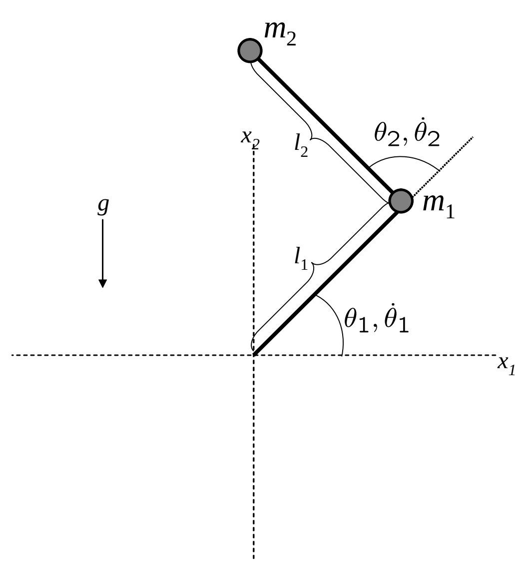
# מערכות דינאמיות ובקרה

## תרגיל מסכם

## ניתן להגיש בזוגות

הערות כלליות:

- יש להסביר את כל התשובות במלל ובחישובים מתאימים. אין להסתפק בתשובה סופית או בקוד כהסבר.
- אין להשתמש הפקודות מתוך הcontrol toolboxes של Matlab בהגשה (ניתן כמובן לצורכי debugging), אלא אם כן צויין במפורש אחרת.
- ניתן ומומלץ להיעזר בsymbolic toolbox של Matlab (או Maple ושות) על מנת לחסוך עבודות טכנית מייגעות.




בתרגיל זה נעסוק במערכת של זרוע שנעה במישור דו מימדי. הזרוע בעלת שני חלקים קשיחים חסרי מסה שאורכם $l_1$ ו $l_2$ אשר בקצותיהם נמצאות מסות נקודתיות $m_1$ ו $m_2$. מצב המערכת ניתן לתיאור ע"י הזויות $\theta_1$ ו $\theta_2$ והמהירויות הזויתיות $\dot{\theta}_1$ ו $\dot{\theta}_2$ אשר נסמן בווקטור מצב: $\mathbf{x} = [\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$. המערכת ניתנת לבקרה ע"י הפעלת מומנט פיתול (torque) על צירי התנועה. נסמנו $\mathbf{u} = [\tau_1, \tau_2]^T$. כוח המשיכה $g$ הוא פרמטר שערכו 10 כשהמערכת עומדת או 0 כשהיא שוכבת.

משוואות התנועה המתארות את מאזן הכוחות במערכת:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{M}(\theta_1,\theta_2)\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} + \mathbf{v}(\theta_1,\theta_2,\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2) + \mathbf{g}(\theta_1,\theta_2)\\
\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} &= \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\left(-\mathbf{u} + \mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})\right)\\
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} l_2^2 m_2 + 2l_1l_2m_2\cos(\theta_2) + l_1^2(m_1+m_2) & l_2^2m_2 + l_1l_2m_2\cos(\theta_2)\\ l_2^2m_2 + l_1l_2m_2\cos(\theta_2) & l_2^2m_2\end{bmatrix}\\
\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} -m_2l_1l_2sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 - 2m_2l_1l_2sin(\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\ m_2l_1l_2sin(\theta_2)\dot{\theta}_1^2\end{bmatrix}\\
\mathbf{g} &= \begin{bmatrix} m_2l_2g\cos(\theta_1+\theta_2) + (m_1+m_2)l_1g\cos(\theta_1)\\ m_2l_2g\cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{M}$ מכונה מטריצת מסה (וככזאת היא positive definite). $\mathbf{v}$ הוא וקטור של כוחות צנטרפוגלים וכוחות קוריוליס ו$\mathbf{g}$ זה וקטור של כוחות הנובעים מכוח המשיכה (וקטור זה מתאפס כש $g=0$).

לצורך בחינת המערכת ב-"מעבדה" עומדת לרשותכם פונקציות Matlab הבאות (בקובץ control_project_files.zip):

- two_link_arm_control מבצעת סימולציה של המערכת בזמן רציף (אינטגרציה נומרית בעזרת Runge Kutta מסדר 4 וצעד זמן בגודל משתנה, פונקציית ode45 בMatlab) ממצב התחלתי נתון בחלון זמן נתון עם פונקציית בקרה $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$.
- arm_noisy_discrete_control_step מבצעת סימולציה של צעד אחד של המערכת בזמן רציף כמקודם אך עם פונקציית בקרה אות בקרה קבוע $\mathbf{u}+\eta$ ($\eta$ הוא רעש בקרה). הפונקציה מחזירה תצפית (רועשת) של המצב בסוף צעד הסימולציה (בנוסף הפונקציה מחזירה את שאר הנתונים לצורך מעקב).
- show_2_link_arm_simulation להצגה ויזואלית של ריצת סימולציה.
- arm_usage_example1/2 דוגמאות לשימוש בפונקציות הנ"ל.
- get_kf_P_and_K מתוך תרגיל הבית (לשימוש במימוש מסנן קלמן)

## חלק 1. בקרה בopen loop

בחלק זה נרצה לייצר תנועה של הזרוע כך שקצה הזרוע ינוע בקו ישר ובמינימום תאוצה. לשם כך נחשב את המסלול הרצוי במרחב הקרטזי ונמיר אותו לאות בקרה רצוי על המפרקים.

1. נתון מיקום התחלתי במרחב הקרטזי $\mathbf{x}(0)=[\mathbf{x}_1(0),\mathbf{x}_2(0),]=\mathbf{x}_0$ , ומיקום סופי (בזמן סופי לא ידוע) $\mathbf{x}(t_f)=\mathbf{x}_f$. עליך למצוא מסלול $\mathbf{x}(t)$ (ביטוי אנליטי) שממזער את פונקציית המחיר הבאה:

$$J=\frac{1}{2}t_f^2+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}||\ddot{x}(t)||^2dt$$

בהנחה שהמהירות בתחילת המסלול ובסופו היא 0. ניתן להניח כי המסלול המתקבל הוא על קו ישר.

2. הוכח כי המשוואות הבאות נותנות את ה-inverse kinematics (המיפוי ממיקום קצה הזרוע במרחב הקרטזי לזויות המפרקים)[1]:

[1] הפונקציה $\text{Atan}(y,x):\mathrm{R}^2\to[-\pi,\pi]$ מחזירה את הזווית מציר ה$x$ ליתר במשולש ישר זוית שצלעותיו הן $y$ ו$x$ תוך התחשבות בסימנים של $x$ ו $y$, זאת בניגוד ל$\tan(y/x):\mathrm{R}^2\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

(א) (הנחיה: השתמש בכלל הקוסינוסים)

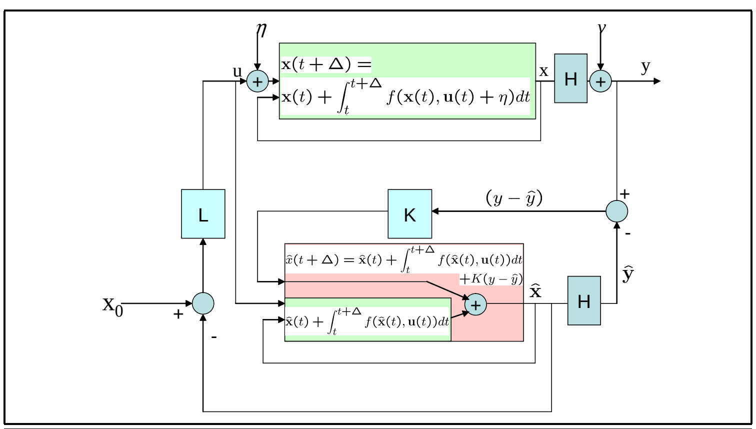
$$\begin{aligned}
\theta_2 &= \mathrm{Atan2}(s_2, c_2) \\
s_2 &= \sin(\theta_2) = \pm\sqrt{1-c_2^2} \\
c_2 &= \cos(\theta_2) = \frac{x_1^2+x_2^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}
\end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \mathrm{Atan2}(x_2, x_1) - \mathrm{Atan2}(k_2, k_1) \\
k_1 &= l_1 + l_2\cos(\theta_2) \\
k_2 &= l_2\sin(\theta_2)
\end{aligned}$$

3. צור (בMatlab) וקטור של ערכי $\mathbf{x}(t)$ בזמנים $t=[0:0.01:t_f]$ שמקיימים את שאלה 1 כשנתון $\mathbf{x}_0=[1,-1]^T$ ו $\mathbf{x}_f=[-0.5,1]$. מצא, בעזרת שאלה 2 את וקטורי הזויות המתאימים. גזור נומרית את וקטורי הזויות שקיבלת פעמיים לקבלת וקטור של מהירויות ושל תאוצות זויתיות. נתון כי $l_1=l_2=m_1=m_2=1$ ו$g=0$ מצא וקטור בקרה (זמן בדיד, open loop) ע"פ משוואות התנועה של המערכת. הצג בגרף את אות הבקרה. השתמש בarm_noisy_discrete_control_step (עם מטריצות רעש אפס) כדי לדמות הפעלה של הזרוע עם אות הבקרה הנ"ל. הצג בגרף את המסלול הרצוי ואת זה שהתקבל .האם יש מסלול שמקיים את דרישות שאלה 1 אך לביצועו נדרש אות בקרה גדול כרצוננו?

## חלק 2. בקרה בזמן בדיד מתוך תצפיות רועשות של המצב.




המערכת (האי-לינארית) עם בקרה שנבנתה עבור הקירוב הלינארי

בחלק זה נבצע בקרה של המערכת ע"י אות בקרה בדיד (פונקציית מדרגות). כמו כן יתווסף רעש תהליך (בצורת תוספת אדיטיבית אקראית לאות הבקרה הרצוי) ורעש תצפית (כתוספת אדיטיבית למצב האמיתי). לצורך כך נבצע לינאריזציה של המערכת למערכת לינארית בדידה ונעזר בעקרון הcertainty equivalence לשלב בין בקרת LQR בזמן בדיד ושערוך מצב בעזרת הsteady state Kalman gain. על מנת לשפר את שערוך המצב נקדם את המצב המשוערך ע"י אינטגרציה נומרית במקום באופן לינארי.

בשאלות 3-8 הניחו כי $g=10$ ו$l_1=l_2=m_1=m_2=1$

1. כתוב את משוואות הדינמיקה של המערכת (מהצורה $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$)
2. בצע לינאריזציה של המערכת סביב הנקודה $\mathbf{x}_0=[\frac{\pi}{2},0,0,0]^T$, $\mathbf{u}_0=[0,0]$ לקבלת מערכת לינארית $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$.

על מנת לוודא שתוצאותך נכונות, הצב את הערכים $g = 10$ ו-$l_1 = l_2 = m_1 = m_2 = 1$ ואת ערכי $\mathbf{x}_0$ ו-$\mathbf{u}_0$ הנ"ל. ערכי המטריצות אמורים להיות:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

3. עבור המערכת הלינארית שמצאת בשאלה הקודמת: הנח שאות הבקרה הוא פונקציית מדרגות שגודלן $\Delta$.

(א) מצא מערכת שקולה, דיסקרטית בזמן מהצורה:

$$\mathbf{x}(t+\Delta) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$$

(ב) הצב $\Delta = 0.1sec$ היכן הpoles?

(ג) האם המערכת יציבה?

נניח כעת שאיבדנו את היכולת להפעיל כוחות על המרפק. כלומר, שהעמודה הימנית של $\mathbf{G}$ היא אפס

4. עבור המערכת הדיקרטית שבשאלה הקודמת, ובהנחה ש-$\mathbf{u}_2 = 0$

(א) מצא וקטור gain, $L$ (ראה שרטוט) כך ש-$u(t) = -\mathbf{L}^T\mathbf{x}(t)$ ממזער את

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\mathbf{x}^T(i\Delta)\mathbf{Q}\mathbf{x}(i\Delta) + u^2(i\Delta)\right)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

אין להשתמש בפונקציות של הcontrol toolbox (כגון dlqr) אלא לצורך debugging. על מנת לפתור את משוואת הRiccati המתאימה ניתן לחשב את נוסחת הנסיגה המתאימה עד להגעה לsteady state (כפי שנדרשתם בתרגיל בית קודם)

(ב) מה הם הpoles של המערכת עם המשוב?

(ג) האם המערכת יציבה?

5. נניח (בסעיף זה בלבד) כי ביכולתינו לראות רק את $\theta_1$, כלומר $y(t) = \theta_1$. האם המערכת (הלינארית הדיסקרטית) היא observable?

6. נניח כי כתוצאה מרעש במפרקים נוסף לכל אות בקרה $\mathbf{u}'(t)$, רעש נורמלי $\eta$ עם מטריצת covariance אלכסונית $\sigma I$ כך ש:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}(t) + \eta \\ \eta &\sim \mathcal{N}(0, \sigma I) \end{aligned}$$

הנח כי השפעת הרעש האדיטיבי ל-$\mathbf{u}$ משפיעה על המערכת הלא לינארית באופן זהה להשפעתו על המערכת הלינארית שמצאת בשאלה 3. כלומר

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+\Delta) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(\mathbf{u}(t) + \eta) \\ &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) + w \end{aligned}$$

$$w \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{W})$$

מה הוא $\mathbf{W}$?

7. בנוסף לרעש התהליך שבשאלה הקודמת ישנו גם רעש תצפית נורמלי עם variance $\epsilon I$ כך ש

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{x}(t) + v \\ v &\sim \mathcal{N}(0, \epsilon I) \end{aligned}$$

מצא את הsteady state Kalman Gain ($\mathbf{K}$ בשרטוט) של המערכת הלינארית הדיסקרטית הרועשת (עם רעש תהליך שמצאתם בשאלה הקודמת ורעש תצפית לעיל). לצורך כך ניתן להשתמש בפונקציה get_kf_P_and_K אשר כתבתם בתרגיל בית קודם (הפתרון מצורף לתרגיל זה). כדי לקבל את מטריצת הsteady state הריצו את התכנית לקבלת $\mathbf{K}(500)$ (בצעד זמן ה- 500). עם הנתונים הבאים:

- רעש התהליך הוא כפי שמצאתם בשאלה 6 כש $\sigma = 0.1$
- רעש התצפית כפי שנתון בשאלה זו, $\epsilon = \frac{\pi}{360}$ (חצי מעלה).
- מצב התחלתי $\mathbf{x}_0 = [\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0]^T$ (ללא רעש).

(א) הצג שרטוט שמראה את $||\mathbf{K}(i) - \mathbf{K}(i-1)||_F^2$ עבור $i = \{1, \dots 500\}$ ($||\mathbf{A}||_F^2 = \sum_{i,j} \mathbf{A}_{i,j}^2$ היא הForbenius Norm). בדקו שהתהליך התכנס.

(ב) מה היא $\mathbf{K}(500)$?

(ג) מה משמעות $\mathbf{P}(500)$ שקיבלתם? האם שערוך המצב צפוי להיות טוב?

8. הרץ 100 סימולציות של המערכת הרועשת עם אות בקרה משאלה 4 למשך 20 שניות או עד לכשלון (אחת הזויות גדולה מ$4\pi$). על מנת לקבל שערוך מדוייק יותר של המצב נציב בנוסחה הסטנרדטית:

$$\bar{\mathbf{x}}_t = \bar{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_{500}(\mathbf{y}_t - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_{t|t-1})$$

את:

$$\bar{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \bar{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} + \int_{t-1}^{t} \mathbf{f}(\mathbf{x}_\tau, \mathbf{u}_{t-1}) d\tau$$

במקום $\bar{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{G}\mathbf{u}_{t-1}$. כלומר, נשתמש בסימולציה של המערכת הלא לינארית על מנת לקדם את $\mathbf{x}$ (ללא הרעש שאינו ידוע) במקום להשתמש במערכת הלינארית המקורבת. על מנת לבצע את החישוב הנומרי הדרוש ניתן להשתמש בפונקציה arm_noisy_discrete_control_step ללא רעשים (מטריצות קואריאנס $\mathbf{0}$) או בפוקציה two_link_arm_control עם פונקציית בקרה קבועה. הצג היסטוגרמה של זמני הסימולציה שהתקבלו. הגש גרף המתאר ריצה לדוגמא.