מערכות דינאמיות ובקרה
סיכום שיעור

לביא שפיגלמן

29 באוקטובר 2006

נושאים:

- מודל לוטקה-ולטרה עם קיבול סופי
- מרחב הפאזה, nullclines, נקודות שבת
- אינטגרציה נומרית

נציג מודל לא לינארי, ננתח את התנהגותו במרחב הפאזה ונבצע אינטגרציה נומרית על מנת לשערך מסלו-
לים של מצב המערכת מנקודות התחלה נתונות.

מודל **Lotka-Volterra** (עם קיבול סופי).

נניח כי במקום מסויים קיימות שתי אוכלוסיות שמקיימות קשר של טורף $w(t)$ ונטרף $x(t)$. זוג האוכלוסיות מתוארות כזוג משוואות דיפרנציאליות:

$$\begin{aligned} f_1 = \dot{x} &= (1-x)x - bxw \\ f_2 = \dot{w} &= cxw - dw \end{aligned}$$

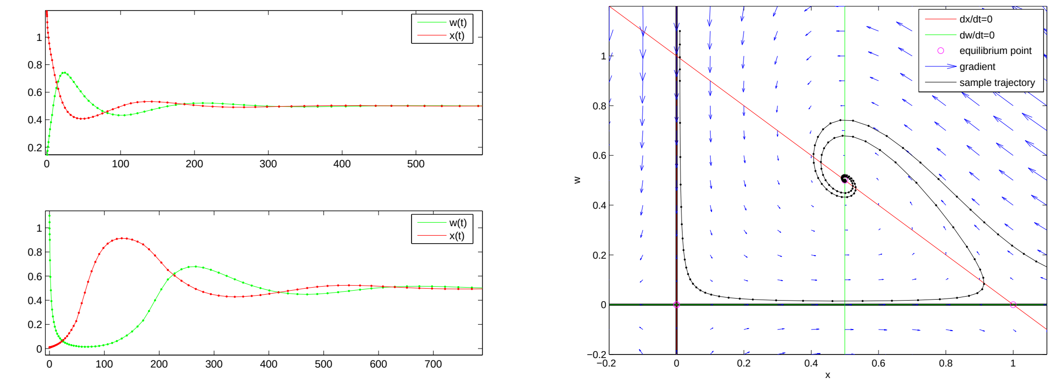
כש $b, c, d \geq 0$. ניתן להסביר את המשוואות באופן הבא:

$(1-x)x$	אוכלוסיית הנטרפים, x, תגדל עד לרוויה בהעדר טורפים.
$-bxw$	אוכלוסיית הנטרפים קטנה כתלות בגודל אוכלוסיית הטורפים w ובפרמטר המתאר את הסיכוי של מפגש קטלני בין טורף ונטרף
cxw	אוכלוסיית הטורפים גדלה בקצב שתלוי במספר הנטרפים ובפרמטר הקשור האיכות הנטרפים כמזון.
dw	אוכלוסיית הטורפים סובלת ממוות טבעי (אחוז קבוע שנקבע ע"י d)

ברצוננו לאפיין את דינמיקת המערכת ולחשב מסלולים שלה מנקודות התחלתיות כל שהן.

נזכור כי בנקודת שבת $\mathbf{x}_0$ $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. נצייר במרחב הפאזה (במערכת הצירים w, x) את הקווים $\dot{x} = 0$ ו$\dot{w} = 0$ המכונים *nullcline*. נחפש נקודות חיתוך של זוגות nullclines (אחד בx ושני בw). נקודות אלו הן (ע"פ הגדרה) נקודות שבת והnullclines הם קווים בהם מסלולים נעים במקביל לצירים (כי באחד המשתנים הנגזרת היא 0 ובשני לא).

בדוגמא הבאה $b = 1\,, c = 2\,, d = 1$



איור 1: מימין: מרחב הפאזה (מע' הצירים x, w) , הnullclines, ונקודות השבת. מסלולים שחורים מתארים את שינוי המצב בזמן ממצבי התחלה שונים. ניתן לראות כי הם מתכנסים לנקודת שבת (יציבה).
משמאל: ערכי x, w כפונקציה של הזמן, מנקודות התחלה שונות

אינטגרציה נומרית

נניח כי ידועים תנאי התחלה $\mathbf{x}_0$. במערכות לינאריות נראה כי ניתן למצוא, בעזרת חישוב אנליטי, מה יהיה מצב המערכת בכל זמן בעתיד או בעבר. במערכות לא לינאריות ניאלץ לבצע סימולציה של המערכת בזמן. באופן פורמלי, ברצונינו לחשב את

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(\tau)\right) d\tau$$

במידה ואין פתרון סגור ל$\mathbf{x}(t)$ ניתן לבצע אינטגרציה נומרית. נעשה זאת על ידי כך שנחלק את האינטגרל לחלקים ונבצע חישוב מקורב של החלקים בזה אחר זה תוך שימוש בקירוב הקודם על מנת למצוא את הקירוב הבא.

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + \int_t^{t+h} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(\tau)\right) d\tau$$

אם חלון הזמן קטן, נוכל להניח כי $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(\tau)\right)$ קבועה. נראה שיטות שונות לקרב את $\int_t^{t+h} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(\tau)\right) d\tau$.

שיטת אוילר (Runge Kutta מסדר 1)

בשיטה זו נבצע קירוב טילור מסדר ראשון של $\mathbf{x}(t)$ (נבצע לינאריזציה ב t) בכל רגע ורגע ונתקדם בכיוון שיתקבל:

$$\mathbf{x}(t+h) \approx \mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t)h = \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))h$$

כלומר, אנו מניחים שבחלון הזמן $\tau \in [t, t+h]$ $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(\tau)\right) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)\right)$. בכך אנו מבצעים אינטגרציה במדרגות של $\mathbf{f}$ על המסלול שמתקבל, תוך שימוש בנקודה האחרונה במסלול כדי לחשב את המדרגה הבאה.

שיטת אוילר המשופרת (Runge Kutta מסדר 2)

כאמור, ברצונינו לקרב את $\int_t^{t+h} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(\tau)\right) d\tau$. בשיטת אוילר לקחנו את $h\mathbf{f}(t)$ וצברנו בכל צעד שגיאה בגודל $O(h^2)$. כעת נשתמש בשיטת הטרפז.

$$\int_t^{t+h} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(\tau)\right) d\tau \approx h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\left(t+\frac{h}{2}\right)\right)$$

אבל ישנה בעיה, $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\left(t+\frac{h}{2}\right)\right)$ הרי אינו ידוע! נקרב אותו ע"י שיטת אוילר (כן נשפר את אוילר ע"י שימוש בשיטת אוילר!)

$$h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\left(t+\frac{h}{2}\right)\right) \approx h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)+\frac{h}{2}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))\right)$$

נסמן ב

$$\begin{aligned} \frac{h}{2}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) &= \Delta\mathbf{x}_1 \\ h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)+\Delta\mathbf{x}_1\right) &= \Delta\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

וקיבלנו

$$\mathbf{x}(t+h) \approx \mathbf{x}(t)+\Delta\mathbf{x}_2$$

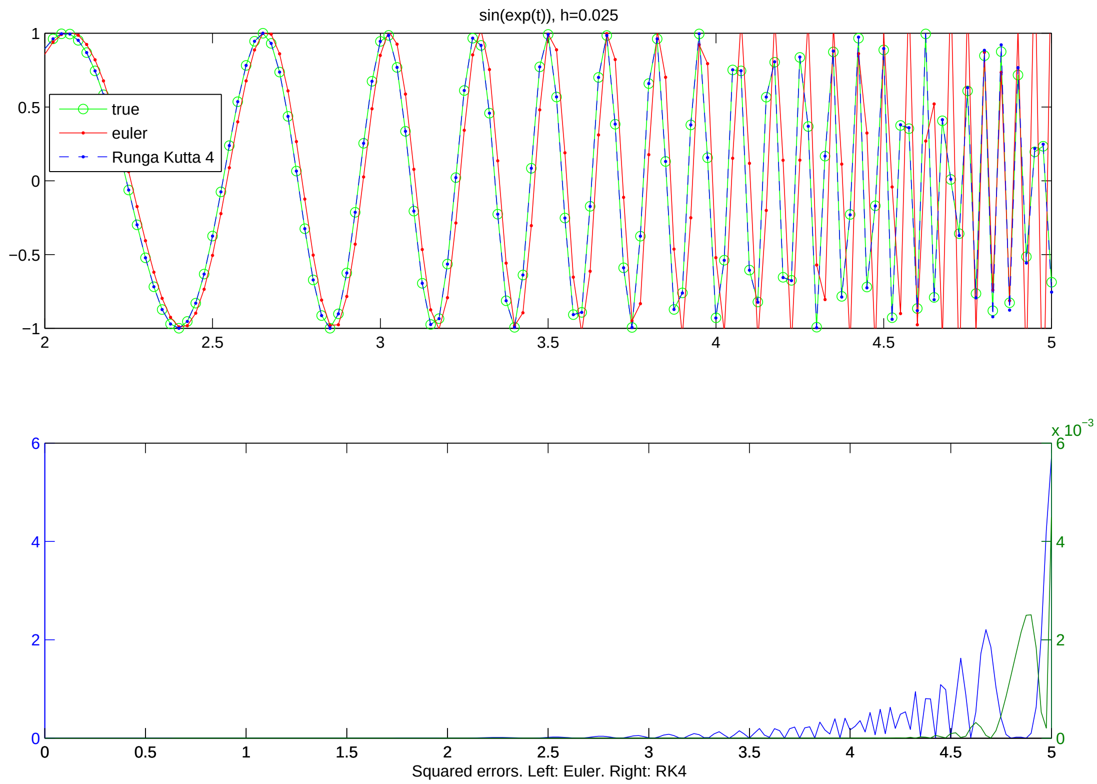
ניתן להוכיח שבשיטה זו השגיאה היא $O(h^3)$.

שיטת Runge Kutta מסדר 4

בשיטת אוילר אנו נדרשים לחשב את הפונקציה פעם אחת בכל צעד. בשיטה המשופרת נדרשנו לחשב את הפונקציה פעם נוספת. בשיטה זו נידרש לחשב את הפונקציה 4 פעמים בכל צעד. ברור כי עבור זמן חישוב נתון קיים tradeoff בין גודל הצעד לבין מספר חישובי הפונקציה בכל צעד. Runge Kutta מסדר 4 נחשבת למאוזנת מבחינה זו. כלומר, השגיאה, $O(h^5)$ מצדיקה את מחיר החישוב.

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}_1 &= h\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ \Delta\mathbf{x}_2 &= h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)+\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}_1\right) \\ \Delta\mathbf{x}_3 &= h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)+\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}_2\right) \\ \Delta\mathbf{x}_4 &= h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)+\Delta\mathbf{x}_3\right) \\ \mathbf{x}(t+h) &\approx \mathbf{x}(t)+\frac{1}{6}(\Delta\mathbf{x}_1+2\Delta\mathbf{x}_2+2\Delta\mathbf{x}_3+\Delta\mathbf{x}_4) \end{aligned}$$

הערה: בכל השיטות הנ"ל ניתן לבחור את גודל הצעד בזמן h בכל איטרציה ולהתאים אותו לקצב שינוי הנגזרות שנצפה.



איור 2: דוגמא של ביצוע אינטגרציה נומרית (בעזרת אוילר ובעזרת Runge Kutta 4) למערכת שהפתרון המדוייק שלה ידוע: