

מערכות דינאמיות ובקרה תוספת לתרגיל בית 2

להגשה עד יום שני 29.11.09

שאלת השלמה – חקירה נומרית של מודל Lotka-Volterra למין יחיד בזמן בדיד (המוכרת גם כהעתקה הלוגיסטית).

נתונה מערכת דינמית אוטונומית בזמן בדיד המוגדרת ע"י העתקה של קטע היחידה על עצמו:

$$0 < \alpha \leq 4 \text{ עבור } x_{n+1} = f_\alpha(x_n) = \alpha x_n(1 - x_n)$$

1. הוכח שעבור $\alpha < 1$ יש להעתקה נקודת שבת יציבה אחת, $x = 0$.
2. הוכח שעבור $1 < \alpha < 3$ ישנה נקודת שבת יציבה, $x = 1 - 1/\alpha$. מה קורה ליציבות עבור $\alpha = 3$?
3. הראה שעבור $\alpha = 3.2$ נקודת השבת אינה יציבה, אבל במקומה יש שתי נקודות שבת יציבות להעתקה בשני צעדי זמן:
$$x_{n+2} = f_\alpha(x_{n+1}) = f_\alpha(f_\alpha(x_n))$$

מה משמעות נקודות השבת האלה?
4. כתוב תוכנית Matlab המחשבת את נקודות ההתכנסות (attractor) של ההעתקה מנקודה התחלתית אקראית. צייר את כל הנקודות היציבות עבור $3 < \alpha \leq 4$, כתלות ב α . (חשב 1000 צעדים של ההעתקה מנקודה אקראית, וצייר את 900 הנקודות האחרונות, עבור 1000 ערכים של $3 < \alpha \leq 4$ בקפיצות של 0.001).
5. חזור על אותו חישוב וציור, הפעם עבור 200 ערכים בקטע $3.82 < \alpha \leq 3.87$.
6. צייר את סדרת הנקודות (בזמן) המתקבלת עבור $\alpha = 3.57...$, מה לדעתך קורה שם?
7. עבור $\alpha = 4$, הראה שבטרנספורמציה $x = \sin^2(\theta)$, ההעתקה נעשית:
$$\theta_{n+1} = 2\theta_n \bmod(\pi/2)$$

חשב את פילוג הנקודות היציבות (של $0 < x < 1$) במקרה זה עבור נקודת התחלה אקראית θ_0 . (רמז: חשוב על הפיתוח לשבר בינארי אינסופי של θ_0).

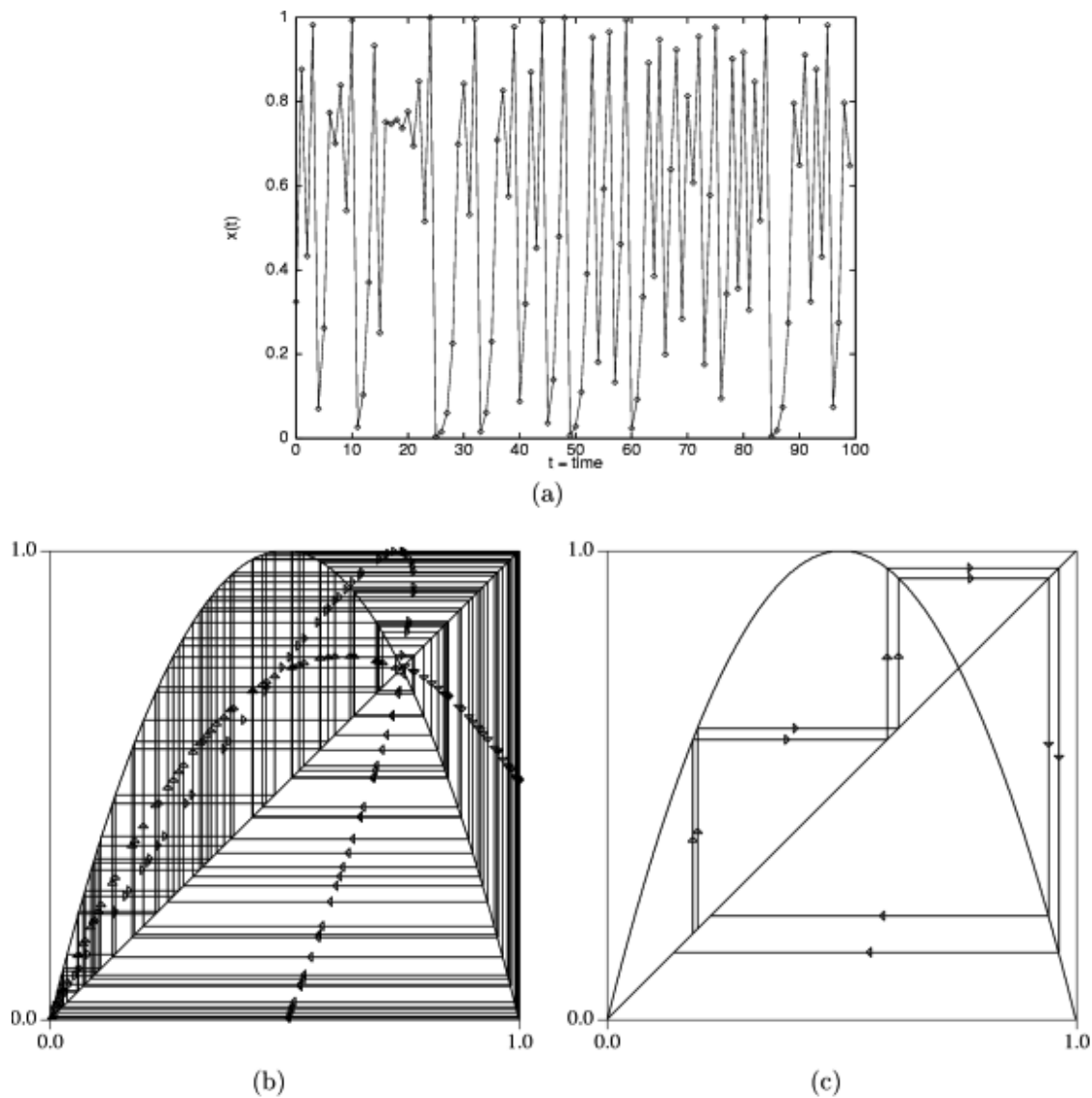


Figure 10.6 Logistic map with $r = 1$: (a) The time series is chaotic and has the appearance of noise. (b) The state space of the same system, which illustrates how the system's trajectory visits every local region. (c) The state space of the same system with only four steps plotted, so as to show how small differences turn into larger differences.

Figure from *The Computational Beauty of Nature: Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptation*. Copyright © 1998–2000 by Gary William Flake. All rights reserved. Permission granted for educational, scholarly, and personal use provided that this notice remains intact and unaltered. No part of this work may be reproduced for commercial purposes without prior written permission from the MIT Press.