

מערכות דינאמיות ובקרה

תרגיל בית 3

להגשה עד יום שני 14.12.09

כדאי לעבור קודם על השקפים בנושאי **Controllability** ו- **least-square**

http://www.cs.huji.ac.il/course/2009/control/handouts/collected_slides_5a.pdf

http://www.cs.huji.ac.il/course/2009/control/handouts/contr_Boyd.pdf

שאלה 1 – עבור מערכת LTI בזמן בדיד:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

הראה שאות הבקרה הניתן ע"י:

$$u_{\text{in}}(\tau) = B^T (A^T)^{(t-1-\tau)} \left(\sum_{s=0}^{t-1} A^s B B^T (A^T)^s \right)^{-1} x_{\text{des}},$$

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \|u(\tau)\|^2$$

עבור $0 \leq \tau \leq t-1$, הוא בעל האנרגיה, המינימאלית, מבין כל אותות הבקרה המביאים את $x(0) = 0$ ל- $x(t) = x_{\text{des}}$. (הנחיה: הגדר זאת כבעיית ריבועים מינימאליים עם אילוץ, והשתמש בתוצאה שקיבלנו על ההופכי המדומה).

שאלה 2 – עבור מערכת LTI בזמן רציף, $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu$, נסח והסק את התוצאה המקבילה עבור:

$$u_{\text{in}}(\tau) = B^T e^{(t-\tau)A^T} \left(\int_0^t e^{\bar{\tau}A} B B^T e^{\bar{\tau}A^T} d\bar{\tau} \right)^{-1} x_{\text{des}}, \quad 0 \leq \tau \leq t$$

$$\int_0^t \|u(\tau)\|^2 d\tau$$

ופונקצית האנרגיה בזמן רציף:

הראה שהאנרגיה המינימאלית ניתנת ע"י:

$$\int_0^t \|u_{\text{in}}(\tau)\|^2 d\tau = x_{\text{des}}^T Q(t)^{-1} x_{\text{des}}$$

כאשר $Q(t)$ היא מטריצת ה- controllability grammian

$$Q(t) = \int_0^t e^{\tau A} B B^T e^{\tau A^T} d\tau$$

שאלה 3 - בקרה אימפולסיבית.

הראה שבלי הגבלה על האנרגיה של אות הבקרה ניתן להעביר מערכת ליניארית (ניתנת לבקרה) ממצב למצב בזמן קצר כרצוננו.
הנחיה:

א. הראה שפונקציית הכניסה $u(t) = \delta^{(k)}(t)f$ המבוססת על הנגזרת ה-k-ית של פונקציית ההלם מוכפלת בוקטור עמודה f (ברר קודם ע"י אינטגרציה לחלקים מה המשמעות של זה!) מעבירה:

$$x(0_-) = 0 \text{ to } x(0_+) = A^k B f$$

ב. הראה שאות הבקרה המורכב מצירוף ליניארי של נגזרות של פונקציית הלם:

$$u(t) = \delta(t)f_0 + \dots + \delta^{(n-1)}(t)f_{n-1}$$

יעביר בזמן אפס את המצב $x(0)=0$ למצב כלשהו בתחום הניתן להשגה:

$$x(0_+) = B f_0 + \dots + A^{n-1} B f_{n-1}$$

ג. מהי האנרגיה של אות הבקרה הזה?