

מטריצות

הנקודות: * המטריצה הנמשלבת (transpose) A

$$A_{ij}^T = A_{ji}$$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \text{* טענה:}$$

$$A = A^T \quad \text{* מטריצה } A \text{ היא סימטרית אם}$$

$$A^T A \quad \text{* טענה: היא סימטרית.}$$

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A \quad \text{הוכחה:}$$

* מטריצה A היא מטריצה ממוזגת (פרימטיבה) אם היא מכילה

רק ערכים ממשיים ≥ 0 וכל שורה וכל עמודה יש 1 אחד בדיוק.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{31} & d_{32} \\ d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

זה מה שמטריצה ממוזגת עושה - ממוזגת את השורות.

* מטריצה ממוזגת חיובית היא A כך שלכל $x \neq 0$ מתקיים:

$$x^T A x > 0$$

(positive definit).

עזומתא: מטריצה החיובית היא חיובית כי מתקיים

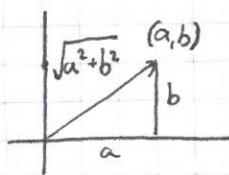
$$x^T I_n x = x^T x = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$$

* נורמה q $1 \leq p \leq \infty$ מוגדרת:

$$\|V\|_p = (|V_1|^p + |V_2|^p + \dots + |V_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$V = (V_1, \dots, V_n) \quad \text{כאשר}$$

הנורמה המוכרת: l_2 - הנורמה האוקלידית



l_1 - סכום הערכים המוחלטים.

l_∞ - מודולו של הערך המקסימלי מבין הערכים המוחלטים של V_i .

והיא ממונה עליונות מקומית, SK , $A^T A$ היא ממונה, חזקה, סימטרית

הערות:

$$x^T(A^T A)x = (x^T A^T)(Ax) = (Ax)^T(Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0$$

$Ax \neq 0$ ist für A nicht BI $\vec{x} \neq \vec{0}$

ד'תשנ"ח חנוכה פ"א/א

והיונים הן מסומנים: $X_2, \dots, X_n$ ומונחים עליון אלווופים זניאוי.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

(m) $\frac{1}{2} \log 2$

(p'ia-1) 1971 CN A) $Ax=b$

מחלקת המחקר $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ וווקטור $x \in \mathbb{R}^n$.

טענה: מאסער נא יע פארבאן יח"צ.

דוגמה: קיבל - $x = A^{-1}b$ (A מורגז) ולכן e זה הוסיף

יחזקאל - י"ח x' עמודים, 101.

$$X = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}(AX') = (A^{-1}A)X' = X'$$

המשפט: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, כלומר $f(x)$ מתקרבת ל- L ככל ש- x גדול מספיק.

$$PA = LU \quad : \text{minimize } L, U, P$$

L-מאפיין: משתנה תחומי P_2 P_1 הוא P_1 .


4 - מציינים ישרים נפרדים. 

$P - \text{פונקציה}$ ומונח.

$$Ax=b$$

נניח שיש לנו סיבון, $A \in LUP$:

$$p_{Ax} = p_b$$

$$LUx = Pb$$

$$Ux=y$$

$$Ux=y \quad \text{שכר,} \quad Ly=pb \quad \text{מחירי נפט}$$

$$y_1 = b\pi^{-1}(1) \quad \text{מחירי הנפט} \quad Ly=pb \quad \text{שכר}$$

$$L_{21}y_1 + y_2 = b\pi^{-1}(2)$$

...

$$L_{n1}y_1 + \dots + y_n = b\pi^{-1}(n)$$

הזרקת הנפט במספר של דבר רק משוואה של שכר אחת, נמוכה ומפידה קב
אז.

פירוק מערך המשוואה הוא פירוק $O(n^2)$ פירוק ברייטן הפירוק LUP.

$$A=LU \quad \text{מפירוק הפירוק: מפירוק פירוק}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & \omega^T \\ V & A' \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc} 1 & \vec{0}^T \\ V/a_{11} & I_{n-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} a_{11} & \omega^T \\ 0 & A' - V\omega^T/a_{11} \end{array} \right)$$

$$V\omega^T$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{pmatrix} (\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \begin{pmatrix} V_1\omega_1 & V_1\omega_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{n-1}\omega_1 & V_{n-1}\omega_2 & \dots \end{pmatrix}$$

המכונה $A' - V\omega^T/a_{11}$ מכונה המכונה של שחר גרסא

(של סימולטני).

$$L \quad U$$

0. המכונה המכונה: אם $n=1$ אז נחשי

$$A' - V\omega^T/a_{11} \quad \text{השכר}$$

$$A' - V\omega^T/a_{11} \quad \text{הפירוק הריקנסה של}$$

$$L'u' = A' - V\omega^T/a_{11}$$

משפט גא-היטרוק:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ V/a_{kk} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{kk} & \omega^T \\ 0 & L'U' \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ V/a_{kk} & L' \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} a_{kk} & \omega^T \\ 0 & U' \end{pmatrix}}_U$$

וקיבלו:

ואכן היא משולשית
תחתונה.

המשפט האלטרנטיבי:

3. נחשב מרחב L', U' או L, U .

המרחב כולו (הצגה-היטרוק) $O(n^3)$

אם $a_{kk} \neq 0$ קיים $a_{kk} \neq 0$ נפרט מצינו גמורה Q & A
מתחילת א-השווה הנאסרה ק-א'ר.

$$QA = \begin{pmatrix} a_{kk} & \omega^T \\ V & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ V/a_{kk} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{kk} & \omega^T \\ 0 & \underbrace{A' - V\omega^T/a_{kk}}_{\substack{\text{הוקוסיה גופא} \\ \& \text{המצינה גזו}}} \end{pmatrix}$$

V, ω^T לא אלו מתקנים
אם $a_{kk} \neq 0$ נפרט מצינו גמורה Q & A

הוקוסיה מתחנה L', U', P'

שג'ר:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} Q$$

$$\begin{aligned} PA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ V/a_{kk} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{kk} & \omega^T \\ 0 & A' - V\omega^T/a_{kk} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ P'V/a_{kk} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{kk} & \omega^T \\ 0 & \underbrace{P'(A' - V\omega^T/a_{kk})}_{L''U'} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ P'V/a_{kk} & L' \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} a_{kk} & \omega^T \\ 0 & U' \end{pmatrix}}_U \end{aligned}$$

זה נקרא אלטרנטיבי גאוס.

אם נאן חילוק LUP לא נלך ב-ב.

(א) $\mathbf{A}$ הוא $n \times n$ מרחב וקטורי באוסט, P תהיה I שימוש: חישוב הווקטור $\mathbf{A}$.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{I}_n$$

פיקסציה

המחלקה ה- i פנימה נקרא:

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

לחשוב פיקסציה $\mathbf{A}$ מערכת $\mathbf{A}$ אחת ב- n נאמרים.

$$O(n^3) = O(n^3)$$

אלגוריתם:

1. נחשב כיוון LUP של $\mathbf{A}$ $O(n^3)$ 2. נפרוק את $\mathbf{A}$ למערכת הטרנספוז $O(n^3)$ בסה"כ זמן חישוב: $O(n^3)$.נתון: $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ m נקודות במישור (שונה $x_i \neq x_j$)נרצה להעריך פולינום שדרגתו $\leq m-1$ ונקודות - אולי נקודה היא שחולבמרחב m נקודות לדוגמה.מחשבים פולינום מעלה m ($m \leq n$) שנקודת כל האסטרטגיות

(אחרת נקבעת אולי עוצמת הפולינום שאנו מחפשים).

היא לא קצרה מאדפיוני - נרצה למצוא:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

זו מטריצה ושרמטורה חלקית.
 במקרה הכללי - לא יהיה פירגון
 למערכת המשוואות הנ"ל.

אולי אין פירגון, אכן מחפשים:

$$\min_c \|Ac - y\|_2^2$$

האנדרגד
כלי חישוב
ההשוואה

(מתיחסים לעומתה האוקלידסית)

א' בספט 05/07/05

ר"ב

במקרה הכללי: A מ- $m \times n$ עם קוטר עמודי מלאה.

$$\|Ac - y\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j - y_i \right)^2$$

נגזרת לפי c_k (עקרו של לזנגרס):

$$\frac{d\|Ac - y\|_2^2}{dc_k} = \sum_{i=1}^m 2 \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j - y_i \right) a_{ik} = 0 \quad (*)$$

עושה את זה לכל $0 \leq k \leq n-1$ ומקבלים n משוואות ב- n נעמים.

$$(Ac - y)^T A = 0 \quad (*) \text{ נגזרת רגולרית:}$$

↓ מכפילים משני האגפים

$$A^T (Ac - y) = 0$$

$$A^T Ac = A^T y$$

A מקוטר עמודי מלאה ולכן $(A^T A)^{-1}$ קיים כי $A^T A$ is מ- $n \times n$

מוקדור חיובי וכל מ- $n \times n$ מוקדור חיובי היא לא סינגולרית.

נעזרים במקבל c^* רגולרית:

$$c = \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T y}_{\text{נקרא:}}$$

נקרא:

פסאודו-הינסני A של

is הוחקה למאריצור מוקדור.