$$|C| \geq 2^m > 2^{\log_2(|C|)} = |C|$$

לכן,

וקיבלנו סתירה.

משפט.

- **מימד VC של איחוד:** יהיו C_1, C_2 שני מחלקות מושגים, כל

כאשר מעל מימד VC d.

נראה ש: $VC\text{-}\dim(C_1 \cup C_2) \leq 2d+1$.

הוכחה: יהי S מדגם בגודל m. מהלמה של Sauer

נקבל: $|\Pi_{C_1}(S)| \leq \phi_d(m) = \sum_{i=0}^{d} \binom{m}{i}$ וכן

$$|\Pi_{C_2}(S)| \leq \phi_d(m) = \sum_{i=0}^{d} \binom{m}{i} = \sum_{i=0}^{d} \binom{m}{m-i}$$

אנחנו יודעים ש: $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = 2^m$

לכן, משמל שהמדגם ינותץ צריך שיתקיים:

$$\sum_{i=0}^{d} \binom{m}{i} + \sum_{i=0}^{d} \binom{m}{m-i} \geq 2^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}$$

הגל יקרה רק אם תהיה חפיפה מסוימת מלמעלה ומלמטה, כמו שלהלן.

כלומר אם $d+1 \geq m-d \Leftarrow m \leq 2d+1$.

לכן, מדגם יהיה מנותץ רק אם גדול לפחות מ $2d+1$.

ומקרה הקיצוני:

0	1	2	...	d	$m-d$ $=d+1$	$m-d+1$	...	m

כלומר: $m-d=d+1 \Leftarrow m=2d+1$