מערכות דינאמיות ובקרה

לביא שפיגלמן

Particle Filtering

- מבוא לשיטות Monte Carlo
- מבוא לשיטות Particle Filtering

שיטות Monte Carlo הינן שיטות לייצוג התפלגויות ולחישוב תוחלות עליהן בצורה א-פרמטרית, כלומר, מבלי להניח כי ההתפלגויות שייכות למשפחה פרמטרית כלשהי. הדבר נעשה ע"י מציאת מדגם המייצג באופן כלשהו את ההתפלגות. במערכות דינמיות רוצים במקרים רבים לדעת את התפלגות מצב המערכת בזמן כלשהו או למצוא את תוחלתו או תוחלת של פונקציה שלו. שיטות Particle Filtering מאפשרות חישוב ההתפלגות ע"י שילוב של שיטות Monte Carlo לייצוג התפלגות ושיטות Dynamic Programming על מנת לקדם את שיערוך המצב בזמן (ושילוב תצפיות).

ראינו כי עבור מערכת דינמית לינארית עם רעשי תהליך ותצפית גאוסיאנים יש פתרון אנליטי (אופטימלי) והKalman Filter מוצא אותו בצורה יעילה (ע"י DP). השיטות להל"ן מוצאות קירובים (טובים בד"כ מהKalman Filter) כאשר הנחות הלינאריות והגאוסיאניות אינן מתאימות.

מבוא לשיטות Monte Carlo

שיטות Mone Carlo באות להתמודדת עם הבעיות הבאות:

1. מציאת מדגם i.i.d. $\{\mathbf{x}^m\}_{m=1}^{M}$ מתוך התפלגות $p(\mathbf{x})$.
2. חישוב תוחלת של פונקציה תחת התפלגות$p(\mathbf{x})$:

$$\Phi = E_p[f(\mathbf{x})] = \int f(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

במידה ופתרנו את הבעיה הראשונה ויש בידינו מדגם i.i.d. הרי שניתן לחשב את התוחלת הרצויה בבעיה 2 ע"י

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{d}\sum_{r} f(\mathbf{x}^r)$$

ברור כי $E(\hat{\Phi}) = \Phi$ (כלומר זה עומד בלתי מוטה) והvariance של $\hat{\Phi}$הוא

$$var(\hat{\Phi}) = \frac{var(f)}{d} = \frac{1}{d}\int (f(\mathbf{x}) - \Phi)^2 p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

כלומר השערוך מתרכז סביב הערך הנכון של התוחלת עם הוספת הדוגמאות.

קצב ההתכנסות של השערוך אינו תלוי במימד N של $\mathbf{x}$ כך שגם אם N גדול מאד, יתכן שדגימות בודדות מספיקות לשערוך טוב של התוחלת הרצויה. לעומת זאת, בעיית מציאת הדגימה עלולה להפוך לקשה ביותר במקרה זה.

נניח כי אנו יודעים לחשב לכל $\mathbf{x}$ את $p(\mathbf{x})$. מסתבר שעדיין יתכן שיקר לדגום מ$p(\mathbf{x})$. למשל, נניח שנשתמש בשיטה אשר מחלקת את המרחב לgrid, מחשבת את ההסתברות של כל קוביה ודוגמת בכל קוביה מהתפלגות ברנולית. אם $N = 1000$ הרי שאפילו עם נקח בכל מימד רק שני ערכים אפשריים הרי שנזדקק ל- 2^{1000} חישובים של $p(\mathbf{x})$. (בעיה זו ידועה לעיתים כקללת המימד).

שיטת הImportance sampling

שיטה זו נועדה לחשב את התוחלות מבלי למצוא מדגם מההתפלגות המקורית.

נניח כי $p(x)$ ידועה אך איננו יודעים לדגום ממנה. תהי $q(x)$ התפלגות אחרת שאנו יודעים לדגום ממנה ו$supp(p) \subseteq supp(q)$ (כלומר אם $p(x) > 0$ אז $q(x) > 0$). נשים לב כי

$$E_q\left[f(\mathbf{x})\frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})}\right] = \int f(\mathbf{x})q(\mathbf{x})\frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})}d\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x} = E_p[f(\mathbf{x})]$$

לכן אפשר לחשב קירוב אמפירי של התוחלת ע"י יצירת מדגם $\{\mathbf{x}^m\}_{m=1}^{M}$ מ q וחישוב הקירוב ע"י

$$\hat{\Phi}_p(f) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f(\mathbf{x}^m)\frac{p(\mathbf{x}^m)}{q(\mathbf{x}^m)}$$

גם כאן קל לראות כי $E_p[\hat{\Phi}] = \Phi$ (עומד לא מוטה) והvariance שלו

$$\begin{aligned} var(\hat{\Phi}) &= \frac{1}{M}\left(E_q\left[\left(f(\mathbf{x})\frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})}\right)^2\right] - \left(E_q\left[f(\mathbf{x})\frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})}\right]\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{M}\left(E_q\left[\left(f(x)\frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})}\right)^2\right] - \left(E_p\left[f(\mathbf{x})\right]\right)^2\right) \end{aligned}$$

עבור $f(\mathbf{x}) = 1$

$$var(\hat{\Phi}) \quad = \tfrac{1}{M} \quad var\left(\frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})}\right)$$

כלומר, ככל שq קרוב לp השערוך מרוכז יותר סביב הערך הנכון.

כעת נניח שאנו יודעים רק $\pi(\mathbf{x}) = \alpha p(\mathbf{x})$ (α לא ידוע). גם במקרה זה ניתן לבצע importance sampling. נסמן

$$w(\mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})}$$

נשים לב ש

$$E_q[w(\mathbf{x})] = \int \frac{\pi(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \alpha$$

לכן

$$\begin{aligned}
\Phi = E_p(f(\mathbf{x}) &= \int f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \int f(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{\alpha} \int f(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \frac{\pi(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \\
&= \frac{E_q[f(\mathbf{x}) w(\mathbf{x})]}{\alpha} \\
&= \frac{E_q[f(\mathbf{x}) w(\mathbf{x})]}{E_q[w(\mathbf{x})]}
\end{aligned}$$

מכאן שנוכל לקבל קירוב אימפירי לΦ ע"י יצירת מדגם $\{\mathbf{x}^m\}_{m=1}^M$ מ q וחישוב הקירוב ע"י

$$\hat{\Phi} = \frac{\sum_{m=1}^M f(\mathbf{x}^m) w(x^m)}{\sum_{m=1}^M w(x^m)}$$

זה עומד מוטה. קל לראות זאת עם לוקחים $M = 1$ אז

$$E_q(\hat{\Phi}) = E_q\left[\frac{f(\mathbf{x}^1) w(x^1)}{w(x^1)}\right] = E_q[f(\mathbf{x}^1)] \neq E_p[f(\mathbf{x}^1)]$$

אך עבור $M \to \infty$ הוא מתכנס לΦ.

שיטת הImprtance sampling הופכת לבעייתית ככל שq שונה מp ובעיה זו מחריפה כשN גדול. יש שיטות אשר מתעקשות לדגום מתוך ההתפלגות p (למשל rejection sampling, וה-Metropolis method) אך זמן יצירת דגימה עולה וקיים tradeoff בין מספר הדגימות ואיכותן.

מבוא לשיטות Particle Filtering

שיטה זו הינה הרחבה של שיטות Monte Carlo לשרשראות מרקוביות (ועל כן נקראת גם Sequential Monte Carlo). השם particle filtering נובע מכך שהתפלגות המצב

מתוארת (כמיקודם) ע"י מדגם ממושקל של סדרות מצבים אפשריים (particles) אשר מתקדמות בזמן בעזרת dynamic programming (filtering).

הגדרת הבעיה: נתונה מערכת דינמית

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \nu_{k-1}) \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mu_k)\end{aligned}$$

כש ν, μ רעשי תהליך ותצפית i.i.d. (בהתאמה) ידועים וכן ידוע המצב ההתחלתי או התפלגותו. ברצונינו למצוא את התפלגות המצב בהנתן תצפיות עד כה. כלומר, נתונים

$$p(\mathbf{x}_0) \quad , \quad p(x_k|x_{k-1}) \quad , \quad p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)$$

ויש למצוא את $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$. כיוון שהמערכת איננה לינארית ורעשי התהליך והתצפית אינם גאוסיאנים אין כל סיבה ש $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ תהיה ממשפחה פרמטרית של התפלגויות ידועה (גם אם ההתפלגויות המותנות הן כאלה).

נפתח נוסחת נסיגה עבור $p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ תוך שימוש בפירוקים הנובעים מהמבנה הגרפי (המרקוביות).

נניח כי מצאנו את $p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})$. על פי כלל Bayes (ומרקוביות)

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}_{0:k}|y_{1:k}) &= \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})} \\ &\propto p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1}) \qquad (1)\end{aligned}$$

נבחר התפלגות q כך ש

$$q(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k}) = q(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})q(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1}) \qquad (2)$$

נגדיר

$$w^i = \frac{p(\mathbf{x}^i_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})}{q(\mathbf{x}^i_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})}$$

נשלב את משוואות 1 ו 2 בהגדרה של w^i ונקבל

$$\begin{aligned}\tilde{w}^i &= \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}^i_k)p(\mathbf{x}^i_k|\mathbf{x}^i_{k-1})p(\mathbf{x}^i_{0:k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})}{q(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})q(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}^i_k)p(\mathbf{x}^i_k|\mathbf{x}^i_{k-1})}{q(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})} w^i_{k-1} \qquad (3)\end{aligned}$$

ונגדיר $w^i = \frac{\tilde{w}^i}{\sum_j \tilde{w}^j}$. קיבלנו שבצעד ה$k$ יש ברשותינו חלקיקים $\{\mathbf{x}^i_{0:k}\}^M_{i=1}$ שביחד עם המשקולות שלהם מייצגים את ההתפלגות על הסדרות. ההתפלגות על המצב האחרון

תהיה

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) = \lim_{M\to\infty}\sum_{i=1}^{M} w_k^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i)$$

כפי שנאמר, לבחירת q שקרוב לp יש ערך מכריע בטיב השערוך. אם p מרקובי אז די למצוא q מהצורה $q(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1},\mathbf{y}_k)$. כיוון שאנו יודעים את $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$ זו בחירה פופולרית עבור q (במידה וניתן לדגום ממנה). עבור בחירה זו מתקבל צמצום של משוואה 3 ל:

$$\tilde{w}^i = p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^i)w_{k-1}^i$$

בעיית ניוון המשקולות

מימוש של השיטה הנ"ל לוקה בבעיה הבאה: לאחר מספר צעדים המשקולות מתנוונות כך שחלק קטן מהמשקולות (אולי אפילו משקולת בודדת) שואף ל1 והשאר ל0. למעשה ניתן להוכיח כי הvariance של המשקולות גדל בכל צעד. הבעיה מחריפה ככל שq שונה מp. דרך אחת למנוע זאת היא ע"י יצירת מדגם מתוך המדגם המשוקלל ע"י דגימה משוקללת (ע"פ המשקולות) מתוך המדגם (עם החזרות), לקבלת מדגם חדש בעל משקולות אחידות (למעשה, חלק מהparticles משוכפלים וחלק נעלמים בהתאם למשקולות). שיטה זו נקראת Sequential Importance Resamplling

להל"ן האלגוריתם שתואר (כולל הדגימה מחדש):

Algorithm 1 Particle filter (SIR)

$[\{\mathbf{x}_k^i, w_k^i\}_{i=1}^M] = PF(\{\mathbf{x}_{k-1}^i, w_{k-1}^i\}_{i=1}^M, \mathbf{y}_k)$

- for i=1:M
  - draw $\mathbf{x}_k^i \sim q(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}^i,\mathbf{y}_k)$
  - assign $\tilde{w}_k^i = \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^i)p(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{0:k-1},\mathbf{y}_{1:k})} w_{k-1}^i$,
- for each i, $w^i = \frac{\tilde{w}^i}{\sum_j \tilde{w}^j}$
- optionally, $[\{\bar{\mathbf{x}}^i, \bar{w}^i\}_{i=1}^M] = RESAMPLE(\{\mathbf{x}^i, w^i\}_{i=1}^M)$

Algorithm 2 Resample

$[\{\bar{\mathbf{x}}^i, \bar{w}^i\}_{i=1}^M] = RESAMPLE(\{\mathbf{x}^i, w^i\}_{i=1}^M)$

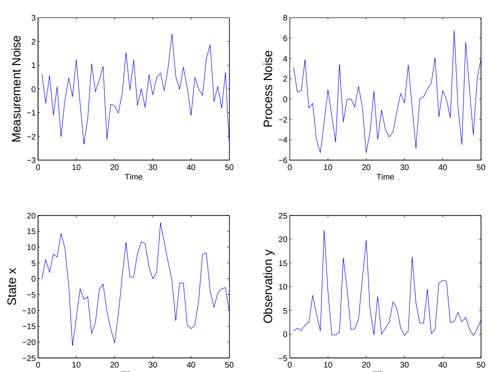
- for each i in $\{0, \ldots, M\}$, $c_i = \sum_{j=1}^{i} w^i$
- for each i in $\{1, \ldots, M\}$
  - $u_i = uniform\, random\, in\, [0,1]$
  - $\bar{\mathbf{x}}^i = \mathbf{x}^j$ such that $c_{j-1} \leq u_i < c_j$
  - $\bar{w}^i = \frac{1}{M}$

בעיה לדוגמא: עלינו לחשב את $E(\mathbf{x}_k)$ עבור המערכת הבאה:

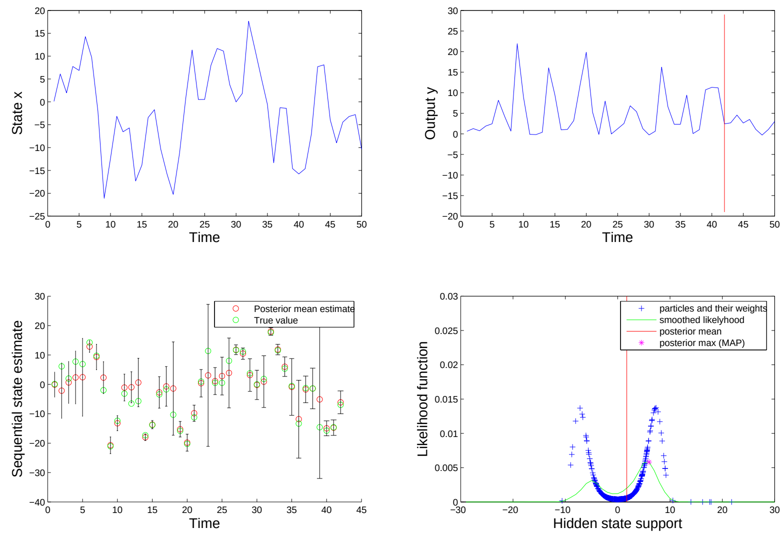
$$
\begin{aligned}
x_k &= \frac{x_{k-1}}{2} + \frac{25x_{k-1}}{1+x_{k-1}^2} + 8cos(1.2k) + \nu_{k-1} \\
y_k &= \frac{x_k^2}{20} + \mu_k \\
\nu &\sim \mathcal{N}(0,10) \\
\mu &\sim \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}
$$

נגדיר את $q(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{k-1}^i)$ להיות $\mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}^i, 10)$ ונשתמש באלגוריתם SIR. להלן דוגמה של ריצת האלגוריתם:

הערכים הנכונים



מצב האלגוריתם בצעד ה42 מתוך 50. ניתן לראות שההתפלגות המשוערת בי-מודלית



סיכום הריצה, והשוואה בין בחירת תוחלת המצב לבחירת המצב שצפיפותו רבה ביותר כפרדיקציה