מערכות דינאמיות ובקרה

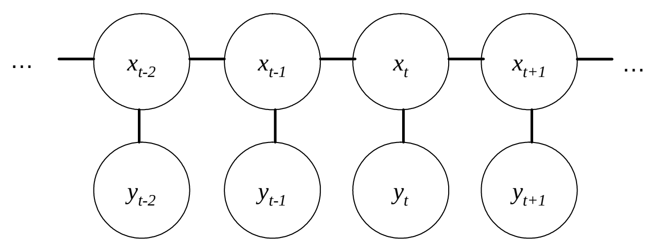
לביא שפיגלמן

8 בינואר 2007

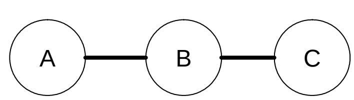
- מודלים גרפיים ומערכת לינארית גאוסיאנית
- טרנספורמציה אפינית של משתנים גאוסיאנים, התפלגויות משותפות ומותנות
- מסנן קלמן (Kalman Filter)

מודלים גרפיים הסתברותיים (מבוא)

מודלים גרפיים הסתברותיים מאפשרים להתמודד עם בעיה שצצה כשעלינו ללמוד ולבצע חישובים על פונקציית הסתברות של אוסף משתנים מקריים $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. ללא מידע מוקדם על אי תלויות בין המשתנים עלינו ללמוד פוקציה מרובת משתנים וכל שיערוך עלול לדרוש סכימה (או אינטגרציה) רב מימדית. מודלים מרקוביים (בפרט חבויים) ניתנים להצגה גרפית וצורתה (כגרף לא מכוון) היא



מבנה הגרף מכיל אינפורמציה על אי תלויות מותנות. יהיו A, B, C 3 חלקים זרים (לאו דווקה צמתים בודדות) של הגרף כך שכל מסלול בגרף בין צומת שבA וצומת שבC עובר דרך B



אז כל התפלגות שתואמת את הגרף מקיימת כי $P(A, C|B) = P(A|B)P(C|B)$ כלומר A אינו תלוי בB בהינתן C. במקרה של שרשרת מרקוב (התרשים הקודם) המצבים

הבאים בזמן אינם תלויים בתצפיות או במצבים הקודמים בהינתן המצב הנוכחי (המצב מכיל את כל האינפורמציה הרלונטית). כמו כן התצפית הנוכחית אינה תלויה בתצפיות האחרות או במצבים האחרים בהינתן המצב הנוכחי. במערכת לינארית (ובפרט אם היא דיסקרטית וגאוסיאנית) המצב זהה

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\omega} \\ \nu &\sim \mathcal{N}(0, Q) \\ \omega &\sim \mathcal{N}(0, R) \end{aligned}$$

קל לראות מהנוסחאות כי אי התלויות הנ"ל מתקיימות. בהמשך ננצל תכונות אלה על מנת לחשב את ההתפלגות של $\mathbf{x}_t$ בצורה רקורסיבית מ $\mathbf{x}_{t-1}$ ו y_t.

משתנים גאוסיאנים וטרנספורמציות אפיניות

יהי $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$ משתנה מקרי גאוסיאני $\mathbf{x} \sim (\bar{x}, \Sigma_{\mathbf{x}})$ אז

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma_{\mathbf{x}}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^T \Sigma_{\mathbf{x}}^{-1} (\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})}$$

כשהתוחלת היא $\bar{\mathbf{x}} = E(x)$ והקווריאנס $\Sigma_{\mathbf{x}} = \Sigma_{\mathbf{x}}^T = E(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^T$.

יהי $\mathbf{x}$ כמיקודם ויהי $\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ (טרנספורמציה אפינית) כש $\mathbf{H}$ ו $\mathbf{b}$ קבועים.

$$\bar{\mathbf{z}} = E(\mathbf{z}) = E(\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{b}) = \mathbf{H}E(\mathbf{x}) + \mathbf{b} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{z}} &= E[(\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}})(\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}})^T] \\ &= E[\mathbf{H}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\mathbf{H}^T] \\ &= \mathbf{H}\Sigma_{\mathbf{x}}\mathbf{H}^T \end{aligned}$$

לכן $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}, \mathbf{H}\Sigma_{\mathbf{x}}\mathbf{H}^T)$

כעת נניח

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon} \\ \mathbf{x} &\sim (\bar{x}, \Sigma_{\mathbf{x}}) \\ \boldsymbol{\epsilon} &\sim (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \Sigma_{\boldsymbol{\epsilon}}) \end{aligned}$$

אז ההתפלגות המשותפת של $\mathbf{x}$ ו $\boldsymbol{\epsilon}$ (בלתי תלויים) היא

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{\mathbf{x}} & \\ & \Sigma_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \end{bmatrix} \right)$$

כמו כן

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{z}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathbf{H} & I \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{H}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}}$$

וכפי שראינו קודם $\tilde{\mathbf{z}} \sim \mathcal{N}(\bar{\tilde{\mathbf{z}}}, \Sigma_{\tilde{\mathbf{z}}})$ כש:

$$\bar{\tilde{\mathbf{z}}} = E(\tilde{\mathbf{z}}) = E(\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathbf{H} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{H}\mathbf{x} + \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix}$$

וכן

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{\mathbf{z}}} &= \begin{bmatrix} \Sigma_{\mathbf{x}} & \Sigma_{\mathbf{xz}} \\ \Sigma_{\mathbf{zx}} & \Sigma_{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{H}}\Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\mathbf{H}}^T \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathbf{H} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{\mathbf{x}} & \\ & \Sigma_{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathbf{H} & I \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_{\mathbf{x}} & \Sigma_{\mathbf{x}}\mathbf{H}^T \\ \mathbf{H}\Sigma_{\mathbf{x}} & \mathbf{H}\Sigma_{\mathbf{x}}\mathbf{H} + \Sigma_{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

נרצה להשתמש בתוצאה הנ"ל למציאת נוסחה לקידום בזמן של ההתפלגות של $\mathbf{x}$. נסמן ב

$$\mathbf{x}_{t|t-1} \sim P(x_t | x_{t-1})$$

את האקסטרפולציה של $\mathbf{x}_t$ מ$\mathbf{x}_{t-1}$ לפני קבלת התצפית $\mathbf{y}_t$. ניתן להציב ב$\{\mathbf{z}, \mathbf{H}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\epsilon}\}$ את $\{\mathbf{y}_t, \mathbf{C}, \mathbf{x}_{t|t-1}, \boldsymbol{\omega}\}$ או $\{\mathbf{x}_{t|t-1}, \mathbf{A}, \mathbf{x}_t, \boldsymbol{\nu}\}$ לקבלת

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t|t-1} &\sim \mathcal{N}(\underbrace{\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_{t-1}}_{\bar{\mathbf{x}}_{t|t-1}}, \underbrace{\mathbf{A}\Sigma_{\mathbf{x}_{t-1}}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}}_{\Sigma_{t|t-1}}) \\ \mathbf{y} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \mathbf{C}\Sigma_{t|t-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}) \end{aligned}$$

Kalman Filter

כעת נרצה למצוא את $P(\mathbf{x}_{t|t-1}|\mathbf{y}_t) = P(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_t) = p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{y}_t)$.

בשלב זה ניעזר ב'עובדה' הבאה:

יהיו $\mathbf{x}$ ו$\mathbf{y}$ משתנים מקריים בעלי התפלגות משותפת גאוסיאנית

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{\mathbf{x}} & \Sigma_{\mathbf{xy}} \\ \Sigma_{\mathbf{xy}}^T & \Sigma_{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \right)$$

אז

$$\begin{aligned} \mathbf{x}|\mathbf{y} &\sim \mathcal{N}(w, \Lambda) \\ w &= \bar{\mathbf{x}} + \Sigma_{\mathbf{xy}}\Sigma_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\ \Lambda &= \Sigma_{\mathbf{x}} - \Sigma_{\mathbf{xy}}\Sigma_{\mathbf{y}}^{-1}\Sigma_{\mathbf{xy}}^T \end{aligned} \tag{1}$$

נשים לב שכצפוי, מטריצת הקוואריאנס קטנה כתוצאה מההתניה. על מנת למצוא את התפלגות $\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t} = \mathbf{x}_{t|t-1}|\mathbf{y}_t$ נבצע את סדרת ההצבות הבאה במישוואות הנ"ל

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &\leftarrow \mathbf{x}_{t|t-1} \\
\mathbf{y} &\leftarrow \mathbf{y}_t \\
\Sigma_{\mathbf{x}} &\leftarrow \Sigma_{t|t-1} \\
\Sigma_{\mathbf{y}} &\leftarrow \mathbf{C}\Sigma_{t|t-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \\
\Sigma_{\mathbf{xy}} &\leftarrow \Sigma_{t|t-1}\mathbf{C}^T \\
\bar{\mathbf{y}} &\leftarrow \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_{t|t-1}
\end{aligned}$$

לקבלת

$$\begin{aligned}
w = \bar{\mathbf{x}}_t &= \bar{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \Sigma_{t|t-1}\mathbf{C}^T\left(\mathbf{C}\Sigma_{t|t-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}\right)^{-1}(\mathbf{y}_t - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \\
\Lambda = \Sigma_{\mathbf{x}_t} &= \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1}\mathbf{C}^T\left(\mathbf{C}\Sigma_{t|t-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{C}\Sigma_{t|t-1} \qquad (2)
\end{aligned}$$

וכשכפי שהגדרנו קודם

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}}_{t|t-1} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_{t-1} \qquad (3) \\
\Sigma_{t|t-1} &= \mathbf{A}\Sigma_{\mathbf{x}_{t-1}}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \qquad (4)
\end{aligned}$$

קיבלנו נוסחת נסיגה ל$\Sigma_{\mathbf{x}_t}$ שתלויה ב $\Sigma_{\mathbf{x}_{t-1}}$ (באופן רקורסיבי) ובפרמטרים של המודל $(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$ אך אינה תלויה בתצפיות וקיבלנו נוסחת נסיגה ל $\bar{\mathbf{x}}_t$ שתלויה ב$\mathbf{x}_{t-1}$ (באופן רקורסיבי), בתצפית $\mathbf{y}_t$, ב$\Sigma_{\mathbf{x}_{t-1}}$ ובפרמטרים של המודל.

נהוג לסמן

$$\mathbf{K}_t = \Sigma_{t|t-1}\mathbf{C}^T\left(\mathbf{C}\Sigma_{t|t-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}\right)^{-1} \qquad (5)$$

כש$\mathbf{K}_t$ נקרא הKalman Gain הצבת $\mathbf{K}_t$ בנוסחאות 2 נ(ומעט קיבוץ איברים) נותנת

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}}_t &= \bar{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t(\mathbf{y}_t - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \qquad (6) \\
\Sigma_{\mathbf{x}_t} &= (I - \mathbf{K}_t\mathbf{C})\Sigma_{t|t-1} \qquad (7)
\end{aligned}$$

נשים לב שניתן לחשב את$\mathbf{K}_t$ מראש, ללא התצפיות ע"י האיטרציות הבאות

$$\cdots\Sigma_{t+1|t} \leftarrow \Sigma_{\mathbf{x}_t} \leftarrow \mathbf{K}_t \leftarrow \Sigma_{t|t-1}\cdots$$

תוך שימוש במשוואות 4, 5 ו7 ולאחר מכן לחשב את

$$\cdots\bar{\mathbf{x}}_t \leftarrow \bar{\mathbf{x}}_{t|t-1} \leftarrow \bar{\mathbf{x}}_{t-1}\cdots$$

בעזרת משוואות 3 ו7 (שנשענות על חישוב קודם של $\mathbf{K}_t$).

בספרים מסוימים מופיעה הנוסחא הבאה ל$\Sigma_{\mathbf{x}_t}$ במקום הנוסחה 2:

$$\Sigma_{\mathbf{x}_t} = \left(\Sigma_{t|t-1}^{-1} + \mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1} \qquad (8)$$

ניתן להראות את הזהות הנ"ל בעזרת הMatrix Inversion Lemma.

הערה, עבור $\mathbf{A}$ יציבה מטריצת הקוואריאנס $\Sigma_{\mathbf{x}_t}$ מגיעה עם חלוף מספר צעדי זמן לsteady state שבו $\Sigma_{\mathbf{x}_t} \approx \Sigma_{\mathbf{x}_{t-1}}$ כך שהKalman Gain שואף לקבוע.

Matrix Inversion Lemma

נניח כי זוג מטריצות כלשהן מקיימות $\mathbf{WV} = \mathbf{VW} = \mathbf{I}$ ונבחר חלוקה של $\mathbf{V}$ ו-$\mathbf{W}$ לתתי מטריצות (באופן שגדלי המטריצות יתאימו זה לזה):

$$\overbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}^{\mathbf{W}}\overbrace{\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}}^{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA+FC & EB+FD \\ GA+HC & GB+HD \end{bmatrix}$$

נמצא בעזרת כל אחת מהמשוואות הנ"ל ייצוג של חלקי $\mathbf{V}$ בעזרת חלקי $\mathbf{W}$. בחלק מהמקרים יתקבלו ייצוגים שונים לאותו החלק והשוואתם תיתן זהות.

מתוך סט המשוואות הראשון (איבר שמאלי תחתון) נקבל $\mathbf{CE} + \mathbf{DG} = \mathbf{0}$ ולכן (נניח קיום כל ההופכיות) $\mathbf{G} = -\mathbf{D^{-1}CE}$.

מתוך האיבר השמאלי העליון :

$\mathbf{AE} + \mathbf{BG} = \mathbf{I}$ ולכן $\mathbf{AE} - \mathbf{BD^{-1}CE} = \mathbf{I}$ ולכן $(\mathbf{A} - \mathbf{BD^{-1}C})\mathbf{E} = \mathbf{I}$ ולכן

$$\mathbf{E} = (\mathbf{A} - \mathbf{BD^{-1}C})^{-1}$$

נציב חזרה במשוואה הקודמת ונקבל

$$\mathbf{G} = -\mathbf{D^{-1}C}(\mathbf{A} - \mathbf{BD^{-1}C})^{-1}$$

נמשיך באופן דומה על מנת לייצג את שאר $\mathbf{V}$ בסט הראשון לקבלת

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BD^{-1}C})^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \\ -\mathbf{D^{-1}C}(\mathbf{A} - \mathbf{BD^{-1}C})^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix}$$

ובסט השני לקבלת

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BD^{-1}C})^{-1} & -(\mathbf{A} - \mathbf{BD^{-1}C})\mathbf{BD}^{-1} \\ -(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix}$$

וקיבלנו שתי זהויות לא טריוויאליות. אחת המשוואות המקוריות היתה $\mathbf{GB} + \mathbf{HD} = \mathbf{I}$ וממנה נגזר $\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \mathbf{GB})\mathbf{D}^{-1}$. כמו כן ראינו ש-$\mathbf{H} = (\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$ וכי $\mathbf{G} = -\mathbf{D^{-1}C}(\mathbf{A} - \mathbf{BD^{-1}C})^{-1}$. לכן מתקיימת הזהות

$$(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BD}^{-1}$$

אז, אם $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T$ תתקבל הזהות

$$(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{C}^T)^{-1} = \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{D}^{-1}$$

בעזרת זהות זו מתקבלת השקילות בין המשוואה 2 לבין המשוואה 8. זהויות אלה גם משמשות בחישוב $\mathbf{x}|\mathbf{y}$ אשר במשוואה 1.