מערכות דינאמיות ובקרה

לביא שפיגלמן

חשבון וראציות ובקרה אופטימלית בזמן בדיד

- מערכת דיסקרטית עם $\mathbf{x}_0$ נתון ו$t_f = 1$
- מערכת דיסקרטית עם $\mathbf{x}_0$ נתון, $t_f > 1$ נתון, ללא אילוצי קצה על $\mathbf{x}_{t_f}$
- LQR

בתרגול זה נחזור על אופטימיזציה של אות בקרה ביחס לפונקציית מחיר ואילוצי דינמיקה. נמצא תנאים מספיקים (אך לא הכרחיים) לאופטימליות (לוקלית) של אות בקרה.

מערכת דיסקרטית, $t_f = 1$

נניח כי נתונה המערכת $\mathbf{f} : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^n$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0\right) \tag{1}$$

כש$\mathbf{x}(0)$ נתון. ברצוננו למצוא $\mathbf{u}(0)$ שממזער את פונקציית המחיר $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathrm{R}$

$$J = \phi(\mathbf{x}_1) + \mathcal{L}\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0\right)$$

ϕ הוא מחיר המצב הסופי וL הוא מחיר המסלול (שאורכו 1) ואות הבקרה. זו בעיית אופטימיזציה עם אילוצי שיוויון (דינמיקה). נפתור אותה בעזרת וקטור כופלי לגרנג'. נגדיר פונקציית מחיר מורחבת ($\mathbf{A}$ugmented):

$$J_A = \phi(\mathbf{x}_1) + \mathcal{L}\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0\right) + \lambda_1^T[\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0\right) - \mathbf{x}_1] \tag{2}$$

(מעתה נכתוב J ונתכוון בד"כ לJ_A) ונסמן (המילטוניאן דיסקרטי)

$$\mathcal{H}\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \lambda\right) = \mathcal{L}\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0\right) + \lambda_1^T \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0\right)$$

כך שנוכל לכתוב את מש' 2 כ

$$J = \phi(\mathbf{x}_1) + \mathcal{H}\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \lambda\right) - \lambda_1^T \mathbf{x}_1 \tag{3}$$

נרשום מישוואת קירוב מסדר ראשון של שינויים בJ כתוצאה משינויים ב x וu (דיפרנציאל)

$$dJ = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_1} - \lambda_1^T \right) d\mathbf{x}_1 + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}_0} d\mathbf{u}_0 + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}_0} d\mathbf{x}_0 \tag{4}$$

אנו מניחים ש$\mathbf{x}_0$ נתון, כלומר $d\mathbf{x}_0 = 0$. ידוע ש $d\mathbf{x}_1$ זו פונקציה של $d\mathbf{u}_1$ (ו$\mathbf{x}_0$ הנתון). בהמשך, כשנתבונן בסדרות זמן (דיסקרטיות או רציפות) הקשר בין $d\mathbf{x}_t$ ל$d\mathbf{u}_{t-k}$ יהיה מורכב. לכן, גם כאן נתחמק מחישוב זה ע"י שנבחר

$$\lambda_1^T = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_1} \tag{5}$$

ובכך יתאפס הביטוי שתלוי ב$d\mathbf{x}_1$ במש' 4. נקבל ביטוי פשוט לdJ

$$dJ = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}_0} d\mathbf{u}_0$$

כלומר: הנגזרת של J תחת אילוצי הדינמיקה היא $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}_0}$ ולכן נדרוש

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \lambda)}{\partial \mathbf{u}_0} = 0 \tag{6}$$

קיבלנו 3 תנאים (מש' 1, 5, 6) שקיומם מבטיח אופטימום לוקאלי של J. בידינו $n+n+m$ משוואות שמגדירות את $n+n+m$ המשתנים $\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, \lambda_1$.

מערכת דיסקרטית עם $\mathbf{x}_0$ נתון, $t_f > 1$ נתון, ללא אילוצי קצה על $\mathbf{x}_{t_f}$

נניח

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, i) \quad \mathbf{x}_0 \ given \quad i \in \{0, \ldots, N-1\}$$

כלומר בידינו אוסף של אילוצי שיוויון שתלויים בu. נניח גם פונקציית מחיר מהצורה

$$J = \phi(\mathbf{x}_N) + \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, i)$$

ונרצה למזער את J תחת אילוצי השיוויון (דינמיקה). נפתור בעזרת סדרה של כופלי לגרנג' וקטוריים

$$J_A = \phi(\mathbf{x}_N) + \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, i) + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1}^T [\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, i) - \mathbf{x}_{i+1}] \tag{7}$$

כמקודם, נסמן (המילטוניאן דיקרטי)

$$\mathcal{H}^i = \mathcal{H}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, i) = \mathcal{L}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, i) + \lambda_{i+1}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, i)$$

ונכתוב את מש' 7 בעזרתו (תוך שינוי קל באינדקסים)

$$J=\phi\left(\mathbf{x}_N\right)-\lambda_N^T\mathbf{x}_N+\sum_{i=1}^{N-1}\left[\mathcal{H}^i-\lambda_i^T\mathbf{x}_i\right]+\mathcal{H}^0$$

על מנת להבין את התלות של J במשתנים נכתוב (שוב) את הדיפרנציאל

$$dJ=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}_N}-\lambda_N^T\right)d\mathbf{x}_N+\sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{H}^i}{\partial\mathbf{x}_i}-\lambda_i^T\right)d\mathbf{x}_i+\frac{\partial\mathcal{H}^i}{\partial\mathbf{u}_i}d\mathbf{u}_i\right]+\frac{\partial\mathcal{H}^0}{\partial\mathbf{x}_0}dx_0+\frac{\partial\mathcal{H}^0}{\partial\mathbf{u}_0}d\mathbf{u}_0 \tag{8}$$

ונרצה למצוא אוסף תנאים שיאפסו את dJ. גם הפעם ניעזר בכך ש$\mathbf{x}_0$ נתון ולכן נציב $d\mathbf{x}_0=0$. גם הפעם נתחמק מחישוב $d\mathbf{x}_i\left(d\mathbf{u}_{1:i-1}\right)$ ע"י שנבחר λ_i כך ש

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}_N}-\lambda_N^T=0\quad,\quad\frac{\partial\mathcal{H}^i}{\partial\mathbf{x}_i}-\lambda_i^T=0$$

כלומר

$$\lambda_N^T=\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}_N}\quad,\quad\lambda_i^T=\frac{\partial\mathcal{H}^i}{\partial\mathbf{x}_i}=\frac{\partial\mathcal{L}\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i,i\right)}{\partial\mathbf{x}_i}+\lambda_{i+1}^T\frac{\partial\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i,i\right)}{\partial\mathbf{x}_i}$$

כלומר בחרנו λ_i שמקיימים נוסחת נסיגה מN אחורה בזמן עם תנאי התחלה בזמן N.
לאחר ההצבות הנ"ל

$$dJ=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\partial\mathcal{H}^i}{\partial\mathbf{u}_i}d\mathbf{u}_i$$

כעת, על מנת שנמצא אקסטרמום נרצה לאפס את הסכום הנ"ל. כיוון ש$\mathbf{u}$ אינו מוגבל עלינו לאפס איבר איבר

$$\frac{\partial\mathcal{H}^i}{\partial\mathbf{u}_i}=0\quad,\quad i\in\{0,\ldots,N-1\}$$

לסיכום על מנת למצוא אקסטרמום של הבעיה המאולצת די לפתור את המשוואות הבאות

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{i+1}&=\mathbf{f}(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i,i)\\\lambda_i^T&=\frac{\partial\mathcal{L}\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i,i\right)}{\partial\mathbf{x}_i}+\lambda_{i+1}^T\frac{\partial\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i,i\right)}{\partial\mathbf{x}_i}\\&\mathbf{x}_0\ given\quad,\quad\lambda_N^T=\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}_N}\end{aligned}$$

תוך הצבת $\mathbf{u}_i$ כך ש $\frac{\partial\mathcal{H}^i}{\partial\mathbf{u}_i}=0$. כלומר $\mathbf{u}$ שמקיים

$$\frac{\partial\mathcal{L}\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i,i\right)}{\partial\mathbf{u}_i}+\lambda_{i+1}^T\frac{\partial\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i,i\right)}{\partial\mathbf{u}_i}=0$$

מכאן ש-$\mathbf{u}$ הופך את המשוואות הנ"ל למצומדות כי $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i\left(\mathbf{x}_i, \lambda_{i+1}\right)$. בנוסף, משוואת הדינמיקה מתקדמת בזמן ומקיימת תנאי קצה על $\mathbf{x}_0$ ואילו משוואת λ נסוגה בזמן ומקיימת תנאי קצה על λ_N. בעיה מסוג זה מכונה two point boundary-value problem ופתרונה יכול להיות קשה במקרה הכללי. בהמשך נראה מקרים פרטיים בהם הבעיה פתירה אנליטית. אם הבעייה אינה פתירה אנליטית ישנן שיטות איטרטיביות שמתכנסות לפתרונות (אופטימליים לוקלית).

על מנת לוודא שאקסטרמום שמצאנו הו מינימום נחשב את הניגזרת השניה (מטריצת הHessian) של dJ ונרצה שהיא תהיה Positive Semi Definite.

דוגמא: מחיר ריבועי ודינמיקה לינארית

תהי המערכת הלינארית (time variant)

$$x_{i+1} = \mathbf{A}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{u}_i$$

והמחיר

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}_N^T\mathbf{Q}_N\mathbf{x}_N + \sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}_i^T\mathbf{Q}_i\mathbf{x}_i + \frac{1}{2}\mathbf{u}_i\mathbf{R}\mathbf{u}_i\right)$$

כש $\mathbf{Q}$ ו$\mathbf{R}$ הן positive definite ו$\mathbf{x}_0$ נתון.

פתרון (חלקי) נכתוב את נוסחת הנסיגה של λ

$$\begin{aligned}
\lambda_i^T &= \frac{\partial\mathcal{L}\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, i\right)}{\partial\mathbf{x}_i} + \lambda_{i+1}^T\frac{\partial\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, i\right)}{\partial\mathbf{x}_i} \\
&= \mathbf{x}_i^T\mathbf{Q}_i + \lambda_{i+1}^T\mathbf{A}_i \\
\lambda_N^T &= \mathbf{x}_N^T\mathbf{Q}_N
\end{aligned}$$

נרשום את $\mathcal{H}^i$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^i &= \mathcal{L}\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, i\right) + \lambda_{i+1}^T\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, i\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{x}_i^T\mathbf{Q}_i\mathbf{x}_i + \frac{1}{2}\mathbf{u}_i\mathbf{R}\mathbf{u}_i + \lambda_{i+1}^T\left(\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{u}_i\right)
\end{aligned}$$

נגזור לפי $\mathbf{u}_i$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{H}^i}{\partial\mathbf{u}_i} &= \mathbf{u}_i^T\mathbf{R}_i + \lambda_{i+1}^T\mathbf{B}_i = 0 \\
\mathbf{u}_i &= -\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T\lambda_{i+1}
\end{aligned}$$

לסיכום, קיבלנו אוסף משוואות הפרש לינאריות ומצומדות עם תנאי קצה בקצוות נגדיים

$$\begin{aligned}
x_{i+1} &= \mathbf{A}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{u}_i \\
\lambda_i &= \mathbf{Q}_i^T\mathbf{x}_i + \mathbf{A}_i^T\lambda_{i+1} \\
\mathbf{u}_i &= -\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T\lambda_{i+1} \\
\lambda_N &= \mathbf{Q}_N^T\mathbf{x}_N \\
&\quad \mathbf{x}_0\ given
\end{aligned}$$

על מנת לפתור את המשוואות הנ"ל ניעזר בטענה:

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \mathbf{P}_i\mathbf{x}_i\\ \mathbf{P}_{i-1} &= \mathbf{Q}_{i-1}^T + \mathbf{A}_{i-1}^T(I+\mathbf{P}_i\mathbf{B}_{i-1}\mathbf{R}_{i-1}^{-1}\mathbf{B}_{i-1}^T)^{-1}\mathbf{P}_i\mathbf{A}_{i-1}\\ \mathbf{P}_N &= \mathbf{Q}_N^T\end{aligned}$$

משוואת הנסיגה של $\mathbf{P}$ ידועה בשם משוואת Ricatti.

הוכחה (באינדוקציה על i):

ראינו נכונות עבור $i=N$ נניח נכונות עבור $i+1$, כלומר

$$\lambda_{i+1} = \mathbf{P}_{i+1}\mathbf{x}_{i+1}$$

ונרצה להוכיח $\lambda_i = \mathbf{P}_i\mathbf{x}_i$.

נציב $x_{i+1} = \mathbf{A}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{u}_i$ וכן $\mathbf{u}_i = -\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T\lambda_{i+1}$

$$\begin{aligned}\lambda_{i+1} &= \mathbf{P}_{i+1}(\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{u}_i)\\ &= \mathbf{P}_{i+1}(\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T\lambda_{i+1})\end{aligned}$$

נקבץ איברים:

$$\begin{aligned}(I+\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{B}_i\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T)\lambda_{i+1} &= \mathbf{P}_{i+1}\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i\\ \lambda_{i+1} &= (I+\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{B}_i\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T)^{-1}\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i\end{aligned}$$

נציב את λ_{i+1} הנ"ל במשוואת הנסיגה של λ

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \mathbf{Q}_i^T\mathbf{x}_i + \mathbf{A}_i^T\lambda_{i+1}\\ &= \mathbf{Q}_i^T\mathbf{x}_i + \mathbf{A}_i^T(I+\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{B}_i\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T)^{-1}\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i\\ &= (\mathbf{Q}_i^T + \mathbf{A}_i^T(I+\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{B}_i\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T)^{-1}\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{A}_i)\mathbf{x}_i\\ &= \mathbf{P}_i\mathbf{x}_i\end{aligned}$$

משמצאנו את $\lambda_i(\mathbf{x}_i)$ ניתן לקבל את $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i)$ ע"י הצבה של λ_{i+1} במשוואה של $\mathbf{u}_i$ אופן הבא:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i &= -\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T\lambda_{i+1}\\ &= -\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T(I+\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{B}_i\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T)^{-1}\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i\end{aligned}$$