לעומת $\alpha \geq 0$ הפונ' $L(x,\alpha)$ קמורה בפונ' של x ולכן מקבלת מינימום כאשר

$$\nabla L(x^*,\alpha) = 0 \Leftarrow w + 2\alpha(x^* - x_i) = 0$$

$$\Rightarrow (x^* - x_i) = -\frac{1}{2\alpha} w \Rightarrow x^* = x_i - \frac{1}{2\alpha} w$$

מכאן, הבעיה הדואלית היא:

$$\max_{\alpha \geq 0} L(x^*,\alpha) = \max_{\alpha \geq 0} w\cdot\left(x_i - \frac{1}{2\alpha} w\right) + \alpha\left(\left\|\frac{1}{2\alpha} w\right\|^2 - r^2\right)$$

$$= \max_{\alpha \geq 0} \underbrace{w\cdot x_i - \frac{1}{2}\cdot\frac{\|w\|^2}{\alpha} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\|w\|^2}{\alpha} - \alpha r^2}_{q(\alpha) \text{ נסמן}}$$

נבדוק מה $q(\alpha)$ מקבלת נקודת קיצון לכן:

$$q'(\alpha) = \frac{1}{4}\|w\|^2\cdot\frac{1}{\alpha^2} - r^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\|w\|^2}{(2r)^2} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\|w\|}{2r}$$

יש שני פתרונות, אחד מהם הוא שלילי ולכן הוא נפסל, נשאר לבחור

את הפתרון החיובי. נגזור פעם שנייה

$$q''(\alpha) = -\frac{1}{4}\|w\|^2\frac{2}{\alpha^3} < 0$$

לכן קיבלנו נקודת מקסימום.

הערה: עבור $\alpha = 0$ מקבלים $\min_{x\in R^n} L(x,\alpha) = -\infty$ ולכן זו בוודאי

לא הפתרון האופטימלי.

לסיכום הפתרון הוא:

$$\boxed{x^* = x_i - r\frac{w}{\|w\|}}$$