מערכות דינאמיות ובקרה
סיכום שיעור

לביא שפיגלמן

11 בנובמבר 2006

נושאים:

- אופטימיזציה עם אילוצים (כופלי לגרנג')

אופטימיזציה עם אילוצים (כופלי לגרנג')

כופלי לגרנג' מאפשרים לפתור בעיית אופטימיזציה עם אילוצים ע"י מעבר לבעית אופטימיזציה ללא אילוצים בעלת נקודות קיצון זהות לאלה של הבעיה המאולצת.

נתייחס לבעיה הבאה: תהי $f(\mathbf{x}) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ ו $\mathbf{g}(\mathbf{x}) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^k$. נרצה לפתור את בעיית האופטימיזציה הבאה:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ s.t. & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{array}$$

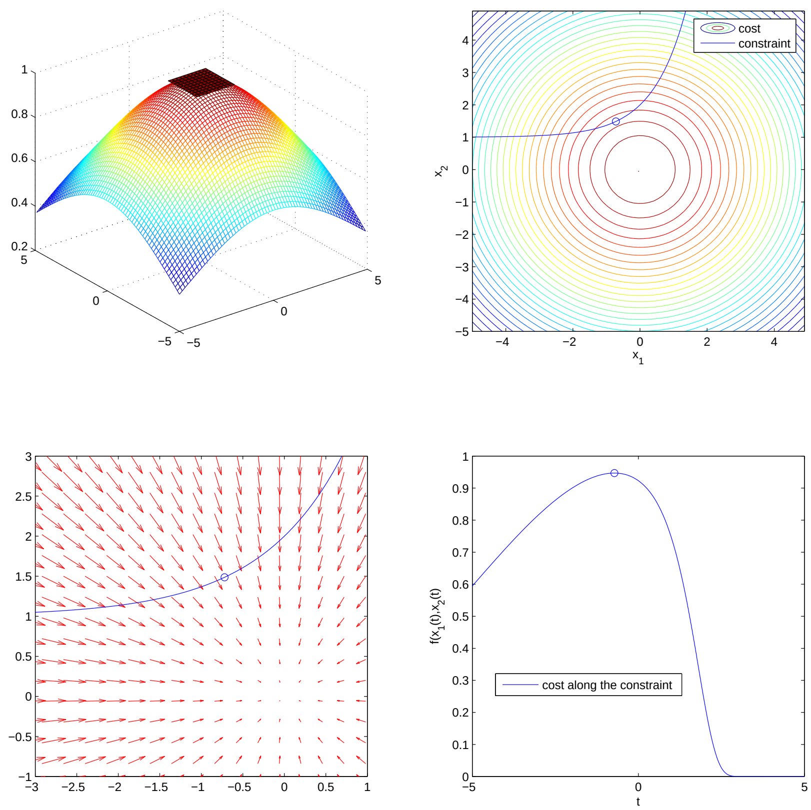
למשל, נניח ש $f(\mathbf{x})$ הינה פונקציית מחיר המתארת את העלות של מסלול טיסה שמאופיין על ידי $\mathbf{x}$ ו $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ הינו סט אילוצים על מסלול הטיסה. נרצה למצוא $\mathbf{x}$ שממזער את המחיר תחת האילוצים.

נניח ש f גזירה. כידוע, תנאי הכרחי לאקסטרמום ב $\mathbf{x}^*$ הוא איפוס הגרדיאנט

$$\left.\left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right]^T\right|_{\mathbf{x}^*} = \left.\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T\right|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{0}$$

כלומר, בכל כיוון ערך הפונקציה אינו משתנה (בסדר ראשון). ראה דוגמא בשרטוט (שמאלי עליון).

עם אילוץ: כעת יש למצוא אקסטרמום מתוך סט הערכים של $\mathbf{x}$ המקיים את האילוץ.



נשים לב שהמשוואה $g_i(\mathbf{x})=0$ מגדירה קו גובה 0 של הפונקציה $g_i(\mathbf{x})$. כידוע, קווי גובה הם קווים בהם הפונקציה היא שווה ערך ולכן הגרדיאנט $\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}$ ניצב לקו הגובה.

טענה: (עבור אילוץ בודד) אם x_0 נקודת קיצון של $f(\mathbf{x})$ תחת האילוץ ת$g(\mathbf{x})=0$, אז קיים $\lambda\in\mathrm{R}$ כך ש $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}=\lambda\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}$. כלומר בנקודת הקיצון המאולצת, f משתנה רק בכיוון שניצב לכיוון התנועה שמקיים את האילוץ ולכן ע"פ הטענה תזוזה קטנה על אילוץ אינה משפרת את ערך האופטימיזציה.

טענה: (עבור k אילוצים) אם x_0 נקודת קיצון של $f(\mathbf{x})$ תחת האילוצים $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ אז

קיים $\mathrm{R}^k \in \boldsymbol{\lambda}$ כך ש $\left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}} {}^T= \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}$ כאשר

$$\left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}_0} & \cdots & \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x}_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \left.\frac{\partial g_m}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}_0} & \cdots & \left.\frac{\partial g_m}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x}_0} \end{bmatrix}$$

היא מטריצת היעקוביאן. כלומר בנקודת הקיצון המאולצת, f משתנה רק בכיוונים שנפרסים ע"י וקטורים שניצבים לאילוצים. לכן, אם קיים כיוון תזוזה בחיתוך של האילוצים, כיוון זה (שנמצא בnull space של היעקוביאן) אינו מכיל רכיב של גרדיאנט f ומכאן (ע"פ הטענה) תזוזה קטנה בכיוון זה אינה משנה את ערך האופטימיזציה.

כאת נגדיר את הLagrangian:

$$L = f(\mathbf{x}) -^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

קל לראות כי

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} -^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}$$

וכן

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

אם נמצא $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ כך ש $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0$ וכן $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0$ הרי שעבור $\mathbf{x}$ זה יתקיים $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} {}^T= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ וכן $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. יש לשים לב שבכך נמצא אקסרמום (אחד או יותר) של f ויש צורך לבדוק אם הוא מקסימום או מינימום (למשל, אם יש קבוצה סופית של נקודות קיצון אפשר לבחור בנקודה $\mathbf{x}$ בעלת ה$f(\mathbf{x})$ הקטן/גדול ביותר).

דוגמה: תנועה בזמן ואנרגיה מינימליים

נתונה מסה m על מסילה ללא חיכוך. המסה נמצאת במנוחה בנקודה 0 בזמן 0. ברצונינו להפעיל כוח קבוע, k על המסה, עד שהיא תגיע לנקודה s. נסמן בt את זמן התנועה עד להגעה לs ובy את מיקום המסה.

הוקטור $\mathbf{x} = (t, k)$ מכיל משתנים אשר מקיימים אילוץ אשר נובע המפיזיקה של המערכת. נזכור שע"פ החוק השני של ניוטון

$$\ddot{y} = \frac{k}{m}$$

ולכן

$$\dot{y}(t) = \int_0^t \frac{k}{m} d\tau = \frac{k}{m} t$$

ונקבל

$$y(t) = \int_0^t \frac{k}{m} t d\tau = \frac{kt^2}{2m}$$

אנו רוצים ש$y(t) = s$ ונכתוב זאת כאילוץ

$$g(k,t) = \frac{kt^2}{2m} - s = 0$$

.

ברור כי לכל k (חיובי) קיים t שמקיים את האילוץ (כלומר t שבו המסה תגיע לs). כעת ברצונינו להגדיר קריטריון f לאופטימליות של פתרון (k,t) מסויים.

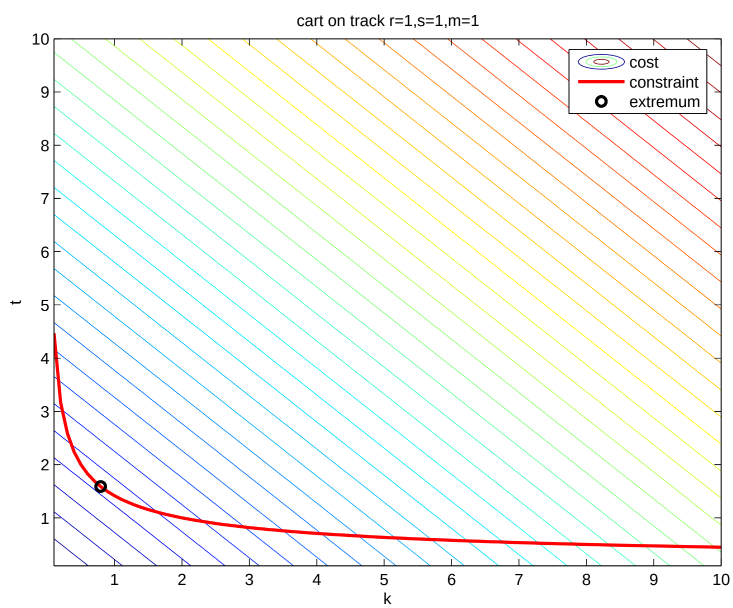
נניח שהיינו מעוניינים למזער את האנרגיה הדרושה בלבד. האנרגיה שנדרשת היא ks ומכאן שהזוג $(k \to 0 \ , \ t \to \infty)$ הוא הפתרון. זה מצב בו המחיר המתקבל כשנעים לאורך האילוץ יורד ככל שk קטן וt גדל (ושואף ל0 אסימפטוטית)

כעת נניח שברצונינו גם להגיע למרחק s תוך בזמן קצר. ניתן לתרגם זאת לפונקציות מחיר רבות. נבחר ב

$$f(k,t) = ks + rt$$

כשr מהווה tradeoff בין מינימום אנרגיה למינימום זמן.

מבחינה גרפית:



על מנת למצוא זוג (k,t) שממזער את f תחת אילוץ המערכת נגדיר את הLagrangian

$$L = f(k,t) - \lambda g(k,t) = ks + rt - \lambda\left(\frac{kt^2}{2m} - s\right)$$

. נגזור לפי k, t, וλ לקבלת 3 משוואות:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial k} &= s - \frac{\lambda t^2}{2m} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= r - \frac{\lambda kt}{m} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \frac{kt^2}{2m} - s = 0 \end{aligned}$$

נשים לב שהמשוואה האחרונה פשוט החזירה את האילוץ. כעת ניתן לפתור עבור λ, להציב את הפתרון חזרה במשוואות ולפתור עבור (k,t)

מהמשוואה השנייה

$$\lambda = \frac{mr}{kt}$$

מהצבת λ במשוואה הראשונה

$$\begin{aligned} s - \frac{rt}{2k} &= 0 \\ k &= \frac{rt}{2s} \end{aligned}$$

מהצבת k במשוואה השלישית נמצא ש $t = \left(\frac{4ms^2}{r}\right)^{\frac{1}{3}}$ ואם כעת נציב את t במשוואה הראשונה נקבל $k = \left(\frac{r^2m}{2s}\right)^{\frac{1}{3}}$