

מערכות דינאמיות ובקרה סיכום שיעור

לביא שפיגלמן

4 בנובמבר 2007

- פתרון מערכת LTI עם קלט.
- transfer function
- מערכת עם משוב
- state feedback
- מעבר למערכת דיסקרטית

פתרון מערכת LTI עם קלט

נתונה המערכת

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2)$$

בכדי למצוא את $\mathbf{x}(t, \mathbf{u})$, נפעיל את טרנספורם לפלס על משוואה 1 :

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

לאחר סידור מחדש:

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

ראינו ש

$$\mathcal{L}^{-1} \left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right] = e^{\mathbf{A}t} \quad (3)$$

נזכור תכונה חשובה של התמרת לפלס

$$\mathcal{L} \left[\underbrace{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau}_{f(t)*g(t)} \right] = f(s)g(s)$$

נציב $f(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ו $g(s) = \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$ וכן את משוואה 3 ונקבל כי

$$\mathcal{L}^{-1} \left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \right] = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

מכאן שהפתרון של $\mathbf{x}(t)$ הוא:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)}_{\text{zero input response}} + \underbrace{\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau}_{\text{zero state response}} \quad (4)$$

קל לראות כי המצב הוא סכום של דינמיקה שתלויה בקלט אך אינה תלויה במצב ההתחלתי ודינמיקה שתלויה במצב ההתחלתי אך אינה תלויה בקלט.

נניח, בה"כ (בלי הגבלת הכלליות) כי $\mathbf{x}(0) = 0$, אז במרחב התדר

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{u}(s)$$

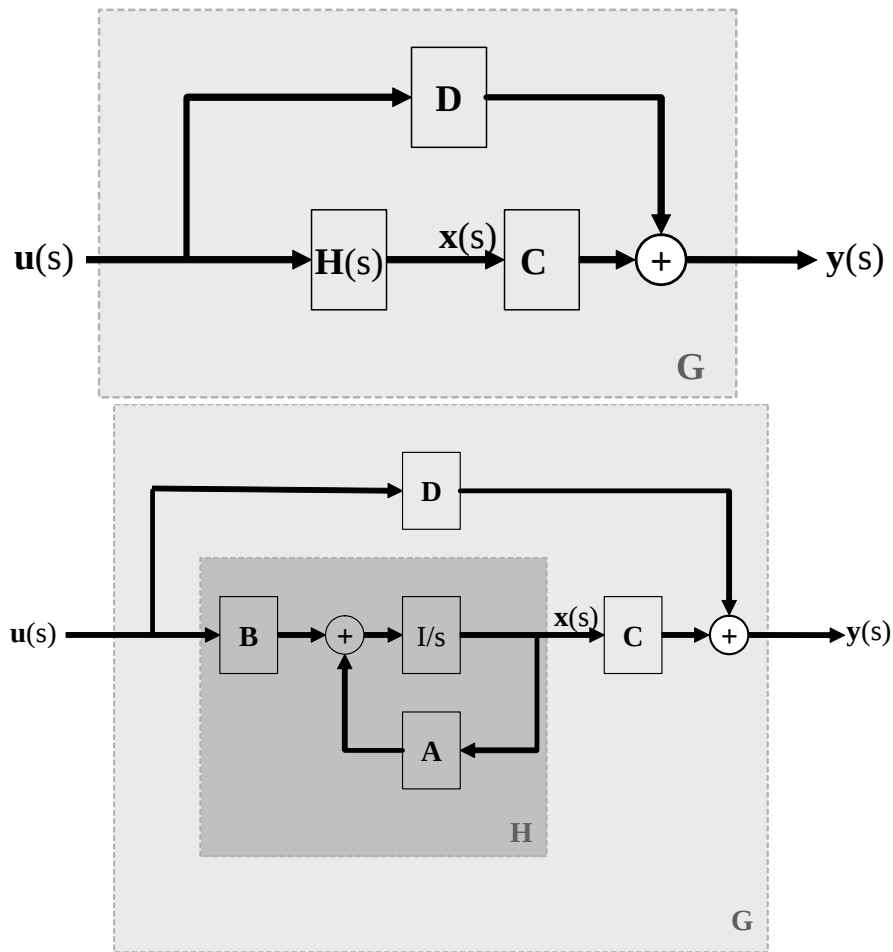
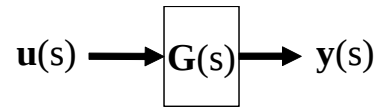
ל $\mathbf{H}(s)$ אנו נקרא מטריצת פונקציות המעבר (*transfer functions*) מ $\mathbf{u}$ ל $\mathbf{x}$ כי היא מעבירה את הקלט $\mathbf{u}$ למצב $\mathbf{x}$.

כדאי לזכור ש $(\mathbf{H}(s))_{ij}$, כמו כל פונקציית מעבר של מערכת לינארית, זו מנה של שני פולינומים ב s .

כעת נרצה למצוא את פונקציית המעבר מ $\mathbf{u}$ ל $\mathbf{y}$. נבצע טרנספורם לפלס למשוואה 2 ונציב בה את $\mathbf{x}(s)$

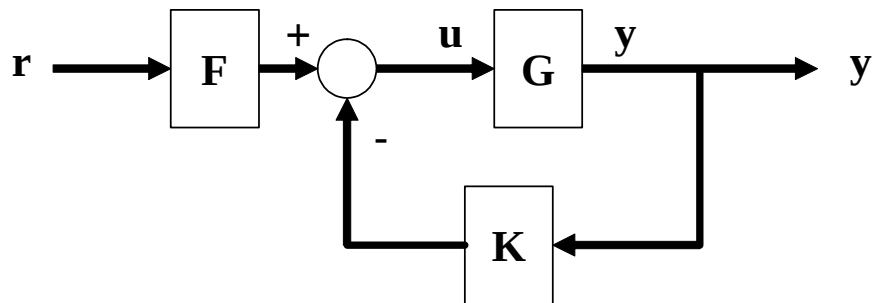
$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s) \\ &= [\mathbf{C}\mathbf{H}(s) + \mathbf{D}] \mathbf{u}(s) \\ &= \underbrace{\left[\mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right]}_{\mathbf{G}(s)} \mathbf{u}(s) \end{aligned}$$

$\mathbf{G}(s)$ היא איפוא, ה-transfer function matrix בין הקלט של המערכת $\mathbf{u}$ לפלט $\mathbf{y}$. באופן גרפי נסמן זאת כך



הוספת משות

בעיית הבקרה הכללית דנה בשאלה - כיצד לגרום למערכת לעבור דרך סדרת מצבים (או סדרת פלטים) רצויה. בשלב זה נסתפק בלנסות לגרום למערכת $G(s)$ להתכנס לפלט קבוע רצוי באופן אקספוננציאלי. נעשה זאת ע"י סגירת מעגל משוב ועליו מספר רכיבים לינארים (שנתאר ע"י מטריצות ה-transfer functions). הדיאגרמה שמתארת את לולאת המשוב היא

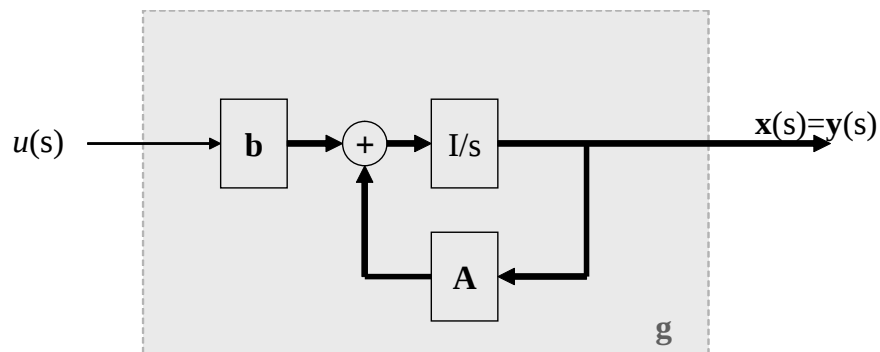


אנו נרצה להגדיר את רכיבי המערכת כך שאם נכניס למערכת פלט רצוי $r = \tilde{y}$ אז הפלט y ישאף ל $\tilde{y}$ באופן אקספוננציאלי. לשם כך נמצא את מטריצת הטרנספר מ r ל y :

$$\begin{aligned} y &= G[Fr - Ky] \\ (I + GK)y &= GFr \\ y &= (I + GK)^{-1} GFr \end{aligned} \quad (5)$$

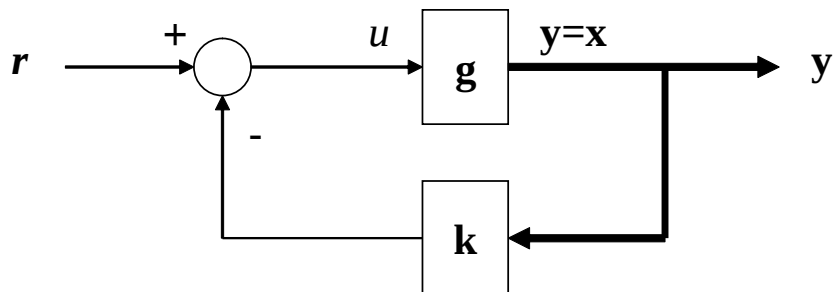
דוגמא: state feedback

נניח כי נתונה המערכת



$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u(t) \\ y(t) &= \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

הערכים העצמיים של המערכת הם $\lambda_1 = -2$ ו $\lambda_2 = 4$. זו מערכת לא יציבה! נוסיף את המשוב הבא



כש $k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$. נציב זאת במשוואה 5

$$y = (I + gk)^{-1} gr$$

נציב את $g(s) = (sI - A)^{-1} b$ ולאחר מעט אלגברה

$$\begin{aligned} y &= \left(I + (sI - A)^{-1} bk \right)^{-1} (sI - A)^{-1} br \\ &= \left[(sI - A) \left(I + (sI - A)^{-1} bk \right) \right]^{-1} br \\ &= [(sI - A) + bk]^{-1} br \end{aligned}$$

נקבל

$$y(s) = (sI - (A - bk))^{-1} br(s)$$

כלומר, המערכת החדשה מתאימה לתבנית

$$\begin{aligned} y &= \tilde{A}x + br \\ \tilde{A} &= A - bk \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - k_1 & 3 - k_2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

כלומר, קיבלנו מערכת שהפולינום האופייני שלה הוא

$$|sI - \tilde{A}| = s^2 + (k_1 - 2)s + (3k_2 - k_1 - 8)$$

קל לראות שלכל זוג ערכים עצמיים רצוי ניתן למצוא $\{k_1, k_2\}$ מתאימים.

בחירת $k_1 = 4$ ו $k_2 = \frac{17}{3}$ תיתן ערכים עצמיים $\lambda_{1,2} = -1 \pm i2$. כלומר, קיבלנו מערכת יציבה (ואוסצילטורית).

כאן, נניח שנכניס קלט קבוע r , ע"פ משוואה 4, הפלט ילך אקספוננציאלית לערכים קבועים וכש $t \rightarrow \infty$

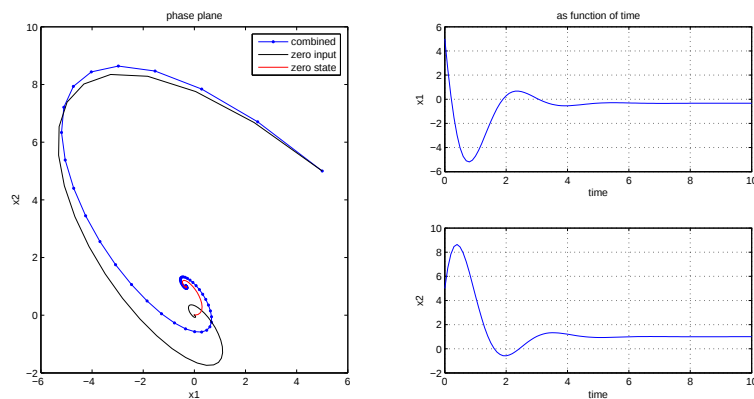
$$x(t) = \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)} d\tau br$$

$$= \int_0^\infty e^{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}(t-\tau)} dt \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} r$$

כלומר, $y_1 = -\frac{1}{5}r$ והשני יהיה $y_2 = \frac{3}{5}r$. ניתן, אם כן, לכפול את הקלט בקבוע (הוספת $F \neq I$) כך שאחד מאברי הפלט יהיה שווה לקלט. דוגמא, עבור $F = 5/3$

ומצב התחלתי $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$



מעבר למערכת דיסקרטית

ראינו כי פתרון המערכת

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

הוא

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)}_{\text{zero input response}} + \underbrace{\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau}_{\text{zero state response}}$$

כמו כן, ראינו כי כאשר $\mathbf{u} = 0$ אז

$$\mathbf{x}(n) = \underbrace{e^{\mathbf{A}\Delta t}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{x}(n-1)$$

נניח כי אות הבקרה הוא קבוע בין דגימה לדגימה (פונקציית מדרגה) ובזמן $(n\Delta t, n\Delta t + \Delta t)$ ערכו $\mathbf{u}_n$ אז

$$\mathbf{x}(n) = e^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{x}(n-1) + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}d\tau\mathbf{B}\mathbf{u}_n$$

פתרון האינטרגל נותן:

$$\int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} d\tau = \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I})$$

לכן הפתרון הוא

$$\mathbf{x}(n) = \underbrace{e^{\mathbf{A}\Delta t}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{x}(n-1) + \underbrace{\mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{B}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \mathbf{u}_n$$