

מערכות דינאמיות ובקרה

תרגיל בית 1

להגשה עד יום שני 2.11.09

שאלה 1 - פתרון מערכת משוואות דיפרנציאליות בעזרת טרנספורם לפלס.
נתונה מערכת LTI:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

א. בצעו התמרת לפלס והראו כי מתקיים

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

נרצה למצוא את $L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$.

נניח כי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים. תהי $P = [p_1, \dots, p_n]$ מטריצת הוקטורים העצמיים של A כך ש $p_i^T p_i = 1$ ו $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ערכים עצמיים בהתאמה. נסמן ב $Q = [q_1 \dots q_n]^T = P^{-1}$ המטריצה ההופכית של P ושורותיה הן q_i^T .

כלומר, $A = P\Gamma Q$ כך ש
$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ב. נגדיר $R_k = p_k q_k^T$. הראו ש עבור $i \neq j$ מתקיים $R_i R_j = 0$ וש $R_i^2 = R_i$.

כעת נייצג את $(sI - A)^{-1}$ כסכום של שברים:

ג. הראו כי
$$(sI - A)^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{s - \lambda_k}$$

הדרכה: כפלו את שני הצדדים ב $(sI - A)$, הציבו $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i q_i^T$ והשתמשו בתוצאות מהסעיף הקודם.

ד. השתמשו בתוצאה הנ"ל ובזהויות שנראו בתרגול להראות ש
$$L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \sum_{i=1}^n R_i e^{\lambda_i t}$$

להזכירכם:

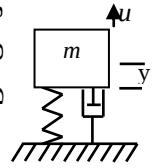
$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$$

כמו כן, אם $A = P\Gamma Q$ כבשאלה זו אז
$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} Q$$

ה. כאת הסיקו ש
$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

שאלה 2 - מערכת מסדר שני.

נתונה מערכת המתארת בולם זעזועים: $m\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$
 קבוע השיכוך וקבוע הקפיץ הם 3 ו-1 בהתאמה והמסה m הינה פרמטר.
 כפי שראינו, ניתן לכתוב את המשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל בעזרת משתני מצב כמערכת משוואות מסדר ראשון: $\dot{\bar{x}} = \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{B}u$
 א. מצאו את המטריצות $\mathbf{A}$ ו- $\mathbf{B}$ כפונקציות של m , בהנחה ש- $\bar{x} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$.



- ב. מצאו ביטויים אנאליטיים עבור הערכים העצמיים של $\mathbf{A}$, $\lambda_{1,2}(m)$ (כפונקציות של m).
- ג. השתמשו ב-MATLAB או כלי שרטוט גרפי כלשהו ושרטטו את $\lambda_{1,2}(m)$ עבור $m \in [2, 20]$ במישור המרוכב.
- ד. הניחו כי המערכת מתחילה ממצב $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו- $u(t)=0$. השתמשו בתוצאת שאלה 1 ורשמו את $x_1(t)$ עבור $m=20$.
- ה. שרטטו את $x_1(t)$ עבור התנאים של הסעיף הקודם בתחום $0 < t < 100$, עבור ערכים שונים של m . הסבירו באופן איכותי כיצד משתנה התנהגות המערכת כפונקציה של m .

שאלה 3 - לינאריזציה וניתוח יציבות.

נתונה מערכת המשוואות הבאה:
 $\dot{x} = -x^3 + y$
 $\dot{y} = -y^3 + x$

מצאו את נקודות השבת של המערכת וסווגו אותן (יציבה, לא יציבה, אוקף).