

## גרפים מרחיבים - 80306

15 בינואר 2013

מרצה: אלכס לובוצקי

איני לוקחת אחריות על מה שכתוב כאן, so tread lightly  
אין המרצה או המתרגל קשורים לסיכום זה בשום דרך.  
הערות יתקבלו בברכה - [noga.rotman@gmail.com](mailto:noga.rotman@gmail.com). אהבתם? יש עוד!  
<http://bit.ly/integrali>

”

## תוכן עניינים

|    |                                    |       |  |
|----|------------------------------------|-------|--|
| 3  | הקדמה - סקירה ועבודות חשובות בתחום | 0.1   |  |
| 7  | בסיס                               | 1     |  |
| 7  | הגדרות בסיסיות של גרפים            | 1.1   |  |
| 7  | ערכים עצמיים של גרפים רגולריים     | 1.2   |  |
| 7  | אופרטור הלפלסיאן                   | 1.3   |  |
| 10 | הקבוע האיזופרמטרי                  | 1.4   |  |
| 13 | גרפים מכוונים                      | 2     |  |
| 13 | מכפלת זיג-זג                       | 3     |  |
| 13 | הגדרה                              | 3.1   |  |
| 15 | מטריצת השכנויות של גרף זיג-זג      | 3.2   |  |
| 17 | ע"ע של מטריצת זיג-זג               | 3.3   |  |
| 18 | הוכחת משפט ריילי-ריץ'              | 3.4   |  |
| 21 | בניית משפחה של אקספנדריס           | 3.5   |  |
| 21 | הגדרת המשפחה והוכחת התכונה         | 3.5.1 |  |
| 22 | הגדרת $W$                          | 3.5.2 |  |
| 23 | מהלך מקרי על גרף                   | 3.5.3 |  |
| 25 | עוד על משפט אלון בופאנה            | 3.5.4 |  |
| 25 | בניה של גרף מרחיב שכן יחיד         | 3.6   |  |
| 31 | ולסיום - עוד קצת סיפורים!          | 3.7   |  |

## 0.1 הקדמה - סקירה ועבודות חשובות בתחום

23/10/2012

הספר שנשתמש בו הוא:

Mike Krels & Anthony Shaheen / Expanders Families & Cayley Graphs

**הגדרה 0.1** יהי  $X = (V, E)$  גרף סופי, כאשר  $V$  - קבוצת הקודקודים,  $E \subseteq V \times V$  קבוצת הקשתות  $((w, v) \in E \Leftrightarrow (v, w) \in E)$ .  
 $X$  יקרא  $\varepsilon$ -אקספנדר (גרף  $\varepsilon$ -מרחיב), כאשר  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbb{R}$ , אם לכל תת קבוצה  $W \subseteq V$  כך ש- $|W| \leq \frac{|V|}{2}$ , מתקיים:

$$|\partial W| \geq \varepsilon \cdot |W|$$

כאשר:

$$\partial W = \{u \in V | \text{dist}(u, W) = 1\}$$

כלומר קבוצת שכני  $W$  שאינם ב- $W$ .

**הערה 0.2** לא נדון במקרה של גרף עם משקלות או קשתות כפולות.

**הערה 0.3** כל גרף סופי קשיר הוא אקספנדר.

דוגמא ראשונה לגרף שאינו אקספנדר - נביט בגרף שהוא מעגל של  $n$  קודקודים. אז אם "נחתוך" את המעגל לקבלת  $W$ , נקבל כי השפה היא בגודל 2, ואז:

$$|\partial W| = 2 \Rightarrow |W| \sim \frac{n}{2}$$

דוגמא שנייה לגרף שהוא כן אקספנדר - נביט  $K_n$ , גרף שלם על  $n$  קודקודים.  
המקרה המעניין:  $\varepsilon > 0$  קבוע, ו- $\deg(v) \leq k$  מספר הקודקודים המקושרים ל- $v$  הוא קבוע, ו- $|V| \leftarrow \infty$ .  
מיד ניתן לראות כי אם הגרף  $\varepsilon$ -אקספנדר, אזי הוא קשיר, ויתרה מזו - הוא "מאוד מאוד קשיר".

תחום זה הגיע למעשה ממדעי המחשב, כשהגרף מתאר רשת תקשורת (למרות שתחומים רבים במדעי המחשב היום עוסקים באקספנדריים, מכאן העיסוק התחיל): יישום של גרף מלא הוא לא ריאלי בארכיטקטורה של רשת מחשבים - יותר מידי קשתות. הרצון הוא להקטין את מספר הקשרים, ועם זאת לשמור על הקשירות הגבוהה, המתקבלת כאמור במקרה של  $\varepsilon$ -אקספנדר.

דרך אחרת לחשוב על אקספנדר: גרף קשיר, אך עם מעבר צר:  
\*ציור\*

זה השיקול המוביל לגרפי קיילי, שהוא נושא מרכזי בספר, למרות שיכול להיות שנדלג על הנושא הזה - נראה בהמשך.

**הגדרה 0.4** תהא  $G$  חבורה סופית, ותהי  $S \subseteq G$  תת קבוצה, ונניח  $S = S^{-1}$  (דהיינו  $s^{-1} \in S \Leftrightarrow s \in S$ ). נסמן ב:  $\text{Cay}(G : S)$  את הגרף שקודקודיו הם איברי  $G$ , ו- $g, h \in G$  מקושרים בקשת אם  $s \in S$  כך ש- $gs = h$ .

הדרך לחשוב על זה: מתחילים מאיבר היחידה  $e$ , שכניו הם איברי  $S$ , שכני קודקוד מסויים הם  $s_1 s_2, s_1 s_3, s_1 s_2^{-1}$  וכו'.

**תרגיל:**  $Cay(G, S) \Leftrightarrow G = \langle S \rangle$ , כלומר  $S$  יוצרת את  $G$ .

אנו נשתמש בשיטות של אלגברה כדי לקבל מסקנות קומבינטוריות.

אם נביט בגרפי קיילי, נראה כי הם מאוד סימטריים: אם מכפילים משמאל באיבר  $\gamma$  קבוע, נקבל  $\gamma gs = \gamma h$ , כלומר "מה שרואים במקום אחד, נראה אותו דבר במקום אחר", הסביבה הקרובה נראית אותו דבר.

אזהרה: המעגל שדיברנו עליו קודם הוא למעשה  $Cay(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; \{\pm 1\})$ , והוא כאמור אינו גרף קיילי. לעומת זאת, אם  $G$  חבורה מסדר  $n$ ,  $S = G \setminus \{e\}$ , אז  $Cay(G, S)$  הוא כן אקספנדר.

נשים לב כי המושג אקספנדר נהיה מעניין לא במבט על גרף יחיד, אלא על משפחה של גרפים.

נביט בגרף  $k$ -רגולרי על  $n$  קודקודים, ונבחר  $k = 6$ . נבחר שלוש תמורות מקריות  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in Sym(n)$ . נחבר כל  $i$  ל:

$$\sigma_1(i), \sigma_2(i), \sigma_3(i)$$

ונקבל גרף חדש (יתכן ונקבל מעגל, אבל לא נורא). הוכיחו כי קיים  $\varepsilon$  כך שכל הגרפים הנבנים כך הם  $\varepsilon$ -אקספנדרים.

עד עבודתם של גרישה מרגוליס ודוד קשדן, לא היתה בניה מפורשת של אקספנדרים. יחדיו הם הגיעו לנוסחא המפורשת הבאה:

$$V = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2, \text{ *drawing*}$$

עם זאת נשים לב כי ה- $\varepsilon$  בבניה זו לא היה ידוע עד לעבודה של מתמטיקאים נוספים (בזמנו מאוניברסיטת תל אביב).

בהמשך עבד גם נגה אלון בנושא וקשר בין אקספנדרים לערכים עצמיים: נניח  $X$  גרף  $k$ -רגולרי על  $n$  קודקודים, ונסמן את מטריצת השכנות של  $X$  ב- $A_X = A$ . כמו כן, נסמן  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , וכן:

$$A_{ij} = \# \text{ edges between } i \text{ and } j$$

נשים לב כי המטריצה ניתנת ללכסון (שכן המטריצה סימטרית), וכן כל ערכיה העצמיים הם ממשיים:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1. \text{ } k \text{ הוא ערך עצמי:}$$

כדאי לחשוב על  $A$  כעל אופרטור לינארי:

$$A : L^2(X) \rightarrow l^2(X)$$

הפונקציה מעלה למשל היא הפונקציה הקבועה.

נחשוב על וקטור  $\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  כפונקציה  $f$  על קודקודי הגרף  $\{1, \dots, n\}$ ,  $f(i) = y_i$ . אזי, כיצד היא פועלת?

$$A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = i(\sum_{j \sim i} y_j)$$

כאשר נקבל סכימה על כל השכנים של  $i$  במטריצה מימין! בכתוב פונקציונלי נקבל:

$$Af(v) = \sum_{w \sim v} f(w)$$

2. כל ע"ע  $\lambda$  של  $A$  מקיים:

$$|\lambda| \leq k$$

**הוכחה:** נניח  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  ו"ע עם ע"ע  $\lambda$  (ממשי), וכן כי  $y_{i_0}$  הכי גדול בערך מוחלט ב- $y$  (בה"כ  $y_i > 0$ ). אזי:

$$Ay = i_0 \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda y_{i_0} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

■ מכיוון והערך שנכנס הוא  $k \cdot y_{i_0} \geq \lambda$ , נקבל כי  $\lambda \leq k$ .

3. הע"ע של  $A$  הם:

$$k = \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq -k$$

(א)  $X$  קשיר  $\Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_0 = k$ .

**הוכחה:** ניקח וקטור שהוא 1 על מרכיב קשירות אחד, ו-0 על השאר. קיבלנו שתי פונקציות בלתי תלויות. בעצם נקבל כי מספר רכיבי הקשירות = הריבוי של  $k$  כע"ע. ■

(ב)  $-k$  הוא ע"ע  $\Leftrightarrow$  הגרף  $X$  הוא דו צדדי. להוכחה ניתן לקחת וקטור שהוא 1 על רכיב קשירות אחד, ועל השני -1, ההוכחה הפורמלית נשארת כרגע כתרגיל (אולי נראה בהמשך).

משפט שנראה יותר עליו בהמשך:

**משפט 0.5** תהי  $\{X_i\}$  משפחה של גרפים  $k$ -רגולרים,  $|X_i| \rightarrow \infty$ . אזי הם  $\varepsilon$ -אקספנדרים לאיזשהו  $\varepsilon > 0$ , אמ"מ קיים  $\delta > 0$  כך ש:

$$\lambda_1(X_i) \leq k - \delta$$

לכל  $i$ , כלומר הע"ע השני חסום לכל המשפחה ע"י ערך קבוע ללא תלות במשפחה (עם תלות ב- $k$ ).

ניתן לחשוב על המשפט הזה באופן הבא: ראינו קשירות אמ"מ הע"ע השני שונה מ- $k$ . אזי המשפט מראה שהגרף "מאוד קשיר" אם הע"ע השני "ממש שונה" מ- $k$ .

אחד השימושים החשובים ביותר של אקספנדרים - מהלך מקרי רץ עליהם "הכי מהר שאפשר", עבור ע"ע כמה שיותר קטנים: כך בריצה קצרה ניתן להגיע לשאיפה להתפלגות היוניפורמית, כלומר להתנהגות דומה למציאה של מספר רנדומי.

עכשיו אנחנו מבינים שהאקספנדרים הכי טובים יתקבלו כאשר הע"ע יהיו הכי קטנים שאפשר. יש מגבלה לכמה שאפשר להקטין אותם:

**משפט 0.6** (*Alon - Boppana*) תהי  $\{X_i\}$  משפחה של גרפים  $k$ -רגולרים,  $|X_i| \rightarrow \infty$ . אזי:

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \lambda_1(X_i) \geq 2\sqrt{k-1}$$

אנחנו נבין בהמשך מהיכן המספר הזה מגיע (ונראה כי הוא הדוק).

**הגדרה 0.7** גרף  $k$ -רגולרי נקרא גרף רמנוג'אן אם כל ע"ע  $\lambda$  מקיים  $|\lambda| = k$  או  $|\lambda| \leq \frac{2\sqrt{k-1}}{k}$ .

**משפט 0.8** (*LPS*) של המרצה עם שני שותפים) בניה מפורשת של גרפי רמנוג'אן.

למה עוד נגיע בסמינר? הרבה שנים השתמשו בשיטות מאוד עמוקות על מנת לבנות אקספנדרים. לפני כמה שנים מצאו שיטה יותר פשוטה למצוא אקספנדרים - "שיטת הזיג-זג": ייתכן ונראה אותה בהמשך.

יהיו שיעורי בית כל שבוע: כל סטודנט יתן את התרגיל על ההרצאה שלו. הציון הסופי ינתן לפי איכות ההרצאה, התרגילים שהגיש והבדיקה.

# 1 בסיס

30/10/2012

## 1.1 הגדרות בסיסיות של גרפים

## 1.2 ערכים עצמיים של גרפים רגולריים

## 1.3 אופרטור הלפלסיאן

6/11/2012

**הגדרה 1.1** יהי  $X = (V, E)$ . לכל קשת  $\{u, v\} \in E$  נגדיר אוריינטציה באופן הבא: נסמן את אחד הקודקודים ב- $e^-$  (ממנו תצא הקשת), ואת השני ב- $e^+$  (אליו נכנסת הקשת).

**הגדרה 1.2** נגדיר את האופרטורים הבאים:

1.  $d : L^2(V) \rightarrow L^2(E)$  תוגדר להיות:

$$(df)(e) = f(e^+) - f(e^-)$$

2.  $d^* : L^2(E) \rightarrow L^2(V)$  תוגדר להיות:

$$(d^*f)(v) = \sum_{e \in E, v=e^+} f(e) - \sum_{e \in E, v=e^-} f(e)$$

**הגדרה 1.3** אופרטור הלפלסיאן יוגדר להיות:

$$\Delta : L^2(V) \rightarrow L^2(V) \\ \Delta = d^*d$$

אם נביט בהגדרות, נשים לב כי שתי הפונקציות הראשונות שהגדרנו תלויות באוריינטציה, אולם הלפלסיאן לא - נוכיח זאת:

**משפט 1.4** יהי  $X = (V, E)$  גרף  $k$ -רגולרי. ניתן אוריינטציה ל- $X$ . אזי:

$$\Delta = kI - A$$

כאשר  $A$  היא מטריצת השכנויות של הגרף  $A$ .

**הערה 1.5** מכאן שאין תלות באוריינטציה, שכן אין בביטוי שקיבלנו תלות באוריינטציה.

**הוכחה:** תהא  $f \in L^2(V)$ , ויהי  $v \in V$ . אזי:

$$\begin{aligned} (\Delta f)(v) &= (d^*d)(v) = \sum_{e \in E, v=e^+} (df)(e) - \sum_{e \in E, v=e^-} (df)(e) \\ &= \sum_{e \in E, v=e^+} (f(e^+) - f(e^-)) - \sum_{e \in E, v=e^-} (f(e^+) - f(e^-)) \end{aligned}$$

נסמן:

$$E^+ = \{e \in E \mid v = e^+\}, \quad E^- = \{e \in E \mid v = e^-\}$$

נציב בהביטוי שפיתחנו ונקבל:

$$= \sum_{e \in E^+} f(e^+) - \sum_{e \in E^+} f(e^-) - \sum_{e \in E^-} f(e^+) + \sum_{e \in E^-} f(e^-)$$

נשים לב כי הביטוי הראשון והביטוי האחרון הם  $f(v)$ , ומספר ההופעות הכולל שווה למספר הצלעות בהן  $v$  קודקוד. זהו גרף  $k$ -רגולרי, ולכן:

$$\sum_{e \in E^+} f(e^+) + \sum_{e \in E^-} f(e^-) = kf(v)$$

מצד שני, שני הביטויים האמצעיים סוכמים את כל השכנים של  $v$ , כלומר:

$$\sum_{e \in E^+} f(e^-) + \sum_{e \in E^-} f(e^+) = Af(v)$$

ובסה"כ כל הביטוי שווה ל:

$$= kf(v) - Af(v) = (kI - A)f$$

■

**למה 1.6** יהי  $X = (V, E)$  גרף  $k$ -רגולרי. אזי:

1. הע"ע של  $\Delta$  הם:

$$0 = k - \lambda_0(X) \leq k - \lambda_1(X) \leq \dots \leq k - \lambda_{n-1}(X)$$

2. בהנתן  $f \in L^2(V)$ ,  $g \in L^2(E)$  מתקיים:

$$\langle df, g \rangle = \langle f, d^*g \rangle$$

3.

$$\forall g \in L^2(V) \quad \langle \Delta g, g \rangle = \sum_{e \in E} |g(e^+) - g(e^-)|^2$$

■

**הוכחה:** בתרגיל הבית.



**למה 1.7** תהי  $A$  מטריצה סימטרית עם ע"ע:

$$0 \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_0$$

ויהיו  $v_0, \dots, v_{n-1}$  וקטורים עצמיים המתאימים לע"ע בעלי אותו המספור. נשים לב כי הם מהווים בסיס אורתונורמלי, כפי שלמדנו מלינארית. אזי:

$$\lambda_1 = \max_{v \in v_0^\perp} \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|^2}$$

**הוכחה:** נציין כי מכיוון  $A$  סימטרית, ניתן ללכסן אותה אורתוגונלית ולבחור את הבסיס הנ"ל. אזי נוכל לבחור  $v \in v_0^\perp$ ,  $\|v\| = 1$ , ואז:

$$\lambda_1 = \max_{v \in v_0^\perp, \|v\|=1} \langle Av, v \rangle$$

נסמן:  $v = \sum_{i=1}^{n-1} c_i v_i$ , ונקבל:

$$\begin{aligned} \langle Av, v \rangle &= \left\langle A \sum_{i=1}^{n-1} c_i v_i, \sum_{j=1}^{n-1} c_j v_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i v_i, \sum_{j=1}^{n-1} c_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_i c_i \bar{c}_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i |c_i|^2 \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n-1} |c_i|^2 = \lambda_1 \end{aligned}$$

■

**מסקנה 1.8** עבור  $v_1$  ו"ע עם  $\|v_1\| = 1$  של  $A$  עם ע"ע  $\lambda_1$ ,  $\langle Av, v \rangle = \lambda_1$ .

**טענה 1.9**

$$\lambda_1(X) = \max_{f \in f_0^+} \frac{\langle Af, f \rangle}{\|f\|^2}$$

**הוכחה:** בעזרת טענות קודמות:

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Delta f, f \rangle}{\|f\|^2} &= \frac{\langle (kI - A)f, f \rangle}{\|f\|^2} = \frac{\langle kIf, f \rangle}{\|f\|^2} - \frac{\langle Af, f \rangle}{\|f\|^2} = k - \frac{\langle Af, f \rangle}{\|f\|^2} \\ \Rightarrow \min_{f \in f_0^+} \frac{\langle \Delta f, f \rangle}{\|f\|^2} &= k - \max_{f \in f_0^+} \frac{\langle Af, f \rangle}{\|f\|^2} = k - \lambda_1(X) \end{aligned}$$

■

#### 1.4 הקבוע האיזופרמטרי

**הגדרה 1.10** יהי  $X = (V, E)$  גרף,  $F \subseteq V$ . נגדיר את השפה של  $F$  להיות:

$$\partial F = \{ \{u, v\} \in E \mid u \in F, v \in V \setminus F \}$$

**הגדרה 1.11** יהי  $X = (V, E)$  גרף. הקבוע האיזופרמטרי מוגדר להיות:

$$h(X) = \min \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|} \mid F \subseteq V, |F| \leq \frac{|V|}{2} \right\}$$

קבוע זה נקרא גם לפעמים קבוע צ'יגר(?).

נשים לב כי השפה של  $F$  מהווה חתך, ואם נוציא אותן נקבל גרף בלתי קשיר. ניתוק של הרשת שכזה דואג לחלוקה "אמיתית" של הרשת לשתי קבוצות גדולות, ופרמטר זה בעצם מהווה אינדיקציה, כפי שצינו בשיעור המבוא, ל"כמה הגרף קשיר".

**הערה 1.12** מההגדרה הזו נקבל:

• גרף לא קשיר אמ"מ  $h(X) = 0$ .

• אם  $X$  גרף  $k$ -רגולרי, אזי:

$$h(X) \leq k$$

שכן היחס הכי טוב שאפשר לקבל הוא  $k$ , אחרת הגרף לא יהיה  $k$ -רגולרי.

**משפט 1.13** יהי  $X = (V, E)$  גרף  $k$ -רגולרי. אזי:

$$\frac{k - \lambda_1}{2} \leq h(X)$$

נשים לב כי חישוב הקבוע האיזופרמטרי אפילו עבור גרף "די קטן" - 500 קודקודים נגיד, הוא מאוד מסובך, ונהיה אקספוננציאלי מאוד מהר. המשפט הזה נותן לנו דרך הרבה יותר קלה להעריך את הקבוע הזה - ע"י חישוב ערכים עצמיים, אשר חישובם קל הרבה יותר. **הוכחה:** תזכורת:

$$f_0 \equiv 1, Af_0 = kf_0$$

$h(X)$  היא מינימום על קבוצה סופית, לכן קיימת  $F \subseteq V$  כך ש- $|F| \leq \frac{|V|}{2}$ ,  $h(X) = \frac{|\partial F|}{|F|}$ .  
נסמן:

$$a = |V \setminus F|, b = |F|$$

נגדיר:

$$g : V \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g(v) = \begin{cases} a & x \in F \\ -b & x \in V \setminus F \end{cases}$$

$$f = \frac{g}{\|g\|}$$

נחשב:

$$\langle g, f_0 \rangle = \sum_{v \in V} g(v) \cdot 1 = \sum_{v \in F} g(v) + \sum_{v \in V \setminus F} g(v) = ba + (-b) \cdot a = 0$$

ועל כן  $f, g \in f_0^\perp$ . מלמה קודמת:

$$\langle \Delta g, g \rangle = \sum_{e \in E} |g(e^+) - g(e^-)|^2$$

נשים לב כי אם  $\{u, v\}$  קשת כך ש- $u, v \in F$ , אזי  $g(e^+) - g(e^-) = 0$ . באותה צורה, עבור  $u, v \in U \setminus F$ , גם כן נקבל  $g(e^+) - g(e^-) = 0$ . נותרים אם כך רק האיברים בשפה של  $F$ :

$$\langle \Delta g, g \rangle = \sum_{e \in \partial F} |g(e^+) - g(e^-)|^2$$

במקרה, אם  $u \in F, v \in V \setminus F$ , הביטוי שווה ל- $a - (-b)$ , ובמקרה השני,  $(-b - a)$ . עם זאת, מכיוון ויש ערך מוחלט, בסה"כ:

$$= \sum_{e \in \partial F} (a + b)^2 = |\partial F| (a + b)^2$$

כמו כן, נחשב:

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \sum_{v \in V} (g(v))^2 = \sum_{v \in F} g(v)^2 + \sum_{v \in V \setminus F} g(v)^2$$

$$= |F| \cdot a^2 + |F^c| \cdot b^2 = ba^2 + ab^2 = ab(a + b)$$

מכיוון ומההגדרה  $b \leq a, b \leq \frac{|V|}{2}$ . כעת נציב ונקבל:

$$\langle \Delta f, f \rangle = \frac{\langle \Delta g, g \rangle}{\|g\|^2} = \frac{|\partial F| (a + b)^2}{ab(a + b)} \stackrel{|\partial F| = h(X)|F|}{=} \frac{h(X) b(a + b)}{ab}$$

$$= h(X) \left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq 2h(X)$$

לפי המשפט שהוכחנו:

$$k + \lambda_1(X) \leq \langle \Delta f, f \rangle$$

ולכן בסה"כ:

$$\begin{aligned} k + \lambda_1(X) &\leq \langle \Delta f, f \rangle \leq 2h(X) \\ \Rightarrow \frac{k - \lambda_1(X)}{2} &\leq h(X) \end{aligned}$$

■

**הגדרה 1.14**  $(X_n)$  משפחה של גרפים  $k$ -רגולריים עם  $|X_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  תקרא משפחת גרפים מרחיבים, אם קיים  $\varepsilon > 0$  כך שלכל  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\varepsilon \leq h(X_n)$$

המשפט שהוכחנו קודם להגדרה נותן לנו דרך למצוא האם משפחה של גרפים היא משפחה של גרפים מרחיבים, שכן מספיק למצוא  $\varepsilon$  כך ש:

$$\varepsilon \leq \frac{k - \lambda_1(X_n)}{2}$$

זהו תנאי הכרחי אך אינו מחייב.

**דוגמא**

נביט בגרף:

$$C_n = \text{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{-1, 1\})$$

נביט במטריצת השכנויות:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן:

$$\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad a = 0, \dots, n-1$$

$$\begin{aligned} X_a &= \xi^a + \xi^{a(n-1)} = \cos\left(\frac{2\pi a}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi a(n-1)}{n}\right) \\ &= i \left( \sin\left(\frac{2\pi a}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi a(n-1)}{n}\right) \right) = 2\cos\left(\frac{2\pi a}{n}\right) \end{aligned}$$

כאשר  $X_a$  הם הע"ע של  $C_n$ . מכיוון ו- $C_n$  גרף 2-רגולרי:

$$k - \lambda(C_n) = 2 - 2\cos\left(\frac{2\pi a}{n}\right)$$

וכאשר  $n \rightarrow \infty$ , הביטוי מימין שואף ל-2, כלומר  $k - \lambda_1(C_n) \rightarrow 2 - 2 = 0$ .

## 2 גרפים מכוונים

כעת נתון לנו גרף  $X = (V, E)$  מכוון, כאשר קבוצת הקשתות  $E \subseteq V \times V$  מורכבת מזוגות סדורים.

נשים לב כי במקרה זה מטריצת השכנויות שלנו לא תהיה סימטרית. למשל בגרף  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ , מטריצת השכנויות תהיה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**הגדרה 2.1** יהיו  $X_1 = (V, E_1), X_2 = (V, E_2)$  גרפים מכוונים (על אותה קבוצת קודקודים). נגדיל מכפלה:

$$X_1 \cdot X_2 = (V, E)$$

כאשר קבוצת הקודקודים זהה, וקשת  $E \in (u, v)$  אם יש קשת  $(u, z) \in E_1$  וקשת  $(z, v) \in E_2$ , כולל ריבויים.

**טענה 2.2** בתנאים מעלה, ול- $X_1$  מטריצת שכנויות  $A_1$ , ול- $X_2$  מטריצת שכנויות  $A_2$ , אזי מטריצת השכנויות של  $X_1 \cdot X_2$  היא  $A_1 \cdot A_2$ .

ההוכחה טריוויאלית ונובעת מההגדרה ומכפל מטריצות.

**הגדרה 2.3** בהנתן חבורה  $G$  ו- $\Gamma \subseteq E$ , גרף קיילי  $Cay(G, \Gamma)$  יהיה גרף אשר קודקודיו הם איברי  $G$ , ו- $(a, b) \in E$  בקבוצת הקשתות אם  $\gamma \in \Gamma$  כך ש- $a = b\gamma$ .

**טענה 2.4** תהי  $G$  חבורה,  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq G$ ,  $X_1 = Cay(G, \Gamma_1)$ ,  $X_2 = Cay(G, \Gamma_2)$ . אזי:

$$X_1 \cdot X_2 = Cay(G, \Gamma_1 \cdot \Gamma_2)$$

11/12/2012

## 3 מכפלת זיג-זג

### 3.1 הגדרה

18/12/2012

בשבוע הבא נבנה משפחה של אקספנדריס מדרגה קבועה. השבוע נעשה לכך הכנות. לנוחיות, נסמן בהמשך  $uv = (u, v)$ .

מכפלת זיג-זג (בהמשך נגדיר פורמלית) היא מכפלה קרטזית בין שני הגרפים, כאשר נעשה על הגרף הראשון מניפולציה - כל קודקוד מחולק למספר קודקודים, כאשר מספר זה הוא מספר הקודקודים בגרף השני. כל מניפולציה שכזו נקראת "ענף". את המכפלה הזו נסמן ב- $X \otimes Y$ , כאשר ה- $L$  מסמן את התיג (*labels*) הנבחר - מספור של הצלעות שמתרגם למספור הקודקודים, ונראה כי הבחירה הזו משנה את הגרף שמתקבל בסוף. בדרך כלל חושבים על  $X$  כגרף גדול עם דרגה קטנה.

צלע בגרף זה מייצגת קיום של מסלול באורך  $|V_Y|$  מהצורה: אדום, ירוק, אדום, אשר הצלעות האדומות הן צלעות בתוך ענן, צלעות ירוקות הן צלעות בין עננים. הצלע הראשונה היא שלב ה"זיג", הצלע הירוקה בין העננים נקראת "מקף", והצלע האדומה השנייה היא "זיג". למעשה, ניתן לחשוב על התהליך הזה באופן הבא - הצלעות הקטנות הן "זיג", הצלע ה"גדולה" בין העננים היא "זיג".

כל הצעד הזה נותן לנו צלע מהקודקוד הראשון לקודקוד האחרון. יהי  $X = (V_X, E_X)$  גרף  $|V_Y|$ -רגולרי,  $Y = (V_Y, E_Y)$  גרף  $d_Y$ -רגולרי. נגדיר פונקציה  $\forall e \in E_X$ , כאשר  $e(v)$  הוא הקודקוד בקצה השני של  $e$ . כמו כן:

$$\forall v \in V_X \quad E_v = \{e \in E_X \mid v \text{ is an edge of } e\}$$

$$\forall v \in V_X \quad L_v : V_Y \rightarrow E_X$$

כאשר  $L_v$  חח"ע ועל. תמיד קיימת כזו, שכן  $X$  רגולרי בגודל של  $V_Y$ . נסמן את אוסף כל התיוגים להיות  $L$ :

$$L = \{L_v \mid v \in V_X\}$$

**הגדרה 3.1** בהנתן  $X, Y, L$  כנ"ל,  $X \otimes Y$  הוא גרף המוגדר באופן הבא:

- קודקודיו הם  $V_X \times V_Y$ .
- צלעותיו: מספר הצלעות בין  $(x_1, y_1)$  ל- $(x_2, y_2)$  הוא מספר הזוגות  $(z_1, z_2) \in E_Y \times E_Y$  כך ש- $y_1$  קצה של  $z_1$ ,  $y_2$  קצה של  $z_2$ , ו:

$$L_{x_1}(z_1(y_1)) = L_{x_2}(z_2(y_2))$$

הרעיון בבניית הצלעות - שני התנאים הראשונים מביאים שני "עדים" לקיום הצלע, והתנאי השלישי מבטיח התאמה של התגיות.

דוגמא:

\*איור\*

$$z_2 = \{3, 2\}, z_1 = \{1, 2\} \text{ נבחר } \{(a, 1), (b, 2)\} \in E_X$$

$$L_{x_1}(z_1(y_1)) = L_{x_1}(z_1(1)) = L_a(2) = \{a, b\}$$

$$L_{x_2}(z_2(y_2)) = L_b(3) = \{a, b\}$$

**אלגוריתם** יהיו  $X, Y, L$  כנ"ל.

יהי  $v \ni (x_1, y_1)$

1. (זיג) נבחר  $z_1 \in E_Y$  הסמוכה ל- $y_1$  ו"נטייל" ל- $(x_1, z_1(y_1))$ .

2. (מקף) נטייל על הצלע היוצאת מ- $(x_1, z_1(y_1))$  לענן אחר - נסמן אותה ב- $(x_2, y')$ .

3. (זג) נבחר  $z_2$  סמוכה ל- $(x_2, y')$  ו"נטייל" עליה ל- $(x_2, z_2(y))$ . נסמן  $y_2 = z_2(y')$  ונחזור  $(x_2, y_2)$ .

קל לראות כי האלגוריתם אכן בונה את הגרף  $X \otimes Y$ .  
לכל  $v \in V_X$  נגדיר  $v$ -ענן:

$$\{(v, y) \mid y \in V_Y\}$$

מכאן והילך נשמיט את  $L$ .

**טענה 3.2**  $X \otimes Y$  הוא גרף  $d_Y^2$  רגולרי.

**הוכחה:** לפי האלגוריתם:

בשלב השני אין בחירה - מחלוקת הצלעות קיימת רק צלע ירוקה אחת, והתיוג מחייב לקחת אותה בשלב זה. ■

### 3.2 מטריצת השכנויות של גרף זיגזג

תזכורת: בהנתן  $X, Y$  גרפים המוגדרים על אותם קודקודים,  $X \cdot Y$  הוא גרף בו כל צלע היא מסלול בן שתי צלעות מקוריות.  
תזכורת 2: אם  $A_X, A_Y$  הן מטריצות השכנויות של הגרפים הנ"ל, אז:

$$A_{X \cdot Y} = A_X \cdot A_Y$$

יהיו  $X, Y, L$  כמקודם,  $A_X$  מטריצת השכנויות של  $X$ ,  $A_Y$  מטריצת השכנויות של  $Y$  (מכיוון והגרפים לא מכוונים, מטריצות אלו סימטריות).  
נגדיר שני גרפים חדשים  $H, Z$ , כאשר  $Z$  ייצג את שלבי הזיג והזג (הצלעות האדומות), ו- $H$  את שלב המקף (הצלעות הירוקות).

$$V_H = V_Z = V_X \times V_Y$$

והצלעות יוגדרו באופן הבא:

•  $E_Z$ : מספר הצלעות בין  $(x_1, y_1)$  ל- $(x_2, y_2)$  יהיה:

- אם  $x_1 \neq x_2$ , אז  $1^0$ .

- אם  $x_2 = x_1$ , אז  $(A_Y)_{y_1, y_2}$ .

•  $E_Y$ : מספר הצלעות בין  $(x_1, y_1)$  ל- $(x_2, y_2)$   $1 = L_{x_1}(y_1) = L_{x_2}(y_2) \Leftrightarrow$

**אבחנה:**  $A_H$  מטריצת פרמוטציה - שכן יש רק צלע אחת ירוקה בין קודקוד לקודקוד.

**טענה 3.3**  $X \otimes Y = Z \cdot H \cdot Z$

<sup>1</sup>שכן בגרף זה אין צלעות בין עננים.

קל לראות כי הטענה נכונה - צד ימין מוגדר היטב, שכן שני הגרפים מוגדרים על אותם הקודקודים. כמו כן, הכפל מגדיר בדיוק את המעבר אדום, ירוק, אדום, שמגדיר את הצלע ב- $X \otimes Y$ .

$$A_X \otimes Y = A_Z \cdot A_H \cdot A_Z \quad \text{3.4 מסקנה}$$

נקבע את  $x_1, \dots, x_{|V_Y|}$ , נקבע את  $y_1, \dots, y_{|V_Y|}$  ונביט ב:

$$x_1 y_1, x_1 y_2, x_1 y_{|V_Y|}, \dots, x_{|V_Y|} y_1, \dots, x_{|V_Y|} y_{|V_Y|}$$

תהי  $A_Z$  מטריצת השכנויות של  $Z$ , ותהי  $M$  מטריצת השכנויות של  $X \otimes Y$ .

**3.5 טענה**  $A_Z$  מטריצת בלוקים בגודל  $|V_X| \cdot |V_Y| \times |V_X| \cdot |V_Y|$  מהצורה:

$$\begin{pmatrix} A_Y & & 0 \\ & A_Y & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_Y \end{pmatrix}$$

**הוכחה:** נתבונן ב- $A_Z$  בקואורדינטה  $((x_i, y_j), (x_m, y_n))$ .

אם  $x_i \neq x_m$ , נקבל, שכן אלו צלעות מחוץ לענן.

אם  $x_i = x_m$ , אז מספר הצלעות הוא  $A_Y(j, n)$ .

■

**אבחנה:**

$$L^2(H) = L^2(Z) = L^2(X \otimes Y) = L^2(X \times Y)$$

נגדיר:

$$C : L^2(X \times Y) \rightarrow L^2(X)$$

$$(Cf)(x) = \sum_{y \in V_Y} f(x, y)$$

כלומר  $Cf$  סוכם על כל הענן ש- $x$  מייצג.

**3.6 הגדרה**  $\beta \in L^2(X \times Y)$  תקרא קבועה על עננים, אם:

$$\forall x \in V_X \quad \forall y_1, y_2 \in V_Y \quad \beta(x, y_1) = \beta(x, y_2)$$

כלומר על כל ענן היא מקבלת את אותו הערך (עם זאת היא יכולה לקבל ערכים שונים עבור עננים שונים).

**3.7 טענה** אם  $\beta \in L^2(X \times Y)$  קבועה על עננים, אז:

$$A_Z \beta = d_Y \beta$$



כלומר  $\beta$  הוא ו"ע. **הוכחה:** נתבונן בפעולת  $A_Z$  על  $\beta$  בקואורדינטה  $(x_1, y_1)$ :

$$(A_Z \beta)_{x_1 y_1} = \sum_{x_2, y_2 \in V_X \times Y} A_{Z(x_1, y_1)(x_2, y_2)} \beta_{x_2 y_2} = (*)$$

עבור  $x_1 \neq x_2$  במטריצה יהיה 0, לכן:

$$(*) = \sum_{y \in V_Y} A_{Z(x_1, y_1)(x_2, y_2)} \beta_{x_2 y_2} = \sum_{y \in V_Y} A_{Z(x_1, y_1)(x_2, y_2)} \cdot c = (**)$$

קיבלנו סכימה על ענן, כאשר מטענה קודמת, מהמבנה של  $A_Z$ , סכימה שכזו היא סכימה של  $A_Y$ , לכן:

$$(**) = d_Y \cdot c$$

■

**טענה 3.8** אם  $\beta \in L^2(X \times Y)$  קבועה על עננים, אזי:

$$A_X C \beta = d_X C \cdot A_H \beta$$

הוכחה - בשיעורי הבית.

### 3.3 ע"ע של מטריצת זיגוג

נסמן  $\tilde{\alpha} \in L^2(X \times Y)$ ,  $\alpha \in L^2(Y)$  לכל  $v \in V_X$  נגדיר:

$$\tilde{f}_v \in L^2(X \times Y) \quad \tilde{f}_v(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|V_Y|}} & v = x \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

**טענה 3.9** וקטור יחידה קבוע על עננים.

**הוכחה:** קבוע על עננים ישירות מההגדרה. וקטור יחידה כי:

$$\|\tilde{f}_v\| = \sqrt{\sum_{(x, y)} |\tilde{f}_v(x, y)|^2} = \sqrt{\sum_{(x, y)} |\tilde{f}_v(x, y)|^2} = \sqrt{\sum_{(x, y)} \left| \left( \frac{1}{|V_Y|} \right) \right|^2} = \sqrt{|V_Y| \cdot \frac{1}{|V_Y|}} = 1$$

■

נגדיר  $\tilde{f}_0 \in L^2(X \times Y)$  להיות  $\tilde{f}_0 \equiv 1$  וכמו כן:

$$\tilde{f}_0^\perp = L_0^2(X \times Y)$$

**הגדרה 3.10** נגדיר מספר פונקציות:

$$\begin{aligned}\forall \tilde{\alpha} \in L_0^2(X \times Y) \quad \forall v \in V_X \quad \tilde{\alpha}_v'' &= \langle \tilde{\alpha}, \tilde{f}_v \rangle \tilde{f}_v \\ \tilde{\alpha}'' &= \sum_{v \in V_X} \tilde{\alpha}_v'' \\ \tilde{\alpha}^\perp &= \tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}''\end{aligned}$$

אינטואיציה -  $\tilde{\alpha}''$  הוא החלק שהוא קבוע על עננים, והניצב כל השאר.

**טענה 3.11**  $C(\tilde{\alpha}^\perp) = 0$

### 3.4 הוכחת משפט ריילי-ריץ'

25/12/2012  
1/1/2013

נתונים  $d_X$  רגולרי,  $d_Y$  רגולרי כך ש- $|Y| = d_X$ , ונתונות העתקות:  $L_v : V_Y \rightarrow E_v$  לכל  $v \in V_X$  חתע"ל, כאשר  $E_v = \{e \in E_X | v \in e\}$ . נגדיר:

$$L = \{L_v | v \in V_X\}$$

הגדרנו בפעם הקודמת גרף  $Z$  על  $V_X \times V_Y$  בגודל  $|X|$  עותקים של  $Y$ . כמו כן הגדרנו גרף  $H$  על  $V_X \times V_Y$  כך שיש קשת בין  $(x_1, y_1)$  לבין  $(x_2, y_2)$  אם  $x_1 = x_2$ .

$$L_{x_1}(y_1) = L_{x_2}(y_2) = \{x_1 \cdot x_2\}$$

אינטואיטיבית,  $H$  1-רגולרי ומחבר בין עננים כמו ש- $X$  מחבר בין קודקודים (אם מכווצים כל ענן לנקודה, נקבל בחזרה את  $X$ ).  $L_v$  בעצם מגדירות לנו שרירותית אילו קודקודים אנו מחברים בין העננים.

**הגדרה 3.12** בהנתן  $v \in V_X$ ,  $v$ -ענן הוא הקבוצה:  $\{(v, y) | y \in V_Y\}$ .

דוגמא: \*איור\*

### 3.13 הגדרה

$$X \otimes_L Y = Z \times H \times Z$$

וכן סימנו את מטריצת השכינויות של מכפלת הזיגזג להיות:

$$M = A_x \otimes_Y$$

ראינו גרסא קצת שונה למשפט:

**משפט 3.14** עבור גרף  $d$ -רגולרי שאינו דו צדדי מתקיים:

$$\lambda(G) = \max_{\alpha \in L_0^2(G)} \frac{|\langle A_G \alpha, \alpha \rangle|}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \max_{\alpha \in L_0^2(G)} \frac{\|A_G \alpha\|}{\|\alpha\|}$$

כאשר:

$$\lambda(G) = \max \{ |\lambda_i(G)| \mid \lambda_i(G) \neq d \}$$

נמשיך עם ההוכחה:

בהנתן  $\tilde{\alpha} \in L_0^2(X \otimes Y)$  הגדרנו:

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}'' + \tilde{\alpha}^\perp$$

הראנו כי  $\tilde{\alpha}''$  קבוע על עננים, ולכן מתקיים משפט פיתגורס:

$$\|\tilde{\alpha}\|^2 = \|\tilde{\alpha}''\|^2 + \|\tilde{\alpha}^\perp\|^2$$

וכן הוכחנו כי  $\tilde{\alpha}'', \tilde{\alpha}^\perp \in L_0^2(X \otimes Y)$ .  
כמו כן הוכחנו את הטענה הבאה:

**טענה 3.15**

$$|\langle M\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} \rangle| \leq d_Y^2 |\langle A_H \tilde{\alpha}'', \tilde{\alpha}'' \rangle| + 2d_Y \|\tilde{\alpha}''\| \cdot \|A_Z \tilde{\alpha}^\perp\| + \|A_Z \tilde{\alpha}^\perp\|^2$$

**טענה 3.16** אם  $Y$  אינו דו"צ, אז:

$$\|A_Z \tilde{\alpha}^\perp\| \leq \lambda(Y) \|\tilde{\alpha}^\perp\|$$

למה שהיתה בשיעורי הבית אמרה:

**למה 3.17** עבור  $\tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in L_0^2(X \otimes Y)$  כאשר  $\tilde{\beta}$  קבוע על עננים:

$$A_X C \tilde{\beta} = d_X C A_H \tilde{\beta} \quad (1)$$

$$\langle C \tilde{\gamma}, C \tilde{\beta} \rangle = d_X \langle \tilde{\gamma}, \tilde{\beta} \rangle \quad (2)$$

כאשר  $C$  אופרטור לינארי  $L^2(X \otimes Y) \rightarrow L^2(X)$  המוגדר באופן הבא:

$$C \tilde{\beta}(x) = \sum_{y \in V_Y} \tilde{\beta}(x, y)$$

כלומר, סוכם על כל ענן.

ההגיון של הסעיף הראשון בלמה - אם יש וקטור ב- $L_0^2(X \otimes Y)$  שהוא קבוע על עננים (נותן ערך לכל קודקוד), בצד שמאל כאשר סוכמים על הענן (מפעילים את  $C$ ) מקבלים את הגודל של  $Y$  כפול הערך הקבוע, ואז מטריצת השכנות מוסיפה את הערך לכל אחד מהשכנים כפול הריבוי.

בצד ימין, המטריצה מעבירה כל ערך לענן המתאים, ולאחר מכן נעשית סכימה על העננים, ולבסוף נכפל בפקטור של  $Y$ , שהוא  $d_X$  כדי להוסיף את הריבויים. כעת, טענה שעדיין לא הוכחנו:

**טענה 3.18** אם  $X$  אינו דו"צ, אזי:

$$|\langle A_H \tilde{\alpha}'', \tilde{\alpha}'' \rangle| \leq \frac{\lambda(X)}{d_X} \|\tilde{\alpha}''\|$$

**הוכחה:** נזכור כי  $\tilde{\alpha}''$  קבוע על עננים, לכן נוכל להשתמש בלמה (נוסיף ערכים מוחלטים כדי להשתמש במשפט ריילי-ריץ'):

$$|\langle A_H \tilde{\alpha}'', \tilde{\alpha}'' \rangle| = \left| \frac{\langle C A_H \tilde{\alpha}'', C \tilde{\alpha}'' \rangle}{d_X} \right| = \frac{|\langle A_X C \tilde{\alpha}'', c \tilde{\alpha}'' \rangle|}{d_X^2} \leq \frac{\lambda(X) \langle C \tilde{\alpha}'', C \tilde{\alpha}'' \rangle}{d_X^2}$$

ושוב על פי הבלמה:

$$= \frac{\lambda(X) \langle \tilde{\alpha}'', \tilde{\alpha}'' \rangle}{d_X}$$

■

כנדרש.

הגענו למשפט המרכזי, שחוסם לנו את  $\lambda(X \otimes Y)$  כתלות ב- $\lambda$  של הגרפים המקוריים וכן בדרגת הרגולריות שלהם:

**משפט 3.19** אם  $X, Y$  אינם דו"צ, אזי:

$$\lambda(X \otimes_L Y) \leq \frac{d_Y^2 \lambda(X)}{d_X} + d_Y \lambda(Y) + \lambda(Y)^2$$

בעזרת משפט זה נוכל לבנות משפחת אקספנדריס בהמשך. **הוכחה:** לכל  $\tilde{\alpha}$ , בעזרת הטענות והבלמה שכבר הוכחנו:

$$|\langle M \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} \rangle| \leq \frac{d_Y^2}{d_X} \lambda(X) \|\tilde{\alpha}''\| + 2d_Y \lambda(Y) \|\tilde{\alpha}''\| \cdot \|\tilde{\alpha}^\perp\| + \lambda(Y)^2 \cdot \|\tilde{\alpha}^\perp\|^2$$

מתקיים

$$\|\tilde{\alpha}''\| \leq \|\tilde{\alpha}\|^2, \quad \|\tilde{\alpha}^\perp\| \leq \|\tilde{\alpha}\|, \quad 2\|\tilde{\alpha}^\perp\| \cdot \|\tilde{\alpha}''\| \leq \|\tilde{\alpha}\|$$

כאשר אי השוויון הראשון והשני מימין ברורים. עבור האחרון:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\|\tilde{\alpha}''\| - \|\tilde{\alpha}^\perp\|)^2 = \|\tilde{\alpha}\|^2 - 2\|\tilde{\alpha}''\| \cdot \|\tilde{\alpha}^\perp\| \\ \frac{|\langle M \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} \rangle|}{\|\tilde{\alpha}\|^2} &\leq \frac{d_Y^2}{d_X} \lambda(X) + d_Y \lambda(Y) + \lambda(Y)^2 \end{aligned}$$

נצטרך להאמין לזה בינתיים - בהמשך עידו ישלח סיכום עדכון... בכל אופן, מכאן מקבלים:

$$\lambda(X \otimes Y) \leq d_X$$

■

### 3.5 בניית משפחה של אקספנדריים

#### 3.5.1 הגדרת המשפחה והוכחת התכונה

נניח שיש לנו גרף  $W$  המקיים:

$$1. \quad d_W^4 = |W| \text{ הוא } d_W\text{-רגולרי, כאשר } d_W^4 = |W|.$$

$$2. \quad W \text{ אינו דו"צ.}$$

$$3. \quad \lambda(W) < \frac{d_W}{5}.$$

אם יהיה זמן נראה איך בונים  $W$  שכזה. כעת נראה כיצד ממנו נבנה משפחה של אקספנדריים. נגדיר:

$$\begin{aligned} W_1 &= W^2 \\ W_{n+1} &= W_n^2 \otimes W \end{aligned}$$

**טענה 3.20**  $W_n$  מוגדר היטב,  $d_W^2$ -רגולרי, ומתקיים  $|W_n| = |W|^n$ .

**הוכחה:** באינדוקציה על  $n \in \mathbb{N}$ .

בסיס:  $n = 1$ . מהתרגיל אם מכפילים גרף בעצמו, המכפלה עדיין לא מכוונת. כמו כן היה בתרגיל להוכיח כי רגולריות המכפלה היא הכפל של הרגולריות של הגרפים המקוריים. על כן הטענה ברורה מהטענות מהתרגיל.  
נניח נכונות עבור  $n$ , ונוכיח עבור  $n+1$ :  
 $W_n$  הוא  $d_W^2$  רגולרי, לכן  $W_n^2$  הוא  $|W|$  רגולרי, ולכן מכפלת הזיג-זג מוגדרת. כמו כן:

$$|W_{n+1}| = |W_n^2| \cdot |W| = |W_n| \cdot |W| = |W|^n \cdot |W| = |W|^{n+1}$$

■

כמו כן,  $W_{n+1}$  הוא  $d_W^2$ -רגולרי, כי הכופל הימני  $W$  הינו  $d_W$  רגולרי.

#### 3.21 טענה

$$\lambda(W_n) < \frac{2}{5} d_{W_n} = \frac{2}{5} d_W^2$$

זהו שלב מאוד חשוב בבניה, שכן מטענה זו נקבל כי אכן מדובר בגרף אקספנדר. **הוכחה:**  
 באינדוקציה על  $n \in \mathbb{N}$ :  
 בסיס:  $n = 1$ . ראינו בהרצאה קודמת (של אור):

$$\lambda(W^2) = \lambda(W)^2 = \left(\frac{d_W}{5}\right)^2 < \frac{2}{5}d_W^2$$

נניח נכונות עבור  $n$ , ונוכיח נכונות עבור  $n + 1$ :

$$\lambda(W_{n+1}) \leq \frac{d_W^2}{d_W^4} \lambda(W_n^2) + d_W \lambda(W) + \lambda(W)^2 < \frac{1}{d_W^2} \left(\frac{2}{5}d_W^2\right)^2 + \frac{d_W^2}{5} + \frac{d_W^2}{25} = \frac{2}{5}d_W^2$$

■

**טענה 3.22** משפחה של גרפים מרחיבים.

**הוכחה:** ראינו  $h(X) \leq \frac{d_X - \lambda(X)}{2}$ , ולכן:

$$h(W_n) > \frac{3}{10}d_{W_n}$$

כלומר זוהי משפחה של גרפים מרחיבים, כאשר  $\varepsilon = \frac{3}{10}$ . כמו כן נציין כי:

$$|W_n| = |W|^n \rightarrow \infty$$

■

### 3.5.2 הגדרת $W$

נחזור לגרף המקורי  $W$  - נראה את הגדרתו, למרות שמפאת חוסר הזמן לא נספיק להוכיח את כל תכונותיו:

נתבונן בחבורה  $\mathbb{Z}_p^8$  עבור  $p > 35$  ראשוני. נגדיר עבור  $x, y \in \mathbb{Z}_p$ :

$$\gamma(x, y) = (x, xy, xy^2, \dots, xy^7) \in G$$

ונגדיר:

$$\Gamma = \{\gamma(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}_p\}$$

נגדיר  $W = Cay(G, \Gamma)$ .  $W$  הינו  $|\Gamma|$  רגולרי, ומתקיים  $|\Gamma| = p^2$ .  
 הראשוני 37 הוא הראשון שמקיים זאת, ולכן המשפחה עם הרגולריות הכי נמוכה שנקבל נובעת ממנו - וזה יהיה מספר אסטרונומי! אם זאת, בשיטות אחרות אפשר למצוא משפחות קטנות יותר (אם כי לא באופן קונסטרוקטיבי).  
 נציין כי כל איבר שמתקבל בגרף הוא באורך אי זוגי, לכן לא ניתן לקבל מבניה זו גרפים דו"צ.  
 כמו כן, מתקיים:

$$|G| = p^8 = |\Gamma|^4$$

ממשפט אלון-בופאנה שראינו:

$$\liminf \lambda(W_n) \geq 2\sqrt{d-1}$$

ואנחנו ראינו למקרה שלנו כי:

$$\limsup \lambda(W_n) \leq \frac{2}{5} d_W^2 = \frac{2}{5} d$$

כלומר, אפשר לבצע זאת עבור ערכים קטנים יותר מ- $37^4$ , כלומר יש כאן עוד עבודה...  
החסם הראשון הוא אקספוננציאלי, והשני לינארי.

8/1/2013

עד כה ראינו:

יהי  $X$  סופי  $k$  רגולרי, ותהי  $A = A_X$  מטריצת השכנות שלו.  
אזי הע"ע של  $A$  הם ממשיים (כי  $A$  סימטרית), וכן:

$$k = \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq -k$$

כאשר:

$$1. \lambda_1 \leq \lambda_0 \text{ קשיר אמ"מ}$$

$$2. X \text{ דו צדדי} \Leftrightarrow \lambda_{n-1} = -k$$

$$3. \text{תהי } \{X_i\} \text{ משפחה של גרפים } k\text{-רגולריים. אזי זו משפחת אקספנדרים} \Leftrightarrow \text{קיים } \delta > 0 \text{ כך ש: } \lambda_1(X_i) \leq k - \delta \text{ לכל } i.$$

### 3.5.3 מהלך מקרי על גרף

**הגדרה 3.23** נאמר שוקטור  $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$  הוא וקטור הסתברות, אם  $0 \leq p_i \leq 1$  ו- $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

**תרגיל:** אם  $A$  מטריצת השכנות של הגרף  $X$   $k$ -רגולרי,  $|V(X)| = n-1$  אז מטריצה  $n \times n$ , ו- $\vec{p}$  וקטור הסתברות. אזי גם  $\left(\frac{1}{k}A\right)\vec{p}$  הוא וקטור הסתברות. למשל:

$$\frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} & 0 & 0 & \frac{1}{k} & \frac{1}{k} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k}p_2 + \frac{1}{k}p_4 + \frac{1}{k}p_6 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

נדמיין גמד שעומד על קודקוד כלשהוא של הגרף, ובהסתברות  $p_i$  עובר לקודקוד  $i$ . היכן נהיה לאחר מספר צעדים? מה קורה למידע לאורך הדרך? הכפלה במטריצה נותנת וקטור הסתברות של מתי נהיה בצעד הבא!  
לדבר הזה קוראים "מהלך מקרי על הגרף".

אם הגמד התחיל בקודקוד מסויים, נאמר קודקוד 1, ז"א וקטור ה"הסתברות" למצבו

בזמן  $t = 0$  הוא  $\vec{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , הרי לאחר צעד אחד  $\vec{p}^{(1)} = \frac{1}{k} A \vec{p}^{(0)}$  ובזמן  $t$ , התפלגות מקום הגמד תהיה  $\left(\frac{1}{k} A\right)^t \vec{p}^{(0)}$ .

נניח שהגרף קשיר ולא דו צדדי. אזי, כל הע"ע  $\lambda_i$  ל- $i \neq 0$ , מקיימים  $|\lambda_i| < k$ . יש לנו בסיס אורתונורמלי של  $\mathbb{R}^n$  של וקטורים עצמיים,  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ , כך ש:

$$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$$

נכתוב את  $\vec{p}^{(0)}$  וקטור ההסתברות באופן הבא:

$$\vec{p}^{(0)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha_i$$

אם נחלק את  $A$  ב- $k$  מקבלים מטריצה סטוכסטית. אזי:

$$\left(\frac{1}{k} A\right)^t \vec{p}^{(0)} = \left(\frac{1}{k} A\right)^t \left(\sum a_i \alpha_i\right) = \sum a_i \frac{A^t \alpha_i}{k^t} = \sum a_i \frac{\lambda_i^t}{k^t} \alpha_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{\lambda_i}{k}\right)^t \cdot \lambda_i$$

מה קורה כאשר  $t \rightarrow \infty$  לביטוי הזה?  $\left(\frac{\lambda_i}{k}\right)^t$  שואף ל-0 לכל  $i > 0$ , כי  $\lambda_i < k$  מלבד עבור  $i = 0$ . אז:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{\lambda_i}{k}\right)^t \cdot \lambda_i \xrightarrow{t \rightarrow \infty} a_0 \cdot \alpha_0 + 0$$

עכשיו, נזכור כי  $\alpha_0$  הוא ו"ע של  $A$  עם ע"ע  $\lambda_0 = k$ , וראינו (קל!)  $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  (עד כדי

סקלר).

נשים לב - קבוצת וקטורי ההסתברות היא קבוצה סגורה (טופולוגית), ולכן הגבול של

וקטורי ההסתברות  $\left(\frac{1}{k} A\right)^t \vec{p}^{(0)}$  גם הוא וקטור הסתברות, ולכן  $a_0 \alpha_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}$  וקטור הסתברות, ולכן  $a_0 = \frac{1}{n}$ , כלומר  $a_0 = \frac{1}{n}$ , והוקטור הוא  $\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ .

קיבלנו אם כך את מה שהובטח לנו בשיעור הראשון - לאחר הרבה מאוד צעדים, אנחנו מתקרבים להתפלגות האוניפורמית! כלומר, אחרי הרבה מאוד זמן, אנחנו לא יכולים לדעת הרבה...



נחזור לניתוח יותר עדין של התהליך, ונשאל את עצמנו - אם לא עבר הרבה זמן, כמה אנחנו רחוקים מההתפלגות האוניפורמית?

לאחר  $t$  צעדים אנו נמצאים בוקטור  $\sum a_i \frac{\lambda_i^t}{k^t} \alpha_i$ . אנחנו רואים שהשאלה הזו היא בדיוק תלויה ביחס  $\frac{\lambda_i^t}{k^t}$  - ככל שהיחס קטן יותר, ההתפלגות שואפת מהר יותר להתפלגות האוניפורמית (בין אם מינוס או פלוס אין זה משנה, החשיבות היא להתקרבות לאפס). דהיינו, הע"ע  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ , וביתר חשיבות  $\lambda_1$  ו- $\lambda_{n-1}$  שולטים על קצב ההתכנסות להתפלגות האחידה. **תרגיל מחשבתי:** מה קורה במצב הדו צדדי? צריך לבדל שני וקטורים - לא רק את הע"ע הראשון אלא גם את הערך עצמי האחרון. לא נקבל התפלגות אוניפורמית (כי אי אפשר לעברו מצד אחד לשני), אבל אם מסתכלים רק על הזוגיים או על האי זוגיים אפשר להגיע לניתוח דומה. בהגדרה של רמנוג'אן אנחנו משאירים את האפשרות שהגרף יהיה דו צדדי, ונחפש את הע"ע הקטנים ביותר.

#### 3.5.4 עוד על משפט אלון בופאנה

**משפט 3.24** יהי  $X$  גרף  $k$ -רגולרי קשיר. נסמן:

$$\lambda(X) = \max \{ |\lambda_i| \mid |\lambda_i| \neq k \}$$

אם  $X_r$  משפחה של גרפים  $k$ -רגולריים עם  $|X_r| \leftarrow \infty$ , אזי:

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \lambda(X_r) \geq 2\sqrt{k-1}$$

**הגדרה 3.25** גרף  $k$ -רגולרי קשיר יקרא גרף רמנוג'אן, אם  $\lambda(X) \leq 2\sqrt{k-1}$ , כלומר אם כל ע"ע  $\mu$  של  $A = A_X$  מקיים  $|\mu| = k$  או  $|\mu| \leq 2\sqrt{k-1}$ .

**משפט 3.26** אם  $p$  ראשוני,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $k = p^l + 1$ , אזי יש אינסוף גרפי רמנוג'אן  $k$ -רגולריים (כולל בניה מפורשת; ואפשר דו-צדדיים או לא דו-צדדיים).

המשפט הזה הוא קודם ל- $p$  ראשוני בלי  $l$  בשנת שמונים ומשהו ע"י קבוצת מתמטיקאיים וביניהם המרצה שלנו, ובמקביל ע"י מרגוליס ברוסיה, לאחר מכן הוכח בגרסא זו בירושלים.

**זו בעיה פתוחה** לכל  $k$  שאינו מהצורה הזו!

למשל, הראשון הוא  $k = 7$ , לגביו כאמור הבעיה פתוחה (האם יש אינסוף גרפי רמנוג'אן 7-רגולריים). אבל,  $k = 8$  בסדר (כי זה  $7 + 1$ ).

הבעיה היא למצוא אינסוף גרפים עם אותו  $k$ , אפשר למצוא הרבה גרפים עם אותו  $k$ , אבל לא אינסוף.

#### 3.6 בניה של גרף מרחיב שכן יחיד

**הגדרה 3.27** גרף  $\Gamma = (X, E)$  יקרא  $(\alpha, \varepsilon)$ -מרחיב שכן יחיד (unique neighbor expander) אם לכל  $S \subseteq X$  כך ש- $|S| \leq \alpha |X|$  מספר הקודקודים של  $S$  ב- $X \setminus S$  עם שכן יחיד ב- $S$  הוא לפחות  $\varepsilon |S|$ .

נבנה גרפים שכאלו באופן קונסטרוקטיבי (באופן שישמש בגרפי רמנוג'אן 8 רגולריים). למטרה זו, יש צורך בפיתוח נוסף:

**עובדה:** קיימת משפחה אינסופית  $\mathcal{H}$  של גרפי רמנוג'אן 8-רגולריים.

**הגדרה 3.28**  $C$  יהיה הגרף עם קודקודים  $\{0, \dots, 7\}$  ו- $(i, j)$  צלע אמ"מ  $|i - j| \in \{1, 4, 7\}$ .

נשים לב ש- $C$  הוא גרף 3-רגולרי.  
 רעיון: לכל  $\Lambda \in \mathcal{H}$ ,  $\Lambda = (V, E)$ , נבנה גרף 6-רגולרי שהוא  $(\alpha, \frac{1}{10})$  מרחיב שכן יחיד, וקודקודיו הם  $E$ .  
**סימונים:**

•

$$\begin{aligned} E_v &= \{e \in E \mid v \text{ is a part of } e\} \\ V_S &= \{v \in V \mid \exists e \in S \subseteq X \text{ s.t. } v \text{ is a part of } e\} \end{aligned}$$

•  $H_v$  הוא גרף שקודקודיו  $E_v$  ואיזומורפי ל- $C$ .

•  $\Gamma$  יהיה גרף שקודקודיו  $E$ , ועבור  $\gamma, \gamma' \in E$ ,  $(\gamma, \gamma')$  צלע אמ"מ קיים  $v \in V$  כך ש- $\gamma, \gamma' \in E_v$  וכן הם שכנים ב- $H_v$ .

הלב של ההוכחה מסתמך על משפט שנוכיח בשבוע הבא:

#### משפט Kahale

**משפט 3.29** יהי  $\bar{\Lambda} = (\bar{V}, \bar{E})$  גרף  $k$ -רגולרי ורמנוג'אן. אזי לכל  $\delta > 0$  ולכל  $|X| \leq \bar{V}^{k-\frac{1}{\delta}}$ ,  $X \subseteq \bar{V}$  הדרגה הממוצעת  $d$  של הגרף המושרה על  $X$  הוא:

$$d \leq (1 + \sqrt{k-1}) (1 + O(\delta))$$

**מסקנה 3.30** עבור  $(V, E) = \Lambda \in \mathcal{H}$  קיים  $\alpha > 0$  כך שלכל  $S \subseteq E$  עם  $|S| \leq \alpha |E|$  הדרגה הממוצעת של הגרף המושרה על  $V_S$   $\geq \frac{38}{10}$ .

**הוכחה:**

$$|S| \leq 4 |V_S| \leq k^{-\frac{1}{\delta}} |V| \leq k^{-\frac{1}{\delta}} |E|$$

■ ובחרים  $\delta$  מתאימה לקבלת החסם הרצוי.

**למה 3.31** עבור הגרף  $C$ , לכל  $\phi \neq J \subseteq \{0, \dots, 7\}$  נגדיר:

$$J' = \{i \in \{0, \dots, 7\} \setminus J \mid \exists j \in J \text{ s.t. } (i, j) \text{ is an edge}\}$$

$$\text{אזי, } |J| + |J'| \geq 4$$

■ **הוכחה:** תרגיל (פשוט לבדוק מקרה מקרה).

תהי  $S \subseteq E$  כך ש- $|S| \leq \alpha |E|$  ותהי  $V_S$  כפי שהגדרנו. הדרגה הממוצעת של הגרף המושרה על  $V_S$  מ- $\Lambda$  (נסמנו ב- $\Lambda[V_S]$ )  $\geq \frac{38}{10}$ .

אז, לפחות ל- $\frac{|V_S|}{5}$  קודקודים יש לכל היותר 3 שכנים ב- $\Lambda[V_S]$  (משיקולי ספירה - להוכחה הניחו בשלילה).  
 יהי  $v \in V$  עם לכל היותר 3 שכנים ב- $V_S$ . נגדיר  $J = S \cap E_v \neq \emptyset$ . יהי  $J'$  הקודקודים של  $H_v$  עם שכן יחיד ב- $J$ . מהלמה,  $|J| + |J'| \geq 4$ , כלומר  $J'$  אינה ריקה וכן קיימת  $\gamma \in J \cup J'$  עם קצה שאינו ב- $V_S$ .  $\gamma \notin J$ , כי  $\gamma \in J$  גורר  $\gamma \in S$ , כלומר שתי קצוות הצלע ב- $V_S$  בסתירה.  
 לכן קיבלנו כי  $\gamma \in J'$ ,  $\gamma \notin S$ , וכן ל- $\gamma$  יש בדיוק שכן אחד בתוך  $S$ .  
 הדרגה הממוצעת של  $\Lambda[V_S]$   $4 \geq \Lambda[V_S]$ , ולכן  $\frac{|S|}{10} \geq \frac{|V_S|}{5}$  (כי  $|S| \leq 2|V_2|$ ), וכן יש לפחות  $\frac{|V_S|}{5}$  קודקודים  $v$  כאלה. כלומר קיבלנו כי יש  $\frac{|S|}{10}$  שכנים יחידים ל- $v$ .  
 היום ננסה להספיק להוכיח את המשפט בו השתמשנו בשיעור שעבר לבניית משפחת הגרפים:

**משפט 3.32** יהי  $G = (V, E)$  גרף  $k$ -רגולרי,  $\tilde{\lambda} = \max(\lambda_1(G), \sqrt[2]{k-1})$ ,  $\varepsilon > 0$ . אזי לכל  $\phi \neq X \subseteq V$  עם  $|X| \leq k^{-\frac{1}{\varepsilon}} |V|$  מתקיים:

$$\frac{e(X, X)}{|X|} \leq \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}}{4} - (k-1)}\right) (1 + O(\varepsilon))$$

כאשר  $e(X, X)$  הוא מספר הצלעות שיש בין  $X$  ל- $X$  (סופרים כל צלע פעם אחת):  
 $|\{(u, v) \mid X \times X \cap E\}|$ , ו- $\lambda_1(G)$  הוא הע"ע השני הכי גדול.

נוכיח את המשפט בעזרת 5 למות עזר. תחילה נביא מספר הגדרות, לאחר מכן נוכיח את המשפט בהנתן הלמות, ולבסוף נוכיח ככל שנסיק את הלמות עצמן.

#### הגדרות\סימונים

• לכל  $W \subseteq V$ ,  $\chi_W$  הוא המציין של  $W$  ב- $L^2(V)$ .

• נסמן:

$$\begin{aligned} N_G(X) &= \{v \in V \mid \exists x \in G \text{ s.t. } (v, x) \in E\} \\ e(X, Y) &= |\{(u, v) \in X \times Y \cap E\}| \end{aligned}$$

• עבור  $Z_0, \dots, Z_t \subseteq C$ , נסמן  $R^{\{Z_0, \dots, Z_t\}}$  להיות אוסף הפונקציות הממשיות מ- $\mathbb{R}$  ל- $\{Z_0, \dots, Z_t\}$ .

• תהי  $\Phi(Z_0, \dots, Z_t)$  ט"ל ב- $R^{\{Z_0, \dots, Z_t\}}$ . המטריצה שלה בבסיס הסטנדרטי  $\{\chi_{\{z_0\}}, \dots, \chi_{\{z_t\}}\}$  היא:

$$(\Phi)_{i,j} = \frac{e(Z_i, Z_j)}{|Z_i|}$$

כאשר ניתן לחשוב על המטריצה הזו כמטריצת שכינויות של גרף.

**עובדה מאלגברה לינארית:** אם  $M$  מטריצה ממשית אי שלילית, אזי יש לה ערך עצמי ממשי  $\lambda_0(M)$  גדול ביותר, ועבור  $M$  כזו,  $s$  וקטור חיובי ממש, ו- $\mu \in \mathbb{R}$ , מתקיים:

$$Ms \leq \mu s \Rightarrow \mu \leq \lambda_0(M)$$

נתחיל בהוכחת המשפט: **הוכחה:** נבחר  $\theta \geq 0$  כך ש- $\cosh \theta = 2\sqrt{k-1}$  (לכל  $x \geq 1$  יש  $\theta \geq 0$  כך ש:  $x = \cosh \theta$ , כאשר  $\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$ ).  
נבחר  $l = \lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \rfloor$ , ולכל  $0 \leq i < l$  נגדיר את  $X_i$  להיות אוסף הקודקודים במרחק  $i$  מ- $X_i$ .

נגדיר גרף  $H$  להיות הגרף המושרה מ- $G$  ל- $\bigcup_{i=0}^l X_i$ .

**למה 3.33** יהי  $G = (V, E)$ ,  $V \supseteq Z_0, \dots, Z_t$  זרות ולא ריקות. אזי לכל  $0 \leq i \leq t$ :

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(\Phi(Z_0, \dots, Z_t))$$

נפעיל את למה זו על  $H$ , ונקבל:

$$\lambda_0(H) \geq \lambda_0(\Phi(X_0, \dots, X_t))$$

**למה 3.34** אם  $G = (V, E)$  גרף  $k$ -רגולרי קשיר,  $X_0, \dots, X_t \subseteq V$  לא ריקות, כך ש:  $N_G(X_i) \subseteq X_{i+1}$  אזי לכל  $l > 1$ :

$$\lambda_1(G) + 4k^l \cdot \frac{|X_t|}{n}$$

גדול או שווה לערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה:

$$M_{t+l} := \begin{pmatrix} 0 & k & & & & & \\ \rho_0 & 0 & k - \rho_0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & p_{t-1} & \ddots & k - p_{t-1} & & \\ & & & 1 & \ddots & k - 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots & k - 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_i = k \cdot \frac{|X_i| - |X_{i-1}|}{|X_{i+1}| - |X_{i-1}|}$$

מלמה 4:

$$\lambda_0(H) \leq \tilde{\lambda} + 4k^{l+1} \cdot \frac{|X_t|}{n}$$

■

טוב יש כאן בעיה, כי לכאורה לא ניתן בכלל להשתמש פה בלמה 4.

נוכיח את הלמה הראשונה שהצגנו. לשם כך, נשתמש במשפט נחמד:

### משפט המינמקס

**משפט 3.35** אם  $\Phi$  צמודה עצמית, כלומר לכל וקטור  $v$  מתקיים:  $\langle v, \Phi v \rangle = \langle \Phi v, v \rangle$  ו- $\lambda_0 \geq \dots \geq \lambda_{n-1}$  ערכיה העצמיים, אזי:

$$\lambda_i = \max_L \min_{r \in L \setminus \{0\}} \frac{\langle r, \Phi r \rangle}{\langle r, r \rangle}$$

**הוכחה:** יהי  $\{f_0, \dots, f_{n-1}\}$  בסיס אורתונורמלי של הע"ע  $(f_i)$  ו"ע של  $(\lambda_i)$ , ויהי  $L$  מרחב מממד  $i+1$ . משיקולי מימד, נקבל כי:

$$L \cap \text{Span}\{f_i, \dots, f_{n-1}\} \neq \{0\}$$

ניקח  $v \neq 0$  מהחיתוך, כלומר:

$$v = \sum_{k=i}^{n-1} \alpha_k f_k$$

אזי:

$$\frac{\langle v, \Phi v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\sum_{k=i}^{n-1} \lambda_k \alpha_k^2}{\sum_{k=i}^{n-1} \alpha_k^2} \leq \lambda_i \Rightarrow \min_{r \in L \setminus \{0\}} \frac{\langle r, \Phi r \rangle}{\langle r, r \rangle} \leq \lambda_i$$

מכיון וזה נכון לכל מרחב  $L$  מממד  $i+1$ , מתקיים:

$$\max_L \min_{r \in L \setminus \{0\}} \frac{\langle r, \Phi r \rangle}{\langle r, r \rangle} \leq \lambda_i$$

מצד שני, ניקח  $L = \text{Sp}\{f_0, \dots, f_i\}$ ,  $v = \sum_{k=0}^i \alpha_k f_k$ . אזי:

$$\frac{\langle v, \Phi v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\sum_{k=0}^i \alpha_k^2 \lambda_k}{\sum_{k=0}^i \alpha_k^2} \geq \lambda_i$$

■

ומשני הצדדים נקבל שיוויון, כנדרש.

**הערה 3.36** אפשר באותו אופן להראות ש:

$$\lambda_{n+i-1} = \min_L \max_{r \in L \setminus \{0\}} \frac{\langle r, \Phi r \rangle}{\langle r, r \rangle}$$

כאשר  $L$  רץ על תתי מרחבים מממד  $i+1$ .

כעת אפשר להוכיח את הלמה הראשונה שהצגנו השיעור:

**למה 3.37** אם  $G = (V, E)$  גרף  $k$ -רגולרי קשיר,  $X_0, \dots, X_t \subseteq V$  לא ריקות, כך ש:  
 $N_G(X_i) \subseteq X_{i+1}$  אזי לכל  $l > 1$ :

$$\lambda_1(G) + 4k^l \cdot \frac{|X_t|}{n}$$

**הוכחה:** נגדיר מכפלה פנימית על  $R^{\{Z_0, \dots, Z_t\}}$  באופן הבא:

$$\langle r, s \rangle = \sum_{i=0}^t |Z_i| \cdot r(Z_i) \cdot s(Z_i)$$

נסמן אותה ב- $\circ$ . כמו כן, נגדיר  $L^2(V)$   $\psi : R^{\{Z_0, \dots, Z_t\}} \rightarrow L^2(V)$  כהרחבה לינארית של  $\psi(\chi_{\{Z_i\}}) = \chi_{Z_i}$ . נסמן ב- $A$  את מטריצת השכנוות של  $G$ .

**טענה 3.38** לכל  $r, s \in R^{\{Z_0, \dots, Z_t\}}$  מתקיים:

$$\langle r, s \rangle = \psi(r) \circ \psi(s) \quad (3)$$

$$\langle r, \phi s \rangle = \psi(r) \circ A\psi(s) \quad (4)$$

**הוכחה:** מכיוון וזו תבנית בילינארית, מספיק לבדוק על איברי הבסיס:

$$\begin{aligned} \psi(\chi_{\{Z_i\}}) \circ \psi(\chi_{\{Z_j\}}) &= \chi_{Z_i} \circ \chi_{Z_j} = \sum_{v \in V} \chi_{Z_i}(v) \cdot \chi_{Z_j} = \delta_{i,j} |Z_i| \\ &= \sum_{k=0}^t |Z_k| \chi_{\{Z_i\}} \chi_{\{Z_j\}} = \langle \chi_{\{Z_i\}}, \chi_{\{Z_j\}} \rangle \end{aligned}$$

וזה מסיים את הוכחת (1). לגבי (2):

$$\psi(\chi_{\{Z_i\}}) \cdot A\psi(\chi_{\{Z_j\}}) = \chi_{Z_i} \circ A_{Z_j} = e(Z_i, Z_j) = \langle \chi_{\{Z_i\}}, \phi \chi_{\{Z_j\}} \rangle$$

מכיוון ו- $A$  צמודה עצמית, גם  $\Phi$  צמודה עצמית, ולכן כל הערכים העצמיים שלה ממשיים. לכל  $0 \leq i \leq t$ , ממשפט מינמקס:

$$\begin{aligned} \lambda_i(\Phi) &= \max_L \min_{r \in L \setminus \{0\}} \frac{\langle r, \Phi r \rangle}{\langle r, r \rangle} = \max_L \min_{t \in \psi(L) \setminus \{0\}} \frac{t \cdot At}{\|t\|^2} \\ &\leq \max_{L'} \min_{f \in L' \setminus \{0\}} \frac{t \circ At}{\|f\|^2} = \lambda_i(G) \end{aligned}$$

■ כאשר  $L, L'$  רצים על תתי מרחבים מגודל  $i+1$  של  $L^2(V)$ ,  $R^{\{Z_0, \dots, Z_t\}}$  בהתאמה. ■

**הערה 3.39** מהכיוון השני של משפט המינמקס, אפשר לראות כי:

$$\lambda_{n-1-i}(G) \leq \lambda_{t-i}(\Phi)$$

### 3.7 ולסיום - עוד קצת סיפורים!

בניגוד לגרפים שראינו, אין עד היום שיטה קונסטרוקטיבית לבנות גרפי רמנוג'אן. קיומם קשור למספרים  $p$ -אדיים. זוהי דוגמא לנושא שלא היה נראה שיש לו שימושים בעולם האמיתי, אולם היום משתמשים בהם בתורת הקודים מתקני שגיאות, לבניית רשתות תקשורת, ועוד.

נביט על המספרים השלמים - 11 מופיע מיד אחרי 10, אבל אין להם שום תכונה שתראה זאת.

במאה התשע עשרה ניסו להכניס מושגים טופולוגיים על מנת לבטא קשר שכזה.

**הגדרה 3.40** יהא  $p$  ראשוני קבוע,  $a, b \in \mathbb{Z}$ . נגדיר:

$$d_p(a, b) = \frac{1}{p^\alpha}$$

אם  $p \parallel b - a$  כלומר, אם  $p^\alpha \mid b - a$  אבל  $p^{\alpha+1} \nmid b - a$ .

**תרגיל:**  $d_p$  היא מטריקה. אבל הגדרנו כאן מטריקה קצת מוזרה...

#### דוגמאות

$$p = 2 \quad n \in \mathbb{N}, 2^n \rightarrow 0 \quad \left( \text{since } d_2(2^n, 0) = \frac{1}{2^n} \right) \quad (5)$$

$$p = 3 \quad d_3(2^n, 0) = 1 \quad (6)$$

$$n! \rightarrow 0 \quad (7)$$

**הגדרה 3.41**  $\mathbb{Q}_p$  הוא שדה המספרים ה- $p$ -אדיים, המהווה "השלמה" של  $\mathbb{Q}$  ביחס למטריקה  $d_p$ .

"אחרי שמתרגלים, קל לחיות בעולם ה- $p$ -אדי". אפשר לפתח מעל עולם כזה את כל האנליזה, למשל את אינפי 1: מדוע זה יהיה יותר קל ממה שהכרנו עד כה? למשל ב- $\mathbb{Q}_i$  התכנסות טורים היא הרבה יותר קלה.

אפשר אפילו לעשות גיאומטריה! גיאומטריה היפרבולית מעל הפיאדים (חלוקה של  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  בחבורה האורתוגונלית מקסימלית בה) נותנת לנו עץ בגודל  $p + 1$ . באופן דומה וזהיר, אם מחלקים בחבורה אחרת, אפשר לבנות גרפי רמנוג'אן.