

דואליות

דוגמא: יהי x^* הפתרון האופטימלי. נבדוק האם נוכל לחסום את T^* מלמטה, וע"י כך נקבל
מידע על הפתרון האופטימלי מבלי לפתור את LP.
נשים לב ש $T^* \geq I$, ולכן בהכרח $T^* \geq 5$.
נחשב: $3 \cdot I - II = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$, מאותו שיקול נקבל ש $T^* \geq 7$.
 $x_i \geq 0$

$$\text{זהו החסם הטוב ביותר כיוון ש } x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ נותן } T^* = 7$$

נפרמל את התהליך: נכפיל את I ב y_1 ואת II ב y_2 ונחבר אותן. נקבל:

$$(y_1 + 2y_2)x_1 + (y_1 + y_2)x_2 + (2y_1 + 3y_2)x_3 = 5y_1 + 8y_2 \leq T^*$$

בבעיה שלעיל.

כל בחירה של y_1, y_2 שמקיימת את האי שוויונים הנ"ל תיתן חסם תחתון, ולמעשה – אנחנו מחפשים את החסם התחתון המקסימלי.

קיבלנו בעיית LP חדשה שהיא התוכנית הדואלית לזו שלעיל. נשים לב שפתרון אופטימלי של הבעיה הזו
היא הפתרון האופטימלי של הבעיה המקורית.

$$\begin{aligned} \max(5y_1 + 8y_2) \\ y_1 + 2y_2 &\leq 1 \\ y_1 + y_2 &\leq 2 \\ 2y_1 + 3y_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

<u>הגדרה:</u>	Dual (D)	Primal (P)
	$\max b^t y$	$T^* = \min c^t x$
	$A^t y \leq c$	$Ax = b$
		$x \geq 0$

טענה: התוכנית הדואלית של הצורה הסטנדרטית של תוכנית דואלית שקולה לתוכנית הפרימלית (נוכיח בתרגיל).

משפט הדואליות החלשה: יהי x פתרון של P ו y פתרון של D , אזי $c^t x \geq b^t y$.

הוכחה: $c^t x \geq (A^t y)^t x = y^t (Ax) = y^t b = b^t y$, כנדרש.

משפט הדואליות החזקה: אם x^* פתרון אופטימלי של P אזי קיים פתרון אופטימלי y^* ל D ומתקיים: $c^t x^* = b^t y^*$.

מסקנה: ייתכנו אחד מ-4 מצבים:

(1) P תוכנית אפשרית ולא חסומה $\Leftarrow D$ אינה אפשרית כי $c^t x \rightarrow -\infty$ ולכן אין חסם תחתון $b^t y$ שמקיים $c^t x \geq b^t y$ לכל x .

(2) D אפשרית ולא חסומה $\Leftarrow P$ אינה אפשרית.

(3) P אפשרית וחסומה $\Leftrightarrow D$ אפשרית וחסומה.

(4) P ו- D שתיהן אינן אפשריות.

למה: בדיוק אחת הטענות הבאות נכונה:

(1) קיים x כך ש $Ax = b$

(2) קיים y כך ש $y^t A = 0 \wedge y^t b \neq 0$

(הוכחה בתרגיל 3)

הלמה של פרקש I: בדיוק אחת הטענות הבאות נכונה:

(1) קיים x כך ש $Ax = b, x \geq 0$

(2) קיים y כך ש $y^t A \leq 0, y^t b > 0$

זהו למעשה מקרה פרטי של משפט הדואליות החזקה כאשר $c = 0$: לו היה y כזה אזי מצד אחד $c^t x = 0$, אבל מצד שני,

$A'y \leq 0$ כלומר - פתרון. $y^t b > 0$ ולפי משפט הדואליות החלשה: $0 = c^t x \geq b^t y > 0$ זו סתירה.

הלמה של פרקש II: בדיוק אחת הטענות הבאות נכונה:

(1) קיים y' כך ש $A'' y' \leq c'$

(2) קיים x' כך ש $c'' x' < 0, A' x' = 0, x' \geq 0$

זהו מקרה פרטי של משפט הדואליות החזקה כאשר $b = 0$.

$I \Leftarrow II$ באמצעות מעבר טכני.

הוכחת משפט הדואליות החזקה בהנתן פרקש II:

יהי $T^* = c^t x^*$. נראה שקיים פתרון y^* למערכת הבאה:
$$(*) \begin{cases} A' y \leq c \\ b^t y \geq T^* \end{cases}$$

מאחר וע"פ הדואליות החלשה $b^t y \leq T^*$, ובפרט $b^t y^* \leq T^*$, נקבל ש $b^t y^* = T^*$ כפי שרצינו.

נהפוך את האי שוויון $-b^t y^* \leq -T^*$ ונגדיר: $c' = \begin{pmatrix} c \\ -T^* \end{pmatrix}$ ו $A' = (A | b)$.

קיבלנו בעיה מהצורה של פרקש II, ולכן אם לא קיים y^* כנ"ל אז קיים x' המקיים: $c'' x' < 0, A' x' = 0, x' \geq 0$.

יהי $x' = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ כך ש $x, \lambda \geq 0$.

אזי:
$$(**) \begin{cases} c'' x' = c^t x - \lambda T^* \leq 0 \\ A' x' = Ax - \lambda b = 0 \end{cases}$$

כלומר, אם אין y שמקיים (*) אזי יש x שמקיים (**).

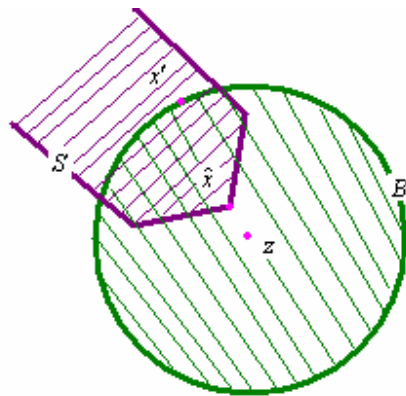
מקרה א': $\lambda \neq 0$, אזי בגלל ש $c^t x \leq \lambda T^*$ וגם $Ax = \lambda b$ (ע"י העברת אגף ב(**)), ומותר לחלק ב λ , אזי נקבל:

נשים לב שמכיוון ש $x, \lambda \geq 0$ גם $\frac{x}{\lambda} \geq 0$, כלומר $\frac{x}{\lambda}$ פתרון קטן יותר מ x וזו סתירה לאופטימליות x .

מקרה ב': $\lambda = 0$, אזי $c^t x < 0$ ו $Ax = 0$, נקבל ש $c^t(x^* + x) < T^*$ גם $A(x^* + x) = b$ וגם $x^* + x \geq 0$ ושוב קיבלנו פתרון קטן מ x וזו סתירה לאופטימליות x .
מכאן שאין x כנ"ל, ולכן יש y^* כפי שרצינו.

תזכורת – משפט ויירשטראס: תהי $S \subseteq R^n$ קבוצה סגורה, חסומה ולא ריקה, ו $f: R^n \rightarrow R$

רציפה, אזי קיים $\hat{x} \in S$ כך ש $f(\hat{x}) = \min\{f(x) | x \in S\}$.

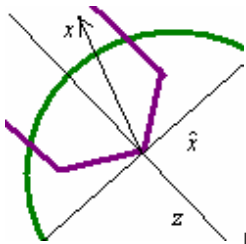


מסקנה I: תהי $S \subseteq R^n$ סגורה ולא ריקה, ויהי $z \notin S$ אזי קיים $\hat{x} \in S$ כך שמרחקו מ z

מינימלי, כלומר: $\forall x \in S \quad \|\hat{x} - z\| \leq \|x - z\|$.

הוכחה: נגדיר כדור $B = \{x | \|x - z\| \leq \|x' - z\|\}$ עבור $x' \in S$ מסויים. נתבונן

ב $S' = S \cap B$. S' סגורה, חסומה ולא ריקה, ולכן קיים $\hat{x}$ כנדרש.



מסקנה II: תהי $S \subseteq R^n$ סגורה, קמורה ולא ריקה, ויהי $z \notin S$, אזי $\hat{x}$ שמרחקו מינימלי מ z (שקיים לפי

מסקנה I) מקיים: $\langle \hat{x} - z, x - \hat{x} \rangle \geq 0$, כלומר $\Theta \leq 90^\circ$.

הוכחה: יהי $x \in S$, מהקמירות נובע ש $\hat{x} \neq \hat{x} + \lambda(x - \hat{x}) = \lambda x + (1 - \lambda)\hat{x} \in S$

עבור $0 \leq \lambda \leq 1$. ממסקנה I נובע ש $\|\hat{x} - z\| \leq \|\hat{x} + \lambda(x - \hat{x}) - z\|$

$$\|\hat{x} - z\|^2 \leq \|\hat{x} + \lambda(x - \hat{x}) - z\|^2 = \|\hat{x} - z + \lambda(x - \hat{x})\|^2 = \|\hat{x} - z\|^2 + 2\lambda(\hat{x} - z)^t(x - \hat{x}) + \lambda^2 \|x - \hat{x}\|^2$$

נעביר אגף, נצמצם משני האגפים ונחלק ב 2λ ונקבל:

$$(\hat{x} - z)^t(x - \hat{x}) \geq -\frac{\lambda}{2} \|x - \hat{x}\|^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

כנדרש.

משפט העל-מישור המפרד: תהי $S \subseteq R^n$ קבוצה סגורה, קמורה ולא ריקה ויהי $z \notin S$ אז קיים על מישור H שמפרד את z

מ S , כלומר $-H \subseteq S$ וגם $z \notin H^-$.

הוכחה: תהי $\hat{x} \in S$ הנק' הקרובה ביותר ל z , אז ממסקנה II נובע $(\hat{x} - z)^t(x - \hat{x}) \geq 0$.

יהי $a = z - \hat{x}$ ולכן $z \notin S$. $a \neq 0$.

יהי $\alpha = a^t \hat{x}$: $H = \{x | a^t x = \alpha\}$, אזי $a^t(x - \hat{x}) \leq 0$, אם $x \in S$ או $x \in H^-$.

מצד שני, $a^t z = a^t(a + \hat{x}) = a^t \hat{x} + \|a\|^2 \geq a^t \hat{x} = \alpha$, ולכן $z \notin H^-$ כנדרש.

למת פרקש – הוכחה

כיוון ראשון: $(1) \Leftarrow (2)$

יהי $x \geq 0$ כך ש $Ax = b$. אזי: $b^t y = y^t b = \underbrace{(A^t y)^t}_{\leq 0} \underbrace{x}_{\geq 0} \leq 0$. חזו סתירה ל(2).

כיוון שני: $(1) \Leftarrow (2)$

נניח שאין $x \geq 0$ כך ש $Ax = b$. נגדיר $S = \{Ax \mid x \geq 0\}$. לפי ההנחה $b \notin S$. נשים לב ש S היא קבוצה סגורה, קמורה ולא ריקה.

- לא ריקה כי $0 \in S$.

- סגורה וקמורה כי אם נתבונן בקבוצה $\{(x, y) \mid Ax - y = 0, x \geq 0\}$ שהיא למעשה אוסף של פתרונות של מערכת

משוואות, כלומר פאון. למעשה, $S = \{y \mid \exists x \geq 0, Ax = y\}$ (ההטלה של הפאון על ציר ה y) וגם היא פאון. פאון הוא גוף

סגור וקמור, ולכן גם S .

לפי משפט העל מישור המפרד קיים על מישור $H = \{x \in R^n \mid a^t x = \alpha, a \neq 0\}$ שמפריד את b מ S .

יהי $y = a$, אזי בה"כ: $S \subseteq H^-$ ולכן $y^t x \leq \alpha \forall x \in S$. $0 \in S$ ולכן $0 \leq \alpha$.

מצד שני, $b \notin H^-$ ולכן $b^t y > \alpha \geq 0$.

נותר להראות $A^t y \leq 0$.

נגדיר את הוקטורים $v_i = \lambda e_i$.¹ אם $\lambda > 0$ אז $v_i \geq 0$ ולכן $Av_i \in S$. מכך נובע ש $y^t (Av_i) \leq \alpha$.

אבל, $y^t (Ae_i) \leq \alpha / \lambda \Leftarrow y^t (Av_i) = y^t (\lambda Ae_i) \leq \alpha$.

נשים לב ש $\alpha / \lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$ ולכן $y^t (Ae_i) \leq 0 \forall i \Leftarrow y^t A_i \leq 0 \Leftarrow y^t A \leq 0$ כנדרש.

שיטת Primal-Dual למציאת פתרון מקורב

נזכר בייצוג של בעיה LP (של ILP):

P	D
$\min c^t x$	$\max b^t y$
$Ax = b$	$A^t y = c$
$x \geq 0$	

הרעיון:

$ALG = c^t x \leq \alpha c^t x^* \leq \alpha OPT_F \leq \alpha OPT$ (כאשר x פתרון לILP ו x^* פתרון אופטימלי לLP).

נמצא y פתרון אפשרי ל D , אזי לכל x ובפרט ל x^* מתקיים: $b^t y \leq c^t x^*$.

נניח שנוכל למצוא פתרון x לILP שיקיים: $c^t x \leq b^t y$ ($\leq \alpha c^t x^*$) ואז נקבל ש:

$ALG = c^t x \leq \alpha c^t x^* \leq \alpha OPT_F$ כפי שרצינו.

נשים לב שאם יש שיטה למצוא x ו y כנ"ל, לא צריך למצוא את x^* (כלומר, לא צריך לפתור את LP).

¹ e_i וקטור הבסיס הסטנדרטי שיש לו 1 במקום ה i - ואני לא ארשום את זה יותר...

עקרון העודף המשלים (Complementary Slackness)

תהי P בעיית LP סטנדרטית ו- D הדואלית לה, ויהיו x, y פתרונות אפשריים ל- P, D בהתאמה. אזי:

$$\forall j \quad x_j \neq 0 \Rightarrow \sum_i a_{ij} y_i = c_j \Leftrightarrow \text{פתרונות אופטימליים } x, y$$

הוכחה: אם x, y פתרונות אופטימליים אזי:

$$0 = c^t x - b^t y = c^t x - (Ax)^t y = c^t x - x^t (A^t y) = x^t (c - A^t y) = \sum_j x_j (c_j - \sum_i a_{ij} y_i)$$

(*) ממשפט הדואליות החזקה

כלומר, הסכום הנ"ל = 0 $\Leftrightarrow x_j = 0$ או $c_j = \sum_i a_{ij} y_i$, כנדרש.

LP בצורה קנונית והבעיה הדואלית לה

P	D
$\min c^t x$	$\max b^t y$
$Ax \geq b$	$A^t y \leq c$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

ואז, עקרון העודף המשלים הוא: x, y פתרונות אופטימליים $\Leftrightarrow \sum_i a_{ij} y_i = c_j$, $\forall j \quad x_j \neq 0$

$$\forall i \quad y_i \neq 0 \Rightarrow \sum_j a_{ij} x_j = b_i$$

עקרון העודף המשלים – מורחב

$$\forall j \quad x_j \neq 0 \Rightarrow \sum_i a_{ij} y_i \geq \frac{c_j}{\alpha} \quad \alpha \geq 1 \quad (1)$$

$$\forall i \quad y_i \neq 0 \Rightarrow \sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \cdot \beta \quad \beta \geq 1 \quad (2)$$

נשים לב שפתרונות שמקיימים את (1) ו-(2) יקיימו גם $c^t x \leq \alpha \beta b^t y$, שזו מטרתנו מתחילת השיעור.

$$c^t x = \sum_j c_j x_j \stackrel{(1)}{\leq} \sum_j \alpha \left(\sum_i a_{ij} y_i \right) x_j = \alpha \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) y_i \stackrel{(2)}{\leq} \alpha \sum_i \beta b_i y_i = \alpha \beta b^t y$$

הוכחה: $\alpha \beta b^t y$

פתרון Weighted Set Cover באמצעות העקרונות הנ"ל

נגדיר את f להיות התדירות המקסימלית של איבר כלשהוא ב- U .

תנאים למציאת x, y כנ"ל ל-WSC עבור בחירה של $\alpha = 1, \beta = f$:

$$\forall s \in S \quad x_s \neq 0 \Rightarrow \sum_{e|e \in S} y_e = c(S) \quad (1)$$

$$\forall e \in U \quad y_e \neq 0 \Rightarrow \sum_{S|e \in S} x_s \leq f \quad (2)$$

ואז נקבל f קירוב לפתרון האופטימלי.

אלג' Primal-Dual לWSC:

1. אתחול: $x = 0, y = 0, C = \emptyset$ כאשר C היא קבוצת האיברים שכוסו עד כה.

2. כל עוד $C \neq U$

- בחר פריט לא מכוסה $e \in U \setminus C$

- הגדל את y_e עד שהחסם על אחת הקבוצות הופך להדוק, כלומר: $\sum_{e \in S} y_e = c(S)$

- לכל קבוצה "הדוקה" S נקבע $x_s = 1$.

- $C = C \cup S$

נשים לב שניתן לקחת את $c(S)$ המינימלי ולהגדיל את y_e בהתאם.

משפט: לאלג' Primal-Dual יחס קירוב f

הוכחה: נבדוק שתנאי העודף המשלים המורחב מתקיימים, ונקבל את הדרוש.

(2) מתקיים באופן טריוויאלי כי אם כל $x_s = 1$ הסכום $\sum_{S|e \in S} x_s$ לא יכול להיות $< f$ (שזה מס' הקבוצות המקסימלי שבהם e

יכול להיות).

(1) לפי בניית האלגוריתם ברגע ש $\sum_{e \in S} y_e = c(S)$ קובעים $x_s = 1$ ומקבלים את התנאי הדרוש $\sum_{e \in S} y_e = c(S) \Leftrightarrow x_s = 1$.

נותר להראות ש x, y פתרונות חוקיים:

איבר מכוסה ($x_s = 1$) אם הוא שייך לקבוצה "הדוקה" S . אם איבר e אינו מכוסה, אז כל S כך ש $e \in S$ אינה הדוקה. מכך נובע שאפשר עדיין להגדיל את y_e , כלומר – האלגוריתם עדיין לא הסתיים. מכאן שבסיום האלגוריתם כל האיברים מכוסים.

לכל S $\sum_{e \in S} y_e \leq c(S)$ בגלל שאם בשלב כלשהוא נוצר מצב ש $\sum_{e \in S} y_e = c(S)$, מסמנים $x_s = 1$, ואז האיבר $e \in C$ (כלומר

מכוסה) ולא נגדיל יותר את y_e .

דוגמא שבה יחס האלג' $f =$

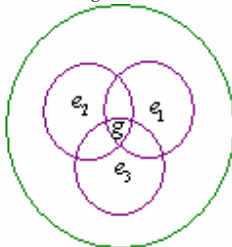
בבעיה יש f איברים ו- $f-1$ קבוצות מהצורה $S_i = \{g, e_i\}$, ועוד קבוצה אחת S_U שמכילה את כל אברי U . מחיר כל

הקבוצות $= 1$.

נניח שמתחילים עם g , נגדיל את y_g עד 1 (שזה המקסימום האפשרי) ואז מקבלים לכל i $y_g + y_i = 1$, ואותו הדבר עבור

הקבוצה S_U .

אם כן, נבחר f קבוצות בעלות f כאשר $OPT = 1$.



הבעיה הדואלית ל LP בצורה כללית:

נתחיל מבעיית LP בצורה הכללית ביותר:

$$\min c'x$$

s.t.

לכל $j \in \bar{N}$ נחליף את x_j בשני משתנים x_j^+ ו x_j^- . נחליף את העמודה A_j בעמודות A_j^+ ו A_j^- .

$$\forall i \in M \quad A_{i-} x = b_i$$

בהתאם.

$$\forall i \in \bar{M} \quad A_{i-} x \geq b_i$$

$$, a_{i_1} x_1 + \dots + a_{i_j} x_j + \dots + a_{i_n} x_n = b_i$$

$$\forall j \in N \quad x_j \geq 0$$

$$a_{i_1} x_1 + \dots + a_{i_j} x_j^+ + (-a_{i_j}) x_j^- + \dots + a_{i_n} x_n = b_i$$

לכל $i \in \bar{M}$ נוסיף משתנה עודף x_i^s (slack variable) ונחליף את הדרישה $A_{i-} x \geq b_i$ בדרישה $A_{i-} x - x_i^s = b_i$.

בה"כ, נניח שכל השורות והעמודות מקובצות יחד בהתאם ל M ו N ב A המקורית.

$$\hat{b} = b, \hat{c} = (c_N \mid c_{\bar{N}}^+ \mid c_{\bar{N}}^- \mid 0), \hat{x} = (x_N \mid x_{\bar{N}}^+ \mid x_{\bar{N}}^- \mid x^s), \hat{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \overbrace{A_{-N}}^{i \in N} & \overbrace{A_{-\bar{N}}}^{j \notin N} & \overbrace{-A_{-\bar{N}}}^{-A_j, j \in N} & \begin{matrix} \overbrace{0}^{|\bar{M}|} \\ -I_{|\bar{M}|} \end{matrix} \end{array} \right):$$

התאמה זו מקיימת: $x_j = x_j^+ - x_j^-$, $\forall j \in \bar{N}$, ולכן: $c_j x_j^+ - c_j x_j^- = c_j (x_j^+ - x_j^-) = c_j x_j$.

$$\min \hat{c}'x$$

קיבלנו בעיה שקולה בצורה סטנדרטית:

s.t.

$$\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$$

$$\hat{x} \geq 0$$

$$\max \hat{b}'y$$

לבעיה זו ניתן עכשיו בקלות למצוא את הבעיה הדואלית (כפי שאנחנו כבר

יודעים למצוא), והיא:

s.t.

$$y^t \hat{A} \leq \hat{c}$$

$$(1) \forall j, j^+ \in N \quad y^t \hat{A}_j = y^t A_j \leq c_j = \hat{c}_j$$

$$(2) \forall j^- \in \bar{N} \quad y^t (-\hat{A}_j) = y^t A_j \leq -c_j = \hat{c}_j$$

$$\Rightarrow y^t \hat{A}_j = y^t A_j \geq c_j$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow y^t A_j = c_j$$

$$\forall i \in \bar{M} \quad -y_i \leq 0 \Rightarrow y_i \geq 0$$

$$\max b'y$$

כלומר, הבעיה שאיתה התחלנו שקולה ל:

s.t.

$$j \in N \quad y^t A_j \leq c_j$$

$$j \notin N \quad y^t A_j = c_j$$

$$i \in \bar{M} \quad y_i \geq 0$$