

מערכות דינאמיות ובקרה סיכום שיעור

לביא שפיגלמן

8 בנובמבר 2007

- לינאריזציה
- פתרון מערכת LTI בעזרת טרנספורם לפלס ו-matrix exponential
- ניתוח התנהגות של מערכת LTI אוטונומית ויציבות
- דגימה בקצב קבוע של מערכת LTI רציפה (מעבר למערכת דיסקרטית)

לינאריזציה

בהמשך נראה שמערכות לינאריות, מהצורה

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

הן פשוטות מאוד לניתוח. מערכות לא לינאריות רבות מתנהגות בקירוב טוב כמערכות לינאריות אם מתבוננים בהן לטווחי זמן קצרים (כך שמצב המערכת לא משתנה הרבה). לכן ישנה חשיבות רבה לקירוב לינארי של מערכת סביב נקודה אשר מעניינת אותנו.

נניח כי מדובר במערכת חסרת קלט u (ההרחבה למקרה בו יש קלט היא פשוטה). במקרה הסקלרי, ברצוננו למצוא קירוב ל $f(x_0 + x)$ מהצורה

$$\hat{f}(x_0 + x) \approx f(x_0) + ax$$

נעשה זאת ע"י קירוב טיילור מסדר ראשון:

$$\hat{f}(x_0 + x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}x + O(x^2)$$

$$a = \frac{df}{dx}$$

במקרה הרב מימדי ישנה פונקציה $f(\mathbf{x})$ וברצוננו למצוא קירוב מהצורה

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}\mathbf{x}$$

נשתמש שוב בקירוב טילור מסדר ראשון (רב מימדי)

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}\mathbf{x} + O(\|\mathbf{x}\|^2)$$

כש $\mathbf{J}$ הוא היעקוביאן של f :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

כלומר ניקח $\mathbf{A} = \mathbf{J}$

פתרון מערכת LTI בעזרת טרנספורם לפלס matrix exponential

נתונה מערכת מהצורה

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

ראינו כי הטרנספורם לפלס שלה הוא

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

ולכן

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) &= \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(t) &= \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(t) &= \Phi(t)\mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

ל- $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ קראנו ה-resolvent. לטרנספורם ההפוך שלה, $\Phi(t)$ נקרא ה-transition matrix כי היא מקדמת אותנו בזמן (קדימה, או אחורה עבור $t < 0$) מהמצב ההתחלתי.

לסיכום, ראינו כי הטרנספורם לפלס ההפוך של ה-resolvent הוא הפתרון של מערכת המשוואות הדיפרנציאליות. ה-resolvent הוא מטריצה הופכית שהכניסה ה- j, i (שורה j ועמודה i) היא

$$\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right]_{ij,i} = (-1)^{i+j} \frac{|\Delta_{i,j}|}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

כש $\Delta_{i,j}$ הוא המטריצה המתקבלת מהורדת השורה i והעמודה j מהמטריצה $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

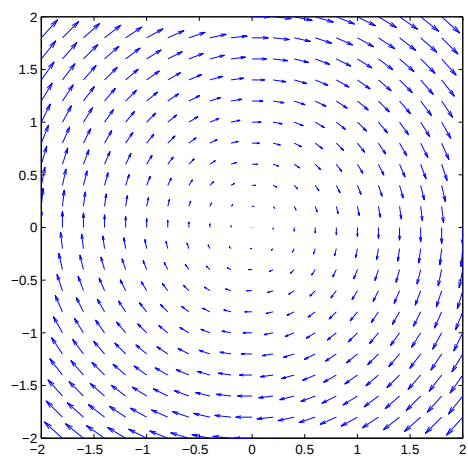
מכאן שכל כניסה של ה-resolvent היא שבר של פולינומים ב- s כשהמונה הוא הפולינום האופייני של $\mathbf{A}$. לערכים העצמיים (השורשים של הפולינום האופייני) של $\mathbf{A}$ נקרא קטבים. בהמשך נראה שהקטבים של $\mathbf{A}$ קובעים את התנהגות המערכת הדינאמית של $\mathbf{A}$ מייצגת.

דוגמא: harmonic oscillator

נתון

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

במרחב הפאזה:



לכן

$$s\mathbf{I} - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

והresolvent:

$$(s\mathbf{I} - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

כשהערכים העצמיים של A הם $i, -i$.

מטריצת המעבר היא (ע"פ טבלאות התמרה)

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

שהיא מטריצת סיבוב (סיבוב סביב הראשית ב t רדיאנים).

פתרון כללי

כידוע, בהנתן $c \leq 1$ מתקיים

$$(1 - c)^{-1} = 1 + c + c^2 + c^3 + \dots$$

באופן דומה, בהנתן $C \in R^{n \times n}$ כך שלכל ערך עצמי λ של C , מתקיים $|Re(\lambda)| < 1$

$$(I - C)^{-1} = I + C + C^2 + C^3 + \dots$$

נציב $C = \frac{A}{s}$ ונראה כי (עבור s מספיק גדול)

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s} \left(I - \frac{A}{s} \right)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots$$

ראינו בשיעור קודם כי לכל $n \in Z$, $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^n} \right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, לכן

$$\mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] = I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \dots$$

זה "נראה" כמו פיתוח טיילור של אקספוננט

$$e^{at} = 1 + ta + \frac{(ta)^2}{2!} + \dots$$

לכן נשתמש בסימון הבא לmatrix exponent:

$$e^M \equiv I + M + \frac{M^2}{2!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!}$$

מכאן, שהפתרון הכללי של מערכת LTI אוטונומית הוא

$$x(t) = \Phi(t)x(0) = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] x(0) = e^{tA}x(0)$$

ניתוח התנהגות של מערכת LTI אוטונומית

נתונה מערכת $\dot{x} = Ax$, $A \in R^{n \times n}$ ומצב התחלתי $x(0)$.

נניח כי A לכסינה, אז קיימת מטריצה שעמודותיה הם וקטורים עצמיים $P \in C^{n \times n}$ ומטריצה אלכסונית של ערכים עצמיים $D \in C^{n \times n}$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D \text{ ו } A = PDP^{-1}$$

נשים לב כי

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\dots\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$$

נציב זאת ב state transition matrix של המערכת:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{(t\mathbf{A})^2}{2!} + \frac{(t\mathbf{A})^3}{3!} \dots \\ &= \mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}t\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} + \frac{\mathbf{P}(t\mathbf{D})^2\mathbf{P}^{-1}}{2!} + \frac{\mathbf{P}(t\mathbf{D})^3\mathbf{P}^{-1}}{3!} \dots \\ &= \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}e \begin{bmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}\end{aligned}$$

כש $\lambda_i, i \in \{1, \dots, n\}$ הם ערכים עצמיים של $\mathbf{A}$.

מתוך ההגדרה של matrix exponent ניתן לראות כי

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{D}} &= \mathbf{I} + \mathbf{D} + \frac{\mathbf{D}^2}{2!} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \begin{bmatrix} (\lambda_1 t)^i & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda_n t)^i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

כלומר, פתרון המערכת הדינאמית הוא:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

או, לחלופין,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

נשים לב שבמערכת הקווארדינטות של $\mathbf{P}^{-1}$ מעבירה אליה: מתקיים

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}}$$

כש $\tilde{x}$ מוגדר ע"י $\tilde{x} = P^{-1}x$.

כלומר, בקואורדינטות אלה, המערכת מתפרקת לאוסף מערכות סקלריות שמקיימות

$$\dot{\tilde{x}}_i = \lambda_i \tilde{x}_i(0)$$

נזכיר כי עבור $\lambda_i = \sigma + i\omega$

$$e^{\lambda_i t} = e^{\sigma t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

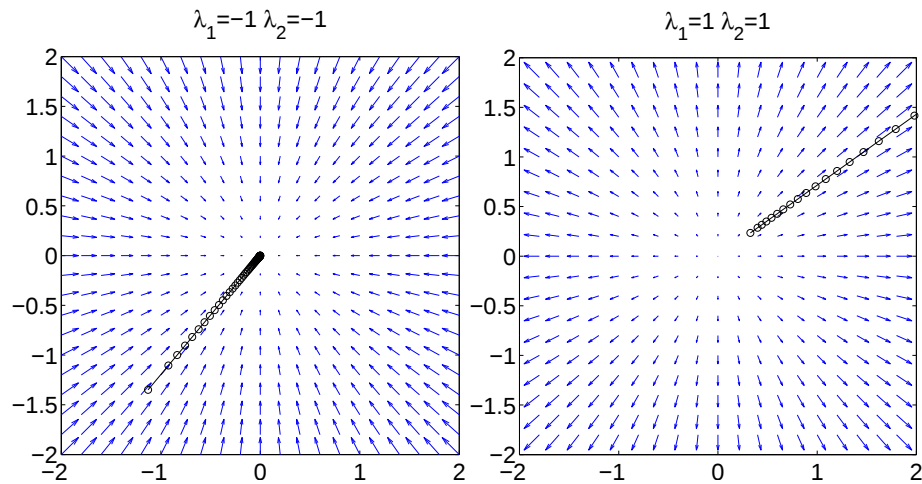
לכן, במערכת קואורדינטות החדשה, הפתרון בכל מימד הוא מכפלה של אקספוננט (דועך או מתפוצץ) בפונקציית סינוס (עם פאזה). כמובן שהתנהגות זו מתקיימת גם במערכת הקואורדינטות המקורית (בממשיים).

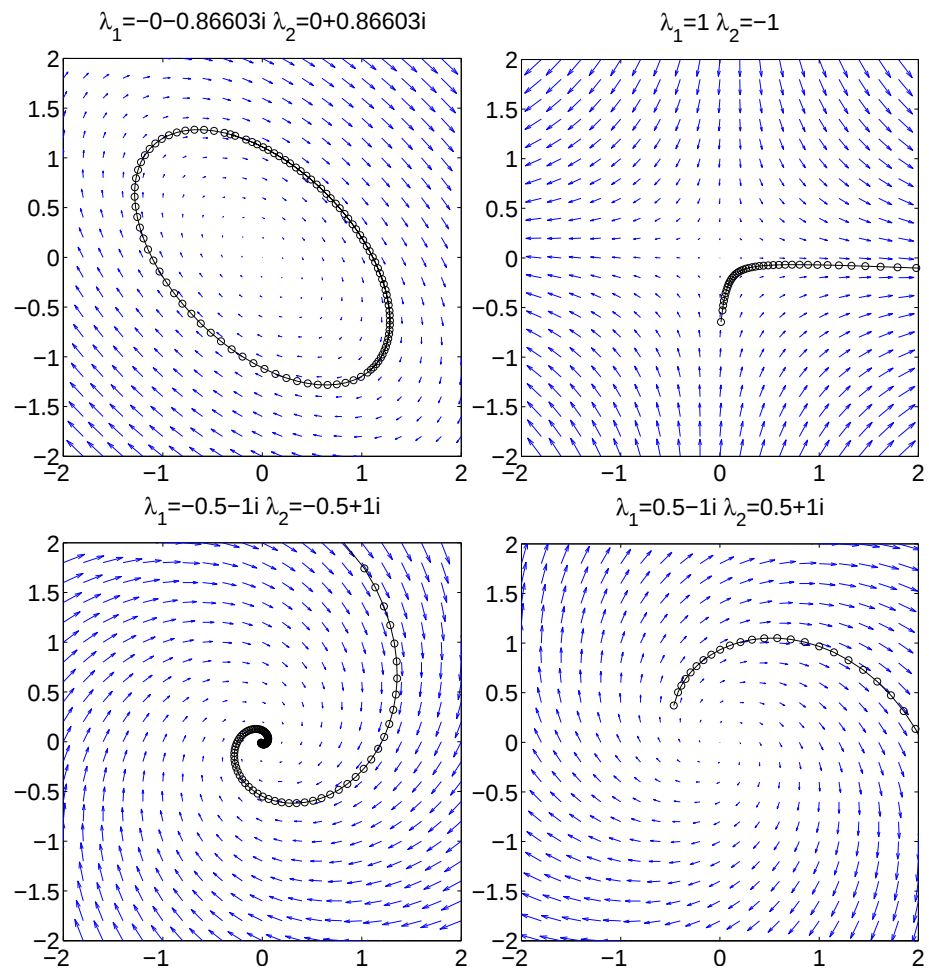
כזכור, הערכים העצמיים של מטריצה, A , הם השורשים של הפולינום האופייני שלה:

$$|sI - A| = 0$$

נגדיר מערכת יציבה ככזו שמקיימת $x(t) \rightarrow 0$ כש $t \rightarrow \infty$. תנאי הכרחי ומספיק ליציבות הוא כי לכל i , $\text{Re}(\lambda_i) < 0$. (זה נכון גם כשהמערכת אינה לכסיה).

דוגמאות





דגימה בקצב קבוע של מערכת LTI רציפה (מעבר למערכת דיסקרטית).

נתונה מערכת $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ נרצה לדגום את $\mathbf{x}(t)$ במרווחים קבועים $k\Delta t$ ($k \in \mathbb{Z}$)
ראינו ש

$$\mathbf{x}(k\Delta t) = e^{\mathbf{A}k\Delta t}\mathbf{x}(0)$$

מכאן ש

$$\begin{aligned}\mathbf{x}((k+1)\Delta t) &= e^{\mathbf{A}(k+1)\Delta t}\mathbf{x}(0) \\ &= e^{\mathbf{A}\Delta t}e^{\mathbf{A}k\Delta t}\mathbf{x}(0) \\ &= e^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{x}(k\Delta t)\end{aligned}$$

כלומר, המערכת הדיסקרטית שתתן את אותה סדרת מצבים היא

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k-1) = \tilde{\mathbf{A}}^k \mathbf{x}(0) \\ \tilde{\mathbf{A}} &= e^{\mathbf{A} \Delta t} \end{aligned}$$

כמו כן, ראינו כי בהנתן הפירוק $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$ ניתן לעבוא למערכת הקואורדינטות של הוקטורים העצמיים:

$$\underbrace{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}(k)}_{\bar{\mathbf{x}}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (\lambda_1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda_n)^k \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^k} \underbrace{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}(0)}_{\bar{\mathbf{x}}(0)}$$

קל לראות שמערכת $\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{D}^k \bar{\mathbf{x}}(0)$ תתכנס ל-0 רק אם לכל הערכים העצמאיים של $\mathbf{D}$ (וכמובן של $\tilde{\mathbf{A}}$) מתקיים

$$|\lambda_i| < 1$$

בניגוד למה שראינו במערכת זמן רציף.