מערכות דינאמיות ובקרה

לביא שפיגלמן

חשבון ואריאציות ובקרה אופטימלית, מערכות רציפות

- $\mathbf{x}_0$ נתון, t_f נתון, ללא אילוצי קצה על $\mathbf{x}_{t_f}$
- t_f נתון, חלק ממשתני המצב נתונים בt_0 ובt_f (וחלק לא)
  - בעיית minimun jerk.
  - האצת חלקיק מעל מחסום
- t_f לא נתון, חלק ממשתני המצב נתונים בt_0 ובt_f (וחלק לא)
  - בעיות מינימום זמן
- אילוץ אינטגרל על המסלול
  - מקסימום שטח תחת חוט.
- אילוצי שיוויון על פונקציה של המצב ו/או אות הבקרה

$\mathbf{x}_0$ נתון, t_f נתון, ללא אילוצי קצה על $\mathbf{x}_{t_f}$

נניח

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad \mathbf{x}(t_0)\ given \quad t \in [t_0, t_f]$$

כלומר בידינו רצף של אילוצי שיוויון שתלויים ב$\mathbf{u}$. נניח גם פונקציית מחיר מהצורה

$$J = \phi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right) dt$$

ונרצה למזער את J תחת אילוצי השיוויון (דינמיקה). נפתור בעזרת פונקציית כופלי לגרנג' וקטורית

$$J_A = \phi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right) dt + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t) \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - \dot{\mathbf{x}}(t)\right] dt \tag{1}$$

כמקודם, נסמן את ההמילטוניאן

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t\right)=\mathcal{L}\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t\right)+\lambda^T(t)\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t\right)$$

ונכתוב את מש' 1 בעזרתו (תוך ביצוע אינטגרל בחלקים של $\lambda^T(t)\dot{\mathbf{x}}(t)$)

$$J=\phi\left(\mathbf{x}(t_f),t_f\right)-\lambda^T\left(t_f\right)\mathbf{x}\left(t_f\right)+\lambda^T\left(t_0\right)\mathbf{x}\left(t_0\right)+\int_{t_0}^{t_f}\left[\mathcal{H}\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t\right)+\dot{\lambda}^T\mathbf{x}(t)\right]dt \tag{2}$$

על מנת להבין את התלות של J במשתנים נכתוב את הואריאציה של J

$$\delta J=\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}}-\lambda^T\right)\delta\mathbf{x}\right]_{t=t_f}+\left[\lambda^T\delta\mathbf{x}\right]_{t=t_0}+\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}}+\dot{\lambda}^T\right)\delta\mathbf{x}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{u}}\delta\mathbf{u}\right]dt \tag{3}$$

ונרצה למצוא אוסף תנאים שיאפסו את δJ. כפי שעשינו במקרה הבדיד, גם הפעם נתחמק מחישוב $\delta\mathbf{x}\left(\delta\mathbf{u}(1:t)\right)$ ע"י שנבחר $\lambda(t)$ כך ש

$$\lambda^T(t_f)=\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}(t_f)}\quad,\quad\dot{\lambda}^T(t)=-\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial\mathbf{x}(t)}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}}-\lambda^T(t)\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}$$

כלומר בחרנו λ שמקיימת משוואה דיפרנציאלית עם תנאי קצה בזמן t_f. לאחר ההצבות הנ"ל

$$\delta J=\lambda^T(t_0)\delta\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{u}}\delta\mathbf{u}dt$$

ניעזר (שוב) בכך ש$\mathbf{x}(0)$ נתון ולכן נציב $\delta\mathbf{x}(t_0)=0$. כעת, על מנת שנמצא אקסטרמום נרצה לאפס את האינטגרל שנותר. כיוון ש$\mathbf{u}$ אינו מוגבל עלינו לאפס בכל זמן וזמן

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{u}}=0\quad,\quad t\in[t_0,t_f]$$

לסיכום על מנת למצוא אקסטרמום של הבעיה המאולצת די לפתור את המשוואות הבאות

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) \\
\dot{\lambda}^T(t) &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}}-\lambda^T(t)\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}} && (4)\\
\lambda^T(t_f) &= \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}(t_f)} && (5)\\
\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{u}} &= 0 && (6)\\
& \mathbf{x}_0\ given
\end{aligned}$$

משוואות 4, 5, 6 נקראות משוואות אוילר לגרנג'. אלו משוואות דיפרנציאליות מצומדות בזכות התלות של $\dot{\mathbf{x}}$ ו$\dot{\lambda}$ ב $\mathbf{u}$ אשר תלוי בλ וב $\mathbf{x}$ גם הפעם האילוצים ניתנים בזמני הקצה ולכן זו two point boundary-value problem.

במקרה המיוחד בו $\mathcal{L}$ ו-$\mathbf{f}$ אינן תלויות בזמן באופן אקספליציטי (כלומר נגזרותיהן החלקיות ביחס ל-t הן 0) אז על מסלול אופטימלי

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\mathcal{L}\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right)+\lambda^T(t)\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right)\right] \\
& \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}+\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}}+\dot{\lambda}^T\mathbf{f}+\lambda^T\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\underbrace{\dot{\mathbf{x}}}_{=\mathbf{f}}+\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}}\right) \\
&= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}}+\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}+\dot{\lambda}^T\right)\mathbf{f}
\end{aligned}
$$

ובמסלול אקסטרמלי שני המחוברים מתאפסים ו-$\dot{\mathcal{H}}=0$.

דוגמא: LQR

בדומה למקרה הדיסקרטי שראינו, תהיא מערכת לינארית

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{7}$$

נרצה למצוא אות בקרה $\mathbf{u}$ שממזער את המחיר

$$J=\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}^T\mathbf{S}_f\mathbf{x}\right)_{t=t_f}+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(\mathbf{x}\mathbf{Q}\mathbf{x}+\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right)$$

כש-$\mathbf{x}(t_0)$ ו-t_f נתונים והצטריצות $\mathbf{S}_f,\mathbf{Q},\mathbf{R}$ הן positive definite.

ההמילטוניאן שמתקבל הוא

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\mathbf{x}\mathbf{Q}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}+\lambda^T\left(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}\right)$$

על פי משוואה 5

$$\lambda(t_f)=\mathbf{S}_f\mathbf{x}(t_f)$$

על פי משוואה 4

$$\dot{\lambda}=-\mathbf{Q}\mathbf{x}-\mathbf{A}^T\lambda \tag{8}$$

על פי משוואה 6

$$0=\mathbf{R}\mathbf{u}+\mathbf{B}^T\lambda$$

לכן

$$\mathbf{u}=-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\lambda \tag{9}$$

זו כמובן בעייה עם אילוצים בזמן ההתחלתי (עבור $\mathbf{x}$) ובזמן הסופי (עבור λ) והמשוואות הדיפרנציאליות שלהם מצומדות.

הצבת משוואה 9 במשוואת הדינאמיקה 7 נותנת

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\lambda \tag{10}$$

ניתן להראות (ראה Bryson & Ho, p150) שקיימת מטריצה $\mathbf{S}(t)$ כך ש

$$\lambda(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t) \tag{11}$$

ו $\mathbf{S}(t_f) = \mathbf{S}_f$. הצבת משוואה 11 במשוואה 10 נותנת

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t) \tag{12}$$

כלומר, $\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t)$ הוא פונקציה לינארית של המצב הנוכחי. כבמקרה הדיסקרטי, נחפש משוואה $\mathbf{S}(t)$. הצבתה במשוואה 12 תתן לנו משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר ראשון (משתנה בזמן) עבור $\mathbf{x}$ (ללא תלות בλ).

נציב את משוואה 11 במשוואה 8 (פעמים) לקבלת

$$\dot{\mathbf{S}}\mathbf{x} + \mathbf{S}\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{x}$$

כאת נציב במשוואה הנ"ל את משוואה 12 ונסדר מעט לקבלת

$$\left(\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} + \mathbf{A}\right)\mathbf{x} = 0$$

כיוון ש $\mathbf{x}(t) \neq 0$ נצמצם בו לקבלת

$$\dot{\mathbf{S}} = -\mathbf{S}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} - \mathbf{A}$$

זו משוואה דיפרנציאלית ריבועית ב$\mathbf{S}$ ובידינו תנאי קצה $\mathbf{S}(t_f) = \mathbf{S}_f$. משוואה מצורה זו נקראת משוואת Riccati מטריציונית. ניתן לפתור אותה (למשל ע"י איטגרציה נומרית) לקבלת $\mathbf{S}(t)$.

- בדרך כלל המערכת הדינאמית של $\mathbf{S}$ היא יציבה והרצה לאורך זמן תתכנס ל$\mathbf{S}$ שמתאים לבעיה בה $t_f \to \infty$. הפקודה care ב-Matlab מוצאת את $\mathbf{S}$ זה (אם הוא קיים)
- נשים לב שכיוון שהמשוואה הדיפרנציאלית היא ריבועית יתכן יותר מפתרון אחד. הפתרון הרצוי הוא כזה ש$\mathbf{S}$ היא PSD. אם מתחילים מ$\mathbf{S} = \mathbf{0}$ ומבצעים אינט- גרציה נומרית עד להתכנסות ($\dot{\mathbf{S}} \to \mathbf{0}$) יתקבל פתרון זה. (ראה Bryson&Ho p. 167-8

t_f נתון, חלק ממשתני המצב נתונים בt_0 ובt_f (וחלק לא)

הדיון שבפרק הקודם תופס גם כאן עד למשוואת הואריאציה שלJ

$$\delta J = \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}} - \lambda^T\right)\delta\mathbf{x}\right]_{t=t_f} + \left[\lambda^T\delta\mathbf{x}\right]_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}} + \dot{\lambda}^T\right)\delta\mathbf{x} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{u}}\delta\mathbf{u}\right]dt \tag{13}$$

כעת נניח שישנם אילוצים על חלק מהמצב הסופי, למשל $\mathbf{x}_k(t_f)$ נתון אז במקרה זה $\delta\mathbf{x}_k(t_f) = 0$ ואין צורך בתנאי

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}_k(t_f)} - \lambda_k^T = 0$$

קיבלנו שאילוץ קצה אחד התחלף באילוץ קצה אחר בזמן t_f. באופן דומה, אם $x_k(t_0)$ אינו נתון אז אין להניח ש$\delta x_k(t_0) = 0$ ולכן, על מנת ש$\delta J = 0$ נדרוש

$$\lambda_k(t_0) = 0$$

כך שהשפעת $\delta x_k(t_0)$ על δJ נותרת 0. באופן זה נשארנו עם מספר זהה של משוואות עבור המשתנים בקצוות. ההצדקה של התנאי $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{u}} = 0$ עדינה יותר (ולא תוצג כאן). כמו כן, על מנת שהבעיה תהיה פתירה על המערכת להיות controllable.

סיכום מישוואות האילוצים:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{14}$$

$$\dot{\lambda}^T(t) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}} - \lambda^T(t)\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}} \tag{15}$$

$$\lambda_k^T(t_f) = \frac{\partial\phi}{\partial x_k(t_f)} \quad or \quad x_k(t_f)\ given \tag{16}$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{u}} = 0 \tag{17}$$

$$\forall k \quad \lambda_k(0) = 0 \quad or \quad x_k(0)\ given \tag{18}$$

דוגמא: תנועה ב-minimum jerk

ברצוננו למצוא מסלול $\mathbf{x}(t)$ במקום ובזמן מנקודה x_0 לנקודה x_f כך שבזמן t_0 מתחילים ממנוחה ב-x_0, בזמן t_f נמצאים במנוחה במקום x_f ושינוי התאוצה לאורך הדרך מינימלי.

נגדיר את המצב להיות $[x, v, a]$ ואת אות הבקרה להיות $\mathbf{u}(t) = \dot{a}$. המחיר הוא

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)dt$$

כש $\mathcal{L} = \frac{1}{2}u^2$ ו$\phi = 0$.

משוואות התנועה הן

$$\begin{aligned} f_1 &= \dot{x} = v \\ f_2 &= \dot{v} = a \\ f_3 &= \dot{a} = u \end{aligned}$$

נחשב את היעקוביאן

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נחשב $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

נחשב $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

כעת ע"פ משוואה 15

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^T(t) &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} - \lambda^T(t)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \\ &= 0 - [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3]^T &= [0, -\lambda_1, -\lambda_2] \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= c_1\\ \lambda_2 &= -c_1 t + c_2\\ \lambda_3 &= \frac{1}{2}c_1 t^2 - c_2 t + c_3\end{aligned}$$

נגדיר את ההמילטוניאן

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= u^2(t) + \lambda^T f\\ &= \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1 v + \lambda_2 a + \lambda_3 u\end{aligned}$$

מתוך משוואה 17

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} &= 0\\ 0 &= u + \lambda_3\\ u &= -\frac{1}{2}c_1 t^2 + c_2 t - c_3\end{aligned}$$

נציב זאת במשוואות התנועה:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= u\\ a &= -\frac{1}{6}c_1 t^3 + \frac{1}{2}c_2 t^2 - c_3 t + c_4\\ \dot{v} &= a\\ v &= -\frac{1}{24}c_1 t^4 + \frac{1}{6}c_2 t^3 - \frac{1}{2}c_3 t^2 + c_4 t + c_5\\ \dot{x} &= v\\ x &= -\frac{1}{120}c_1 t^5 + \frac{1}{24}c_2 t^4 - \frac{1}{6}c_3 t^3 + \frac{1}{2}c_4 t^2 + c_5 t + c_6\end{aligned}$$

מתוך $v(0) = a(0) = 0$ ו$x(0) = x_0$ מתקבל ש $c_4 = c_5 = 0$ ו$c_6 = x_0$ ונותרנו עם

$$\begin{aligned}a &= -\frac{1}{6}c_1 t^3 + \frac{1}{2}c_2 t^2 - c_3 t\\ v &= -\frac{1}{24}c_1 t^4 + \frac{1}{6}c_2 t^3 - \frac{1}{2}c_3 t^2\\ x &= -\frac{1}{120}c_1 t^5 + \frac{1}{24}c_2 t^4 - \frac{1}{6}c_3 t^3 + x_0\end{aligned}$$

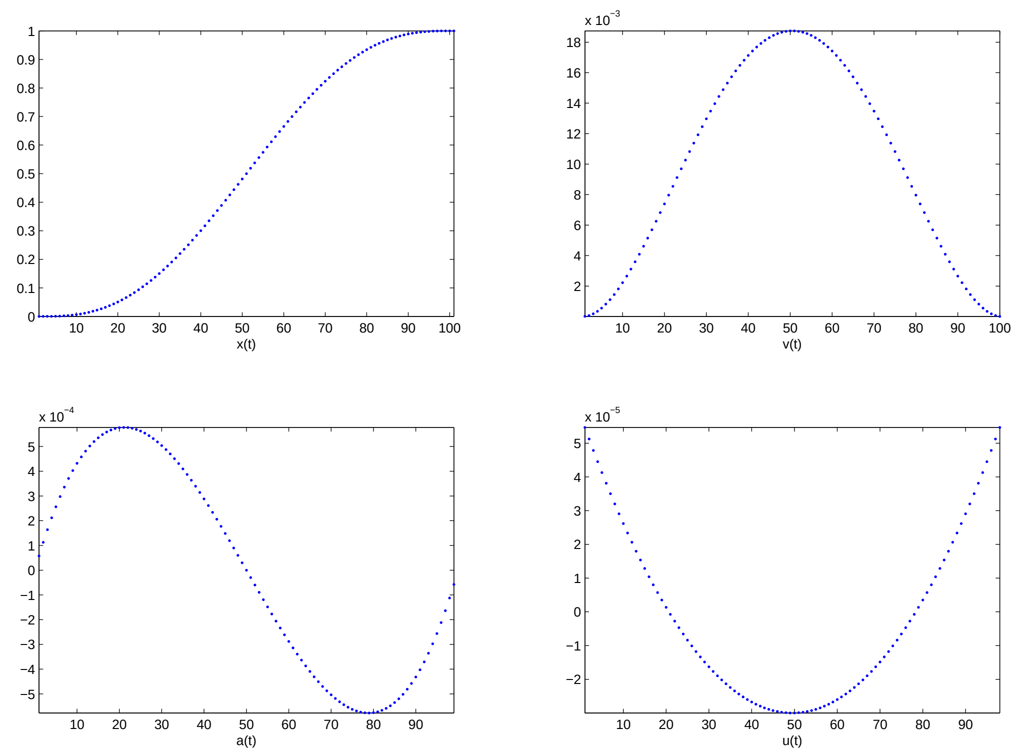
מתוך $v(t_f) = a(t_f) = 0$ ו$x(t_f) = x_f$ נקבל 3 משוואות ב 3 נעלמים כתלות בt_f

$$\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ x_f - x_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}t_f^3 & \frac{1}{2}t_f^2 & -t_f\\ -\frac{1}{24}t_f^4 & \frac{1}{6}t_f^3 & -\frac{1}{2}t_f^2\\ -\frac{1}{120}t_f^5 & -\frac{1}{24}t_f^4 & -\frac{1}{6}t_f^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}$$

מתקבל $c_1 = (x_f - x_0)\frac{720}{t_f^5}$, $c_2 = (x_f - x_0)\frac{360}{t_f^4}$ ו $c_3 = (x_f - x_0)\frac{60}{t_f^3}$ נציב במשוואה של x

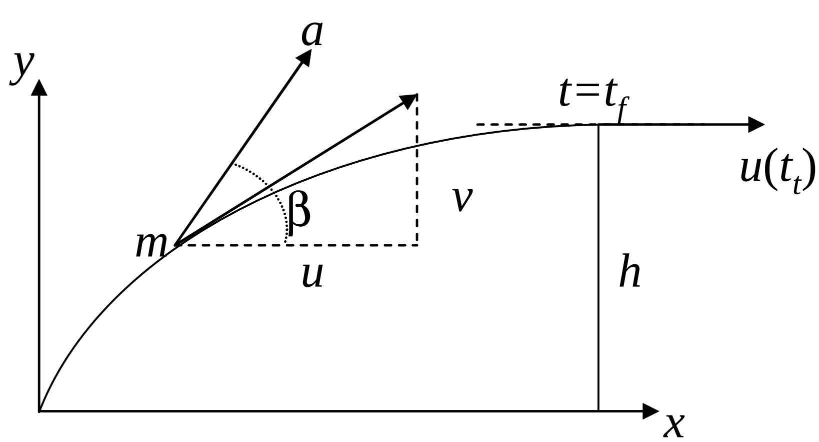
$$x(t) = x_0 + (x_f - x_0)(6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3)$$

כש $\tau = \frac{t}{t_f}$.



דוגמא: מערכת עם אילוצי קצה

נתיחס לבעיה הבאה



חלקיק בעל מסה m מתחיל את דרכו ממנוחה בראשית הצירים. על החלקיק מופעל כוח בקרה שעוצמתו ma וכיוונו (הזוית β) ניתן לבקרה. בזמן $t = t_f$ על החלקיק להיות במרחק h מציר ה x ובמהירות אופקית ומירבית. יש למצוא את אות הבקרה הדרוש.

פתרון (חלקי)

נגדיר את המצב להיות

$$\mathbf{x} = [x\, y\, u\, v]^T$$

ואת משוואות התנועה:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \dot{x} = u \\ f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \dot{y} = v \\ f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \dot{u} = a\, cos(\beta) \\ f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \dot{v} = a\, sin(\beta) \end{aligned}$$

נגדיר $L = 0$ ו$\phi = u(T)$. נחשב את היעקוביאן

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial u} & \frac{\partial f_4}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נגדיר כופלי לגרנג' $\lambda^T = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]$ ומתוך 15 נקבל

$$[\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3, \dot{\lambda}_4] = -[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0, 0, -\lambda_1, -\lambda_2]$$

נפתור את המישוואות הדיפ':

$$\lambda_1 = c_1 \ , \ \lambda_2 = c_2 \ , \ \lambda_3 = -c_1 t + c_3 \ , \ \lambda_4 = -c_2 t + c_4$$

כעת נכתוב את ההמילטוניאן

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= L + \lambda^T f \\ &= \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 a\, cos(\beta) + \lambda_4 a\, sin(\beta) \end{aligned}$$

ע"פ 17

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} \quad = \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} = -\lambda_3 a\, sin(\beta) + \lambda_4 a\, cos(\beta)$$

לכן

$$\tan(\beta) = \frac{\lambda_4}{\lambda_3} = \frac{-c_2 t + c_4}{-c_1 t + c_3}$$

כעת נכתוב תנאי קצה

$$[x(0), y(0), y(0), v(0)] = [0, 0, 0, 0]$$

וכמו כן

$$y(T) = h \ , \ v(t) = 0$$

מתוך 16 נמצא אילוצים עבור λ_1 וλ_3 (אך לא לλ_2 וλ_4)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{t=T} = 0 \\ \lambda_1 &= c_1 = 0 \\ \lambda_3 &= \left.\frac{\partial \phi}{\partial u}\right|_{t=T} = 1 \\ \lambda_3 &= 0t + c_3 = 1 \end{aligned}$$

מכך ש

$$\tan(\beta) = \frac{\lambda_4}{\lambda_3} = -c_2 t + c_4$$

את כלל זה ניתן להציב במשוואות התנועה, לפתור אותן כתלות בפרמטרים c_2, c_4 ולמצוא את פרמטרים אלו מתוך תנאי הקצה שנותרו $y(T) = h \ , \ v(t) = 0$.

t_f לא נתון, חלק ממשתני המצב נתונים בt_0 ובt_f (וחלק לא)

כשזמן פעולת המערכת, t_f, אינו נתון, הוא הופך לפרמטר נוסף של הבעיה אשר ני-תן לבקרה ומשפיע על מחיר הפתרון. אותם התנאים (לאופטימליות הפתרון) שמצאנו קודם (מישוואות 18,17,16,15,14) תקפים גם במצב זה אך נוסף תנאי נוסף לאופטימליות:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathcal{H}\right)_{t=t_f}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathcal{L}+\lambda^T\mathbf{f}\right)_{t=t_f}=0 \qquad (19)$$

(סקיצת) ההוכחה חוזרת על התהליך שראינו קודם בהבדל אחד: הואריאציה היא גם בt_f. כלומר, הלגרנגיאן הוא, כמיקודם (מש' 1)::

$$J_A=\phi\left(\mathbf{x}(t_f),t_f\right)+\int_{t_0}^{t_f}\mathcal{L}\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t\right)dt+\int_{t_0}^{t_f}\lambda^T(t)\left[\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)-\dot{\mathbf{x}}(t)\right]dt$$

נניח שδt_f קטן דיו כך ש $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t_f)$ לכל $t=[t_f,t_f+\delta t_f]$ (כלומר, השינוי ב $\mathbf{x}$ במשך זמן זה הוא זניח). הואריאציה שמתקבלת היא:

$$\begin{aligned}\delta J' &= \delta J+\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{t_f}\delta t_f+\mathcal{L}(t_f)\delta t_f+\lambda^T(t_f)\mathbf{f}(t_f)\delta t_f\\ &= \delta J+\underbrace{\left(\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{t_f}+\mathcal{L}(t_f)+\lambda^T(t_f)\mathbf{f}(t_f)\right)}_{require\ =0}\delta t_f\end{aligned}$$

(הערה: אותו הפתרון מתקבל גם ללא ההנחה הנ"ל אך ההוכחה מעט מסובכת).

דוגמה: בעיות מינימום זמן

נתונה מערכת דינאמית כלשהיא, $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)\in\mathrm{R}^n$, $\mathbf{u}\in\mathrm{R}^m$. כמו כן, נתונים וערכם של חלק ממשתני המצב בזמן t_0 וערכם של חלק ממשתני המצב בסוף פעולת המערכת. זמן סוף פעולת המערכת, t_f אינו נתון. יש למצוא אות בקרה (ואת המסלול שמתקבל) אשר ממזער את פונקציית המחיר הפשוטה:

$$J=t_f-t_0$$

כלומר, פתרון מינימום זמן. מכאן ש

$$\phi=0 \quad , \quad \mathcal{L}=1$$

הצבה במשוואות 18,17,16,15,14 ו19 נותנת את סט המשוואות הבא:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)\\ \dot{\lambda}^T &= -\lambda^T\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_k(t_f) = 0 \quad or \quad & x_k(t_f) \; given, \quad k = \{1 \dots n\} \\
\lambda^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{0} \quad m \; equations \\
\lambda_k(t_0) = 0 \quad or \quad & x_k(t_0) \; given, \quad k = \{1 \dots n\} \\
\lambda^T(t_f)\mathbf{f}(t_f) &= -1
\end{aligned}$$

ברשותינו $2n$ תנאי קצה בשביל $2n$ המישוואות הדיפרנציאליות, m תנאי אופטימליות עבור m מימדי $\mathbf{u}$ ותנאי נוסף עבור t_f.

אילוץ אינטגרל על המסלול

נניח כי ברצונינו למצוא פתרות לבעיית בקרה שמקיים אילוץ מהצורה

$$c = \int_{t_0}^{t_f} N(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt$$

ניתן לפתור זאת ע"י רידוקציה לבעיה עם משתנה מצב נוסף ותנאי קצה נוספים באופן הבא:

נוסיף משתנה מצב חדש x_{n+1} ומשוואת דינמיקה:

$$\dot{x}_{n+1} = N(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

קל לראות כי

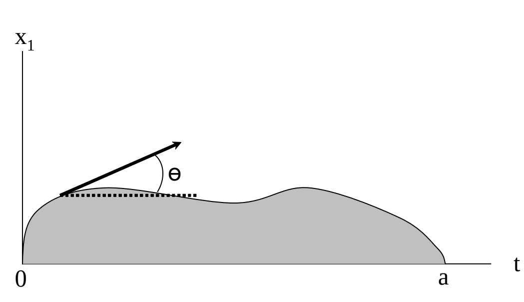
$$x_{n+1}(t') = \int_{t_0}^{t'} N(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt$$

כעת, אם נדרוש

$$x_{n+1}(t_f) = c \quad , \quad x_{n+1}(t_0) = 0$$

הרי שהמערכת המורחבת תקיים את אילוץ האינטגרל המקורי.

דוגמא: מקסימום שטח להיקף נתון



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = -x_1 \quad &, \quad \phi = 0 \\
u &= \theta \\
f_1 &= \dot{x}_1 = \tan\theta \\
x_1(0) = 0 \quad &, \quad x_1(a) = 0 \\
t_f &= a \\
p &= \int_0^a \frac{1}{\cos\theta} dt
\end{aligned}
$$

(נניח כי $p < \pi a$). המחיר הוא:

$$
J = -\int_0^a x_1 dt
$$

נחליף את אילוץ האינטגרל במשתנה מצב נוסף:

$$
f_2 \quad = \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad x_2(0) = 0 \; , \; x_2(a) = p
$$

נחשב את ההמילטוניאן:

$$
\mathcal{H} = \mathcal{L} + \lambda^T \mathbf{f} = -x_1 + \lambda_1 \tan\theta + \frac{\lambda_2}{\cos\theta} = const \tag{20}
$$

אנו יודעים כי קבוע= $\mathcal{H}$ כי $\mathcal{L}$ ו $\mathbf{f}$ אינם תלויים בזמן באופן אקספליציטי.

נכתוב משוואות דיפרנציאליות עבור λ לפי משוואה 15:

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 1 \\
\dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = 0
\end{aligned}
$$

לכן

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= t + c_1 \\
\lambda_2 &= c_2
\end{aligned}
$$

כעת ניעזר במשוואה 17

$$
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = \frac{\lambda_1}{\cos^2\theta} + \lambda_2 \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = 0
$$

ולכן

$$
\lambda_1 = -\lambda_2 \sin\theta = -c_2 \sin\theta
$$

כלומר:

$$\sin\theta(t) = \frac{-t - c_1}{c_2}$$

ניתן למצוא את $c_1, c_2, \mathcal{H}$ ע"י שימוש בתנאי הקצה הידועים של $\mathbf{x}$, ומשוואה 20, למצוא את $\theta(t)$ והפתרון שמתקבל הוא שהמסלול האופטימלי הוא קשת של מעגל שמרכזו ב$(\frac{a}{2}, -\frac{p\cos\alpha}{2\alpha})$ ורדיוסו $\frac{p}{2}$ וα מקיים $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{a}{p}$.

אילוצי שיוויון על פונקציה של המצב ו/או אות הבקרה

אם בעיית הואריאציה כוללת אילוץ נוסף מהצורה

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0$$

ניתן להתייחס לאילוץ זה כאל אילוצי הדינמיקה. כלומר, נוסיף מישתנה לגרנג' חדש, ν (פונקציה וקטורית) ונגדיר מחדש את ההמילטוניאן להיות

$$\mathcal{H} = \lambda^T \mathbf{f} + \mathcal{L} + \nu^T \mathbf{c}$$

מכאן הפיתוחים הקודמים תופסים.