסקנות ממשפט לבג:

1. קבוצה  $X \subset \mathbb{R}^n$  היא בעלת נפח אמ"מ  $X$  חסומה ו- $\partial X$  בעלת תכולה 0, כי נק' אי הרציפות של הפונקציה  $1_X$  הן בדיוק  $\partial X$  (וזו תמיד קבוצה סגורה).

2. תהייה  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1, \dots, f_m$  אינטגרביליות,  $U \subset \mathbb{R}^m$  כך ש- $f(A) \subset U$ , כאשר  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . אם  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה וחסומה, אזי הפונקציה  $g$  המוגדרת ע"י  $g(x) = \Phi(f_1(x), \dots, f_m(x))$  הינה אינטגרבילית ב- $A$ , כי  $F(g) \subset F(f_1) \cup \dots \cup F(f_m)$ .

(א) בפרט, המכפלה של פונקציות אינטגרביליות (וגם המנה, אם המכנה רחוק מ-0) הינה אינטגרבילית.

<sup>33</sup>כי הרי  $C(x)$  מוכלת במשלים של  $F_t$ .

(ב) אם  $X, Y$  בעלות נפח, אזי  $X \cup Y, X \cap Y, X \setminus Y$  גם כן, כי:

$$1_{X \cap Y} = 1_X \cdot 1_Y, \quad 1_{X \cup Y} = 1_X + 1_Y - 1_{X \cap Y}, \quad 1_{X \setminus Y} = 1_X - 1_Y$$

**טענה 3.47** תכונות של נפח - תהינה  $X, Y$  בעלות נפח. אזי:

1. אם  $X \cap Y = \emptyset$ , אז  $\nu(X \cup Y) = \nu(X) + \nu(Y)$ , כי אז  $1_{X \cup Y} = 1_X + 1_Y$ .

2. אם  $X \subset Y$ , אז  $\nu(X) \leq \nu(Y)$ , כי אז  $1_X \leq 1_Y$ .

3. לכל  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nu(X + x) = \nu(X)$  - הוכחה נשארת כתרגיל.

**טענה 3.48** תהי  $f \geq 0$  איטגרבלית. אם  $\int f = 0$ , אזי  $\text{supp}(f)$  היא קבוצה בעלת מידה 0.

הוכחה: נסמן:

$$X_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

ברור ש-  $\text{supp}(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ . על כן, מספיק להוכיח כי  $X_n$  היא בעלת מידה 0 לכל  $n$ .  
יהי  $\varepsilon > 0$ , ותהי  $T$  חלוקה של  $\text{supp}(f) \subset A$  כך ש-  $S(f, T) < \frac{\varepsilon}{n}$ . אזי, מתקיים:

$$\begin{aligned} S(f, T) &= \sum_{A_i \in P(T)} \sup_{x \in A_i} f(x) m(A_i) \geq \sum_{\left\{ i \mid \sup_{x \in A_i} f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}} \sup_{x \in A_i} f(x) m(A_i) \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{\left\{ i \mid \sup_{x \in A_i} f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}} m(A_i) \end{aligned}$$

■

ברור ש-  $X_n \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ , ו-  $\sum m(A_i) < \varepsilon$ .

**הערה 3.49** הטענה ההפוכה אינה נכונה - מספיק להביט למשל ב-  $f = 1_{\mathbb{Q}}$ .

## 3.2 משפטים יסודיים על אינטגרציה ב- $\mathbb{R}^n$

### 3.2.1 משפט פוביני

נתחיל עם מקרה פרטי של המשפט עבור  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ :  
תהי  $A = [a, b] \times [c, d]$  תיבה, ותהי  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . אפשר כך לחשב אינטגרלים חוזרים:

$$I_1 = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx, \quad I_2 = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

סתם דוגמא:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi y \cos xy dx dy, \int_0^\pi \int_0^\pi y \cos xy dy dx$$

קל לראות ששני האינטגרלים שווים.

לעומת זאת, ניתן להתבונן באינטגרל כפול:  $I = \int_A f$

נשאל, מהו הקשר בין קיום האינטגרלים  $I, I_1, I_2$ , ומתי הם שווים?

**דוגמא**

יהיו  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$  וכן  $c = c_0 < c_1 < \dots < c_M = d$ , יהיו  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$  עבור  $1 \leq j \leq M, 1 \leq i \leq N$  ותהי:

$$f = \sum \alpha_{i,j} \cdot 1_{[a_{i-1}, a_i] \times [c_{j-1}, c_j]}$$

אזי,  $f$  אינטגרלית (נקודות אי הרציפות שלה מוכלות בשלד של החלוקה), ומתקיים:

$$I = \int_{[a,b] \times [c,d]} f = \sum \alpha_{i,j} (a_i - a_{i-1}) (b_j - b_{j-1})$$

קל לראות שגם  $I_1$  וגם  $I_2$  שווים לערך זה.

**משפט 3.50** יהיו  $A$  תיבה ב- $\mathbb{R}^N$ ,  $A'$  תיבה ב- $\mathbb{R}^n$ ,  $A''$  תיבה ב- $\mathbb{R}^m$ , כך ש- $N = n + m$ ,  $A = A' \times A''$  נסמן:

$$\begin{aligned} A &= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \times [a_{n+1}, b_{n+1}] \times \dots \times [a_N, b_N] \\ A' &= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \\ A'' &= [a_{n+1}, b_{n+1}] \times \dots \times [a_N, b_N] \end{aligned}$$

ותהי  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרלית על  $A$ . נסמן נקודות ב- $\mathbb{R}^N$  ע"י  $(x, y)$ , כאשר  $y \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$ .

**הערה 3.51** עבור  $y \in A''$  פונקציה  $f_y : A' \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י  $f_y(x) = f(x, y)$ , וגם:

$$\overline{\int_{A'}} f(x, y) dx = \overline{\int_{A'}} f_y, \int_{A'} f(x, y) dx = \int_{A'} f_y$$

אזי:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f = \int_{A''} \underbrace{\left( \int_{A'} f(x, y) dx \right)}_{\varphi(y)} dy = \int_{A''} \underbrace{\left( \overline{\int_{A'}} f(x, y) dx \right)}_{\psi(y)} dy$$

(בפרט,  $\varphi, \psi$  אינטגרליות על  $A''$ , ו- $\int_{A''} \varphi = \int_{A''} \psi$ )

**הערה 3.52** מכך נובע באופן פורמלי כי:

$$\int_{A'} \left( \int_{A''} f(x, y) dx \right) dy = \int_{A'} \left( \int_{A''} f(x, y) dx \right) dy$$

(פשוט להגדיר  $g(x, y)$  בהתאם).

**הערה 3.53** כאן יש להעיר על ההבדל בין האינטגרל משנה א' לאינטגרל הזה - אז זה היה מעין "פונקציה הפוכה" לגזירה. כאן, מדובר בפונקציה פשוטה, אנחנו מחלקים את השטח לשניים - נקבל שתי חלוקות - של האורך  $[a, b]$  ושל הרוחב  $[c, d]$ . באופן פורמלי, נרצה:

$$f = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot 1_{[a_{i-1}, a_i] \times [c_{j-1}, c_j]}$$

$$\int_A f = \sum_{i,j} \alpha_{ij} (a_i - a_{i-1}) (c_j - c_{j-1})$$

זוהי למעשה הכללה של פונקציית מדרגה מהשנה הראשונה לשני מימדים. נציין שהקצוות הם ממידה אפס, ועל כן לא משנים את הערך של האינטגרל. מה משפט פוביני במקרה זה נותן לנו? אם נסמן  $f_y(x) = f(x, y)$ , נקבל:

$$y \in (c_{j-1}, c_j) \quad f_y = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} 1_{[a_{i-1}, a_i]}$$

הפונקציה הזו כמובן אינטגרלית, וכן:

$$I_y = f_y(x) dx = \sum_{i=1}^N \alpha_{ij} (a_i - a_{i-1})$$

$$\Rightarrow \int_c^d I_y dy = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N \alpha_{ij} (a_i - a_{i-1})$$

כלומר, אפשר לסכום שורה שורה ואז עמודה עמודה, או הפוך.

**הערה 3.54** הנחת האיטרגביליות חיונית - נראה בעזרת דוגמא: תהי  $X \subset [0, 1]^2$  קבוצה צפופה, בת מניה כך שכל ישר מקביל לציר ה- $x$  חותך את  $X$  בנקודה אחת לכל היותר, אך כל ישר  $\{q\} \times [0, 1]$  עם  $q \in \mathbb{Q}$  חותך את  $X$  בקבוצה צפופה (ב- $\{q\} \times [0, 1]$ ). אזי  $\int_0^1 1_X(x, y) dx = 0$  לכל  $y$ , אבל  $\int_0^1 1_X(q, y) dy = 1$  לכל  $q \in \mathbb{Q}$ , ולכן הפונקציה  $\psi(y)$  איננה אינטגרלית.

**הערה 3.55**  $f_y(x)$  לא צריכה להיות אינטגרלית על כל  $y$ , ו"קל לבחור כך שזה באמת יקרה" בעזרת פונקציית דיריכלה. לכן אנחנו חייבים לכתוב אינטגרל עליון ותחתון בשוויונות מעלה.

**הערה 3.56** באופן פורמלי אפשר להפוך את תפקידיהם של  $A', A''$  כך שגם מתקיים  $I = \int_{A'} \int_{A''} = \int_{A''} \int_{A'}$

**מסקנה 3.57**  $\varphi(y) \leq \psi(y)$ ,  $\int \varphi = \int \psi$ , ולכן לפי המשפט  $\{y | \varphi(y) \neq \psi(y)\}$  בעלת מידה אפס, ולכן הפונקציה  $f_y$  אינטגרבילית לכל  $y$ , פרט לקבוצה בעלת מידה אפס.

**הוכחה:** תחילה - הערה טכנית:

אם  $T$  חלוקה של  $A$ , אזי  $T = (T', T'')$  כאשר  $T'$  היא חלוקה של  $A'$ ,  $T''$  היא חלוקה של  $A''$ , ואז  $P(T) = P(T') \times P(T'')$  במובן: כל  $B \in P(T)$  אפשר לכתוב כ- $B = B' \times B''$ , עם  $B' \in P(T')$ ,  $B'' \in P(T'')$ .

כעת, להוכחה:

מספיק להראות שלכל  $\varepsilon > 0$ ,

$$I - \varepsilon \leq \int_{A''} \varphi(y) \leq \int_{A''} \psi(y) \leq I + \varepsilon$$

זאת כי מתקיים:

$$\int_{A''} \varphi(y) \leq \int_{A''} \psi(y) \leq \int_{A''} \psi(y)$$

לכן אם הנ"ל נכון,  $\varphi, \psi$  אינטגרביליות. על כן, נקבל את אי השוויון בין האינטגרלים עצמם ולא עליון-תחתון לכל  $\varepsilon > 0$ , ולכן כולם שווים, כנדרש.

ברור שמספיק להוכיח שלכל  $\varepsilon > 0$ ,  $\int_{A''} \psi(y) \leq I + \varepsilon$ , כי אפשר לקחת את  $-f$  להשלמת הצד השני, כי כמו שראינו באינפי 2,  $\int -f = -\int f$ .  
ובכן, תהי  $T$  חלוקה של  $A$  כך ש- $S(f, T) \leq I + \varepsilon$ , ויהי:

$$P(T') = (A'_1, \dots, A'_K), \quad P(T'') = (A''_1, \dots, A''_M)$$

כך ש:

$$P(T) = \{A'_i \times A''_j | i = 1, \dots, K, j = 1, \dots, M\}$$

לכן:

$$S(f, T) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^K a_{ij} m(A'_i) m(A''_j)$$

כאשר  $a_{ij} = \sup \{f(x, y) | x \in A'_i, y \in A''_j\}$  מתקיים, לפי ההגדרה:

$$\int_{A''} \psi \leq S(\psi, T'') = \sum_{j=1}^M \sup_{y \in A''_j} \psi(y) m(A''_j)$$

לכל  $y \in A''_j$  מתקיים:

$$\psi(y) = \int_{A'} f_y \leq S(f_y, T') = \sum_{i=1}^K \sup \{f(x, y) | x \in A'_i\} m(A'_i)$$

כעת, מכיוון ו- $y \in A''_j$  אזי:

$$\sup \{f(x, y) | x \in A'_i\} \leq \sup \{f(x, z) | x \in A'_i, z \in A''_j\}$$

לכן:

$$\begin{aligned} \sup_{y \in A_j''} \psi(y) &\leq \sum_{i=1}^K \sup \{ f(x, z) \mid x \in A_i', z \in A_j'' \} m(A_i') \\ &= \sum_{i=1}^K a_{ij} m(A_i') \end{aligned}$$

ולכן:

$$\int_{A''} \psi \leq \sum_{j=1}^M \left( \sum_{i=1}^K a_{ij} m(A_i') \right) m(A_j'') = S(f, T) \leq I + \varepsilon$$

■

### 3.2.2 מסקנות ממשפט פוביני ועקרון קווליארי *Cavalieri*

**הערה 3.58** זהו אינטגרל אמיתי, פשוט הגבולות לא ידועים לנו.

מדוע?

כי לפי פוביני:

$$\begin{aligned} B \subset A \times [-K, K] \quad \nu_{n+1}(B) &= \int 1_B = \int_{[-K, K]} \left( \int_A \underbrace{1_B(x, t)}_{1_{B_t}(x)} dx \right) dt \\ &= \int \left( \int 1_{B_t}(x) \right) dt = \int \nu(B_t) dt \end{aligned}$$

**למה 3.59** תהי  $A$  תיבה ב- $\mathbb{R}^n$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  פונקציה ליפשיצית (עם קבוע  $K$ ). אזי לכל קוביה  $B \subset A$ ,  $f(B) \subset C$ , כאשר  $C$  קוביה בעלת נפח  $\left(Kn^{\frac{1}{2}}\right)^n m(A) \geq$ .

**הוכחה:** תהי  $B = \prod_{i=1}^n [a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon]$  אזי  $B \subset B_{\varepsilon\sqrt{n}}(a)$ , כאשר  $a = (a_1, \dots, a_n)$ . בגלל הליפשיציות:

$$f(B) \subset B_{K\varepsilon\sqrt{n}}(f(a))$$

אבל, עבור  $b = (b_1, \dots, b_n)$ ,  $B_R(b) \subset \prod_{i=1}^n [b_i - R, b_i + R]$  לכן:  $f(B) \subset \prod_{i=1}^n [b_i - K\varepsilon\sqrt{n}, b_i + K\varepsilon\sqrt{n}]$ .  
וכן,  $C$ :

$$m(C) = (K \cdot \sqrt{n})^n m(B)$$

■

**טענה 3.60** תהי  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  ליפשיצית. אם  $X \subset A \subset \mathbb{R}^n$  בעלת מידה 0\תכולה 0, אזי  $f(X)$  גם כן בעלת מידה אפס\תכולה אפס.

**הערה 3.61** מתי אפשר לכסות מלבן בקוביות? כאשר היחס בין הצלעות הוא רציונלי. כנ"ל ב- $n$  מימדים עבור תיבות. כלומר אנחנו דורשים כי אורכי הצלעות יהיו רציונליים. אם ישנן צלעות שאורכן אינו רציונלי, אז מהצפיפות נוכל "להגדיל קצת" את המלבן המקורי, ואז את החדש נוכל לכסות ע"י קוביות\תיבות.

**הוכחה:** יהי  $\varepsilon > 0$ . ברור (בהגדרת המושגים מידה\תכולה אפס אפשר לקחת קוביות) שקיימות קוביות  $B_1, B_2, \dots$  כך ש- $X \subset \bigcup B_j$ , ו- $\sum m(B_j) < \varepsilon$ .  
 לפי הלמה,  $f(X) \subset \bigcup f(B_j) \subset \bigcup C_j$  כך ש- $\sum m(C_j) \leq \left(Kn^{\frac{1}{2}}\right)^n \varepsilon$ . ■

**טענה 3.62** תהי  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית. אזי הגרף של  $f$  ב- $A$ :

$$\Gamma f = \{(x, f(x)) | x \in A\}$$

הוא בעל תכולה אפס ב- $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**הערה 3.63** טעות גדולה להשתמש כאן בהוכחה במשפט לבג! זוהי הוכחה פשוטה מאוד.

**הוכחה:** יהי  $\varepsilon > 0$ , ותהי  $T$  חלוקה של  $A$  כך ש:

$$S(f, T) - \sigma(f, T) < \varepsilon$$

תהי  $P(T) = \{A_1, \dots, A_k\}$ ,  $a_j = \inf_{x \in A_j} f(x)$ ,  $b_j = \sup_{x \in A_j} f(x)$ . אזי:

$$\Gamma f \subset \bigcup A_i \times [a_j, b_j] (*)$$

וכן  $m(A_j)(b_j - a_j) \geq m(A_j \times [a_j, b_j])$  לכן:

$$(*) = \sum m(A_j \times [a_j, b_j]) = \sum m(A_j)(b_j - a_j) = S(f, T) - \sigma(f, T) < \varepsilon$$

■

למשל, אם נביט בכדור היחידה:

$$D_n = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}$$

הוא בעל נפח אמ"מ  $S^{n-1} = \partial D_n$  בעלת תכולה אפס. מדוע  $S^{n-1}$  בעלת תכולה אפס?  $S^{n-1} = A \cup B$  כאשר  $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A = \Gamma(f)$   
 $f(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$   
 מסקנה ממשפט פוביני:

**עקרון קווליארי**

תהי  $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . עבור  $t \in \mathbb{R}$ , נסמן:

$$B_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x, t) \in B \right\}$$

אם  $B$  בעלת נפח, אזי  $B_t$  בעלת נפח (ב- $\mathbb{R}^n$ ) לכל  $t$  פרט לקבוצה בעלת מידה 0, ומתקיים:

$$\nu_{n+1}(B) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu_n(B_t) dt$$

בשנה א' היינו אמורים לראות שדטרמיננטה היא למעשה פונקציית נפח. נראה זאת כעת:

**משפט 3.64** אם  $B \subset \mathbb{R}^n$  בעלת נפח,  $T \in \text{Hom}(n, n)$ , אזי  $TB$  גם בעלת נפח ומתקיים:

$$\nu(TB) = |\det T| \cdot \nu(B)$$

**הערה 3.65** במקרה של  $\mathbb{R}^2$  אפשר להוכיח באינדוקציה בעזרת קריטריון קווליארי.

**הוכחה:** נשתמש בהוכחה העובדה הבאה מאלגברה לינארית<sup>34</sup>: כל  $T \in \text{Hom}(n, n)$  ניתן להציג כ:

$$T = T_N \circ \dots \circ T_2 \circ T_1$$

כאשר  $T_j \in \text{Hom}(n, n)$  היא פעולה אלמנטרית, כלומר  $T_j$  הוא אחד משלוש ההעסקות הבאות:

• פרמוטציה, כלומר  $T_j(x) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$  כאשר  $\pi$  היא תמורה של  $\{1, \dots, n\}$ .

• מטריצה אלכסונית, כלומר  $T_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$

•  $T_j$  היא מטריצה מהצורה  $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$  (כלומר הוספת שורה או עמודה מסויימת לשאר השורות\עמודות).

כמו כן, גם מאלגברה לינארית, אנו יודעים כי הדטרמיננטה כפליית, ולכן מתקיים:

$$|\det T| = \prod_j |\det T_j|$$

לכן, כדי להוכיח את המשפט, מספיק להראותו עבור פעולות אלמנטריות בלבד.

<sup>34</sup>שאני מקווה שזה נכון"

**טענה 3.66** תהי  $\pi$  פרמוטציה של  $\{1, \dots, n\}$ , ותהי  $A$  תיבה ב- $\mathbb{R}^n$ , ותהי  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית. כמו כן, נגדיר:

$$A' = [a_{\pi(1)}, b_{\pi(1)}] \times \dots \times [a_{\pi(n)}, b_{\pi(n)}]$$

$$g : A' \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

אזי, הפונקציה  $g$  אינטגרבילית ומתקיים  $\int_{A'} g = \int_A f$ .

**הוכחה:** לכל חלוקה  $T = (T_1, \dots, T_n)$  של  $A$ , נתאים חלוקה  $T' = (T_{\pi(1)}, \dots, T_{\pi(n)})$  של  $A'$ .  
ברור ש:

$$\sigma(f, T) = \sigma(g, T'), \quad S(f, T) = S(g, T')$$

■ ולכן  $\bar{\int}_A g = \bar{\int}_{A'} f$  וכנ"ל לגבי התחתונים, ולכן  $\int_A g = \int_A f$ .

**הערה 3.67** בהוכחה מעלה אין שימוש בכלל בפוביני או שום דבר מתקדם.

**מסקנה 3.68** המשפט נכון עבור  $T$  מסוג "פרמוטציה".

**טענה 3.69** המשפט נכון עבור מטריצות אלכסוניות.

**הוכחה:** מספיק להראות את מה שאנחנו רוצים להוכיח עבור:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \alpha & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

כי:

$$T_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_j \end{pmatrix} \text{ מתקבל מ-} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_j & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ ע"י פרמוטציה.}$$

עבור  $T$  הנ"ל נשתמש בעיקרון קווליארי. ברור ש- $(TB)_{\alpha t} = B_t$ , וז"א  $(TB)_t = B_{\frac{t}{\alpha}}$ .<sup>35</sup>  
אם  $\alpha > 0$ , אזי  $TB$  היא בעלת נפח  $\partial(TB) = T(\partial B)$  וכי  $\partial(TB) = T(\partial B)$  העתקה ליפשיצית, ו:

$$\begin{aligned}\nu_n(TB) &= \int \nu_{n-1}((TB)_t) dt = \int \nu_{n-1}\left(B_{\frac{t}{\alpha}}\right) dt \\ &\stackrel{u=\frac{t}{\alpha}, \alpha du=dz}{=} \alpha \int \nu_{n-1}(B_u) du = \underbrace{|\alpha|}_{|\det T|} \nu_n(B)\end{aligned}$$

■

אם  $\alpha > 0$ , נקבל  $-\alpha \nu(B)$ .

**הערה 3.70** אם  $B$  בעלת נפח, אזי עבור  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $B+x$  גם כן, ו- $\nu(B+x) = \nu(B)$ .

**הערה 3.71** באופן כללי  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $g(y) = f(y-x)$ , נקבל אותו הדבר.

**טענה 3.72** המשפט נכון עבור הסוג השלישי, כלומר אם  $T = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$  דהיינו  $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} + x_n, x_n)$  אזי  $\nu_n(TB) = \nu_n(B)$ .

**הוכחה:** אם  $B$  בעלת נפח, אזי גם  $TB$  בעלת נפח. מתקיים:

$$\mathbb{R}^{n-1} \supset (TB)_t = B_t + (0, \dots, 0, t)$$

לכן לכל  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\nu(C+x) = \nu(C)$  לכל  $C$  בעלת נפח, לכן:

$$\nu_{n-1}(B_t) = \nu_{n-1}((TB)_t)$$

■

ומעקרון קווליארי, נקבל כי  $\nu(TB) = \nu(B)$  וכמוכ,  $\det T = 1$ .

הוכחנו לכל המקרים, לכן המשפט מתקיים, כנדרש.

■

### דוגמא חישובית

נחשב את הנפח של ספירה בעזרת מה שעשינו עד כאן:

$$D_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}, \quad \nu(D_n) = ?$$

$$\nu_{n+1}(D_{n+1}) \stackrel{\text{Cavaglieri}}{=} \int_{-1}^1 \nu_n\left(\sqrt{1-t^2} D_n\right) dt = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n}{2}} \nu_n(D_n) dt$$

<sup>35</sup>עבור  $\alpha = 0$  מוכלת  $TB$  ב- $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ , ולכן  $\nu(TB) = 0$ .

קיבלנו נוסחא רקורסיבית -  $I_n I_{n-1} \dots I_2 I_1 I_0$  נסמן  $\nu_{n+1}(D_{n+1}) = I_n$ , נחשב את  $I_n$ :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^1 (1-t)^{\frac{n}{2}} dt \stackrel{t=\sin x, dt=\cos x dx}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x \sin x dx \\ &= \underbrace{\cos^n x \sin x}_{=0} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + n \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} dx \\ &\Rightarrow I_n = n(I_{n-2} - I_n) \Rightarrow I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}, \quad I_{n-1} = \frac{n-1}{n} I_{n-3} \\ I_n I_{n-1} &= \frac{n-1}{n+1} I_{n-2} I_{n-3} \end{aligned}$$

נטפל רק במקרה עבורו  $n$  אי זוגי, כלומר  $n = 2k - 1$ :

$$\begin{aligned} \nu_{2k}(D_{2k}) &= \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-5}{n-3} \cdot \dots \cdot \frac{2}{1} I_1 I_2 = \frac{\pi}{n+1}, \quad I_n I_{n-1} = \frac{2\pi}{n+1} \\ \nu_{2k}(D_{2k}) &= \frac{(2\pi)^k}{2k(2k-2) \cdot \dots \cdot 2} = \frac{\pi^k}{k!} \end{aligned}$$

תרגיל כיפי - חשבו עבור  $n = 2k$ .

### 3.2.3 משפט חילוף המשתנה

על פי המרצה, "זה חלק מכוער שאני אנסה לעשות אותו פחות מכוער".  
בשנה א', ראינו את המשפט הזה בעצם כנוסחא, ולכן לא ראינו את היופי והתורה שמאחוריה -

$$n = 1 : \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt$$

כאשר  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  גזירה ברציפות,  $f : g([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה.  
נביא את המשפט ב- $\mathbb{R}^n$  (הניסוח שונה בזה שבספר - שם יש בעיה. איתורה נותר לתלמידי השקדן) - אנחנו לא נוכיח אותו (!!!):

**משפט 3.73** תהי  $U \subset \mathbb{R}^n$  פתוחה<sup>36</sup>,  $\bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  רציפה, הגזירה ברציפות ב- $U$  וחס"ע על  $U$ <sup>37</sup>.

אז, לכל קבוצה קומפקטית  $K \subset \bar{U}$  ולכל פונקציה רציפה  $f : g(K) \rightarrow \mathbb{R}$  מתקיים:

$$\int_{g(K)} f = \int_K f \circ g (J_f)$$

<sup>36</sup>עם  $\partial U$  בעלת מידת 0

<sup>37</sup>מצד אחד, כאן יש לדרוש כי  $J_g(t) \neq 0$ ,  $t \in U$ . מצד שני, היעקוביאן מתאפס בדר"כ בקבוצה בעלת תכולה 0, כך אפשר להתעלם מקיומן של נקודות אלה.  
מכיוון ואנחנו לא מוכיחים את המשפט, הכל כאן "היפותטי", כדברי המרצה, אז יש גמישות בנוגע להנחות שלנו.

**הערה 3.74** עבור  $n = 1$ ,  $g'(t) \neq 0$ :

$$\int_{\min\{g(a), g(b)\}}^{\max\{g(a), g(b)\}} f = \int_{g([a, b])} f = \int_{[a, b]} f \circ g |g'|$$

**הערה 3.75** נראה כאילו יש סתירה בין הנוסחה במשפט לבין הנוסחה שהכרנו עבור  $n = 1$  - נעלם לחלוטין הערך המוחלט!

הסבר - ישנן שתי אפשרויות: אם  $g'(t) > 0$  לכל  $t$ , מקבלים את אותה הנוסחה. אחרת  $g'(t) < 0$  לכל  $t$ , ואז:

$$\begin{aligned} &= \int_{g(K)} f \stackrel{g(b) \leq g(a)}{=} \int_{g(b)}^{g(a)} f = - \int_{g(a)}^{g(b)} f = - \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt \\ &= \int_a^b f(g(t)) |g'(t)| dt \end{aligned}$$

והכל בסדר.

**הערה 3.76** דרך נכונה להסתכל על המשפט היא "שינוי מערכת קואורדינטות": הקואורדינטות החדשות יהיו  $(t_1, \dots, t_n)$ , כאשר  $x = g(t)$  הוא מעבר מקואורדינטות חדשות לישנות (=קרטיזיות): נרצה לחשב את  $\int_{g(K)} f$  כאשר  $f$  ניתנת בקואורדינטות קרטיזיות. אזי:

$$\int_{g(K)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int f(t_1, \dots, t_n) \left| \det \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)} \right| dt_1, \dots, dt_n$$

## דוגמא

קואורדינטות קוטביות:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \Rightarrow \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| &= \left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right| = r \end{aligned}$$

נסמן  $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ . נסתכל על האינטגרל במעגל, כלומר  $g(K) = B_R(0)$  - נקבל:

$$\int_{B_R(0)} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

15/1/2012

## הסבר יוריסטי למשפט

בה"כ נניח ש- $K$  תיבה. תהי  $T$  חלוקה (עדינה!) של  $K$ ,  $P(T) = \{A_1, \dots, A_N\}$ . תהי  $a_i \in A_i$  מתקיים:

$$\int_{g(K)} f = \sum_i \int_{g(A_i)} f$$

כדי  $g$  חח"ע ו- $g$  ליפשיצית, לכן  $g(\partial A_i)$  בעלת מידה 0 לכל  $i$ .  
אם  $T$  מספיק עדינה, בגלל רציפות הפונקציות  $f, g$ , עבור  $x \in A$  נקבל כי  $f \circ g(x) \sim f(g(a_i))$  לכך:

$$\int_{g(A_i)} f \sim \int_{g(A_i)} f(g(a_i)) = f(g(a_i))$$

עבור  $g(A_i) \sim$  כלומר  $g(x) \sim g(a_i) + Dg(a_i)h$ ,  $x = a_i + h \in Dg(a_i)(x - a_i)$  כאשר:  $S_i(A_i)$

$$S_i(x) = g(a_i) + Dg(a_i)(x - a_i)$$

אזי:

$$S_i(A_i) = g(a_i) - Dg(a_i)a_i + Df(a_i)A_i$$

ולכן:

$$\nu(g(A_i)) \sim \nu(S_i(A_i)) = \nu[Dg(a_i)(A_i)] = |J_g(a_i)| \nu(A_i)$$

על כן, קיבלנו:

$$\int_{g(K)} f \sim \sum_i f(g(a_i)) |J_g(a_i)| \nu(A_i) \sim \int_K f \circ g |J_g|$$

**טענה 3.77** תהי  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה התלויה רק ב- $r = \|x\|$  ו- $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה.  
כאשר  $0 < R < \infty$  מתקיים:  
אזי, עבור  $0 < R < \infty$  מתקיים:

$$\int_{B_R(0)} f = n \nu_n(D_n) \int_0^R \varphi(t) t^{n-1} dt$$

כאשר  $D_n$  הוא הכדור האוקלידי בעל רדיוס 1.

**הוכחה:** נגדיר פונקציה  $F$  ע"י:

$$F(R) = \int_{B_R(0)} f$$

עבור  $\varepsilon > 0$  מתקיים:

$$F(t + \varepsilon) - F(t) = \int_{B_{t+\varepsilon} \setminus B_t} f$$

נסמן  $A_\varepsilon = B_{t+\varepsilon} \setminus B_t$  מתקיים:

$$\widehat{\min}_{x \in A_\varepsilon}^{m_\varepsilon} \cdot \nu(A_t) \leq \int_{A_\varepsilon} f \leq \widehat{\max}_{x \in A_\varepsilon}^{M_\varepsilon} \cdot \nu(A_\varepsilon)$$

כאשר  $\varepsilon \rightarrow 0+$ ,  $M_\varepsilon \rightarrow \varphi(t)$ , וגם  $m_\varepsilon \rightarrow \varphi(t)$  לכן מתקיים:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{A_\varepsilon} f = \varphi(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\nu(A_\varepsilon)}{\varepsilon}$$

(אם קיים). כעת:

$$\nu(A_\varepsilon) = \nu(B_{t+\varepsilon}) - \nu(B_t) = (t+\varepsilon)^n \nu(D_n) - t^n \nu(D_n)$$

ולכן:

$$nt^{n-1} \nu(D_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(t+\varepsilon)^n - t^n}{\varepsilon} \nu(D_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\nu(A_\varepsilon)}{\varepsilon}$$

■

**דוגמא**

ההתפלגות  $X_{n-1}^2$ :  
תהי:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_j^2}{2}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$$

אזי:

$$\int_{B_R(0)} f = n \nu(D_n) \int_0^R (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{n-1} dt$$

### 3.3 אינטגרציה על מסילות ועל משטחים ב- $\mathbb{R}^3$

**הגדרה 3.78** תהי  $U \subset \mathbb{R}^n$ . פונקציה רציפה  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  נקראת שדה וקטורי,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ .

**הגדרה 3.79** תהי  $f$  כנ"ל, ותהי  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  מסילה גזירה ברציפות. האינטגרל של  $f$  לאורך  $\gamma$  הוא:

$$\int_\gamma \sum f_j dx_j := \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \quad \left( = \int \sum f_j(\gamma(t)) \gamma_j(t) dt \right)$$

האינטגרל הנ"ל אמור ליצג את העבודה שהשדה מבצע על נקודה חומרית על המסילה  $\gamma$ . במקרה הכי פשוט, עבודה היא "כח כפול דרך", ז"א יהי  $f = v$  וקטור קבוע ב- $\mathbb{R}^n$ , והמסילה - קטע  $[A, B] \subset \mathbb{R}^n$ , בכל נקודה  $\gamma(t)$  של  $[A, B]$  פועל עליה הרכיב של  $v$  המשיק ל- $[A, B]$ , ז"א  $\left\langle \frac{B-A}{\|B-A\|}, v \right\rangle$ , ואת זה צריך להכפיל בדרך:  $\|B-A\|$ , ונקבל כי העבודה היא  $\langle B-A, v \rangle$ . עכשיו, עבור  $f$  ו- $\gamma$  כלליים, נעשה קירוב:

תהי  $T$  חלוקה של  $[a, b]$  - נסמן  $T := a = t_0 < \dots < t_N = b$ . כמובן, העבודה על  $\gamma$  שווה לסכום העבודה על המסילה בקטעים המתאימים -  $\sum_{i=1}^N (\text{work on } \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]})$ . עבור חלוקה  $T$  עדינה מאוד, אפשר להניח ש- $f$  קבועה על  $[t_{i-1}, t_i]$ , וערכה  $f(\gamma(t_i)) \sim f(\gamma(t_{i-1}))$ . כמו כן, נניח כי  $\gamma([t_{i-1}, t_i])$  הוא בערך הקטע  $[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ . סך הכל, העבודה של  $f$  על  $\gamma([t_{i-1}, t_i])$  שווה בערך ל- $\langle f(\gamma(t_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle$ , וזה שווה בערך ל:

$$(t_i - t_{i-1}) \langle f(\gamma(t_i)), \gamma'(t_i) \rangle = \langle f(\gamma(t_i)), (t_i - t_{i-1}) \gamma'(t_i) \rangle$$

לכן העבודה של  $f$  על  $\gamma$   $\sim \sum \langle f(\gamma(t_i)), \gamma'(t_i) \rangle (t_i - t_{i-1})$  וזהו סכום רימן של האינטגרל מההגדרה.

כעת, כמה סימונים:

יהיו  $\delta : [c, d] \rightarrow X$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ .

1. אם  $\delta(c) = \gamma(b)$ , המסילה  $\delta * \gamma : [a, b + d - c] \rightarrow X$  מוגדרת ע"י:

$$\delta * \gamma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & a \leq t \leq b \\ \delta(t - b + c) & c \leq t \leq d + b - c \end{cases}$$

נשים לב כי ללא התנאי,  $\delta * \gamma$  אינה מוגדרת.

2. המסילה  $\gamma * : [a, b] \rightarrow X$  מוגדרת ע"י  $\gamma * (t) = \gamma(a + b - t)$ .

**הגדרה 3.80** מסילה גזירה ברציפות למקוטעין היא מסילה  $\gamma_N * \dots * \gamma_1$  כאשר  $\gamma_N, \dots, \gamma_1$  היא מסילה גזירה ברציפות.

בהמשך לא נקפיד בצורה מוגזמת על ההבדל בין שני המושגים.

**תכונות:**

• אדיטיביות מסילתית: אם  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\delta : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , אזי:

$$\int_{\gamma * \delta} \sum f_j dx_j = \int_{\gamma} \dots + \int_{\delta} \dots$$

• לינאריות: אם  $h = \alpha f + \beta g$ , אזי:

$$\int_{\gamma} \sum h_j dx_j = \alpha \int_{\gamma} \sum f_j dx_j + \beta \int_{\gamma} \sum g_j dx_j$$

■

**הוכחה:** ברור.

**טענה 3.81** תהי  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  גזירה ברציפות,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  שדה וקטורי.

1. אם  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  גזירה ברציפות,  $\varphi(c) = a$ ,  $\varphi(d) = b$ , אזי:

$$\int_{\gamma} \sum f_j dx_j = \int_{\delta} \sum f_j dx_j$$

כאשר  $\delta = \gamma \circ \varphi$ .

2.

$$\int_{\gamma^*} \sum f_j dx_j = - \int_{\gamma} \sum f_j dx_j$$

**הוכחה:**

1. מתקיים:

$$\delta'(t) = \gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad (\gamma'(\varphi(t)) \in \mathbb{R}^n, \varphi'(t) \in \mathbb{R})$$

לכן:

$$\begin{aligned} \int_{\delta} \sum f_j dx_j &= \int_c^d \langle f(\gamma(\varphi(t))), \gamma'(\varphi(t)) \rangle \cdot \varphi'(t) dt \\ &\stackrel{u=\varphi(t), du=\varphi'(t)dt}{=} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \langle f(\gamma(u)), \gamma'(u) \rangle du = \int_{\gamma} \sum f_j dx_j \end{aligned}$$

2. מההגדרה, מתקיים  $(\gamma^*)'(t) = -\gamma'(a+b-t)$ , לכן:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^*} \sum f_j dx_j &= \int_a^b \langle f(\gamma(a+b-t)), -\gamma'(a+b-t) \rangle dt \\ &\stackrel{u=a+b-t}{=} \int_b^a \langle f(\gamma(u)), \gamma'(u) \rangle du = - \int_{\gamma} \sum f_j dx_j \end{aligned}$$

■

**כמה דוגמאות:**

• יהי  $f(x) = v = (v_1, \dots, v_n)$  (קבוע). אזי:

$$\int_{\gamma} \sum f_j dx_j = \int_a^b \sum_{j=1}^n v_j \gamma'_j(t) dt = \sum_{j=1}^n v_j (\gamma_j(b) - \gamma_j(a)) = \langle v, \gamma(b) - \gamma(a) \rangle$$

• יהי  $f(x, y) = -\frac{1}{\|(x, y)\|^2} (x, y)$ ,  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$  אזי:

$$\int_{\gamma} -\left(\frac{x dx}{x^2 + y^2} + \frac{y dy}{x^2 + y^2}\right) = \int_0^{2\pi} \langle (-\cos t, -\sin t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = 0$$

• בדומה, עבור  $f(x, y) = \frac{1}{\|(x, y)\|^2} (-y, x)$ ,  $\gamma, U$  כנ"ל, מתקיים:

$$\int_{\gamma} -\frac{y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = 2\pi$$

•  $f, U$  כנ"ל,  $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$  המוגדרים בצורה הבאה:

$$-1 \leq t \leq 1 \quad \gamma_1(t) = (1, t), \quad \gamma_2(t) = (t, 1), \quad \gamma_3(t) = (-1, t), \quad \gamma_4(t) = (t, -1)$$

(כאשר המסילה שנקבל היא בעצם ריבוע היחידה), נקבל:

$$\int_{\gamma_1} = \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2 + 1} \langle (-t, 1), (0, 1) \rangle dt = \arctan t|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$$

וכמו כן:

$$-\int_{\gamma_2} = -\int_{\gamma_3} = \int_{\gamma_4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_{\gamma} = 2\pi$$

ולכן נקבל אותה תוצאה כמו בדוגמא הקודמת. האם זה כלל או מקרה?

**הגדרה 3.82** תהי  $U \subset \mathbb{R}^n$  פתוחה. שדה וקטורי  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  נקרא שדה משמר ב- $U$ , אם לכל מסילה גזירה ברציפות  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ , האינטגרל:

$$\int_{\gamma} \sum f_j dx_j = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

תלוי רק ב- $\gamma(a), \gamma(b)$  ז"א אם  $\delta : [c, d] \rightarrow U$  מקיים  $\delta(c) = \gamma(a), \delta(d) = \gamma(b)$  אזי:

$$\int_{\delta} \sum f_j dx_j = \int_{\gamma} \sum f_j dx_j$$

**הערה 3.83** הגדרה שקולה: לכל מסילה סגורה (וגזירה ברציפות למקוטעין)  $\gamma$ ,  $\int_{\gamma} \sum f_j dx_j = 0$ .

מדוע ההגדרות שקולות?

אם נניח את ההגדרה המקורית זה נובע באופן טריוויאלי - למשל אם ניקח  $\delta$  קבועה, ואז  $\delta(t) = \gamma(a) = \gamma(b)$ , והאינטגרל שווה כמובן לאפס. בכיוון השני, אם  $\gamma, \delta$  כנ"ל, אזי  $\delta * \gamma$  סגורה, לכן  $\int_{\delta * \gamma} = 0$ .

### דוגמאות

א.  $f, v = f$  קבוע. אזי:

$$\int_a^b \langle v, \gamma'(t) \rangle dt = \sum \int_a^b \gamma_j \gamma_j'(t) dt = \sum v_j (\gamma_j(b) - \gamma_j(a)) = \langle v, \gamma(b) - \gamma(a) \rangle$$

ב. ב- $\mathbb{R}^n$  עבור  $n = 1$ , כל שדה הוא משמר:

$$\int_\gamma f dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \stackrel{u=\gamma(t)}{=} \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(u) du$$

**הגדרה 3.84** אומרים שקבוצה  $X \supset U$  (מרחב מטרי) הינה קשירה מסילתית, אם לכל  $p, q \in U$  קיימת מסילה  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  כך ש- $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$ .

**טענה 3.85** אם  $U \subset \mathbb{R}^n$  פתוחה, בהגדרה הנ"ל אפשר לדרוש ש- $\gamma$  הינה גזירה ברציפות למקוטעין.

**הוכחה:** יהי  $K, K = \gamma([a, b])$  היא קבוצה קומפקטית. נתבונן בפונקציה  $f(x) = d(x, U^c)$ . זוהי פונקציה רציפה (ב- $\mathbb{R}^n$  ל- $\mathbb{R}$ ), ו- $0 < f(x)$  לכל  $x \in K \subset U$ . לכן קיים  $\varepsilon > 0$  כך ש:  $d(x, U^c) \geq \varepsilon$  לכל  $x \in K$ .  
 $\gamma$  היא פונקציה רציפה במ"ש, ולכן קיים  $\delta > 0$  כך ש:

$$|s - t| < \delta \Rightarrow \|\gamma(s) - \gamma(t)\| < \varepsilon$$

תהי  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  חלוקה כך ש- $|t_i - t_{i-1}| < \delta$  לכל  $i$ . אזי, הקטע  $[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$  מוכל ב- $B_\varepsilon(t_i)$ . מכאן הקו הפוליגוני:

$$L = \bigcup_{i=1}^N [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)] \subset U$$

ברור ש- $L$  היא תמונה של מסילה גזירה ברציפות למקוטעין  $\delta$ , המקיימת  $\delta(0) = a, \delta(N) = b$ .  
 נוכל להגדירה ע"י:  $\delta(s) = (i - s) \gamma(t_{i-1}) + (s - i + 1) \gamma(t_i)$  עבור  $i - 1 \leq s \leq i$ . ■

**הגדרה 3.86** קבוצה  $U \supset V$  נקראת רכיב קשירות מסילתית אם  $V$  קשירה מסילתית, ואם  $V' \subsetneq V$ , אזי  $V'$  איננה קשירה מסילתית.

ברור ש- $U = \bigcup V_t$  כאשר  $V_t$  הם רכיבי קשירות זרים (נשים לב שיש כאן יחס שקילות:  $p \sim q$  אם  $p, q$  שייכים לאותו רכיב שקילות מסילתית).

**הערה 3.87** אם  $U \subset \mathbb{R}^n$  פתוחה, אזי רכיבי הקשירות המסילתית שלה פתוחים, כי אם  $V$  רכיב,  $p \in V$  ו- $B_\varepsilon(p) \subset U$ , אזי גם  $B_\varepsilon(p) \subset V$ , כי  $B_\varepsilon(p)$  קמור  $\Leftarrow$  קשיר מסילתית.

"עכשיו בא משפט מאוד יפה: ... אין לו הנחות, הוא כללי, ויש לו 10 שורות בהוכחה":

**משפט 3.88** תהי  $U \subset \mathbb{R}^n$  פתוחה,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  שדה וקטורי.  $f$  משמר ב- $U$  אם ורק אם קיימת פונקציה דיפרנציאבילית  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש- $f(x) = \nabla g(x)$  לכל  $x \in U$ .  
זו נקראת פונקציית פוטנציאל עבור  $f$ .

**הערה 3.89** אם  $g$  כזו, אזי  $g + C$ , לכל  $C$  קבוע, גם כן. אם  $U$  קשירה מסילתית ו- $h, g$  פונקציות פוטנציאל, אזי  $h - g$  הוא קבוע, כי אז  $\nabla(h - g) = 0$  ישירות מההגדרה, ולפי משפט הערך הממוצע קל לראות שאם  $\gamma$  הוא קו פוליגוני במקשר בין  $p$  ל- $q$  ו- $\nabla F \equiv 0$ , אזי  $F(p) = F(q)$ . במילים אחרות, פוטנציאל הוא יחיד עד כדי קבוע.

**הערה 3.90** כאשר  $v = f$  קבוע, פונקציית הפוטנציאל של  $f$  היא  $g(x) = \langle v, x \rangle$ .

**הוכחה:**  $\Leftarrow$  נקבע נקודה  $q \in U$ . עבור עבור  $p \in U$  נגדיר:

$$g(p) = \int_{\gamma} \sum f_j dx_j$$

כאשר  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  מסילה (גזירה ברציפות למקוטעין) המקיימת:

$$\gamma(b) = p, \gamma(a) = q$$

$g$  מוגדרת היטב כי  $f$  משמר.

צ"ל שלכל  $p \in U$  הנגזרת קיימת, וכן  $\frac{\partial g}{\partial x_i}(p) = f_i(p)$  וזו רציפה ב- $U$ .  
 $U$  פתוחה, לכן קיים  $\varepsilon > 0$  כך ש- $B_\varepsilon(p) \subset U$ , ובפרט הקטע  $[p, p + \varepsilon e_i] \subset U$ . עבור  $-\varepsilon < t < \varepsilon$  נגדיר:

$$\delta_t(s) = p + se_i, \delta_t : [0, t] \rightarrow U$$

עבור  $s \in [0, t]$  מתקיים:

$$g(p + te_i) = \int_{\gamma * \delta_t} \sum f_j dx_j$$

לכן:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} [g(p + te_i) - g(p)] &= \frac{1}{t} \int_{\delta_t} \sum f_j dx_j = \frac{1}{t} \int_0^t \langle f(p + se_i), e_i \rangle ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t f_i(p + se_i) ds \xrightarrow{t \rightarrow 0} f_i(p) \end{aligned}$$

כי  $f_i$  רציפה. מכיוון והיא רציפה, גם  $\nabla g(x)$  רציפה, ולכן  $g$  דיפרנציאבילית ברציפות ב- $U$ .  
 $\Rightarrow$  נניח כי לכל  $x \in U$ ,  $f(x) = \nabla g(x)$ . תהי  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  מסילה גזירה ברציפות. לפי כלל השרשרת, לכל  $t \in [a, b]$  מתקיים:

$$\langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle \nabla g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = (g \circ \gamma)'(t)$$

ולכן:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum f_j dx_j &= \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \underbrace{\langle \nabla g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle}_{(g \circ \gamma)'(t)} dt \\ &= \int_a^b (g \circ \gamma)'(t) dt = g \circ \gamma|_a^b = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) \end{aligned}$$

■ וזה אכן תלוי רק ב- $\gamma(b)$ ,  $\gamma(a)$  ולכן  $f$  שדה משמר, כנדרש.

**מסקנה 3.91** אם  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  שדה וקטורי משמר,  $C^1 \ni f$  (דיפרנציאבילית ברציפות ב- $U$ ), אזי  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$  לכל  $x \in U$ , זאת אומרת  $Df(x) = Df(x)^T$  (תנאי הכרחי לשדה משמר).

**הוכחה:** מההוכחה מעלה יודעים ש- $f_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ , לכן  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$ . מכיוון ואנו מניחים כי אלו רציפות, נקבל מהלמה של שורץ כי:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

■

**הגדרה 3.92** אם  $f$  מקיים את המסקנה לכל  $x \in U$ , אומרים ש- $f$  משמר לוקלית.

#### דוגמאות

$h(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ ,  $f(x, y) = -\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$  שניהם משמרים לוקאלית ב- $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . עבור  $f$  קל לנחש פונקציית פוטנציאל -

$$-\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

לגבי  $h$  - ראינו שאיננו משמר.

כעת נלמד משפט שנותן קריטריון נוח לגבי  $U$ :

**הגדרה 3.93** קבוצה  $U \subset \mathbb{R}^N$  נקראת כוכבית אם קיים  $q \in U$  כך שלכל  $x \in U$ ,  $[q, x] \subset U$ .

#### דוגמאות

- קבוצה קמורה.
- $\mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\})$  (כל נקודה על ציר ה- $x$  השלילי תקיים זאת - נקבל צורת סהר).

**משפט 3.94** תהי  $U \subset \mathbb{R}^n$  פתוחה וכוכבית. אזי כל שדה וקטורי משמר לוקלית ב- $U$ , משמר ב- $U$  (גלובלית).

#### תזכורת - כלל לייבניץ - גזירה מתחת לאינטגרל:

תהי  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה ב- $A = [a, b] \times [c, d]$  עם  $\frac{\partial f}{\partial y}$  רציפה ב- $A$ . יהי  $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , אזי,  $\varphi$  גזירה ב- $d, c$ , ומתקיים:

$$\varphi(y) = \int \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

הוכחת המשפט: הוכחה: חישוב פורמלי. בה"כ  $q = 0 \in \mathbb{R}^n$ . נגדיר לכל  $x \in U$ :

$$g(x) = \int_{\gamma_x} \sum f_j dx_j = \int_0^1 \langle f(tx), x \rangle dt$$

כאשר  $0 \leq t \leq 1, \gamma_x(t) = tx$ . נטען כי  $g$  זו היא פונקציית פוטנציאל עבור  $f$ , כלומר  $f(x) = \nabla g(x)$  לכל  $x \in U$ . לפי כלל לייבניץ מעלה:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i f_i(tx) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (f_i(tx) \cdot x_i) dt$$

נחשב את הביטוי  $\frac{\partial}{\partial x_j} (f_i(tx) \cdot x_i)$ : עבור  $i \neq j$  מקבלים  $t \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx) \cdot x_i$ , ועבור  $i = j$  מקבלים:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f_i(tx) \cdot x_i) = t \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx) \cdot x_i + f_i(tx)$$

לכן בסה"כ נקבל:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (f_i(tx) \cdot x_i) &= \sum_{i=1}^n t \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx) \cdot x_i + f_j(tx) \\ &= \sum_{i=1}^n t \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i + f_j(tx) \end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש- $f$  משמרת לוקלית. נשים לב כי:

$$\sum_{i=1}^n t \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i = t \langle \nabla f_j(tx), x \rangle = t \cdot \frac{d}{dt} f_j(tx)$$

ולכן בסה"כ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 \left[ t \frac{d}{dt} f_j(tx) + f_j(tx) \right] dt = \\ &= t f_j(tx) \Big|_0^1 - \int_0^1 f_j(tx) dt + \int_0^1 f_j(tx) dt = f_j(x) \end{aligned}$$

■

**הערה 3.95** (סמנטית) מהמשפט נובע ששדה שומר לוקלית הוא מקומית שדה משמר, דהיינו: לכל  $x \in U$  קיים  $\varepsilon > 0$  כך ש- $f$  משמר ב- $B_\varepsilon(x)$ : תהי  $\varepsilon > 0$  כך ש- $B_\varepsilon(x) \subset U$ . מכיוון ו- $B_\varepsilon(x)$  קמורה היא כוכבית, ולכן  $f$  משמר ב- $B_\varepsilon(x)$ .

**הערה 3.96** יהי  $f$  משמר לוקלית ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ . אזי  $f$  משמר ב- $\mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\})$  (כי זו קבוצה כוכבית).

נדבר על שדה קונקרטי:

$$h(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y, x)$$

ידוע שהוא משמר לוקלית, לכן הוא משמר בכל תחום כוכבי, ובפרט ב- $U = \mathbb{R}^2 \setminus (0, \infty) \times \{0\}$ . לכן יש ל- $h$  פונקציית פוטנציאל ב- $U$ . נמצא אותה - נחפש פונקציה ש"נגזרתה שווה למה שיש לי" - כלומר, צריך לעשות אינטגרציה. מבחינה חישובית זה בדר"כ קשה, ולעיתים אף לא ניתן לביצוע. במקרה הזה לעומת זאת, מציאת הפונקציה היא די פשוטה.

תהי  $\gamma(t) = tv$  עבור  $v \in U$ ,  $0 < a \leq t \leq b$ . נסמן  $\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left\langle \frac{1}{t^2 \|v\|^2} (-tv_2, tv_1), (v_1, v_2) \right\rangle dt = 0$$

זאת אומרת:

$$\int_{\gamma} \omega = g(bv) - g(av)$$

מסקנה -  $g$  קבועה על כל קרן  $\{tx | t > 0\}$ . מספיק לנו בנוסף לראות מה קורה על מעגל כלשהוא:

תהי  $\gamma(t) = (cost, sint)$ ,  $0 < a \leq t \leq b < 2\pi$ . אזי:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle (-sint, cost), (-sint, cost) \rangle dt = b - a = 2\pi$$

ברור ש- $t = g(rcost, rsint)$  היא פונקציית פוטנציאל עבור  $h$  (עבור  $0 < r$ ,  $0 < t < 2\pi$ ) - זוהי למעשה הפונקציה שנותנת את הזווית. אם נחשב נגזרות חלקיות נראה שפונקציה זו אכן מקיימת את הנדרש מפונקציית הפוטנציאל.

**הערה 3.97** אפשר גם לקחת  $g(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ , אך זה תקף רק בחצי המישור העליון.

"היום נעשה הרבה דברים שהם מפוקפקים מבחינת אסתטיות" - ננסה לפרמל דברים שמובנים פיזיקלית.

**למה 3.98** תהי  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  מסילה גזירה ברציפות למקוטעין כך ש:

$$\gamma(a), \gamma(b) \in (0, \infty) \times \{0\}$$

ו- $(a, b) \subset U$ . אזי,  $\int_{\gamma} \omega = 2\pi n$  כאשר  $n \in \{-1, 0, 1\}$ .

1- עם השעון, (-1) - נגד השעון, 0 - לא עשינו שום סיבוב סביב הראשית. **הוכחה:** עבור  $\varepsilon > 0$  (מספיק קטן), נסמן  $p_{\varepsilon} = \gamma(a + \varepsilon)$ ,  $q_{\varepsilon} = \gamma(b - \varepsilon)$ , עבור  $\gamma_{\varepsilon} = \gamma|_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}$ .

<sup>38</sup> כי הזזה לא תפגע לנו באף אחת מהתכונות הרלוונטיות

$h$  היא פונקציית פוטנציאל של  $U$ , ומכיוון  $\gamma_\varepsilon : [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \rightarrow U$  מתקיים

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \omega = \theta(q_\varepsilon) - \theta(p_\varepsilon)$$

ברור ש- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \omega = \int_\gamma \omega$  (כי תמיד  $|\int_\delta f_j dx_j| \leq \sup |f(x)| \cdot \gamma' \text{'s length}$ ).  
מכיוון ש- $\gamma((a, b)) \subset U$  (מהנתון), עבור  $\varepsilon > 0$  מספיק קטנים, כל ה- $p_\varepsilon, q_\varepsilon$  נמצאים באותו הצד של ציר ה- $x$ .  
לכן  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta(q_\varepsilon) = 0$  אם  $q_\varepsilon$  נמצאים מעל הציר, או  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta(q_\varepsilon) = 2\pi$  אם  $q_\varepsilon$  נמצאים מתחתיו.

אותו דבר נכון לגבי  $p_\varepsilon$ . לכן  $\int_\gamma \omega$  יכול להיות רק 0 או  $\pm 2\pi$  - בהתאם לנסיבות (מהיכן השאיפה מגיעה - מעל הציר, מתחת לציר, או שאין סיבוב בכלל - נזכור כי נקודות ההתחלה והסיום הן על הציר). אם עשינו סיבוב בכיוון השעון אז הזווית  $-2\pi$ , אם בניגוד אז  $2\pi$ , ואם לא היה סיבוב אז 0 - כלומר אם התחלנו וסיימנו באותו הכיוון של הציר (חיובי\שלילי). ■

**מסקנה 3.99** תהי  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$  מסילה גזירה ברציפות למקוטעין. אזי קיים  $n \in \mathbb{Z}$  כך ש:

$$\int_\gamma \omega = 2\pi \cdot n$$

**הגדרה 3.100**  $n$  זה נקרא האינדקס של  $\gamma$  ביחס ל- $(0, 0)$ , ונסמנו ב- $ind(\gamma, 0) = n$ . באנגלית מושג זה נקרא בשם winding number (כלומר, מספר ההקפות).

**הוכחה:** נניח תחילה שיש מספר סופי של  $a \leq t \leq b$  כך ש- $\gamma(t) \in (0, \infty) \times \{0\}$ . נסמן  $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  אזי:

$$\gamma = \gamma_{N+1} * \gamma_N * \dots * \gamma_1$$

כאשר:

$$\forall 1 \leq j \leq N \quad \gamma_j = \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}, \quad \gamma_{N+1} = \gamma|_{[a, t_0] + \gamma|_{[t_N, b]}}$$

לכן  $\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^{N+1} \int_{\gamma_j} \omega$ . לכל  $j$ ,  $\gamma_j$  מקיימת את תנאי הלמה, לכן  $\int_{\gamma_j} \omega = 2\pi n_j$  עבור  $n_j \in \{0, \pm 1\}$ .

עבור  $\gamma$  כללי, קיימים קווים פוליגוניים  $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$ ,  $\gamma_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  כך ש:

$$\bullet \gamma_j(t) \rightarrow \gamma(t) \text{ במ"ש.}$$

$$\bullet \gamma'_j(t) \rightarrow \gamma'(t) \text{ במ"ש (פרט למספר סופי של נקודות).}$$

•  $\gamma_j$  מקיימת את התנאי של החלק הראשון, כלומר  $\{t | \gamma_j(t) \in \mathbb{R} \times \{0\}\}$  היא קבוצה סופית

יש להראות שדבר כזה באמת קיים - נשאר כתרגיל.  
 אם כן,  $\int_{\gamma_j} \omega = 2\pi n_j$  עבור  $n_j \in \mathbb{Z}$  מסויים.  
 בתנאים אלו,  $\int_{\gamma_j} \omega \rightarrow \int_{\gamma} \omega$ , לכן  $n_j$  קבוע החל מ- $j$  מסויים, נגיד ב- $n$ , ולכן  $\int_{\gamma} \omega = 2\pi n$ .  
 ■

**תרגיל** (עם עצות טובות):

$$F(x, y) = \left( \frac{3y - x}{(x + y)^3}, \frac{y - 3x}{(x + y)^3} \right)$$

זהו שדה משמר לוקלית  $x + y \neq 0$ . בכל חצי מישור קיים פוטנציאל - מצאו אותו.  
 איך עושים את זה באופן כללי?  
 מראש אנו יודעים מה תהיה פונקציית הפוטנציאל:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{y - 3x}{(x + y)^3}$$

האסטרטגיה - נמצא קודם כל את הפוטנציאל על הישר  $x = 0$  - נגיד  $g(0, 1) = 0$ . אז:

$$g(0, y) = \int_1^y \frac{\partial g(0, t)}{\partial y} dt = \int_1^y \frac{t}{t^3} dt$$

$$g(x, y) = g(0, y) + \int_0^x \frac{\partial g}{\partial x} dt = \int_0^x \frac{3y - t}{(t + y)^3} dt$$

לאחר הדיון שלנו בסיבוב סביב הראשית, נרצה להגדיר הקפה של נקודה כלשהיא במישור:

**הגדרה 3.101** תהי  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  מסילה סגורה (גזירה ברציפות). אנו מגדירים:

$$\text{ind}(\gamma, p) = \text{ind}(\gamma - p, 0)$$

### 3.3.1 הקשר לפונקציות מרוכבות

"עכשיו אני רוצה לתת לכם שירות" - לעזור לנו בקורס פונקציות מרוכבות.  
 נגדיר העתקה  $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ע"י  $\Phi(x + iy) = (x, y)$  - נראה מוכר?

| $\mathbb{R}^2$              | $\mathbb{C}$                |
|-----------------------------|-----------------------------|
| $(x, y) \xrightarrow{\Phi}$ | $(x + iy)$                  |
| מטריקה אוקלידית             | $d(z_1, z_2) =  z_1 - z_2 $ |

נעיר ש- $\Phi$  היא איזומטריה, כאשר המרחק ב- $\mathbb{C}$  הוא כפי שמוגדר מעלה. עבור  $\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  נסמן  $\tilde{\gamma}(x) = \Phi^{-1}\gamma(x)$ .

תהי  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  מסילה גזירה ברציפות. נסתכל על מסילה זו כמסילה במרוכבים:  $\tilde{\gamma} = \Phi \circ \gamma$ , ותהי  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציה רציפה. נביט בסכומי רימן עבור חלוקה כלשהיא  $T : a = t_0 < \dots < t_N = b$ :

$$(\mathbb{C} \ni) S_c(f, T) = \sum_{j=1}^N f(\tilde{\gamma}(t_j)) (\tilde{\gamma}(t_j) - \tilde{\gamma}(t_{j-1}))$$

משיקולים דומים לאלו משנה א', ברור שקיים הגבול  $\lim_{\delta(T) \rightarrow 0} S_c(f, T)$ . הגבול הזה נקרא האינטגרל של  $f$  לאורך  $\gamma$ , ונסמנו ב- $\int_{\gamma} f(z) dz$ . נסמן:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t) &= x(t) + iy(t), \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)) \\ f(x + iy) &= h(x, y) + ig(x, y) \\ \Rightarrow S_c(f, T) &= \sum h(\gamma(t_i)) (x(t_j) - x(t_{j-1})) - g(\gamma(t_j)) (y(t_j) - y(t_{j-1})) \\ &\quad + [g(\gamma(t_j)) c(t_j) + h(\gamma(t_j)) y(t_j)] i \end{aligned}$$

ברור ששני הסכומים הנ"ל הם סכומי רימן של האינטגרלים המתאימים, לכן זה שואף ל:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} h dx - g dy &= \left( \int_{\gamma} g dx + h dy \right) i = \int_{\gamma} (h + gi) dx + (-g + hi) dy \\ &= \int f(z) dz = \int (g + ih) (dx + idy) \end{aligned}$$

זהו היחס בין האינטגרל ב- $\mathbb{R}^2$  לבין האינטגרל ב- $\mathbb{C}$ .

### 3.3.2 משפט גרין

משפט נוסחאת גרין היא הכללה של נוסחת ניוטון-לייבניץ. מה הוא "בערך" אומר?

$$\int f'(x) dx = \int f|_{\partial([a,b])}$$

כלומר האינטגרל הזה שווה לאינטגרל על השפה. תהי  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  סגורה, פשוטה, וגזירה ברציפות למקוטעין. עובדה שלא נוכיח (מאוד אינטואיטיבית) - משפט ג'ורדן:

**משפט 3.102** בתנאים מעלה, קיימות קבוצות זרות  $D, U$ , כך ש- $D \cup U = \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a, b])$  (איחוד זר של קבוצות פתוחות), כאשר  $D$  חסומה והומיאומורפית ל- $B_1(0)$ ,  $\partial D = \gamma([a, b])$  ו- $\text{ind}(\gamma, p) = \pm 1$  (קבוע) לכל  $p \in D$ .

זהו משפט קשה ולא נוכיח אותו, ובעצם נניח את טענותיו. נשתמש בו בהוכחת משפט גרין:

**משפט 3.103** תהי  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  סגורה, גזירה ברציפות למקוטעין,  $D$  כנ"ל, ונניח ש-  
 $1 = \text{ind}(\gamma, p)$  לכל  $p \in D$  ("ז"א  $\gamma$  מכוונת נגד כיוון השעון). תהינה  $P, Q : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$   
 דיפרנציאביליות ברציפות. אזי:

$$\iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_\gamma P dy - Q dx$$

למרות שהמשפט אינו אינטואיטיבי, נראה שזה ממש תרגום של המשפט היסודי לשני מימדים.  
 נעשה זאת בעזרת הנחות מסויימות על  $\gamma$ . **הוכחה:** כאמור נוכיח את המשפט במקרה די  
 מיוחד (בהערה נסביר למה זה גורר את הנוסחה בכל "מקרה סביר"):  
 נניח שקיימות 4 פונקציות גזירות ברציפות:  $\varphi_1, \varphi_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi_1, \psi_2 : [\theta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}$   
 עם  $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$  עבור  $\alpha < t < \beta$ ,  $\psi_1(t) < \psi_2(t)$  עבור  $\theta \leq t \leq \eta$ , כך שהיא שקולה  
 לשתי ההצגות:  $\delta = \delta_1^* * \delta_2^* * \delta_3^* * \delta_4^*, \gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3^* * \gamma_4^*$  כאשר:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, \varphi_1(t)), \quad \gamma_3(t) = (t, \varphi_2(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta \\ \delta_1(t) &= (t, \psi_1(t)), \quad \delta_3(t) = (t, \psi_2(t)) \quad \theta \leq t \leq \eta \\ \gamma_2(t) &= (\beta, t) \quad \varphi_1(\beta) \leq t \leq \varphi_2(\beta) \\ \gamma_4(t) &= (\alpha, t) \quad \varphi_1(\alpha) \leq t \leq \varphi_2(\alpha) \\ \delta_2(t) &= (\eta, t), \quad \psi_1(\eta) \leq t \leq \psi_2(\eta) \\ \delta_4(t) &= (\theta, t), \quad \psi_1(\theta) \leq t \leq \psi_2(\theta) \end{aligned}$$

בעצם נקבל תחימה של  $\gamma$  (כאשר  $\gamma_1, \gamma_3$  תוחמות את  $\gamma$  מלמטה ומלמעלה בהתאמה  
 (כולל עקומים),  $\gamma_2, \gamma_4$  תוחמות את  $\gamma$  מימין ומשמאל (אלו הם קווים ישרים), וכן"ל לגבי  $\delta$ .  
 אנו רוצים להוכיח כי לכל  $P, Q : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  גזירות ברציפות מתקיים:

$$\iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_\gamma P dy - Q dx$$

למעשה, נראה משהו יותר חזק - נראה כי  $\int_\gamma P dy - Q dx = \iint_U \frac{\partial P}{\partial x} dx dy$ ,  $\int_\gamma Q dx = \iint_U \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy$  נראה רק אחד מהם, השני נעשה בצורה דומה.  
 מתקיים לפי פוביני:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy &= \int_\alpha^\beta \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) dx \\ &\stackrel{N.L.}{=} \int_\alpha^\beta [Q(x, \varphi_2(x)) - Q(x, \varphi_1(x))] dx \\ \int_\gamma Q dx &= \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3} - \int_{\gamma_4} \\ \int_{\gamma_1} Q dx &= \int_\alpha^\beta Q(t, \varphi_1(t)) \frac{d}{dt} t dt = \int_\alpha^\beta Q(t, \varphi_1(t)) dt \\ \int_{\gamma_3} Q dx &= \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} Q(\alpha, t) \cdot 0 dt = 0 = \int_{\gamma_4} = \int_{\gamma_2} \end{aligned}$$

קיבלנו:

$$\int \int_D \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy = - \int_{\gamma} Q dx$$

באותה דרך נקבל:

$$\int \int_D \frac{\partial P}{\partial x} dx dy = \int_{\gamma} P dy$$

כאשר שינוי הסימן נובע מהכיוונים של  $\gamma$ ,  $\delta$  - ב- $\delta$  הכיוון הוא עם ציר ה- $y$ .  
 על כן בסה"כ נקבל את השיוויון הרצוי. ■

לנוסחא הזו יש פירוש פיזיקלי:

נגדיר את המושג "זרימה", שהוא במובן מסויים, אורתוגונלי לעבודה:  
 הזרימה של שדה קבוע  $F$  דרך קטע מכוון  $[A, B]$  הוא  $\langle F, C \rangle$ , כאשר  $C$  הוא הוקטור  
 הניצב ל- $A - B$ , בעל אותו האורך, ומכוון כך שזוג הוקטורים  $(B - A, C)$  חיובי, ז"א אם  
 $(B - A) = (\alpha, \beta)$ , אז  $C = (-\beta, \alpha)$ .

מזה מקבלים ע"י מעבר לסכומי רימן והגבול, שהזרימה של שדה  $F = (P, Q)$  דרך  
 מסילה  $\gamma$  הוא  $\int_{\gamma} -Q dx + P dy$  (אם  $\gamma$  מכוונת נגד השעון). זה נותן את הצד הימין של  
 השיוויון.

נחלק עכשיו את  $U$  למלבנים קטנטנים. הזרימה דרך היקף המלבן  $[x_0, x_0 + dx] \times$   
 $[y_0, y_0 + dy]$  היא בערך:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) dy dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) dx dy \\ & \sim F(x_0 + dx, y_0) dy + F(y_0 + dy_0) dx - F(x_0, y_0) dy - F(x_0, y_0) dx \end{aligned}$$

כאשר נשאיף את  $dx, dy$  ל-0 ונסכם על כל המלבנים ב- $U$ , נקבל את האגף השמאלי בנוסחת  
 גרין.

**הערה 3.104** הוכחנו את משפט גרין עבור  $U$  די מיוחדים (זה כולל, אמנם,  $U$  קמורים!).  
 בעזרת הלמה הבאה אפשר לקבל אותו עבור "כל  $U$  סביר":

**למה 3.105** תהי  $U \subset \mathbb{R}^2$  פתוחה,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  מסילה פשוט סגורה כך ש- $\partial U =$   
 $\gamma([a, b])$ , ו- $\text{ind}(\gamma, p) = 1$  לכל  $p \in U$ .

נניח שקיימים  $a < t < b$  כך שהקטע  $(\gamma(a), \gamma(t))$   $U \subset$  וכך ש:

$$U_1 \cup U_2 = U \setminus (\gamma(s), \gamma(t))$$

כאשר  $U_1, U_2$  פתוחות וסגורות, ומתקיים:

$$\partial U_1 = \gamma_1([a_1, b_1]), \quad \partial U_2 = \gamma_2([a_2, b_2])$$

כאשר  $\gamma_2 = \gamma|_{[a, t]} * \delta$ ,  $\gamma_1 = \gamma|_{[t, b]} * \delta$ ,  $0 \leq s \leq 1$ ,  $\delta(s) = (1-s)\gamma(a) + s\gamma(t)$ .  
 אם משפט גרין מתקיים עבור  $U_1, U_2$ , אזי הוא גם מתקיים עבור  $U$ .

זה נכון, כי:

$$\int_{\gamma} = \int_{\gamma|_{[a,t]}} + \int_{\gamma|_{[t,b]}} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}, \quad \iint_U = \iint_{U_1} + \iint_{U_2}$$

ברור שאפשר לפרק כל קבוצה פתוחה "סבירה" ע"י מספר סופי של "חיתוכים" לקבוצות  $U_1, \dots, U_N$  כך שכל אחת מהן תקיים את התנאים שנדרשו בהוכחה שלנו.

**דוגמא לישום נפוץ של הנוסחא:**

אם ניקח  $Q = 0$ ,  $P(x, y) = x$ , או  $Q(x, y) = y$ ,  $P = 0$ , יתן את אותו הדבר עם חישוב דומה, נקבל:

$$\nu_2(U) = \iint_U \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \int_{\gamma} x dy = - \int_{\gamma} y dx$$

ניקח למשל עבור עיגול היחידה:  $\gamma = (cost, sint)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ :

$$\sigma(B_1(0)) = \int_0^{2\pi} \langle (0, cost), (cost, -sint) \rangle dt = \int_0^{2\pi} cos^2 t dt = \pi$$

### 3.3.3 שטח של משטחים (יריעות) ב- $\mathbb{R}^3$

**הגדרה 3.106** עבור  $v, w \in \mathbb{R}^3$  נגדיר:

$$\sigma(v, w) := \|v \times w\|$$

זהו שטח של המקבילית  $w + [0, 1]v$ .  
אם  $v, w \in \mathbb{R}^2$  נסמן:

$$\sigma(v, w) := \sigma(v', w'), \quad w' = (w, 0), \quad v' = (v, 0)$$

**הערה 3.107** תהי  $T \in Hom(2, 2)$ . אזי:

$$\sigma(Tv, Tw) = |\det T| \cdot \sigma(v, w)$$

**הערה 3.108** תהי  $T \in Hom(2, 3)$ . אזי:

$$\sigma(Tv, Tw) = \sigma(Te_1, Te_2) \sigma(v, w)$$

**הגדרה 3.109** תהי  $U \subset \mathbb{R}^2$  פתוחה,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  חח"ע דיפרנציאבילית ברציפות ו-  
 $a \in U$  (כלומר רגולרית) לכל  $2 = \text{rank}(Df(a))$ .  
 לכל  $x \in U$ , עבור  $U \supset A$  בעל שטח, נסמן:

$$S_f(x, y) = \sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right), \quad \sigma(v, w) = \|v \times w\|$$

אזי השטח של  $A$  יהיה:

$$\sigma(f(A)) := \int \int_A S_f(x, y) \, dx dy = \int \int_A \sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \, dx dy$$

**חישוב לדוגמא:**

נחשב את השטח של כיפה (חלק עליון של ספירת היחידה, גודל החלק נקבע ע"י הזווית  $\alpha$ ).

תהי  $f : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  מוגדר ע"י  $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ ,  $\varphi(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$ :

$$S_f(x, y) = \left\| \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, 1 \right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}, \quad Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$K_\alpha = f(\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \sin^2 \alpha\}) = \{(x, y, z) \in S^2 | z \geq \cos \alpha\}$$

$$\sigma(K_\alpha) = \int \int_{K_\alpha} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 - (x^2 + y^2)} + 1} \, dx dy = \int \int_{K_\alpha} \sqrt{\frac{1}{1 - (x^2 + y^2)}} \, dx dy$$

$$\stackrel{x=r \cos t, y=r \sin t}{=} \int_0^{\sin \alpha} \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \, dt dr = 2\pi \int_0^{\sin \alpha} \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}}$$

$$\stackrel{u=1-r^2, du=-2r dr}{=} -\pi \int_1^{\cos^2 \alpha} \frac{du}{\sqrt{u}} = [2\pi \sqrt{u}]_{\cos^2 \alpha}^1 = 2\pi(1 - \cos \alpha)$$

בפרט השטח של כל חצי הכדור הוא  $\pi$  (פשוט נציב את הזווית המתאימה). נוסחא הזו יש משמעות פיסיקלית, וכמו כן גם משמעות בהסתברות (פרטים נוספים בספר המרתק של פלר -  $\sigma(\{(x, y, z) \in S^2 | |z| \leq t\}) = 4\pi t$  - כלומר ההסתברות ש- $|z| \leq t$  שווה בדיוק ל- $t$  - הדבר די מפתיע<sup>39</sup>).

29/1/2012

"מכאן עולות שלוש שאלות שאדם אינטליגנטי צריך לשאול את עצמו":

הראשונה: האם ההגדרה איננה תלויה בפרמטריזציה?

שאלה שניה: למה ההגדרה טובה, כלומר, האם מה שנקבל הוא אכן השטח כפי שאנו

מכירים?

שאלה שלישית: למה הגדרה כזו?

בשלישית ככל הנראה לא נדון בצורה ישירה.

נתחיל עם השאלה הראשונה:

<sup>39</sup> ואם הצלחתם להבין למה שנקובסקי התכוון כאן - אפילו עוד יותר!

**טענה 3.110** יהיו  $U, V \in \mathbb{R}^2$  פתוחות ובעלות נפח,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  פרמטריזציות רגולריות (כלומר הומומורפיזמים, דיפרנציאביליים ברציפות עם  $\text{rank} Dg(x) = 2 = \text{rank} Df(x)$  לכל  $x$ ). אם  $g(V) = f(U)$  אזי:

$$\int \int_V \sigma_g(s, t) ds dt = \int \int_U \sigma_f(x, t) dx dy$$

**הוכחה:** נגדיר  $\varphi : V \rightarrow U$  ( $U = \varphi(V)$ ) ע"י  $\varphi = f^{-1} \circ g$ . לפי משפט חילוף משתנה:

$$\int \int_U \sigma_f(x, y) dx dy = \int \int_V \sigma_f(\varphi(s, t)) \cdot |J_{\varphi(s, t)}| ds dt$$

צ"ל שלכל  $(s, t) \in V$

$$\sigma_f(s, t) = \sigma(\varphi(s, t)) |J_{\varphi(s, t)}|$$

$g = f \circ \varphi$ , לכן לפי כלל השרשרת:

$$\sigma_f(s, t) = \|D_g(s, t) e_1 \times D_g(s, t) e_2\| = \|D_f(\varphi(s, t)) v_1 \times D_f(\varphi(s, t)) v_2\|$$

כאשר  $v_j = D_\varphi(e_j)$  עבור  $j = 1, 2$ . לפי ההערות שהופיעו לאחר ההגדרה של השטח:

$$\|D_f(\varphi(s, t)) v_1 \times D_f(\varphi(s, t)) v_2\| = \|D_f(\varphi(s, t)) e_1 \times D_f(\varphi(s, t)) e_2\| \cdot \|v_1 \times v_2\| \\ = \sigma_f(\varphi(s, t)) \cdot |\det D_\varphi(s, t)|$$

כנדרש. ■

במהלך ההוכחה השתמשנו בעובדה ש- $\varphi$  הינה דיפרנציאבילית - זה לא ברור לגמרי, כי אי אפשר לטעון ש- $f^{-1}$  דיפרנציאבילית: מושג הדיפרנציאביליות תקף רק לפונקציות המוגדרות בקבוצות פתוחות, ו- $g(V)$  בוודאי איננה פתוחה. בכל זאת הדבר נכון:

**למה 3.111** יהיו  $U, V \subset \mathbb{R}^2$  פתוחות,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  רגולריות, חח"ע. נניח ש- $g(V) = f(U)$ . אזי ההעתקה  $\varphi : V \rightarrow U$   $\varphi = f^{-1} \circ g$  דיפרנציאבילית (ברציפות) ב- $V$ .

**הסבר:** בהגדרת הדיפרנציאביליות שלנו דנים רק בפונקציות מקב' פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$  ל- $\mathbb{R}^m$ ;  $f^{-1}$  איננה מוגדרת בקבוצה פתוחה של  $\mathbb{R}^3$ , לכן אין טעם לדבר על הדיפרנציאביליות שלה.

**הוכחה:** יהי  $b \in V$ , נסמן  $p = g(b)$ , ויהי  $a \in U$  כך ש- $f(a) = g(b)$ , ז"א  $a = \varphi(b)$ . נסמן  $f = (f_1, f_2, f_3)$ . הדרגה של הדיפרנציאל מלאה ב- $a$ , לכן נניח בה"כ כי  $\nabla f_1(a), \nabla f_2(a)$  ב"ת לינארית.

נגדיר  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  ע"י  $h = (f_1, f_2)$ . ברור ש- $Dh(a) \in GL(2)$ , וכי  $h$  דיפרנציאבילית ברציפות. לפי משפט הפונקציה ההפוכה, קיימת קבוצה פתוחה  $U' \ni a$  כך ש- $h^{-1}$  חח"ע על  $U'$ , ו- $h^{-1} : W \rightarrow U'$  דיפרנציאבילית כאשר  $W = h(U')$ .

$f$  היא הומומורפיזם מהגדרתה, לכן  $f(U')$  פתוחה ב- $f(U)$ ,  $g(V) = f(U)$ , לכן  $V' = f^{-1}(f(U'))$  פתוחה ב- $V$ . אזי, רואים שעבור  $x \in V'$  מתקיים  $x = h^{-1} \circ P \circ g(x)$  כאשר  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  היא הטלה:  $P(x, y, z) = (x, y)$ .

כלומר,  $\varphi_{V'}$  היא הרכבה של שלוש פונקציות דיפרנציאביליות, ובפרט היא דיפרנציאבילית ב- $a$ . ■

נדון בשאלה השניה - מדוע אנחנו באמת מקבלים שטח?  
ניתן הסבר יוריסטי מדוע ההגדרה של  $\sigma(f(A))$  "סבירה".  
תהי  $A \subset \mathbb{R}^2$  תיבה (=מלבן), ותהיינה  $A_1, \dots, A_N$  תיבות הנוצרות ע"י חלוקה  $T$ .  
תהי  $a_j \in A_j$ ; אם  $T$  "עדינה מספיק", אפשר לכתוב עבור  $x \in A_j$ :

$$f(x) \sim f(a_j) + D_f(a_j)(x - a_j)$$

כלומר:  $f(x) \approx p'_j + D_f(a_j)x$ , כאשר  $p_j = f(a_j) - D_f(a_j)a_j$ . לפיכך:

$$f(A_j) \approx p_j + D_f(a_j)A_j$$

$D_f(a_j)A_j$  היא מקבילית ב- $\mathbb{R}^3$ , ומתקיים:

$$\begin{aligned} \sigma(D_f(a_j)A_j) &= \|D_f(a_j)e_1 \times D_f(a_j)e_2\| \nu_2(A_j) \\ \Rightarrow \sigma(f(A)) &= \sum \sigma(f(A_j)) \approx \sum S_f(a_j) \nu_2(A_j) \end{aligned}$$

כלומר, קיבלנו סכומי רימן, והם אכן שואפים לאינטגרל - לשטח.

### 3.3.4 משפט\נוסחת סטוקס

נתחיל באלגברה לינארית פורמלית

$$\begin{aligned} \langle s \times t, v \times w \rangle &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (s_i t_j - t_i s_j) (v_i w_j - w_i v_j) \\ T \in \text{Hom}(3, 3), \quad T = (t_{ij})_{i,j=1}^3, \quad v, w \in \mathbb{R}^3 \\ \Rightarrow \langle Tv, w \rangle - \langle v, Tw \rangle &= \langle (T - T^*)v, w \rangle = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (t_{ij} - t_{ji}) (v_i w_j - v_j w_i) \end{aligned}$$

$$\text{מסקנה 3.112 אם } T = Dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \text{ אזי:}$$

$$\langle Tv, w \rangle - \langle Tw, v \rangle = \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \times (g_1, g_2, g_3), v \times w \right\rangle$$

ואם נסמן  $\text{curl}(g) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \times g$ , נקבל כי הביטוי מעלה שווה ל- $\langle \text{curl}(g), v \times w \rangle$ .

**הגדרה 3.113** תהי  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  פרמוטציה רגולרית,  $M = f(U)$ . יהי  $p = f(a)$ .  
הנורמלה ל- $M$  ב- $p$  מוגדרת כקטור:

$$n_f(p) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a) \times \frac{\partial f}{\partial y}(a)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(a) \times \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right\|}$$

חשוב לציין כי  $n_f(p)$  במידה רבה איננה תלויה ב- $f$ :

**טענה 3.114** יהיו  $f, M, U$  כנ"ל, ותהי  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  פרמטריזציה רגולרית של אותו המשטח - כלומר עם  $M = g(V)$ ,  $p = g(b)$ . אזי<sup>40</sup>:

$$n_f(p) = \pm n_g(p)$$

**הוכחה:** נגדיר את  $\varphi : V \rightarrow U$  כ- $\varphi = f^{-1} \circ g$ . ראינו בעבר כי היא דיפרנציאבילית ברציפות (שכן  $f, g$  שלנו עומדות בתנאים להם הוכחנו עובדה זו). לכן,  $g = f \circ \varphi$ , וכן:

$$D_g(b) = D_f(a) D_\varphi(b)$$

נעיר ש- $n_f(p)$  הוא וקטור ניצב למישור  $D_f(a) \mathbb{R}^2$ , בעל נורמה 1; כמו כן,  $n_g(p)$  הוא וקטור ניצב ל- $D_g(b) \mathbb{R}^2$ , בעל נורמה 1. אך  $D_g(b) \mathbb{R}^2 = D_f(a) \mathbb{R}^2$ , כי  $D_\varphi(b) \in GL(2)$ . יש רק שני וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$  שניצבים למישור נתון -  $\pm v$ . משל. ■

**הערה 3.115** (פורמלית) לכל  $v \in \mathbb{R}^3$  מתקיים:

$$\left\langle v, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\rangle = \langle v, n(f(x, y)) \rangle \sigma_f(x, y)$$

ולאחר שפתחנו את כל הכלים - סופסוף, המשפט והוכחתו:

**משפט 3.116** (נוסחת סטוקס): תהי  $U \subset \mathbb{R}^2$  פתוחה,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  רגולרית, חח"ע ודיפרנציאבילית פעמיים,  $\varphi : [a, b] \rightarrow U$  מסילה פשוטה סגורה, גזירה ברציפות. נניח ש- $\partial D = \varphi([a, b])$  כאשר  $D \subset U$  פתוחה, ו- $\text{ind}(\varphi, p) = 1$  לכל  $p \in D$ . יהי  $g$  שדה וקטורי דיפרנציאבילי ברציפות ב- $V^{-1} \supset \mathbb{R}^3$  כך ש- $f(U) \subset V$ . אזי:

$$\int \int_{f(U)} (\text{something}) d\sigma(p) = \int_\gamma \sum_{j=1}^3 g_j dx_j = I$$

כאשר  $\gamma = f \circ \varphi$ , וכן את המשהו נשלים תוך כדי ההוכחה.

**הוכחה:** נפתח:

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_\gamma \sum_{j=1}^3 g_j dx_j = \int_a^b \langle g \circ f \circ \varphi(t), D_f(\varphi(t)) \varphi'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \left[ \left\langle (g \circ f)(\varphi(t)), \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) \right\rangle \varphi_1'(t) + \left\langle (g \circ f)(\varphi(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) \right\rangle \varphi_2'(t) \right] dt \\ &= \int_\varphi Q(x, y) dx + P(x, y) dy \end{aligned}$$

<sup>40</sup> כאשר הסימן תלוי ב"כיוון" - ציירו ותראו !:

כאשר

$$Q(x, y) = \left\langle (g \circ f)(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right\rangle$$

$$P(x, y) = \left\langle (g \circ f)(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\rangle$$

לפי נוסחת גרין עבור  $D$  (ו- $\varphi$ ):

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} g \circ f(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\rangle + \left\langle (g \circ f)(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (g \circ f)(x, y) = D_g(f(x, y)) \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)$$

ולכן:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \left\langle D_g(f(x, y)) \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\rangle$$

$$- \left\langle D_g(f(x, y)) \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right\rangle$$

(האיברים עם הנגזרות השניות מצטמצמים). נזכיר כי:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = D_f(x, y) e_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = D_f(x, y) e_2$$

אז, לפי מסקנה אלגברית אליה הגענו לאחרונה, נקבל:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(f(x, y)) - \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(f(x, y)) \right) \left( \frac{\partial f_i}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_j}{\partial y}(x, y) \right)$$

$$= \left\langle \text{curl}(g)(f(x, y)), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\rangle$$

$$= \langle \text{curl}(g)(p), n(p) \rangle S_f(x, y)$$

■

עבור  $p = f(x, y)$

31/01/2012

מה זה  $\text{curl}$  בכלל?

נתבונן בשדה אשר תלוי רק ב- $x, y$ :

$$g(x, y, z) = (Q(x, y), P(x, y), 0)$$

אז

$$\text{curl}(g)(x, y, z) = \left( 0, 0, \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right)$$

לפי משפט גרין, אם ניקח:

$$p = (a, b, c), \quad \gamma_r(t) = p + r(cost, sint)$$

נקבל:

$$\pi r^2 \langle curl(g), v \rangle \sim \int_{\gamma_{pr}} \sum_{i=1}^3 g_i$$

כאשר  $v$  ניצב למישור של  $\gamma_r$ , ז"א:

$$\langle curl(g)(r), v \rangle = \frac{1}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int \dots$$

זה נכון גם לגבי  $g$  כללי.

### 3.3.5 משפט הדיברגנץ = משפט גאוס

**משפט 3.117** תהי  $E \subset \mathbb{R}^3$  פתוחה וחסומה כך ש- $E = \partial E$  יריעה רגולרית קומפקטית. יהי

$$g : \overbrace{U}^{\supset E} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ שדה וקטורי דיפרנציאבילי ברציפות. אזי:}$$

$$J = \int \int \int_E \left( \overbrace{\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}}^{div(g)} \right) (x, y, z) dx dy dz = \int_M \langle g(p), n(p) \rangle d\sigma(p) = I$$

כאשר האוריאנטציה היא "החוצה".

**הוכחה:** מספיק להוכיח את הטענה עבור למשל  $g(x, y, z) = (0, 0, g_3(x, y, z))$  (כי אפשר לפרק  $g$  כללית לגורמים כאלו, והכל לינארי).

נניח, כמו במקרה הדו מימדי, כי:

$$E = \{(x, y, z) | \varphi(x, y) < z < \psi(x, y), (x, y) \in D\}$$

כאשר  $\varphi, \psi : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות ברציפות כך ש- $\varphi < \psi$  ב- $D$  (שהיא פתוחה ובעלת נפח ב- $\mathbb{R}^2$ ). לפי פוביני:

$$J = \int \int \int_E \frac{\partial g_3}{\partial z} dx dy dz = \int \int_D \left( \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial g_3(x, y, z)}{\partial z} dz \right) dx dy$$

$$\stackrel{N.L.}{=} \int \int_D g_3(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \int \int_D g_3(x, y, \varphi(x, y)) dx dy$$

כעת, נחשב את  $-I$  נגדיר קבוצות

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

$$M_1 = \{(x, y, \psi(x, y)) | (x, y) \in D\}$$

$$M_2 = \{(x, y, \varphi(x, y)) | (x, y) \in D\}$$

$$M_3 = \{(x, y, z) | (x, y) \in \partial D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

זהו איחוד זה, ולכן  $I = \int \int_{M_1} + \int \int_{M_2} + \int \int_{M_3}$  נשים לב כי עבור  $p \in M_3$  חייב להתקיים  $n(p) = (\alpha, \beta, 0)$  כי  $n(p)$  ניצב לקטע אנכי, ולכן  $\langle g(p), n(p) \rangle = 0$ . על כן,  $\int \int_{M_3} = 0$   
נחשב עבור  $M_1, M_2$  0 נשתמש ברה-פרמטריזציות שלהן כגרפים של פונקציות:

$$f(x, y) = (x, y, \varphi(x, y)), \quad h(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$$

בשני המקרים,  $n_h(p), n_f(p) = (\alpha, \beta, \gamma)$  כאשר  $\gamma > 0$ , ולכן  $n(p) = -n_h(p)$  עבור  $p \in M_1$  ו- $n(p) = n_f(p)$  עבור  $p \in M_2$ . על כן, נקבל:

$$\begin{aligned} \int \int_{M_1} \langle g(p), n(p) \rangle d\sigma(p) &= \int \int_D \left\langle g(f(x, y)), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\rangle dx dy \\ &= \int \int_D g_3(x, y, \psi(x, y)) 1 dx dy \\ \int \int_{M_2} &= \dots = - \int \int_D g_3(x, y, \varphi(x, y)) 1 dx dy \end{aligned}$$

■

והכל בסדר!

## חלק II תרגולים

asa.f.katz@mail.huji.ac.il

בודק - גל שחף.

שעת קבלה של המתרגל - יום א' 18:00-19:00.

ספרים של הקורס - של לינדנשטראוס, סיכומים של רז קופרמן (יש לינק לזה במודל), וסיכומים סרוקים.

בתרגילים הבאים - שאלות עם כוכבית להגשה.

יש תא במתמטיקה להגשת תרגילים, ימי שני.

**הגדרה 3.118** קבוצה,  $(X, d)$  מרחב מטרי,  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  אם היא מקיימת:

1. חיוביות חזקה:  $d(x, y) \geq 0 \forall x, y, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ .

2. סימטריה:  $d(x, y) = d(y, x)$ .

3. א"ש המשולש:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

**הגדרה 3.119** יהי  $V$  מ"ו. פונקציה  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  נקראת נורמה אם:

1. חיוביות חזקה:  $\|v\| \geq 0, \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$ .

2. הומוגניות:

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V$$

3. תת אדטיביות:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

אם  $(V, \|\cdot\|)$  מרחב נורמי, נגדיר:

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

זוהי מטריקה הנקראת המטריקה המושרית מהנורמה.  
יהי  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ממ"פ (ממשי). אזי יש לו נורמה מושרית:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

**הערה 3.120** אם יש מכפלה פנימית - אפשר להגדיר נורמה. אי אפשר בכיוון ההפוך!

---

נבדוק שהנורמה המושרתת היא נורמה:

1. חיוביות:

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v$$

ולכן  $\sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$   
בנוסף מתכונות המ"פ:

$$\sqrt{\langle v, v \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

2. הומוגניות: יהי  $v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \|v\|$$

3. תת אדטיביות:

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u+v \rangle + \langle v, u+v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\stackrel{?}{\leq} \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

תזכורת - אי שוויון קושי שורץ:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$$

ולכן ה-? מתקיים, וסיימנו.

נבדוק שהמטריקה המושרית היא באמת מטריקה:

1. חיוביות חזקה:

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| \geq 0 \\ d(u, v) = 0 &\Rightarrow \|u - v\| = 0 \Rightarrow u = v \end{aligned}$$

2. סימטריה:

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|-(v - u)\| = |-1| \|v - u\| = d(v - u)$$

3. א"ש המשולש:

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

נורמות  $p$ -ל- $\mathbb{R}^n$ .

יהי  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  עבור  $1 \leq p < \infty$ . נגדיר:

$$\|v\|_p = \left( \sum_i |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

עבור  $p = \infty$ :

$$\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|v_i|\}$$

נבדוק שהן נורמות:

1. חיוביות - ברורה.

2. הומוגניות -

$$\begin{aligned} \|\lambda v\|_p &= \left( \sum_i |\lambda v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_i |\lambda|^p |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( |\lambda|^p \sum_i |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left( \sum_i |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|v\|_p \end{aligned}$$

3. תת אדטיביות -

עבור  $p = \infty$ :

$$\begin{aligned} \|u + v\|_\infty &= \max_i \{|u_i + v_i|\} = |u_{i_0} + v_{i_0}| \\ &\leq |u_{i_0}| + |v_{i_0}| \leq \max_i \{|u_i|\} + \max_i \{|v_i|\} \\ &= \|u\|_\infty + \|v\|_\infty \end{aligned}$$

עבור  $p = 2$ : בדקנו! נובע מכך ש:

$$\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\text{euclidean}}}$$

עבור  $p = 1$ :

$$\|u + v\|_1 = \sum |u_i + v_i| \leq \sum (|u_i| + |v_i|) = \|u\|_1 + \|v\|_1$$

**משפט 3.121** אי שיוויון מינקובסקי:

$$\forall p \geq 1 \quad \|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

**הגדרה 3.122** הכדור הפתוח ברדיוס  $R$  סביב  $x$  הוא:

$$B_R(x) = \{y \in X | d(x, y) < R\}$$

עבור  $p = 2$  - מעגל היחידה.

עבור  $p = \infty$ :

$$\begin{aligned} B_1((0, 0)) &= \{y \in \mathbb{R}^2 | d_\infty((0, 0), y) < 1\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \max_{i \in \{1, 2\}} \{|0 - y_i|\} < 1\right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|y_i|\} < 1\} \end{aligned}$$

נקבל מרובע מסביב לראשית הצירים.

עבור  $p = 1$ :

$$\begin{aligned} B_1 &= \{y \in \mathbb{R}^2 | d((0, 0), y) < 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2 \mid |0 - y_1| + |0 - y_2| < 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2 \mid |y_1| + |y_2| < 1\} \\ &|y_1| + |y_2| < 1, \quad |y_1| < 1 - |y_2| \\ &\Rightarrow -1 + |y_2| < y_1 \text{ and } y_1 < 1 - |y_2| \\ &\Rightarrow |y_2| < y_1 + 1 \text{ and } |y_2| < 1 - y_1 \\ &\Rightarrow y_1 - 1 < y_2 \text{ and } y_2 < 1 - y_1 \end{aligned}$$

נקבל מעוין מסביב לראשית הצירים.

נשאל, מה קורה עבור  $p < 1$ ?

נקבל איזושהי צורה קמורה! "אנחנו לא אוהבים לעבוד עם קבוצות כאלה".

ציור להמחשה - בהמשך!

נשים לב כי ככל ש- $p$  גדל, התחום סביב הראשית גדל.

נגדיר:

$$B[a, b] = \left\{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| < \infty\right\}$$

נגדיר נורמה  $\infty$  על  $B[a, b]$  בצורה הבאה:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

אפשר לחשוב על הנורמה הזו כעל הכללה של הנורמה  $p = \infty$ .

נגדיר קבוצה  $C[a, b] \subsetneq B[a, b]$

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous}\}$$

נשאל, "מה זה להיות קרובים ב- $C[a, b]$ ?  
נזכור, כעת פונקציות הן נקודות במרחב שלנו. נבדוק, מהו הכדור ברדיוס  $\varepsilon$  סביב נקודה  $f \in C[a, b]$ ?

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(f) &= \{g \in C[a, b] \mid \|f - g\|_\infty < \varepsilon\} \\ &= \left\{g \in C[a, b] \mid \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon\right\} \end{aligned}$$

המחשה בציור - בהמשך. למעשה, זה בדיוק הנושא של התכנסות במידה שווה!

**הגדרה 3.123**  $C \supseteq (X, d)$  נקראת סגורה אם לכל  $\{x_n\} \subseteq C$  כך ש- $x_n \rightarrow y$  גם  $y \in C$ .

**הגדרה 3.124** קב'  $O \subseteq X$  נקראת פתוחה אם לכל  $y \in O$  קיים  $R_1 > 0$  כך ש- $B_{R_1}(y) \subseteq O$  (נקודות כאלו נקראות נקודות פנימיות - קב' היא פתוחה אם כל הנקודות בה פנימיות).

**טענה 3.125**  $C[a, b] \subseteq B[a, b]$  קב' סגורה.

התכונות סגירות ופתיחות הן ביחס למטריקה! **הוכחה:** ישנם מספר דרכים להוכחה - אחת לפי ההגדרה עם סדרות שהיא יותר פשוטה (לפי אינפי 2), אבל אנחנו נעשה זאת ע"י כך שנראה כי  $C[a, b]^c$  היא פתוחה.

יהי  $g \in C[a, b]^c$ , נראה כי  $g$  נק' פנימית.

תהי  $x_0 \in [a, b]$  כך ש- $g^-$  לא רציפה ב- $x_0$ ,  $g \in B[a, b]$  ולכן נק' אי הרציפות הן סליקות או קפיצה.

עבור קפיצה:

נגדיר  $\varepsilon = \frac{1}{4} \left| \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \right|$ . נטען כי לכל  $f \in B_\varepsilon(g)$  יש נקודת קפיצה ב- $x_0$ . כ"כ  $f(x_0^-) < g(x_0^+)$ .

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &\leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) + \varepsilon = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) + \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) \\ &< \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) + \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) - \varepsilon \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \end{aligned}$$

$\Leftarrow f$  לא רציפה ב- $x_0$ .

מה עשינו?

בהנתן  $g$  המצאנו כדור והראנו שהפונקציות בכדור הן אינם רציפות, כלומר הן מוכלות במשלים. לכן  $g$  היא נקודה פנימית. מכיוון וזה נכון עבור כל  $g$  נקודה פנימית, אזי הקבוצה המבוקשת פתוחה, כנדרש. ■

חסרים שיעורים! יושלמו בהמשך

## 4 חשבון דיפרנציאלי מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}^m$

### 4.1 גבולות ב- $\mathbb{R}^n$

27/11/2011

**הגדרה 4.1** יהי  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .  $l$  יקרא הגבול של  $f$  בנקודה  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת  $\delta > 0$  כך ש:

$$(x, y) \in B_\delta((x_0, y_0)) \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$$

גבול כזה נקרא "גבול כפול", ונסמן:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l, \quad \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} = l$$

הבעיה - איך לחשב גבול כפול?

### שיטה ראשונה

ננסה לפרק לגבולות חד מימדיים:

**הגדרה 4.2** נקבע  $y \in \mathbb{R}$  ומסתכלים ב- $L_y = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ . אם קיים הגבול:  $\lim_{y \rightarrow y_0} L_y$  אזי נסמנו ב- $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ , ונקרא לו "הגבול החוזר של  $f$  לפי  $x$  ולפי  $y$ ".

**משפט 4.3** אם קיים  $L_y$  לכל  $y$  בסביבת  $y_0$ , וקיים הגבול הכפול:

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$$

אז קיים הגבול החוזר ושווה לו.

**הוכחה:** נקבע  $\varepsilon > 0$ . יש  $\delta > 0$  כך שאם  $|x - x_0| < \delta$ ,  $|y - y_0| < \delta$ , אז  $|f(x, y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ . אז:

$$|L - L_y| \leq \underbrace{|L - f(x, y)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + |f(x, y) - L_y|$$

אם  $|x - x_0| < \delta_2(y)$ , אז:

$$|f(x, y) - L_y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

עבור  $\delta$  כמו שבחרנו, אם  $|y - y_0| < \delta$ , גם  $|x - x_0| < \delta_2(y)$ , ונניח גם  $\delta_2(y) < \delta$ , אז  $|L - L_y| < \varepsilon$ . ■

**מסקנה 4.4** אם קיימים 2 גבולות חוזרים שונים, אזי לפונקציה אין גבול כפול.

### דוגמא ראשונה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \limlim_{y \rightarrow 0, x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\limlim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

כלומר שני גבולות חוזרים שונים, על כן לפונקציה אין גבול כפול.

### דוגמא שניה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\limlim_{y \rightarrow 0, x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

$$\limlim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{|x| \cdot |x|^2}{x^2+y^2} \leq |x| \quad (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

**הערה 4.5** אפשר לחשוב על הגבולות הללו כעל גבולות של פולינומים - אם דרגת המונה גדולה מדרגת המכנה, והוא לא "משוגע מידי" - יהיה גבול.

### דוגמא שלישית

$$(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

נחשב גבולות חוזרים:

$$\limlim_{y \rightarrow 0, x \rightarrow 0} \frac{xy}{x}$$

גבול זה לא קיים (אינסוף). לעומת זאת:

$$\limlim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{y}{x} = 0$$

כאן הגבול לא קיים בגלל אינסוף, ועל כן נוכל להסיק שלא קיים כפול. עם זאת, ישנם מקרים בהם לא קיים הגבול מסיבות אחרות - ושם יכול להיות שיהיה גבול כפול. נראה זאת בהמשך.

### שיטה שניה

ננסה להגדיר מחדש את הפונקציות כדי להגיע לגבול הכפול מכיוון שונה.  
נביט בזווית הנוצרת ע"י הקו בין  $(0, 0)$  ל- $(x, y)$ , נסמנה ב- $\theta$ . אזי:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta$$

**דוגמא ראשונה** אם  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^3 + y^2}$ , נקבל:

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2} = r \cdot \cos^3 \theta$$

### דוגמא שניה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^3 + |x|y^2}{|y|} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \begin{cases} 0 & \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi \\ \frac{r^3 |\cos \theta|}{r \cdot |\sin \theta|} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(?) = \frac{r^2}{|\tan \theta|}$$

נסתכל במסילה:  $r(\theta) = \theta^{\frac{1}{4}}$  - נקבל את השבול!

$$f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) = \frac{\theta^{\frac{1}{2}}}{|\tan \theta|} \sim \frac{\theta^{\frac{1}{2}}}{\theta} = \theta^{\frac{1}{2}}$$

ולכן הפונקציה לא חסומה בסביבת 0.

### דוגמא שלישית

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot \sin x \cdot \cosh y + y \cdot \cos x \cdot \sinh y}{x^2 + y^2} \\ 1 \end{cases} \quad (x, y) = (0, 0)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \sinh y}{y^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{x^2} = 1$$

**דוגמא רביעית - פונקציה עם גבול כפול אבל בלי גבול חוזר**

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\left| x + y \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| + |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

אולם הגבול החוזר  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  לא קיים כלל! על כן היה חשוב במשפט בתחילת התרגול לקבוע כי הגבולות החוזרים קיימים.

## 4.2 נגזרות חלקיות

### 4.6 הגדרה

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

**דוגמא ראשונה**

$$f(x, y) = x^y, \quad x, y > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} f \right) = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} f \right) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} f \right) = yx^{y-1} \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = x^y \ln^2 x$$

### 4.2.1 נגזרות כיווניות

**הגדרה 4.7** יהי  $c \in \mathbb{R}^n$  וקטור כך ש- $\|v\| = 1$ . נגדיר את הנגזרת הכיוונית של  $f$  בנקודה  $\vec{x}$  בכיוון  $v$  להיות:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + tv) - f(\vec{x})}{t}$$

ואם היא קיימת, נסמנה ב- $D_v(f)(\vec{x})$ .

## דוגמא

$$f(x, y) = xy$$

בכיוון  $45^\circ$ , כלומר  $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . נחשב:

$$D_v(f)(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{2} - 0}{t} = 0$$

## 4.3 דיפרנציאביליות

תזכורת: אם  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה, אז יש מספר  $M$  כך ש:

$$f(x+h) = f(x) + Mh + o(|h|)$$

אם יש  $M$  כזה, אז:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = M + \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} M$$

עבור פונקציה של שני משתנים:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + M_1 \cdot h + M_2 \cdot k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

נניח ש- $f$  דיפרנציאבילית ב- $(x_0, y_0)$ . אזי  $M_1 = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$  ו- $k=0$ :

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = M_1 + \frac{o(h)}{h} \rightarrow M_1$$

ובאותה הצורה גם  $M_2 = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ . תרגיל זה מראה כי אם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה, יש לה נגזרות חלקיות בנקודה.

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \|v\| = 1, v \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{M_1 \cdot tv_1}{t} + \frac{M_2 \cdot tv_2}{t} + \frac{o(t)}{t}$$

לכן אם פונקציה דיפרנציאבילית היא גזירה בכל כיוון, וכן קיבלנו נוסחא מפורשת לחישוב! כמו כן הגדרנו את הגרדיאנט.

נשאלת השאלה, אם קיימות נגזרות חלקיות, האם הפונקציה דיפרנציאבילית? התשובה - לא תמיד!

**משפט 4.8** יהי  $V$  מ"ו מימד  $d < \infty$ . אזי כל 2 נורמות על  $V$  שקולות.

**למה 4.9** יהי  $V$  מ"ו כנ"ל, ו- $\|\cdot\|$  נורמה. אז קיים  $c > 0$  כך שלכל וקטור:

$$v = \sum \alpha_i e_i, \quad \|v\| \geq c \cdot \sum |\alpha_i|$$

**הוכחה:** נסמן:  $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\sum |\alpha_i|}$ . התנאי מעלה שקול ל:

$$\left\| \sum_{i=1}^d \beta_i e_i \right\| \geq c$$

כעת, מתקיים:

$$\sum |\beta_i| = 1, \quad 0 \leq |\beta_i| \leq 1$$

נניח בשלילה שאין  $c$  כזה, כלומר לכל  $n \in \mathbb{N}$  קיימים  $\beta_i(n)$  כך ש:

$$\left\| \sum_{i=1}^d \beta_i(n) e_i \right\| \leq \frac{1}{n}$$

$\beta_i(n)$  מקיימים:

$$\sum |\beta_i(n)| = 1, \quad 0 \leq \beta_i(n) \leq 1$$

נביט ב- $\{\beta_1(n)\} \subseteq R$ . מבולצאנו ויירשטראס יש  $n_k$  כך ש:  $\beta_1(n_k) \rightarrow \beta_1(\infty)$ . כך אפשר להסתכל גם על  $\{\beta_2(n)\} \subseteq R$ , לכן שוב מבולצאנו ויירשטראס יש  $n_{k_l}$  כך ש:

$$\beta_2(n_{k_l}) \rightarrow \beta_2(\infty)$$

עושים תהליך זה  $d$  פעמים. בסופו של דבר מקבלים ת"ס  $n_r$  כל שלכל  $1 \leq i \leq d$ ,

$$\beta_i(n_r) \rightarrow \beta_i(\infty)$$

נשים לב כי:

$$0 \leq \left\| \sum \beta_i(n_r) e_i \right\| \leq \frac{1}{n_r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

ולכן מסנדוויץ הביטוי באמצע שואף ל-0. לכן:

$$\sum \beta_i(\infty) e_i = \vec{0}$$

אזי  $\beta_i(\infty) = 0$  לכל  $i$ ,

$$\sum_{i=1}^d |\beta_i(n_r)| = 1$$

■

ניקח  $\sum_{i=1}^d |\beta_i(\infty)| = 1, r \rightarrow \infty$  בסתירה להנחה.

נחזור למשפט: **הוכחה:** מספיק להראות ש- $\|\cdot\|$  שקולה ל- $\|\cdot\|_2$ .<sup>41</sup>  
נקבע  $\{e_i\}$  בסיס סטנדרטי.

$$\begin{aligned} \left\| \sum \alpha_i e_i \right\| &\stackrel{\text{Lemma}}{\geq} c \cdot \sum |\alpha_i| = c \cdot \sum \|\alpha_i e_i\|_2 \\ &\stackrel{\Delta \text{ inequality}}{\geq} c \cdot \left\| \sum \alpha_i e_i \right\|_2 \end{aligned}$$

כלומר:  $c \cdot \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|$ . נשאר להוכיח את הצד השני של אי השוויון:

$$\begin{aligned} \left\| \sum \alpha_i e_i \right\| &\stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{i=1}^d |\alpha_i| \|e_i\| \leq k \cdot \sum_{i=1}^d |\alpha_i|, \quad k = \max_{1 \leq i \leq d} \{\|e_i\|\} \\ &\leq k \cdot d \cdot \max_i \{|\alpha_i|\} \leq k \cdot d \cdot \sqrt{\sum |\alpha_i|^2} = k \cdot d \cdot \|\alpha_i \cdot e_i\|_2 \\ &\Rightarrow c \cdot \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\| \leq k \cdot d \cdot \|\cdot\|_2 \end{aligned}$$

■

#### 4.3.1 מישור משיק

תהי  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . נגדיר את הגרף להיות:

$$gf(f) = \{(x, y, f(x, y))\}$$

וכן:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \quad F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

נרצה להגדיר מישור משיק (כמו שהגדרנו ישר משיק במקרה החד מימדי).  
נניח ש- $f$  גזירה חלקית ב- $(x_0, y_0)$ . נתבונן בנגזרות החלקיות:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F(x_0, y_0), \quad \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בתרגיל הגדרנו את המכפלה הוקטורית<sup>42</sup> להיות:

$$\begin{aligned} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<sup>41</sup>מכך שהוכחנו בתרגיל כי שקילות נורמות היא יחס שקילות.

<sup>42</sup>בפיסיקה היא מופיעה בכל מיני מקומות "מעניינים". עוד בנושא - בחוברת מת"פ 1.

אם הוקטורים לא תלויים, המכפלה הוקטורית מספקת וקטור מאונך לשני הוקטורים המקוריים - אם נניח כי  $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$  בת"ל, נקבל:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

**הגדרה 4.10** המישור המשיק ל- $f$  בנקודה  $(x_0, y_0)$  הוא המישור העובר בנקודה  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  ובעל וקטורי הכיוון:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

למישור קיימת הצגה כ:

$$Ax + By + Cz = D$$

נגדיר את וקטור המקדמים של המישור להיות  $(A, B, C)$ , והוא מאונך לוקטורים במישור.

ניתן לקחת:

$$A = -f'_x(x_0, y_0)$$

$$B = -f'_y(x_0, y_0)$$

$$C = 1$$

$$\Rightarrow (-f'_x(x_0, y_0))x + (-f'_y(x_0, y_0))y + 1 \cdot z = D$$

וחישוב קצר יראה לנו כי:

$$D = 1 \cdot f(x_0, y_0) + (-f'_x(x_0, y_0))x_0 + (-f'_y(x_0, y_0))y_0$$

הביטוי מעלה יכול לשמש כנוסחא למישור המשיק. אולם, היא "לא מעניינת במיוחד" - ננסה למצוא משהו אחר:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \left( \overbrace{x - x_0}^h \right) + f'_y(x_0, y_0) \left( \overbrace{y - y_0}^k \right)$$

וזה מאוד מזכיר לנו את הדיפרנציאל:

$$T(h, k) = \left\langle \nabla f(x, y), \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle$$

כלומר, אם פונקציה דיפרנציאבילית יש לה קירוב לינארי, כלומר יש לה מישור משיק שמקרב אליה.

אם  $\nabla f = 0$ , אזי  $z = \text{const}$  - כלומר המישור המשיק שלה יהיה מקביל לנקודה. אזי, אם הפונקציה דיפרנציאבילית במקום בו יש לה מקסימום או מינימום, אזי המישור המשיק בנקודה מקביל לה. בשבוע הבא נראה על סיווג נקודות סטציונריות - בעזרת פיתוח טיילור.

## 4.4 כלל השרשרת

תזכורת:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

למקרה הרב מימדי:

$$f: \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^m, g: \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow D_{f \circ g}(x) = D_f(g(x)) \cdot D_g(x)$$

דוגמא אחת לשימוש בכלל השרשרת ראינו בכיתה. נדון במקרה אחר:

תהי  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , נחשוב עליה בפונקציה  $f(r, \theta)$ .

תהי  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  כך ש- $g(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$ . נרצה לגזור לפי  $x$  את  $f$ , אבל אנחנו יודעים רק לפי  $r, \theta$ . מה נעשה? במקרה זה, היישום של כלל השרשרת יהיה:

$$f \circ g(x, y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \Rightarrow D_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}, D_f = \left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \sin(x^2) = \frac{d}{dx^2} \sin(x^2) \cdot \frac{d(x^2)}{dx} = \cos(x^2) \cdot 2x$$

תרגיל:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 + z \\ xz + y^3 \end{pmatrix}$$

תהי  $\gamma: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  חלקה, ונניח  $\gamma(0) = (1, 1, 1)$ .

צריך להוכיח:

$$D_{f \circ \gamma}(0) \perp (1, 1, -1)$$

נפתור בעזרת כלל השרשרת:

$$\begin{aligned} D_{f \circ \gamma}(0) &= D_f(\gamma(0)) \cdot D_\gamma(0) \\ D_f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 2y & z \\ z & 3y^2 & x \end{pmatrix} \\ D_f(\gamma(0)) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ D_\gamma(0) &= \begin{pmatrix} \gamma_1'(0) \\ \gamma_2'(0) \\ \gamma_3'(0) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow D_f(\gamma(0)) \cdot D_\gamma(0) &= \begin{pmatrix} \gamma_1' + \gamma_2' \\ 2\gamma_2' + \gamma_3' \\ \gamma_1' + 2\gamma_2' + \gamma_3' \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1' + \gamma_2' \\ 2\gamma_2' + \gamma_3' \\ \gamma_1' + 2\gamma_2' + \gamma_3' \end{pmatrix} &= \dots = 0 \end{aligned}$$

ולכן קיבלנו את הנדרש!

#### 4.4.1 אפליקציות בגיאומטריה דיפרנציאלית - מסילות במרחב

**הגדרה 4.11** יהיו  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  מסילות גזירות ברציפות. נאמר ש- $\gamma_2$  היא הפרמטריזציה של  $\gamma_1$ , אם יש:

$$f : [a, b] \rightarrow [c, d], \quad f(a) = c, \quad f(b) = d$$

רציפה, על, מונוטונית עולה וגזירה ברציפות כך ש:

$$\gamma_1(t) = \gamma_2 \circ f(t)$$

#### דוגמא

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 2\pi \quad \gamma_1(t) &= (\cos(t), \sin(t)) \\ 0 \leq t \leq \sqrt{2\pi} \quad \gamma_2 &= (\cos(t^2), \sin(t^2)) \end{aligned}$$

#### דוגמא 2

נביט ב-

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \|\gamma'(t)\|_2 &= 1, \quad L = \int_a^b \|\gamma_1'(t)\|_2 dt \end{aligned}$$

הפרמטריזציה של  $\gamma$  מאוד נוחה! נרצה לשנות את  $\gamma_1$  כך שהפרמטריזציה שלה תהיה כמו זו של  $\gamma$ .

נניח  $\gamma_1$  גזירה הרציפות,  $\vec{0} \neq \gamma_1'(t)$ . נגדיר:

$$f(t) = \int_a^t \|\gamma_1'(s)\|_2 ds$$

$f$  על  $[0, L]$ , גזירה מהמשפט היסודי, מונוטונית (כי האינטגרנד אי שלילי, כלומר סכום של סכומים חיוביים). אזי  $f$  הומיאומורפיזם, ולכן קיימת  $f^{-1}$  רציפה (וגזירה), וכן:

$$(f^{-1})'(s) = \frac{1}{f'(f^{-1}(s))}$$

נגדיר:

$$\gamma(s) = \gamma_1(f^{-1}(s))$$

$\gamma$  היא רה-פרמטריזציה של  $\gamma_1$ , מההגדרה. אנו עוד צריכים להשתכנע כי הנגזרת היא מגודל 1:

$$\begin{aligned} D_\gamma(s) &= D_{\gamma_1}(f^{-1}(s)) \cdot (f^{-1})'(s) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{1,x}'(f^{-1}(s)) \\ \gamma_{1,y}'(f^{-1}(s)) \\ \gamma_{1,xz}'(f^{-1}(s)) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|\gamma_1'(f^{-1}(s))\|_2} \end{aligned}$$

כלומר חילקנו וקטור בנורמה שלו - כלומר קיבלנו וקטור בעל נורמה 1, כנדרש. נפתור את שאלה 4 מהתרגיל הקודם: נקבע  $\varepsilon > 0$ .

11/12/2011

$$D_f(x) \xrightarrow{op} T \sup_{|v|=1} \|(D_f(x) - T)v\| = 0$$

בפרט עבור  $v = \hat{e}_1$ :

$$D_f(x) \hat{e}_1 \xrightarrow{x \rightarrow u} T \hat{e}_1$$

יש  $\delta > 0$  כך שאם  $x \in B_\delta(u)$  אז:

$$|D_f(x) \hat{e}_i - T \hat{e}_i| < \frac{\varepsilon}{4}$$

נראה של- $f$  נגזרות חלקיות רציפות (זה חזק יותר, וזה מספיק כדי להוכיח דירנציאביליות). ברור שאם  $\frac{\partial f}{\partial e_i}(u)$  קיים (ושווה ל- $T \hat{e}_i$ ) אז הוא רציף.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(u + t \hat{e}_i) - f(u)}{t} - T \hat{e}_i \right|$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(u + t \hat{e}_i) - f(u)}{t} - T \hat{e}_i \right| &\leq \left| \frac{f(u + t \hat{e}_i) - f(u)}{t} - D_f(x) \hat{e}_i \right| + \overbrace{|D_f(x) \hat{e}_i - T \hat{e}_i|}^{< \frac{\varepsilon}{4}} \\ &\leq \left| \frac{f(x + t \hat{e}_i) - f(x)}{t} - \frac{f(u + t \hat{e}_i) - f(u)}{t} \right| + \left| \frac{f(x + t \hat{e}_i) - f(x)}{t} - D_f(x) \hat{e}_i \right| + |D_f(x) \hat{e}_i - T \hat{e}_i| \end{aligned}$$

כאשר הביטוי האמצעי הוא מהגדרת נזרת עיונית ב- $x$  נוסחא, לכן אם נבחר  $t$  מספיק קטן הביטוי האמצעי יהיה קטן (ישאף לאפס). נשאר לטפל רק בביטוי השמאלי ביותר.

$$g_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_u(s) = f(u + s\hat{e}_i)$$

נגדיר  $g_u$  רציפה על  $(0, t)$ , וגזירה ב- $(0, t)$ . כמו כן:

$$g'_u(s) = D_f(u + s\hat{e}_i)\hat{e}_i$$

ממשפט לגראנג', יש  $0 < c < t$  כך ש:

$$g_u(t) - g_u(0) = g'_u(c) \cdot (t - 0)$$

$$f(u + t\hat{e}_i) - f(u) = (D_f(u + c\hat{e}_i)\hat{e}_i)t$$

נגדיר:

$$g_x(s) = f(x + s\hat{e}_i)$$

מאותם שיקולים, יש  $0 < c_2 < t$  כך ש:

$$g_x(t) - g_x(0) = D_f(x + c_2\hat{e}_i)\hat{e}_i \cdot t$$

נניח  $t$  קטן מספיק כך ש:

$$x, u, x + t\hat{e}_i, u + t\hat{e}_i \in B_\delta(0)$$

וגם  $t$  מספיק קטן (מהגדרה של נגזרת כיוונית) כך ש:

$$\left| \frac{f(x + t\hat{e}_i) - f(x)}{t} - D_f(x)\hat{e}_i \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

נטען כי  $t$  זה טוב מספיק. מדוע? הביטוי השמאלי מלמעלה שווה ל:

$$\begin{aligned} &= |D_f(u + c_1\hat{e}_i)\hat{e}_i - D_f(x + c_2\hat{e}_i)\hat{e}_i| \\ &\leq |D_f(u + c_1\hat{e}_i)\hat{e}_i - T\hat{e}_i| + |D_f(x + c_2\hat{e}_i)\hat{e}_i - T\hat{e}_i| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

**סימונים:**

מולטי אינדקס:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i \geq 0, \alpha_i \in \mathbb{N}, |\alpha| = \sum_i \alpha_i$$

זה יהיה דומה למולטינום. נגדיר:

$$\alpha! = \prod_i \alpha_i!$$

$$\bar{x}^\alpha = \prod_i x_i^{\alpha_i}$$

נבחר:

$$\bar{x} = (x_1, x_2), \alpha = (2, 3), \bar{x}^\alpha = x_1^2 x_2^3$$

תהי  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה  $k$  פעמים בנקודה  $x_0$ :

$$f(x) = \sum_{|\alpha|} \frac{D_f^\alpha(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} h_\alpha(x) (x - x_0)^\alpha$$

כאשר  $\lim_{x \rightarrow x_0} h_\alpha(x) = 0$ .

$$D_f^\alpha(x_0) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

יהי  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . אזי  $|\alpha| = 2$ . אפשרויות:

$$(0, 2), (2, 0), (1, 1)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) (y - y_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) (x - x_0)(y - y_0) \right]$$

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

מאוד נרצה להבין את הקשר בין שתי הצורות - יש קשר בין הביטויים לבין מציאת נקודות מינימום ומקסימום: אם הביטוי דומה ל:  $x^2 + y^2$  נקבל נקודת מינימום, אם דומה ל:  $-x^2 - y^2$  נקבל נקודת מקסימום.

#### 4.4.2 אפיון נוסף לנקודות אקסטרים

**הגדרה 4.12**  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  נקראת תבנית ריבועית אם  $Q$  פולינום הומוגני מדרגה 2, כך ש:

$$Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v), \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$$

קיימת התאמה בין תבניות ריבועיות לבין מטריצות סימטריות. מדוע? תהי  $A$  מטריצה סימטרית. אזי:

$$\begin{aligned} Q(v) &= v^t A v = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ by + cy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= ax^2 + bxy + bxy + cy^2 \end{aligned}$$

**דוגמא:**

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= xy \\ \Rightarrow (x, y) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy \end{aligned}$$

**תזכורת מלינארית 2** - משפט ההתמדה של סילווסטר:

אם  $g$  תבנית ריבועית ב- $n$  משתנים, אז  $g$  שקולה לתבנית הבאה:

$$q_{eq}(v) = (1 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_2^2 + \dots + 1 \cdot x_k^2) - (1 \cdot x_{k+1}^2 + \dots + 1 \cdot x_{k+s}^2) + \underbrace{0 + \dots + 0}_{n-(k+s)}$$

זוהי הסיגנטורה של  $Q(k, s)$ .

תהי  $Q(v) = v^t A v, B \in M_n(\mathbb{R}), Q_2 = v^t D v, Q(Bv) = v^t B^t A B v$ .  
נאמר ש- $Q$  שקולה ל- $Q_2$  אם קיימת  $P$  הפיכה כך ש:

$$D = P^t A P$$

**דוגמא:**

$$Q(x, y) = xy, \quad x = z - w, \quad y = z + w$$

$$xy = (z + w)(z - w) = z^2 - w^2$$

**הגדרה 4.13**  $A$  סימטרית, אזי:

1.  $A$  חיובית אם  $k = n$ .
2.  $A$  אי שלילית אם  $s = 0$ .
3. שלילית אם  $s = n$ .
4. אי-חיובית אם  $h = 0$ .
5. לא מוחלטת אחרת.

נשאל, כיצד למיין את המטריצות. לשם כך קיים **קריטריון יעקובי**:  
אם  $A$  סימטרית  $n \times n$ , נגדיר את המינור הראשי מסדר  $k$  -  $M_k$  להיות:

$$\left( \begin{array}{ccc} k & \times & k \\ & M_k & \\ \hline & & \end{array} \right)$$

- $A$  חיובית אם  $\forall 1 \leq k \leq n \det(M_k) > 0$ .
- $A$  שלילית אם  $\forall 1 \leq k \leq n \operatorname{sign}(\det(M_k)) = (-1)^k$ .
- אחרת - המטריצה לא שלילית ולא חיובית.

**משפט 4.14**  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה פעמיים, וכן  $\nabla f(x_0) = \bar{0}$  (נק' סטציונרית).

• אם  $H(x_0)$  ההסיאן חיובי, אז זוהי נקודת מינימום.

• אם  $H(x_0)$  שלילית - זוהי נקודת מקסימום.

• אם  $H(x_0)$  מקיים  $k \geq 1, s \geq 1$  אז  $x_0$  נקודת אוקף.

אחרת אי אפשר להכריע.

אם אנחנו "מאמינים" לקריטריון יעקובי, המשפט ברור.  
**מקרה פרטי:**

$$f(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, H_{ij}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$$

$x_0$  מינימום אמ"מ  $H$  חיובית אמ"מ

$$a > 0, ac - b^2 > 0$$

$x_0$  מקסימום אמ"מ

$$a < 0, ac - b^2 > 0$$

**דוגמא:**

$$Q(x, y) = xy$$

$$H = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) \det M_1 = 0, \det M_2 = -1$$

אם יש רק אפס, אי אפשר להכריע!!!!

#### 4.4.3 פונקציות הפוכות

**הגדרה 4.15** נגדיר את היעקוביאן של  $f$  להיות:

$$J_f(a) := \det |D_f(a)|$$

**משפט 4.16**  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  פתוחה,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^d$  גזירה ברציפות ב- $A$ , וכן  $a \in A$  כך ש:

$$J_f(a) \neq 0$$

יש  $a \in U \subseteq A$  פתוחה,  $V = f(U)$ . אזי:

1.  $V$  פתוחה.

2.  $f : U \rightarrow V$  חזקה.

3.  $f^{-1} : V \rightarrow U$  גזירה ברציפות.

**הערה 4.17** התנאי של גזירות ברציפות חשוב - דיפרנציאביליות לא תספיק!

נשים לב:

$$f^{-1} \circ f = Id \Rightarrow D_{f^{-1}}(f(x)) D_f(x) = I$$

חישוב של פונקציות הפוכות זה די קשה, ולא תמיד אפשר לעשות את זה אנליטית. דרך המשפט הנ"ל, אפשר לדעת שהיא קיימת, ואף למצוא את הנגזרת שלה.

**דוגמא:**

$$f(x, y) = (x \cdot \cos y, x \sin y) \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$D_f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix}$$

$$J_f(x, y) = x \cos^2 y - (-x \sin y \sin y) = x$$

$$x \neq 0 \Leftrightarrow J_f(x, y) \neq 0$$

כלומר  $J_f(x, y) \neq 0$  עבור  $x \neq 0$ .

אם  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x \neq 0$ , אז  $J_f \neq 0$ , ויש סביבה  $U$  כך ש- $f$  הפיכה בסביבת  $U$ , וכן:

$$D_{f^{-1}}(f(x)) = D_f(x, y)^{-1}$$

$$D_{f^{-1}}(f(x, y)) = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} x \cos y & x \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

ואכן אם נכפול את המטריצות זו בזו נקבל את מטריצת היחידה.

## 4.5 פונקציות סתומות

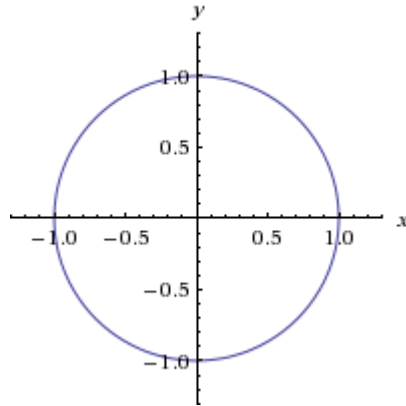
15/12/2011

הבעיה הבסיסית שנרצה לפתור:

יחס  $R$  על  $\mathbb{R}^2 \supseteq \mathbb{R}$ . האם  $R$  הוא פונקציה?

כלומר, בהנתן  $(x, y) \in R$ ,  $y$  מופיע רק בזוג אחד (שכן פונקציה היא חח"ע) - כלומר, האם קיימת  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש- $f(x) = y$ .

דוגמא:



$x^2 + y^2 = 1$  מעגל היחידה -

לכל קו גובה יש שני איקסים, דהיינו אין פונקציה מתאימה.  
אולם, אם נבחר פונקציה, ונסתכל על סביבה שלה - האם נוכל לעשות זאת?  
אם נבחר את הנקודה האינטיפודלית העליונה - נוכל! נבחר  $y = \sqrt{1 - x^2}$ . עבור  
הנקודה האינטיפודלית התחתית נבחר  $y = -\sqrt{1 - x^2}$ .  
כאן בעצם נוכל להביע את  $x$  לפי המשתנה  $y$  -  $x = \sqrt{1 - y^2}$ .  
במקרה הזה היה לנו מאוד קל לעשות זאת ישירות, אולם זה לא כך תמיד. אם לא נוכל,  
נרצה למצוא משפט נחמד שיעזור לנו לעשות זאת.

**משפט 4.18** יהיו  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  קבוצות פתוחות, תהי  $f : B \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$  גזירה  
ב- $B \times A$ , ותהי  $(b, a) \in B \times A$  כך ש:  $f(b, a) = 0$  וגם:

$$\frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (y_1, \dots, y_n)} \bigg|_{(b, a)} = \begin{pmatrix} j & i \\ \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(b, a) & \end{pmatrix}$$

אז קיימת  $V \subseteq A$  פתוחה,  $a \in V \subseteq \mathbb{R}^m$ , קבוצה פתוחה  $U \subseteq B \times A$  ופונקציה גזירה  
ברציפות  $g : V \rightarrow B$  כך שעבור  $(y, x) \in U$  מופיע:

$$y = g(x) \Leftrightarrow f(y, x) = 0$$

נבדוק שזה מתקיים בדוגמא שלנו:

$$f(x, y) = y^2 + x^2 - 1$$

בנקודה  $y = 1, x = 0$  מתקיים  $f(0, 1) = 0$ .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y, x) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 2 \neq 0$$

אצלנו  $A = B = \mathbb{R}$ . אזי, משפט הפונקציה הסתומה מבטיח לנו כי יש סביבה  $V \subseteq \mathbb{R}$  סביב  
0 וקבוצה פתוחה  $U$  ב- $\mathbb{R}^2$  ופונקציה גזירה ברציפות  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש:

$$y^2 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

ובמקרה הזה קל לראות כי  $y = g(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

בדר"כ קשה להבין מיהי  $g$ , אבל קל למצוא את הנגזרת שלה (כמו שקשה למצוא פונקציה קדומה, אבל קל למצוא נגזרת).

**תוספת למשפט:**

$$g : \frac{v}{x} \rightarrow \frac{B}{y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(\bar{x}) = - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, g(\bar{x})) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}, g(\bar{x}))$$

נוכיח את הנוסחא הזו בכיתה.

במקרה של הדוגמא שלנו, מעגל היחידה:

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y, x) = 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(y, x) = \frac{\partial f}{\partial y}(g(x), x) = \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{1-x^2}, x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \sqrt{1-x^2}) = 2\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{1-x^2}, x)^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{1-x^2}, x) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2x$$

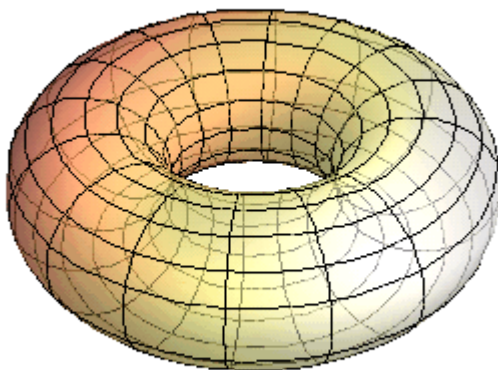
נגדיר :

$$F(x, y, z) = 3 - \left( \sqrt{x^2 - y^2} \right)^2 + z^2, \quad F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

הראו כי לכל נקודה  $(x, y, z)$  כך ש- $F(x, y, z) = 1$  יש סביבה כך שהיא "מקומית" נראית כמו גרף של פונקציה  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

הדבר הזה מזכיר לנו קצת כדור - אבל זה לא - זה טורוס!

$$a = \frac{1}{2}, c = 1$$



מדוע? אם נסמן  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , נקבל:

$$F(x, y, z) = (3 - r)^2 + z^2 = 1$$

נקבל מעגל בעל מרכז 3 ברדיוס 1, וזה יהיה "פרוסה" של הצורה שלנו (סובבו את המעגל שהתקבל בשלושה מימדים).

**פתרון:**

יהי  $(x, y, z)$  כך ש- $F(x, y, z) = 1$ . נבדוק מתי ניתן לכתוב את  $z$  כפונקציה של  $(x, y)$ . נחפש מתי הנגזרת היא לא אפס:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z$$

אם  $(x, y, z)$  כך ש- $z \neq 0$ , סיימנו, כי לפי המשפט קיימת סביבה  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  סביב  $(x, y)$  ו- $U \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  כך ש- $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$F(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow z = f(x, y)$$

זה פתר לנו את השאלה רק כאשר  $z \neq 0$ .

אם  $z = 0$ , נבדוקו האם אפשר לחלץ את  $x$  כפונקציה של  $y, z$  - פשוט גוזרים את הפונקציה המקורית לפי  $x$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2\left(3 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \neq 0$$

**אבחנה:**

$$z = 0, F(x, y, z) = 1 \Rightarrow \left(3 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 1$$

אז זה לא אפס.

אם  $x \neq 0$ , ניתן לכתוב את  $x = g(y, z)$  בסביבה של  $(x, y, z)$ .  
אם  $x = 0, z = 0$ , נבדוק חילוץ של  $y$  לפי  $x, z$ :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, y, 0) = \left(3 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ואפשר לחלץ.

#### 4.5.1 פונקציות סתומות וכופלי לגראנג'

נגיד  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , יש למצוא את הערך המקסימלי שלה על עקום מסויים (אילוץ). אנחנו למדנו לחפש מקרים בהם  $\nabla = 0$ . לא נכון להשתמש במקרים אלו בגרדיאנט. כופלי לגראנג' נועדו לטפל במקרים אלו - כלומר למצוא מינימום ומקסימום תחת אילוץ.  
נניח  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . נניח  $k < n$  ולכל  $1 \leq i \leq k$  יש פונקציות:

$$g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$g_i$  אלו נקראות פונקציות האילוץ. נניח גם כי יש גם מספרים  $\{c_i\}_{i=1}^k$ . נסתכל בחיתוך קווי הגובה:

$$\bigcap_{i=1}^k \{g_i(\bar{x}) = c_i\} = C$$

במקרה שהאילוץ "נחמדים", אפשר לבצע הורדת מימד - נגדיר:

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = f(x, h(x))$$

בדר"כ לא נוכל לתאר את פונקציות האילוץ בצורה כזו. נשתמש ב"שיטת קסם" לפתור בעיות שכאלה.

נניח כמו כן שבנקודה  $\bar{x} \in C$  יש ל- $f|_C$  אקסטרמום מקומי. אז מתקיים:

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

#### דוגמא:

נתון המישור  $D \neq 0, Ax + By + Cz = D$ . מצאו את המרחק של הראשית  $(0, 0, 0)$  מהמישור.

$$d(\bar{0}, \text{plane}) = \inf_{\bar{p} \in \text{plane}} d(\bar{0}, \bar{p})$$

נגדיר:

$$f(x, y, z) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$$

נחפש את:

$$\inf_{(x,y,z) \in \text{plane}} f(x,y,z)$$

נשאלת השאלה, האם בכלל יש מינימום כאן? קל לראות את זה בצורה גיאומטרית: נביט בנקודה  $(x_0, y_0, z_0) \in \text{plane}$ . ניקח כדור סגור שמרכזו בראשית והנקודה על שפת הכדור (או מוכלת בו). נסתכל בחיתוך של הכדור עם המישור - החיתוך קומפקטי (הוא בתוך הכדור כלומר הוא חסום, וסגור כי מוכל בכדור סגור). ברור שהמרחק הכי קצר יהיה בתוך הכדור, ולכן יש מינימום בתוך החיתוך הזה. אילוץ 1:

$$g_1(x,y,z) = Ax + By + Cz - D = 0$$

אפשר לגזור ולחפש נקודות שמתאפסות. אולם אנחנו נגדיר פונקציה חדשה - לגראנז'יאן:

$$L(x,y,z,\lambda_1) = f(x,y,z) - \lambda_1 \cdot g_1(x,y,z)$$

נשים לב שנוכל להשתמש בפונקציה המקורית בריבוע (ואז צריך להוציא שורש). נקבל:

$$L(x,y,z,\lambda_1) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1 (Ax + By + Cz - D)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda_1 A = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda_1 B = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda_1 C = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = Ax + By + Cz - D$$

עכשיו צריך לפתור את המשוואות הללו. אין לכך כללים, אבל נזכור כי אם ה- $\lambda$  נעלם במהלך החישובים האלגבריים, מה טוב. נחלץ ונקבל:

$$x = \frac{\lambda_1 A}{2}, y = \frac{\lambda_1 B}{2}, z = \frac{\lambda_1 C}{2}$$

$$A \cdot \frac{\lambda_1 A}{2} + B \cdot \frac{\lambda_1 B}{2} + C \cdot \frac{\lambda_1 C}{2} = 0$$

$$\lambda_1 \left( \frac{A^2 + B^2 + C^2}{2} \right) = D$$

$$\frac{\lambda_1}{2} = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$x = \frac{AD}{A^2 + B^2 + C^2}, y = \frac{BD}{A^2 + B^2 + C^2}, z = \frac{CD}{A^2 + B^2 + C^2}$$

לאחר שקיבלנו נקודות - פשוט נציב ונראה אילו נקודות הן מינימום ואיזה מקסימום לפי הערכים שיתקבלו. לעיתים אפשר גם להסביר אם הנקודה מינימום או מקסימום לפי הגיאומטריה של הבעיה.

**אזהרה!**

כשצריך לבדוק צורות - צריך לבדוק את הפינות (לא גזירות), וכן על השפה. אם מחפשים מינימום ומקסימום על העיגול - מתחילים עם פונקציה רגילה, מוצאים היכן הגרדיאנט מתאפס בכל העיגול (רציף גזיר קומפקטי לכן קיים). לאחר מכן בשפה עושים כופלי לגראנז' או הורדת מימד, ומוצאים נקודות על השפה. בסוף מציבים את הנקודות ורואים מה מקבלים.

### תרגיל דומה עם שני אילוצים

מצא מרחק מינימלי של הראשית מהישר  $(1+t, 2t, 5-t)$ . נשים לב כי ישר זה לא עובר דרך הראשית. כמו מקודם, נקיף נקודה בעיגול, ונמצא שוב כי יש מינימום. נגדיר:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

אפשרות ראשונה - הוצאת מימד, נקבל פרבולה, ושם קל למצוא מינימום. אפשרות שניה - כפולי לגראנז' - נמצא הצגה כחיתוך של שני מישורים. אילוץ לכל מישור, וכן נרצה שכל הנקודות על האילוץ יתנו לנו מינימום. כיצד נעשה זאת? נבחר שתי נקודות על הישר:

$$(1, 0, 5), (6, 10, 0)$$

בוחרים נקודה שלישית באופן רנדומי שאינה על הישר, וכך נקבל מישור. נקודה נוספת לקבלת מישור נוסף, וכך החיתוך של שני המישורים יהיה הישר שלנו. נבחר נקודה אחת להיות  $(0, 0, 0)$ . נציג את המישור שהתקבל משני הוקטורים שנקבל משלוש הנקודות - זאת ע"י מכפלה וקטורית. וקטורי כיוון למישור:

$$\begin{aligned}(1, 0, 5) - (0, 0, 0) &= (1, 0, 5) \\ (6, 10, 0) - (0, 0, 0) &= (6, 10, 0)\end{aligned}$$

נקבל:

$$(A, B, C) = (1, 0, 5) \times (6, 10, 0) = \begin{pmatrix} -50 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$-50x + 30y + 10z = D$$

נציב  $(0, 0, 0)$  ונקבל:

$$D = 0$$

מישור אחד אם כך הוא

$$-5x + 3y + z = 0$$

בצורה דומה נוסיף את הנקודה  $(1, 0, 0)$ , ונקבל את המישור:

$$-2x - y = -2$$

כעת נוכל לכתוב לגרנז'יאן מתאים:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(-5x + 3y + z) - \lambda_2(-2x + y + 2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 5\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} =$$

**הערה 4.19** אם האילוץ קבוצה קומפקטית, אזי ברור שיהיה מינימום\מקסימום. אחרת, יש להראות שקיים כזה (הקפה בכדור, וכו').

#### 4.6 משטחים

29/12/2011

**הגדרה 4.20** יריעה  $M$   $k$ -מימדית בתוך  $\mathbb{R}^n$  היא קבוצה כך שלכל  $p \in M$  יש סביבה פתוחה  $U \cap M$  ש- $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  כך ש- $U \cap M$  הומאומורפית לכדור היחידה ב- $\mathbb{R}^k$ .

אנחנו לא נעסוק ביריעות עם שפה - נעסוק רק ביריעות ללא שפה, כלומר  $M$  היא תמיד פתוחה.

#### דוגמאות

• מעגל הוא יריעה חד-מימדית.

• ב- $\mathbb{R}^4$ , ריבוע הוא יריעה דו מימדית.

מה עושים עם יריעות? מדביקים אותן ע"מ לקבל יריעות חדשות!  
כאשר מדביקים צריך לחשוב לא רק איפה מדביקים, אלא גם באיזה כיוון מדביקים.  
לכל נקודה לאחר ההדבקה עדיין יש סביבה פתוחה.

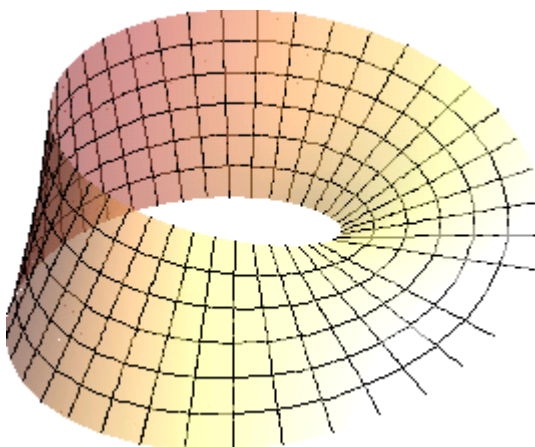
את היריעה המודבקת רואים כהכפלה של שני דברים.

למשל, אם נדביק את שתי הצלעות הצדדיות של ריבוע היחידה אחת לשניה ישר (ללא סיבוב), נקבל  $S^1 \times (0, 1)$ . יש לשים לב למימדים (אם מדביקים יריעות משני מימדים שונים תהיה עליה במימד).

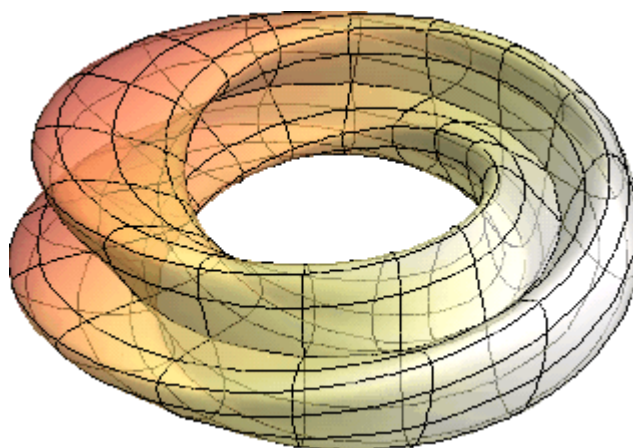
אפשר לעשות "דברים קצת יותר מאגניבים" (כל הצורות שנקבל הן ב- $\mathbb{R}^4$ ):

למשל, אם נדביק את שתי הצלעות הצדדיות של ריבוע היחידה בכיוון הפוך, נקבל טבעת מוביס<sup>43</sup>!

<sup>43</sup>"למה התרגול חצה את רצועת מוביוס? לא כדי להגיע לצד השני!"



מה מיוחד ביריעה זו? אי אפשר להגדיר לה פנים וחץ!  
 אם נדביק את שתי הצלעות העליונה והתחתונה אחת לשניה באותו הכיוון, נקבל את הטורוס מהשיעור הקודם.  
 אם נדביק גם את הצלעות הצדדיות ביכוון הפוך וגם את שתי הצלעות העליונה והתחתונה, נקבל "בקבוק קליין":



אם נדביק את הצלע הימנית בכיוון ומטה לתחתונה בכיוון ימין, ואת העליונה בכיוון ימין לשמאלית בכיוון מטה, נקבל כי החלק האחרון שהזכרנו הופך להיות חלק עליון של קונוס, החלק השני הופך לחלק התחתון, ויחד נקבל משהו שהוא הומאומורפי לכדור.  
 זה "בגדול" יריעות.

מה שאנחנו נרצה לעשות זה נגזרות על יריעות ולמצוא מישורים משיקים. יהיו לנו בעיות ב"שפיצים" (כמו ערך מוחלט של  $x$  ב-0). לכן נרצה לעבוד עם יריעות חלקות. לשם כך נצטרך הגדרות נוספות:

#### 4.6.1 משטחים רגולרים

**הגדרה 4.21** יהי  $a \in M$ . אם יש  $p : B_1^k(0) \rightarrow U \cap M \subseteq \mathbb{R}^n$  דיפרנציאבילית, וכן  $\text{rank}(D_p(a)) = k$  (כלומר הדרגה מלאה) אז נאמר ש- $a$  היא נקודה רגולרית, ו- $p$  היא

פרמטריזציה של  $M$  בסביבת  $a$ .  
נאמר ש- $M$  רגולרי, אם בכל נקודה יש פרמטריזציה שכזו.

## דוגמא

$$S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

זהו משטח רגולרי.  
פתרון:

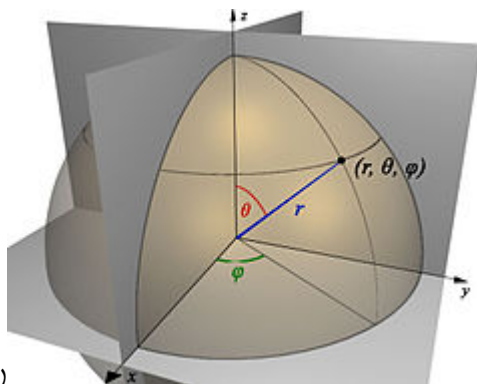
$$\begin{aligned} p_1(u, v) &= \left(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\right) \\ p_2(u, v) &= \left(u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\right) \\ u, v &\in B_1(0) \end{aligned}$$

מכסה את החלק העליון של הכדור, ו- $p_2$  מכסה את החלק התחתון של הכדור. נצטרך עוד שתי פונקציות שיכסו את קו המשווה:

$$\begin{aligned} p_3(u, v) &= \left(u, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v\right) \\ p_4(u, v) &= \left(u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v\right) \end{aligned}$$

כאשר  $p_3$  מכסה את המישור  $x, z$  בכיוון "לתוך הדף", ו- $p_4$  את הכיוון השני. עדיין חסרות שתי נקודות בקצוות, צריך  $p_5, p_6$  - אסף יעלה למודל קובץ בנושא.

**קואורדינטות כדוריות** ראינו שאת המישור אפשר לתאר בעזרת קואורדינטות קרטזיות  $(x, y, z)$ , וכן בעזרת  $r, \theta$ . נכיר סט חדש של קואורדינטות - כדוריות. נסמן  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , נסמן ב- $\varphi$  את הזווית בין ציר ה- $z^+$  לבין  $\bar{u} = (x, y, z)$ , ונסמן ב- $\theta$  את הזווית בין  $(x, y, 0)$  לבין  $x^+$ .



(מתוך ויקיפדיה)

בציור מעלה הסימונים עבור  $\varphi, \theta$  הפוכים (אבל זה מסביר מה הולך כאן)!

אזי:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$x = r \cos \theta \sin \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \varphi$$

ונחליט כי  $\varphi = 0$  קוטב צפוני,  $\varphi = \pi$  קוטב דרומי. כעת:

$$f(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \theta \in (0, 2\pi), \varphi \in (0, \pi)$$

נראה שזוהי אכן פרמטריזציה רגולרית - נחשב את הדיפרנציאל:

$$D_P = \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

נסמן את העמודה הראשונה ב- $c_1$ , ואת העמודה השנייה ב- $c_2$ . נשים לב כי  $-\sin \varphi$  לא מתאפס בטווח שלנו  $\varphi \in (0, \pi)$ , ועל כן העמודות לא תלויות לינאריות, כי אם היו תלויות אזי היה  $\alpha \in \mathbb{R}$   $0 \neq \alpha$  כך ש:

$$\alpha c_1 = c_2 \Rightarrow \alpha \cdot 0 = \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = 0$$

וזה כאמור לא אפשרי בטווח.

ראינו שני וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$  ב"ת לינארית - לכן נוכל לבצע מכפלה וקטורית, ולקבל וקטור המאונך לשניים הראשונים.

**קריטריון נחמד שנובע מהניתוח הזה:**

עבור משטח דו-מימדי ב- $\mathbb{R}^3$ ,  $p$  היא פרמטריזציה רגולרית אמ"מ

$$N(u, v) = p'_u(u, v) \times p'_v(u, v) \neq 0$$

הוקטורים הנ"ל פורשים את המישור המשיק. הוקטור  $N(u, v)$  נקרא וקטור הנורמל. דוגמא - בציור:

נניח שפרמטריזציה מסויימת מעביר נקודה  $(h, 0)$  לנקודה כלשהיא. אזי נקבל שני וקטורים לא תלויים לינארית - והם פורשים את המישור המשיק<sup>44</sup>. כלומר, אם המישור רגולרי אזי יש משיק בכל נקודה, כלומר יש וקטור נורמל בכל נקודה. חשוב להבין שהפרמטריזציה של  $u, v$  לא בהכרח נותנת מערכת אורתוגונלית (במקרה של הקואורדינטות הכדוריות כן).

ניתן לבצע את הניתוח שעשינו עבור הספרה, עבור היפרבולואיד -  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = 1$  - נעבוד על כך בצורה מודרכת בשיעורי הבית.

<sup>44</sup> בעקרון מדברים על מרחב משיק - כאשר לא דנים ב- $\mathbb{R}^3$  נקבל מרחבים ולא מישורים, אבל בכך לא נדון בקורס זה.

**תרגיל:**

$$\gamma(u) = (a \cos(u), a \sin(u), bu), \quad a, b > 0, \quad u \in (0, \infty)$$

זוהי מסילת ההליקס - בורג.

נצייר קו בין  $\gamma(u)$  לבין  $(0, 0, bu)$  - נקבל מדרגות לוליניות (בלי נקודות הקצה). הראו כי מה שמתקבל הוא משטח.

**פתרון** נחפש פרמטריזציה מתאימה:

$$p(u, v) = (1 - v) \cdot \gamma(u) + v \cdot (0, 0, bu), \quad u \in (0, \infty), \quad v \in (0, 1)$$

זוהי "פרמטריזציה על", שכן היא מכסה את כל הנקודות שאנחנו מבקשים לכסות. נראה שזוהי אכן פרמטריזציה (כלומר  $\text{rank}(p') = 2$ ) - זאת על ידי חישוב וקטור הנורמל:

$$\begin{aligned} p'_u &= (1 - v) \gamma'(u) + v \cdot (0, 0, b) = (1 - v) (-a \sin u, a \cos u, b) \\ &= \begin{pmatrix} -a(1 - v) \sin u \\ a(1 - v) \cos u \\ b \end{pmatrix} \\ p'_v &= -\gamma(u) + (0, 0, bu) = \begin{pmatrix} -a \cos u \\ -a \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ברכיב האחרון של הוקטורים יש  $0, b$  - מכיוון  $\cos u, \sin u$  לא מתאפסים ביחד, לא נוכל לקבל את וקטור האפס, ועל כן הוקטורים אינם תלויים לינארית. עם זאת, נחשב את המכפלה הוקטורית שלהם (יכול לעזור למשל במציאת המישור המשיק):

$$p'_u \times p'_v = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -a(1 - v) \sin u & a(1 - v) \cos u & b \\ -a \cos u & -a \sin u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \sin u \\ -ab \cos u \\ a^2(1 - v) \end{pmatrix} \neq 0$$

ולכן הוקטורים הנ"ל בלתי תלויים לינארית.

**שאלה**

יש משטח, ויש נקודה. אפשר לראות את הנקודה לפי הרבה פרמטריזציות שונות. את המישור המשיק הגדרנו לפי פרמטריזציה ספציפית. אם נחפש פרמטריזציה שונה לנקודה, האם נקבל על פיה מישור משיק אחר?  
אינטואיטיבית, אנו מבינים כי נקבל את אותו המישור המשיק (אם כי נוכל לקבל וקטור נורמל שונה). זהו תרגיל ארוך וטכני, ולא נספיק את כולו היום (אספך כנראה יעלה למודל). עם זאת, נתחיל:

**הגדרה 4.22** החלפת משתנים גזירה ב- $\mathbb{R}^2$  תהיה:

$$f : \underbrace{B_1(0)}_{\subset \mathbb{R}^2} \rightarrow B_1(0)$$

כאשר  $J_f \neq 0$  בכל נקודה<sup>45</sup>.

החלפת המשתנים היא למעשה דבר שכזה:

נביט בשתי פרמטריזציות שונות. מכיוון והדיפרנציאל מדרגה מלאה בסביבה פתוחה, אם נסתכל על החיתוך של האיזורים הללו, נוכל לקחת את הפונקציה ההפוכה (קיימת כי הדיפרנציאל מדרגה מלאה ממשפט הפונקציה הסתומה), ואז לקבל דרך לתרגם את הנקודה מהפרמטריזציה הראשונה להצגה בפרמטריזציה השנייה.

המשפט שנרצה להוכיח:

נניח  $M$  משטח ב- $\mathbb{R}^3$ , ותהי  $p$  פרמטריזציה בסביבת  $m \in M$ :

$$p : B_1(0) \rightarrow M$$

ונניח  $f(u, v) = \begin{pmatrix} f_1(u, v) \\ f_2(u, v) \end{pmatrix}$  החלפת משתנים גזירה, ו- $p_2 = p \circ f(x, y)$  אפשר להראות ש- $p_2$  פרמטריזציה גם היא (כלל השרשרת). אז:

$$N_2 = p'_{2u} \times p'_{2v} = J_f(u, v) \cdot N_1(u, v)$$

כלומר  $N_1, N_2$  באותו הכיוון, ואז נקבל כי המישור שנוצר (המישור המשיק) הוא אותו המישור.

#### 4.6.2 איך לטנגרל

22.01.2012

**הצבה הפוכה** בשיעור שעבר (חסר) ראינו:

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

זה מקביל להצבה של משתנה אחד -  $x = f(y)$ ,  $dx = f'(y) dy$  - זהו היעקוביאן מדרגה ראשונה.

לעיתים היו לנו הצבות מהצורה  $f(x) = y$ . במקרה זה, אנו צריכים לחשוב שדרך משפט הפונקציה הסתומה אנו מקבלים משהו - אבל זה לא ישיר, רק דרך המשפט.

$$f(x) = y \Rightarrow f'(x) dx = dy$$

למשל במקרה של  $\int re^{-r^2}$ , לא נציב  $r = \text{something}$ , אלא  $r^2 = y$ , וכו'. זוהי הצבה הפוכה.

למשל, אם יש לנו הצבה מהצורה  $g(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ , אזי במקרה זה צריך לחלק ביעקוביאן, לא להכפיל!

$u = xy, v = y^2 - x^2$ . אם ננסה לחלץ - קשה. אבל, אם נחשב את היעקוביאן ההפוך, נקבל משהו ממש נחמד והאינטגרל יוצא מאוד פשוט.

<sup>45</sup> בפרט היא דיפרנציאבילית

**עוד השלמה** תרגיל - חשבו את  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ .

גלואה ואבל פיתחו תורה שבעזרתה רואים שאין ל- $e^{-x^2}$  אין פונקציה קדומה - אבל את הערך הזה מעלה אפשר לחשב! נסמן  $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ . נשים לב כי  $I \geq 0$ .

$$I = \sqrt{I^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy}$$

במידה והאינטגרל מתכנס, אנו יודעים כי:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx &= I = \sqrt{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \cdot \int_{-R}^R e^{-y^2} dy} \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \sqrt{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \int_{-R}^R e^{-x^2-y^2} dx dy} = \sqrt{\int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy} \\ \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int \int_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} \cdot r dr d\theta \end{aligned}$$

וקסם! עברנו מפונקציה שאין לה פונקציה קדומה למשהו שיש לו תוצאה! נקבל:

$$= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^R d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} e^{-R^2} + \frac{1}{2} d\theta = \pi (1 - e^{-R^2}) \rightarrow \pi$$

ולכן  $I = \sqrt{\pi}$ .

#### 4.7 אינטגרלים מסילתיים

באים בשני סוגים, מתבלבלים בין שני הסוגים הרבה, אולם הם שונים לחלוטין! לאורך כל השיעור:  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  גזירה הרציפות למקוטעין.

**סוג 1**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה. אפשר להתבונן ב- $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . הפונקציות רציפות לכן גם ההרכבה רציפה, ולכן אינטגרבילית. נרצה לחשב משהו דומה לאינטגרל של ההרכבה הזו.

$$\int_0^1 f dx = \sum f(\alpha_i) \Delta x_i$$

תהי  $T : 0 = x_0 < \dots < x_n = 1$  נגדיר:

$$S(T, f, \gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(\alpha_i)) \cdot \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$$

מתברר שה- $\Delta x_i$  - גודל הצעד שלנו, הוא  $\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$  - זאת כי צריך לנרמל בגודל של הקטע (אם נזכר בהשוואה של מסילה למהירות - בכל קטע במסילה המהירות יכולה להיות שונה, ולכן בזמן שווה נעבור דרך שונה עבור אותו אינטרוול זמן. על כן יש צורך בנירמול הנ"ל).

**הגדרה 4.23** נגיד ש- $f$  אינטגרבילית על  $\gamma$  אם קיים הגבול:

$$\lim_{p(T) \rightarrow 0} S(T, f, \gamma) = I < \infty$$

במקרה זה מסמנים  $I = \int_{\gamma} f dy$ .

לדבר הזה יש שימוש מאוד חשוב (והיחיד שאסף מכיר במתמטיקה - ככל הנראה יש עוד כמה בפיסיקה):

נניח  $f \equiv 1$  אזי:

$$S(T, f, \gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$$

זהו קירוב לאורך של  $\gamma$ ! (כי אנחנו מקבלים קווים פוליגוניים על  $\gamma$ ).

**הגדרה 4.24** אם  $f \equiv 1$  אינטגרבילית על  $\gamma$ , נאמר ש- $\gamma$  היא בעלת אורך, וכן  $\int_{\gamma} 1 d\gamma = \text{length}(\gamma)$ .

משפט לא קשה להוכחה:

אם  $\gamma$  גזירה ברציפות למקוטעין, אזי היא בעלת אורך.

על כן, בכל הדיון שלנו,  $\gamma$  בעלת אורך.

ממשפט הערך הממוצע (לגראנג'):

$$\gamma_j(t_{i+1}) - \gamma_j(t_i) = \gamma'_j(c_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$\Rightarrow \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(c_{i1}) \\ \vdots \\ \gamma'_n(c_{in}) \end{pmatrix} (t_{i+1} - t_i)$$

כאשר  $t_{i+1} \rightarrow t_i$ , מרציפות  $\gamma'_j$  לכל  $j$ :

$$\begin{pmatrix} \gamma'_1(c_{i1}) \\ \vdots \\ \gamma'_n(c_{in}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma'_1(t_i) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t_i) \end{pmatrix}$$

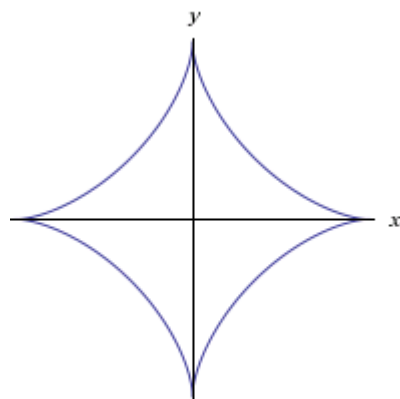
לא מפתיע אם כך לגלות שיש לנו נוסחא לחישוב האינטגרל הזה במקרה הנ"ל - עבור  $\gamma$  גזירה ברציפות, נקבל:

$$\int_{\gamma} f d\gamma = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

כאשר הביטוי מימין הוא אינטגרל רימן חד מימדי.

**תרגיל** חשבו את ההיקף של אסטרואידה:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

(plotted for  $t$  from 0 to  $2\pi$ )

נמצא מסילה שתרוץ על השפה של הצורה, נחשב את אורכה ונקבל את ההיקף הרצוי.  
כשרואים משהו מצורה שכזו, מתבקש להשתמש בפרמטריזציה  $\cos, \sin$ .  
נבצע פרמטריזציה לאסטרואידה:

$$\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$$

קל להראות ש- $\gamma$  על האסטרואידה. נותר תרגיל קל להראות כי זהו בדיוק ההיקף, כלומר כי  
 $Im(\gamma) = \{x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$   
נחשב את אורך המסילה:

$$\begin{aligned} length(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|3\cos^2(t) \cdot (-\sin(t)), 2\sin^2(t) \cdot \cos(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 4\sin^4 t \cdot \cos^2 t} dt = 3 \int_0^{2\pi} |\cos t \cdot \sin t| dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt \\ &= \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6 \cdot \left[ -\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left[ -\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} \right] = 6 \end{aligned}$$

#### תכונות האינטגרל

$$\int_{\gamma} \alpha f \pm \beta g d\gamma = \alpha \int_{\gamma} f d\gamma \pm \beta \int_{\gamma} g d\gamma$$

עוד תכונה - שרשור מסילות, כלומר:

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f d\gamma = \int_{\gamma_1} f d\gamma + \int_{\gamma_2} f d\gamma$$

נובע ישירות מהרישום של סכומי רימן לשני הצדדים.

**סוג שני** הפעם -  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  
כאן מגדירים סכום רימן בצורה הבאה:

$$S(T, f, \gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(c_i)) \cdot (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$$

נשים לב שכאן אין נורמה!!!!  
נקבל את הנוסחה:

$$\int_{\gamma} \bar{f} d\bar{\gamma} = \int_0^1 \bar{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

לזה יש השלכות בפיסיקה - חישוב העבודה שיש להשקיע כדי להזיז דברים<sup>46</sup>.  
אינטגרל זה מקיים את התכונות של הקודם:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \alpha \bar{f} \pm \bar{g} d\gamma &= \alpha \int_{\gamma} \bar{f} d\gamma \pm \int_{\gamma} \bar{g} d\gamma \\ \int_{\gamma_1 * \gamma_2} \bar{f} d\bar{\gamma} &= \int_{\gamma_1} \bar{f} d\bar{\gamma}_1 + \int_{\gamma_2} \bar{f} d\bar{\gamma}_2 \end{aligned}$$

בתחילת הסמסטר (??) ראינו את המסילה ההפוכה:

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(t) &:= \gamma(1-t) \\ \Rightarrow \int_{\gamma^{-1}} \bar{f} d\bar{\gamma}^{-1} &= - \int_{\gamma} \bar{f} d\bar{\gamma} \end{aligned}$$

**טענה 4.25** תהי  $f$  רציפה,  $\gamma$  גזירה ברציפות. אזי:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \bar{f} d\bar{\gamma} \right| &= \left| \int_{\gamma} \bar{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{\gamma} |\bar{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| dt \\ &\stackrel{C.S.}{\leq} \int_0^1 \|\bar{f}(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\| dt \leq \sup_{f|_{\gamma}} \|\bar{f}\| \cdot \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \sup_{f|_{\gamma}} \|f\| \cdot \text{length}(\gamma) \end{aligned}$$

**חישובים** נניח  $\vec{f}(x, y) = (x, y)$  איך הוא נראה? בכל נקודה נחבר את החץ ש- $\vec{f}$  נותן לה.

נרצה לחשב את האינטגרל של הדבר הזה על חצי מעגל - נסמנו ב- $\vec{\gamma}$ . לפי ההגדרה:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi] \\ \int_{\gamma} \vec{f} d\bar{\gamma} &= \int_0^{\pi} f(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi} 0 dt = 0 \end{aligned}$$

<sup>46</sup>לא מעניין במיוחד.

שדה מהצורה הזו נקרא "שדה רדיאלי". ישנו משפט שאומר שעל שדה כזה ומסילה שכזו נקבל אפס - מה שאכן נכון במקרה שלנו - "כל מה שעולה חייב לרדת". בצורה יותר פורמלית הדבר מופיע בתרגיל הבית.

יהי  $U \subset \mathbb{R}^n$  תחום (בין כל שתי נקודות יש מסילה המקשרת ביניהם בתוך הקבוצה),  $\gamma$  מסילה המוכללת בתחום,  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  שדה וקטורי, ותהי  $\gamma_2$  מסילה בתחום כך ש:

$$\gamma(0) = \gamma_2(0), \quad \gamma(1) = \gamma_2(1)$$

**הגדרה 4.26** נאמר ש- $\int_{\gamma} \bar{f} d\bar{\gamma}$  לא תלוי במסילה, אם:

$$\int_{\gamma} \bar{f} d\bar{\gamma} = \int_{\gamma_2} \bar{f} d\bar{\gamma}_2$$

**הגדרה 4.27** נאמר ש- $\bar{f}$  משמר ב- $U$  אם  $\int_{\gamma} \bar{f} d\gamma$  לא תלוי במסילה, לכל  $U \supseteq \gamma$ .

ונביא גם הגדרה שקולה:

**הגדרה 4.28**  $\bar{f}$  משמר ב- $U$ , אם כל  $\gamma$  סגורה,  $\gamma(0) = \gamma(1)$  ב- $U$ , כלומר:  $\int_{\gamma} \bar{f} d\bar{\gamma} = 0$ .

השקילות נובע משימוש בשרשור של  $\gamma_1 * \gamma_2^{-1}$ .

**הגדרה 4.29**  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  דיפרנציאבילית נקראת פוטנציאל של  $\bar{f}$ , אם  $\bar{\nabla} \Phi = \bar{f}$  או  $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = f_j$ .

כלומר, מתוך פונקציית הפוטנציאל אפשר למצוא את השדה.

**דוגמא**

$$f = (2x, 2y), \quad \Phi = x^2 + y^2 \Rightarrow \nabla \Phi = (2x, 2y)$$

הפוטנציאל הוא אינו יחיד (עד כדי קבוע).

**טענה 4.30** משמר אמ"מ יש לו פוטנציאל.

**הוכחה:**  $\Rightarrow$  נניח  $\gamma \subseteq U$  מסילה. נביט ב:

$$\Phi \circ \gamma(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

נגזור לפי  $t$  ונקבל:

$$(\Phi(\gamma(t)))' = \nabla \Phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \bar{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

כלומר קיימת להרכבה פונקציה קדומה. לכן ניתן להשתמש במשפט היסודי של האינפי, ולקבל:

$$\int_0^1 \bar{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0))$$

והצד הימני תלוי רק בנקודות הקצה. על כן, השדה משמר.  
 $\Leftarrow$  כיוון זה יותר מסובך ועדין. נקבע  $p \in U$ . נגדיר:

$$\Phi(q) = \int_{\gamma} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$\gamma$  מסילה המחברת בין  $p$  ל- $q$  (היא קיימת כי זהו שדה משמר). בכיתה ראינו כי  $\nabla \Phi = \bar{f}$ . אזי:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad F'(x) = f(x)$$

■

לכן זוהי הכללה של המשפט החד מימדי.

השאלה עולה, מתי יש פונקציית פוטנציאל - כלומר, מתי השדה משמר?

**הגדרה 4.31** שדה נקרא משמר לוקליית אם  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  (שיוויון נזרות בהצלבה).

ראינו בכיתה כי שדה משמר הוא שדה משמר לוקליית. נשאל, מתי שדה משמר לוקליית הוא שדה משמר? לכאן צריך הגבלות על הקבוצה שבה אנו פועלים:

**הלמה של Poincare**

**למה 4.32** אם  $U$  תחום פשוט-קשר, אזי כל שדה משמר לוקליית הוא משמר.

מהו תחום פשוט קשר? תחום שבו כל מסילה סגורה ניתן לכווץ לנקודה. זהו מושג שיש להבין גיאומטריית (לא נגדיר כיווץ בצורה פורמלית). "אם יש חור חד מימדי, אי אפשר לכווץ".

הטורוס למשל (ללא הבפנים) הוא אינו תחום פשוט-קשר. כל תחום קמור הוא תחום פשוט-קשר.

**איך מוצאים פוטנציאלים?**

$$\bar{f}(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2}, 4y + \frac{1}{x} \right)$$

מחוץ ל- $(0, y)$  לכל  $y$ .

התחום מעל ציר ה- $x$  הוא תחום פשוט-קשר (הוא קמור). איך מוצאים פוטנציאל? מנחשים!

$$\Phi(x, y), \quad \nabla \Phi = \bar{f}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi = -\frac{y}{x^2}$$

$$\Phi = \int \frac{-y}{x^2} dx = \frac{y}{x} + H(y)$$

איך מוצאים את  $H(y)$ ? נגזור לפי  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \Phi &= \frac{1}{x} + H(y) = f_2 = 4y + \frac{1}{x} \\ H'(y) &= 4y \\ H(y) &= \int 4y dy = 2y^2 + c \\ \Rightarrow \Phi &= \frac{y}{x} + 2y^2 + c\end{aligned}$$

הקבוע לא קריטי - כי אנחנו רק מחשבים בעזרת הפוטנציאל הפרשים וכך הקבוע יורד. הלמה של פואנקרה מבטיחה לנו שהדרך הזו תמצא לנו את הפוטנציאל - גוזרים משתנה משתנה ומנטגרים.

ועוד דבר יעיל ממת"פ - רוטור<sup>47</sup>:

בהנתן  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , אם הקואורדינטות הן  $(x, y, z)$ , אזי הפעולה של הרוטור  $\nabla \wedge$  על הפונקציה  $f$  היא:

$$\nabla \wedge f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

משפט:  $\bar{f}$  משמר לוקלית אם  $\bar{f} = \text{rot}(\bar{f}) = 0$ . נוכל להשתמש בכך בתרגיל.

#### 4.7.1 משפט גרין

29/1/2012

כל המשפטים הללו (גרין, סטוקס, ...) הם הכללה של המשפט היסודי.

**משפט 4.33** (גרין) תהי  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  קבוצה בעלת שטח כך ש- $\partial D$  מתפרקת למספר סופי של מסילות  $\gamma_i$  גזירות ברציפות, וכן:

$$\bar{f}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

$\gamma_i$  מכוונות חיובית, אז:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \bar{f} d\bar{\gamma} = \int \int_D Q'_x - P'_y dx dy$$

אנחנו מניחים שהשדה משמר. נשים לב למשפט היסודי:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

<sup>47</sup>מה שכתוב כאן השלמתי מחוברת מת"פ 1 של רות לורנס המקסימה - המתרגל הספיק רק לכתוב את הנוסחה על הלוח ואת המשפט.

אז במובן זה זוהי הכללה של המשפט היסודי.

**תוצאה:**

נניח:

$$\begin{aligned}\bar{f}(x, y) &= (0, x) / (-y, 0) / \frac{1}{2}(-y, x) \\ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &\equiv 1\end{aligned}$$

ממשפט גרין:

$$\oint_{\partial D} \bar{f} d\bar{\gamma} = \int \int_D 1 dx dy = \text{area}(D)$$

**תוצאה - חישוב שטח של אסטרואידה**

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = 1$$

נחשב את השטח ממשפט גרין:

$$\text{area}(D) = \int_{\partial D} \bar{f} d\bar{\gamma}$$

כאשר  $\bar{f} = (0, x)$  (יכולנו לבחור כל אחת מהאופציות למעלה). נמצא פרמטריזציה ל- $\partial D$ :

$$\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$$

$$\oint_{\partial D} \bar{f} d\bar{\gamma} = \int_0^{2\pi} \bar{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$\bar{f} \circ \gamma(t) = (0, \cos^3(t)), \quad \gamma'(t) = (*, 2\cos^2(t) \cos(t))$$

$$\oint_{\partial D} \bar{f} d\bar{\gamma} = \int_0^{2\pi} 2\cos^2(t) \cos^4(t) dt = 3 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \cdot \frac{1}{4} \sin^2(2t) dt$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \cdot \sin^2(2t) dt = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) \right) \cdot \sin^2(2t) dt$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt + \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) \cos(2t) 2t dt$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t) \right] dt + \frac{1}{16} [\sin^3(2t)]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3}{8 \cdot 2} \cdot 2\pi - \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt = \frac{3\pi}{8}$$

**הגדרה 4.34**  $\gamma$  מכוונת חיובית ביחס ל- $D$  אם בשטח של  $D$  נמצא תמיד משמאל ל- $\gamma$ .

נביט בשטח הכלוא ע"י "בייגלה" סביב ציר האפס (שני מעגלים). כדי לחשב לפי גרין, צריך שהשטח היה משמאל למסילה - כלומר במסילה על החיצוני צריך לנוע נגד כיוון השעון. במעגל הפנימי צריך לנוע עם כיוון השעון. זו דוגמה לצורך ב"מכוונת חיובית"!  
אזי צריך "לתפור את הקצוות" של שתי המסילות הללו כדי לקבל את המסילה הדרושה.

## 4.7.2 אינטגרל משטחי

כמו אינטגרל מסילתי - מגיע בשני סוגים. אנו נדבר אך ורק על הסוג השני. כעת יש לנו משטח תלת מימדי. נרצה לעשות אינטגרלים על פונקציה במשטח מסויים (כמעט תמיד הפונקציה שלנו תהיה וקטורית).

קשה לנו לעבוד על משטחים, לכן נבחר פרמטריזציה מתאימה  $p$  מ- $(u, v)$  לשלושה מימדים. נרצה לעשות כאן משהו שיהיה דומה לסכום רימן - בסיס כפול גובה. כלומר, נרצה לחשב מהו הגודל של "מקבילונים קטנים" ביריעה שלנו (מקבילונים עקומים - קל לחשוב על זה על ספרה). כאשר  $u, v$  מאוד קטנים, נקבל משהו שדומה מאוד לנגזרת - נחשב את המקבילונים שנוצרים על ידי  $u, v$  מאוד קטנים, ונגיד שזהו קירוב טוב למשטח. השאלה אם כך היא איך לחשב את השטח של המקבילון - אבל את זה אנחנו מכירים: בהנתן מקבילית  $M$  הנוצרת ע"י  $\vec{a}, \vec{b}$ :

$$\text{area}(M) = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

השטח מתקבל ע"י מכפלה וקטורית (פשוט מגיאומטריה), שכן  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$  שכן יש לנו שני וקטורים בת"ל שיוצרים לנו את המקבילון. כאשר אנחנו עושים להם מכפלה וקטורית נקבל וקטור חדש  $\vec{N}$  הנורמל המוגדר להיות:

$$\vec{N} = p'_u \times p'_v$$

אזי, נקבל:

$$\int \int_M \vec{f} d\vec{S} = \int \int_{\text{domain}(P)} \vec{f} \circ p \cdot \vec{N}(u, v) du dv$$

הנוסחה עובדת למשטח רגולרי, יש כאן כמה פרטים טכניים שנתעלם מהם.

## דוגמא

יהי  $S$  החלק של החרוט  $z^2 = x^2 + y^2$  כך ש- $1 \leq z \leq 2$  ו- $y \geq 0$  (נראה כמו "טרפז שסובבו אותו").  
חשב את  $\int \int_S \vec{f} d\vec{S}$  כאשר:

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x + y \\ \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

נרצה להשתמש בנוסחה שראינו - על כן, יש לבחור פרמטריזציה - יהיה לנו נוח לקחת קואורדינטות גליליות (מסתובב רק על ציר  $z$ ):

$$x = r \cos t, y = r \sin t, z = z$$

אם  $z^2 = x^2 + y^2$ , אז  $z = r$ . נקבל:

$$P(r, t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ r \end{pmatrix}$$

כעת צריך להגדיר את התחומים שלנו:

נתון בהגדרה כי  $1 \leq z \leq 2$ , לכן  $1 \leq r \leq 2$ .  $t$  היא זווית הסיבוב סביב ציר  $z$  (נגד כיוון השעון). מכיוון  $y \geq 0$  ו- $0 \leq t \leq \pi$ , כעת יש את כל מה שצריך, נותר רק לחשב את הנורמל:

$$\begin{aligned} p'_r &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p'_t = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{N} = p'_r \times p'_t &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos t & \sin t & 1 \\ -r \sin t & r \cos t & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ -r \cos t \\ r \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \bar{f} \circ p(r, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ r \cos t + r \sin t \\ \frac{1}{r} \end{pmatrix} \\ \bar{f} \circ p \cdot \bar{N}(r, t) &= 0 + [-r^2 \sin^2 t - r^2 \cos^2 t] + 1 \\ \int \int_S \bar{f} \partial \bar{S} &= \int_{r=1}^2 \int_{\theta=0}^{\pi} (1 - r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t \sin^2 t) d\theta dt = -\frac{1}{6}\pi \end{aligned}$$

#### 4.7.3 משפט ג'ורדן

"אחד המשפטים הכי טיפשיים במתמטיקה, ואחד המשפטים הכי קשים במתמטיקה".

**משפט 4.35** יהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  כך ש- $f$  רציפה, וכן  $f(0) = f(1)$ ,  $f(x) \neq f(y)$  לכל  $x, y \neq (0, 1)$ : אז:

$$\mathbb{R}^2 = \text{Int}(f) \cup \text{Out}(f) \cup f([0, 1])$$

יש למשפט הזה כמה הוכחות, אך כולן מאוד קשות ולא נלמדות בתואר ראשון. כמו כן, קיימות הכללות ל- $\mathbb{R}^n$ .

#### 4.7.4 משפט גאוס

**הגדרה 4.36** אם  $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , נסמן את הדיברגנץ להיות:

$$\text{div} \bar{f} = \bar{\nabla} \cdot \bar{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

נשים לב כי  $\text{div} \bar{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

יש למושג הזה כל מיני משמעויות בפיסיקה, אולם "זה לא מעניין אותנו". משפט גאוס אומר:

**משפט 4.37** יהי  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  משטח סגור רגולרי עם נורמל היחידה,  $f$  גזיר ברציפות. אזי:

$$\oint_M \bar{f} d\bar{S} = \int \int \int_{\text{Int}(M)} \text{div} \bar{f} dV$$

משטח סגור הוא משטח שאין לו שפה - לא נשען על כלום, מחלק את המרחב לפי הפנים והחוץ שלו. נבין את המושג הזה בצורה אינטואיטיבית.

אפשר לבחור פרמטריזציה ולחשב את "הבלאגן שעשינו קודם".

אפשרות שניה - רק במקרה של אינטגרל של משטח סגור - להשתמש במשפט: לעשות אינטגרל על הנפח הכלוא בתוך המשטח של הדיברגנץ של הפונקציה.

#### תרגיל

חשבו את  $\oint_S \bar{F} d\bar{S}$  ושל  $\oint_S \bar{G} f d\bar{S}$  כאשר  $S$  היא שפת קובית היחידה  $\partial[0, 1]^3$ , עבור:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} x+y \\ z \\ z^3-y \end{pmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{pmatrix} 2x + \frac{1}{3}x^3 + yz \\ -y - yx^2 - \tan z \\ -z + x^2 \end{pmatrix}$$

המשטח הנתון אינו רגולרי, אך ניתן "העלים" את הקצוות - כלומר, אפשר להתעלם מהחיבורים. נשתמש במשפט גאוס:

$$\begin{aligned} \oint_S \bar{G} d\bar{S} &= \int \int \int_{[0,1]^3} \operatorname{div} \bar{G} dV \\ \operatorname{div} \bar{G} &= (2 + x^2) + (1 - x^2) + (-1) = 0 \\ &\Rightarrow \oint_S \bar{G} d\bar{S} = 0 \\ \oint_S \bar{F} d\bar{S} &= \int \int \int_{[0,1]^3} \operatorname{div} \bar{F} dV \\ \operatorname{div} \bar{F} &= 1 + 0 + 3z^2 \\ &\Rightarrow \oint_S \bar{F} d\bar{S} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2z^2 + 1 dz dy dx = 2 \end{aligned}$$

#### 4.7.5 משפט סטוקס

כמו במשפט ג'ורדן המרחב חולק לשני חלקים, גם פה נחלק את המרחב לשני חלקים.

**משפט 4.38** יהי  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  משטח רגולרי, ויהי  $\bar{f}, \gamma = \partial M$  שדה וקטורי "נחמד". אזי:

$$\int \int_M \bar{\nabla} \times \bar{f} d\bar{S} = \oint_{\gamma} \bar{f} d\bar{\gamma}$$

אחד הדברים הכי יפים מהמשפט הזה:

ניקח מסילה, ננסה "להדביק" עליה משטחים - השפה שלהם הם תמיד  $\gamma$ . אזי לא משנה באיזה משטח נבחר, נקבל ערך אחד - הערך מעלה. אם השדה משמר מקומית, נקבל 0. זהו משטח רגולרי - לכן יש לו נורמל. נרצה שהמסילה תסתובב סביב ציר  $N$  נגד כיוון השעון אם הנורמל מכוון למעלה. צריך לבחור פרמטריזציה שתתאים לזה, או שנקבל תוצאה עם מינוס.

#### דוגמא

חשבו את  $\int_{\partial S} \bar{F} dS$  כאשר  $\bar{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  ו- $S$  ריבוע היחידה במישור  $z = 0$ .  
ממשפט סטוקס:

$$\oint_S \bar{F} dS = \int \int_S \bar{\nabla} \times \bar{F} d\bar{S}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי השדה הוא משמר (שיוויון נגזרות בהצלבה). אזי:

$$\int \int_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\bar{S} = 0$$

**עוד דוגמא**  
תהי  $\bar{F} = \begin{pmatrix} -xy^2 \\ x^2y \\ z \end{pmatrix}$ . חשב את:

$$\int \int_S \bar{\nabla} \times \bar{F} d\bar{S}$$

כאשר  $\bar{S}$  היא הכיפה  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ,  $z \geq 4$ .  
נשתמש בסטוקס - מספיק לחשב את:

$$\oint_{\gamma} \bar{F} d\gamma$$

נבחר פרמטריזציה לשפה:

$$z = 4, x^2 + y^2 = 9, \gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4)$$

$$\Rightarrow \bar{f} \circ \gamma = \begin{pmatrix} -2 + \cos t \sin^2 t \\ 2 + \cos^2 t \sin t \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$$

$$\bar{f} \circ \gamma \cdot \gamma'(t) = 81\cos t \sin^3 t + 81\cos^3 t \sin t + 0$$

$$\int_0^{2\pi} 81\cos t \sin^3 t + 81\cos^3 t \cdot \sin t dt$$

$$= \left[ \frac{81}{4} \sin^4 t - \frac{81}{4} \cos^4 t \right]_0^{2\pi} = 0$$

אם היינו מחשבים את הרוטור, היינו מקבלים:

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4xy \end{pmatrix}$$

זוהי סימטריה, ולכן (כך הפיסיקאים אומרים) זה שווה ל-0.

#### 4.8 תרגול חזרה!

שאלה קלאסית (מפוטנס):

תהי  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ברציפות (אנליטית) כך ש:

1.  $f$  חסומה.

2. קיימים  $A, B \in \mathbb{R}$  (לא שניהם אפס) כך ש:

$$A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y)$$

הוכח כי  $f$  קבועה.

אם הגרדיאנט היתה אפס, היינו "מלבישים" את  $f$  על מסילה, וגוזרים במשתנה אחד, והכל היה נחמד:

$$f(\gamma(t)) - f(t) = \dots$$

(טריק שכבר ראינו בעבר).

אבל, לצערנו, זה לא כך. אזי, נגדיר מסילה:

$$\gamma(t) = (At, Bt)$$

$$\gamma'(t) = (A, B)$$

כמובן שהמסילה הזו אינה קבועה, מהנחתנו.

נסתכל על  $g(t) = f(\gamma(t)) = f(At, Bt)$ . זוהי פונקציה של משתנה אחד - נגזור אותה לפי כלל השרשרת:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(At, Bt) \cdot \gamma'(t) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(At, Bt), \frac{\partial f}{\partial y}(At, Bt) \right) \cdot (A, B) \\ &= A \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(At, Bt) + B \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(At, Bt) = f(At, Bt) = g(t) \\ &\Rightarrow g'(t) = g(t) \end{aligned}$$

זוהי משוואה די אלמנטרית. ניתן להוכיח כי:

$$g(t) = C \cdot e^t$$

מכיוון ולא למדנו משוואות דיפרנציאליות, לא נוכל לעשות זאת... במקום זאת נשתמש בכך שהפונקציה אנליטית - נפתח כטור חזקות, נגזור איבר איבר, וכו', ובסוף נקבל את זה. עכשיו, נשתמש בתנאי הראשון -  $f$  חסומה. אם  $C$  לא אפס, אזי:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |g(t)| = \infty$$

ועל כן  $f$  אינה חסומה, בסתירה. לכן  $C = 0$ , כלומר  $f$  קבועה על הקו הישר הנוצר ע"י המסילה.

טוב, צריך לחשוב על זה - "תתעלמו מזה".

שאלה ממבחן של שנקובסקי:  
יש הרבה טריקים שחוזרים על עצמם במבחנים של שנקובסקי, בעניין נקודות שבת והעתקות כיווץ. ניתן דוגמא לשאלה כזו:  
נניח  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  גזירה ברציפות,  $f(0) = 0$ , וגם  $\|I - D_f(x)\| \leq \varepsilon < 1$  לכל  $x \in B_1(0)$ .  
הוכיחו כי:

$$\|f(x) - x\| \leq \varepsilon$$

לכל  $x \in B_1(0)$ .  
הרעיון הוא כזה - אם ההעתקה היתה הזהות, בוודאי שהתנאים יתקיימו. "שינינו" את העתקת הזהות במידה מאוד קטנה - בכל היותר ב- $\varepsilon$ .  
נוכיח:  
נגדיר  $F(x) = f(x) - x$ . נרצה להראות שהיא חסומה על כדור היחידה. נחשב את הדיפרנציאל שלה:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - x = f(x) - Id(x) \\ \Rightarrow D_F(x) &= D_f(x) - I \end{aligned}$$

ולכן  $\|D_F(x)\| \leq \varepsilon$  לפי הנתון. נקבל:

$$\begin{aligned} F(0) &= f(0) - 0 = 0 \\ \Rightarrow F(x) - F(0) &= F(x) \end{aligned}$$

נבחר  $\gamma$  בין 0 ל- $L$ . אזי:

$$F(\gamma(L)) - F(\gamma(0)) = D_F(\gamma(c)) \cdot \gamma'(c)$$

או, אפשר להשתמש במשפט שלמדנו:

$$\|F(x) - F(0)\| \leq \|D_F(c)\| \|x - 0\| \leq D_F(c) \cdot 1 \leq \varepsilon$$

כנדרש.

סעיף ב' של השאלה:  
בנתון של הסעיף הקודם, יש להוכיח כי:

$$B_{1-\varepsilon}(0) \subseteq f(B_1(0)) \subseteq B_{1+\varepsilon}(0)$$

הכלה אחת כאן היא קלה, השנייה קשה. נתחיל בקלה - הימנית.  
מסעיף א':

$$\begin{aligned} \|f(x) - x\| &\leq \varepsilon \quad \forall x \in B_1(0) \\ \Rightarrow \|f(x)\| &\leq \|x\| + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon \end{aligned}$$

לחלק השני, היתה הדרכה של שנקובסקי (כמו משפט הפוקנציה ההפוכה) - נקבע  $y \in B_{1-\varepsilon}(0)$ , ונביט ב:

$$F(x) = x - f(x) + y$$

מדוע כדאי? נגיד שנוכל למצוא נקודת שבת. אזי נקבל:

$$x = F(x) = x - f(x) + y \Rightarrow f(x) = y$$

ואז נסיים. נראה שההעסקה היא מכווצת (ואז נדע שקיימת נקודת שבת ממשפט שראינו, ונסיים!). זו בעצם הדרך היחידה שאנו מכירים.  
הטריק הוא הטריק הבא:

$$D_F = I - D_f$$

מהנתון:

$$\|D_F\| \leq \varepsilon < 1$$

אם יש העסקה שהדפרנציאל שלה קטן מאחד, אזי היא מכווצת - זה מופיע גם במבחן לדוגמא, וככל הנראה גם ראינו את זה:

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(yz)\| &\leq \|D_F(c)\| \|x - z\| \\ \Rightarrow d(F(x), F(z)) &\leq \varepsilon \cdot d(x, z) \end{aligned}$$

ועל כן ההעסקה מכווצת.

במשפט נקודת השבת נשים לב כי לא היתה לנו תלות בכלל בנקודת ההתחלה. כאן נבחר נקודה ספציפית, נראה כי הקבוצה הזו מוכלת בכדור, ואז קיום נקודת השבת תנבע מההוכחה של המשפט, לא מהמשפט עצמו (יש לנו כאן בעיה בהגדרה של  $F$  ולכן אנחנו עוקפים אותה באלגנטיות, ובעצם לא מראים כי היא מכווצת, אלא בהוכחה).  
נגדיר:

$$x_0 = y, x_1 = F(x_0), x_2 = F(x_1), \dots$$

$x_1 \in B_1(0)$  עבור  $y = 0$  נקבל:

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(0)\| &\leq \varepsilon \|x - 0\| \\ \Rightarrow \|F(x)\| &\leq \varepsilon \|x\| \\ \Rightarrow \|x_1\| = \|F(y)\| &\leq \varepsilon \cdot \|y\| < 1 \\ \Rightarrow \|x_2\| = \|F(x_1)\| &\leq \varepsilon \cdot \|x_1\| \leq \varepsilon < 1 \end{aligned}$$

$x_n$  היא קושי (ההוכחה של משפט נקודת השבת), ויש לה גבול ב- $\overline{B_1(0)}$ . צריך להראות שהגבול הוא בפנים (לא בסגור).

יהי  $x_\infty$  הגבול. נראה שהוא לא יכול להיות בשפה (ולכן הוא בפנים). מכך ש- $x_n$  מתכנסת ל- $x_\infty$ , עבור  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  יש  $n$  כך ש:  $\|x_\infty - x_n\| < \delta$ . אזי:

$$\|x_\infty\| \leq \delta + \|x_n\| = \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon$$

יש כאן בעיה בניסוח של השאלה, אבל היא "נכונה". הדבר החשוב שצריך להבין מהשאלה - כשיש אופרטור שהדיפרנציאל שלו מאוד קרוב לזהות, אזי:

$$F(x) = x - f(x) + y$$

תהיה מכווצת, לכן נקבל נקודת שבת. "חשוב לזכור את זה, הוא אוהב לעשות את זה הרבה".

עוד דבר מעניין -

נגיד שיש לנו אופרטור לינארי מנורמה קטנה מאוד. כלומר, יהי  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A\| < \varepsilon < 1$ .

אז,  $I - A$  הפיך (הוכחנו זאת מתישהו). יש שתי אפשרויות להוכחה:

1.  $GL(n)$  היא קבוצה פתוחה (הפונקציה ההפוכה של פונקציה הרציפה  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  נותנת לנו את זה, כי  $GL_n = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ). יש כאן אפסילון ודברים קצת יותר מסובכים, אבל זה הרעיון. ראינו חלק מזה בכיתה.

2. דרך מכוערת ולא אלגנטית, שנותנת לנו את ההפוכה - ע"י טור ניומן, שמוגדר להיות:

$$B = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$$

למה הדבר הזה מתכנס בכלל? צריך להוכיח את זה. זו כמו סדרה הנדסית, זה אמור לצאת משהו בסגנון  $\frac{I}{I-A}$ . נראה כי  $B$  בכלל קיימת (כלומר הטור מתכנס). אם נראה ש- $S_n = \sum_{i=0}^N A^i$  מתכנס, נסיים (כי ראינו שמרחב וקטורי סופי הוא שלם). אז:

$$\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{i=N+1}^M A^i \right\| \leq \sum_{i=N+1}^M \|A^i\| \leq \sum_{i=N+1}^M \varepsilon^i \leq \frac{\varepsilon^N}{1-\varepsilon} \rightarrow 0$$

נותר להראות ש- $B$  הוא באמת ההופכי שחיפשנו. נחשב:

$$(I - A) \cdot S_N = I \cdot S_N - A \cdot S_N = \sum_{i=0}^N A^i - \sum_{i=1}^{N+1} A^i = I - A^{N+1}$$

$$A^N \rightarrow 0$$

$$\|A^N - 0\| = \|A^N\| \leq \|A\|^N \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow (I - A) \cdot B = I$$

$$B_\varepsilon(I) = \|I - A\| < \varepsilon$$

נסמן  $A = I - C$  (נבחר  $C$  מתאים), נציב ונסיים.

נדבר קצת על משטחים:

יהי  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  גזירה ברציפות, ונניח  $m \leq n$ . נגדיר:

$$U_k = \{x | \text{rank}(D_F(x)) = k\}$$

אלו קבוצות, יכול להיות שהן ריקות. אי אפשר כאן להגיד אם הקבוצות סגורות או פתוחות באופן כללי. מה כן אפשר להגיד?

$U_0$  סגורה, כי:

$$U_0 = \{x | D_F(x) = 0\}, \quad x_n \rightarrow y, \quad \lim D_F(x_n) = D_F(\lim x_n) = D_F(y)$$

כמו כן,  $U_0$  לא בהכרח פתוחה:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow U_0 = \{0\}$$

נדון ב- $U_1$ . נניח  $m, n > 2$ . אזי  $U_1$  לא בהכרח סגורה. אותה דוגמה מעלה תקפה  $f(x) = x^2$ .

היא גם לא בהכרח פתוחה: נגדיר:

$$D_F = \begin{pmatrix} x & y^2 \\ x & y \end{pmatrix}$$

בנקודה  $x = 1, y = 0$  היא מ- $rank(1)$  (כאן היא סגורה מסתבר). בכל סביבה של הנקודות הללו יש את הנקודות מהצורה:  $(1, \varepsilon)$ . מתקיים  $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon \end{vmatrix} \neq 0$  כלומר זה מדרגה 2.

מה כן קורה, ואיך זה קשור למשטחים?

$U_m$  פתוחה - נובע ממשפט ההעתקה הפתוחה. נראה זאת:  
תהי  $x \in U_m$ . אזי:

$$D_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

מכיוון והדרגה היא  $m$ , ניתן לבחור  $m$  עמודות בת"ל. נמחוק שאר העמודות, ונקבל מטריצה מדרגה מלאה (העמודות בת"ל). נסמן את המטריצה החדשה ב- $M(x)$ . נסתכל על זה כפונקציה של  $m$  משתנים. נשים לב כי  $\det M(x) \neq 0$  עבור ה- $x$  הנתון. מרציפות הדטרמיננטה, יש סביב  $x$  סביבה פתוחה כך ש:  $\det M(y) \neq 0$  לכל  $y$  בסביבה, ולכן בפרט  $rank D_F(y) \geq m$ .

מצד שני,  $rank D_F \leq m$ , ולכן לכל  $y$  בסביבה,  $rank D_F(y) = m$ , ולכן הקבוצה היא פתוחה.

מכאן, עוברים למשטחים:

הבניה הבסיסית של משטח היא הבניה הבאה:

תהי  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  גזירה ברציפות מדרגה מלאה. נביט ב:

$$\{x | F(\bar{x}) = \bar{a}\}$$

נטען שהקבוצה הזו מהווה יריעה  $k$  מימדית בתוך  $\mathbb{R}^n$ . זה נובע ישירות מתוך משפט ההעתקה הסתומה - נראה זאת:

יהי  $F(\bar{x}) = \bar{a}$ . נתבונן ב- $D_F(\bar{x})$ . זוהי מטריצה עם  $n - k$  שורות ו- $n$  עמודות:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

הדרגה מלאה. כל עמודה מייצגת לנו משתנה. לכן אפשר למחוק  $k$  עמודות ולקבל מטריצה  $(n-k) \times (n-k)$  הפיכה.

נניח בה"כ כי מחקנו את  $x_{n-k+1}, \dots, x_n$ . נסמן  $x_{n-k+1} = y_1, \dots, x_n = y_k$

$$F(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k)$$

אזי, נקבל המטריצה החדשה היא:

$$\frac{\partial (f_1, \dots, f_{n-1})}{\partial (x_1, \dots, x_{n-k})}$$

(כמובן שגם היא מדרגה מלאה). ממשפט ההעתקה הסותמה, קיימות  $g_1, \dots, g_{n-k}$  כך ש:

$$x_i = g_i(y_1, \dots, y_k)$$

אפשר להגדיר פרמטריזציה בסביבות קטנות פתוחות וכו':

$$p(y_1, \dots, y_k) = \begin{pmatrix} g_1(y_1, \dots, y_k) \\ \vdots \\ g_{n-k}(y_1, \dots, y_k) \end{pmatrix}$$

זוהי העתקה רציפה, גזירה, והדרגה שלה הוא לפחות  $k$ . ראינו כי גרף של פונקציה כזו הוא משטח. במקרה שלנו:

$$F(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k) = \bar{a}$$

וכל הפתרונות של המשוואה הזו בסביבה מספיק קטנה מגדירים לנו פרמטריזציה לפי משפט הפונקציה הסתומה. לכן קו גובה מהווה משטח.

לפעמים הפרמטריזציות שלנו למשטחים לא היו גרפים של פונקציות. אסוף העלה לנו למודל קובץ בשם קשר בין פרמטריזציה לפרמטריזציה רגולרית. זה שם. הסיפור הוא: נגיד שיש לנו פרמטריזציה רגולרית ב- $\mathbb{R}^3$ :

$$p(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

אזי אפשר למצוא שתי שורות שהן בת"ל בדיפרנציאלים שלהם, ולהגדיר:

$$q(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

ממשפט ההעתקה ההפוכה, בסביבות קטנות מספיק:

$$\begin{aligned} u &= f(x, y) \quad v = g(x, y) \\ h(x, y) &= z(u, v) = z(f(x, y), g(x, y)) \end{aligned}$$

אזי הגרף שנקבל הוא:

$$\Gamma(h) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix}$$

כלומר אפשר להצטמצם לגרף של פונקציה. אם נותנים שאלה תיאורטית על משטחים - מהדיון מעלה אפשר להניח שלמשטח קיימת פונקציה שהגרף של הפונקציה הזה בסביבה קטנה מספיק.

לכל נקודה יש דבר נחמד -  $T_p M$  - מרחב משיק. זה המישור המשיק לפונקציה. שנקובסקי מבדיל בין המישור המשיק לדבר הזה.  $T_p M$  עבור  $p \in M$  הוא מרחב המשיקים בנקודה  $p$  למסילות ב- $M$  העוברות ב- $p$ . ספציפית, מישור ב- $\mathbb{R}^3$  הוא לא תת מרחב לינארי - הוא תת מרחב אפיני (לא בטוח שעובר דרך האפס). מצד שני, המרחב הזה מורכב מוקטורים שיפרסו לנו את תת המרחב הלינארי (ללא ההזזה).

דוגמא חד מימדית - מסילה (משטח חד מימדי). תהי נקודה על המסילה. נחשב נגזרת שלה (לא משנה לנו איך היא משוכנת במרחב). "נתפוס" את המשיק - יכולים להיות לו שני כיוונים. אנחנו מקבלים מרחב וקטורי (בהגדרה של שנקובסקי). נניח שיש לנו פרמטריזציה. אם אנחנו לוקחים מסילה  $\gamma$ , ההרכבה של המסילה על הפרמטריזציה אז היא גם מסילה, גם גזירה, וכו', וגם בתוך המשטח. אם ניקח את הנגזרת של המסילה, ונחשב את הנגזרת של  $P \circ \gamma$ , נקבל:

$$(pP \circ \gamma)' = D_P(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|_{t=0} = D_P(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0)$$

קיבלנו כי מרחב המשיקים למסילות הוא:

$$T_p M = \text{Im}(D_p P(0, 0))$$

ואכן זהו מרחב לינארי. למה זה באמת כל  $T_p M$  (כלומר למה זה באמת שיוויון ולא הכלה חד כיוונית)?  $P$  הוא הפיך, ולכן אפשר להסתכל על התמונה ההפוכה שלה, ונקבל כי לכל איבר בתמונה יש מקור.

כאן יש תלות בפרמטריזציה. במבחן לדוגמא הופיעה השאלה הבאה: נגיד שיש לנו משטח המוגדר כקו גובה  $\bar{a}$ ,  $F(\bar{x}) = \bar{a}$ , גזיר ברציפות וכו'. יש להראות כי:

$$T_p(M) = \ker D_F(p)$$

נשים לב כי  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , וכן  $\text{rank} D_F = n - k$ . בכיוון אחד מדובר בדבר מאוד פשוט - תהי  $\gamma$  מסילה על המשטח. בפרט  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ . נסתכל על:

$$F \circ \gamma(t) = F(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

מצד שני:

$$F \circ \gamma(t) = \bar{a}$$

אזי, אפשר לחשוב על זה כעל:

$$\begin{aligned} g(t) &= F \circ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(t) = \bar{a} \\ \Rightarrow g'(t) &= (\bar{a})' = 0 \\ \Rightarrow 0 &= g'(0) = (F \circ \gamma)'(0) = D_F(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) \end{aligned}$$

לכן גם  $\gamma'(t) \in \ker D_F$  (עשינו את זה גם בכיתה, בעצם את כל השאלה הזו). לכל קיבלנו הכלה מכיוון ראשון.

מצד שני, צריך להראות כי  $\dim(T_p M)$  הוא לפחות  $k$ , ואז נקבל שיוויון.

במקרה שמשטח דו מימדי בתוך מרחב תלת מימדי הנתון בצורה של קו גובה, אפשר לגזור וכך למצוא את המישור המשיק (שהוא דו מימדי) ע"י פיתוח המשוואות (מציאת וקטור נורמלי) - להציב גמות, לגזור, לכפול בוקטור  $\gamma'(t)$ .