

אלגוריתמי קירוב הסתברותיים

זה יהיה הסעיף האחרון בנושא של אלגוריתמי קירוב.

מבוא קצר להסתברות

נביא לתת בסיס להבנת אלגוריתמי קירוב הסתברותיים.

הגדרה: Ω מרחב הסתברותי סופי - Ω

זו קבוצה סופית $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$

יחד עם פונקציות משקל או שליליות על אובייקטים $\omega_i \in \Omega$:
 $\sum_{i=1}^n p(\omega_i) = 1$ $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ כך ש:

הסבר: $p(\omega_i)$ זו ההסתברות לדחות את ω_i מתוך Ω
 בהחלטה מקרית מתוך Ω .

דוגמאות

דוגמה 1

Ω_1 : מרחב התוצאות האפשריות למצג האוויר מחר

$\Omega_1 = \{\text{שמש}, \text{שלב}, \text{שאר} \}$

$p(\omega_1) = 0.89$

$p(\omega_2) = 0.01$

$p(\omega_3) = 0.1$

דוגמה 2

Ω_2 : מרחב התוצאות האפשריות בהטלת מטבע הוצן

$\Omega_2 = \{0, 1\}$

$p(\omega_1) = \frac{1}{2}$

$p(\omega_2) = \frac{1}{2}$

(2)

דוגמה 3
 Ω הטלות מטבע הוצן. ההטלות בלתי תלויות סטטיסטית.

Ω_3 : מחמם התוצאות האפשריות ב Ω הטלות מטבע הוצן, כאשר ההטלות בלתי תלויות סטטיסטית.

בעצם, Ω_3 הוא אוסף ה הסדרות באורך n של 0 ו 1:

$$\Omega_3 = \left\{ \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, \dots, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_n \right\}$$

הסתברות של (כל) סדרה: $\frac{1}{2^n}$

Ω_3 הוא המרחב הסתברותי שנגזר איתו האלוותים שראוה."

הערה:

פונקציות הסתברות הניתנת משקל $\frac{1}{|\Omega|}$ על אוסף Ω

נקראות: פונקציות הסתברות אחידה על המרחב Ω

עוד הערה:

משתנה מקרי הנו פונקציה למרחב הסתברות למספרים הממשיים:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

(3)

דוגמה למשתנה מקרי

עבור $\Omega = \Omega_3$, Ω_3 הוא זה שבמנו ω - אולם ω הסדרות באות n של 110.
נזכיר שב Ω_3 כל ω_i הוא וקטור של n קואיט.

$$X_1(\omega_i) = \omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \omega_{i_{17}}$$

(1)

$$X_2(\omega_i) = \begin{cases} 1 & \omega_{i_1} = \omega_{i_{17}} \\ 0 & \omega_{i_1} \neq \omega_{i_{17}} \end{cases}$$

(2)

הגדרה

התוחלת של X המשתנה המקרי X מתקנת להיות

$$\mathbb{E} X = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \cdot X(\omega)$$

משמעות התוחלת

דוגמה

$\Omega = \Omega_1$ (הוא מרחב האפשרויות למצב אור שמיני (צף))

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{זשם} \\ 0 & \text{שלא} \\ 0 & \text{(אחר)} \end{cases} \quad \Omega_1 = \left\{ \begin{matrix} \text{זשם} \\ \text{שלא} \\ \text{(אחר)} \end{matrix} \right\}$$

$$\mathbb{E} X = 1 \cdot P(\text{זשם}) = 0.1$$



$$X(\text{שלא}) = 0$$

$$X(\text{אחר}) = 0$$

אכן הם לא יתבטאו בתוחלת.

(4)

למרה: התוחלת הנה פונקציה ליניארית של משתנים מקריים.

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a \cdot \mathbb{E}X + b \cdot \mathbb{E}Y$$

a, b - קבועים

X, Y - משתנים מקריים

הוכחה

(1) נוכיח שהתוחלת משמרת חיבור

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$$

$$\mathbb{E}(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) (X+Y)(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) (X(\omega) + Y(\omega)) =$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) X(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) Y(\omega) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$$

(2) נוכיח שהתוחלת משמרת כפל בקבוע

$$\mathbb{E}(aX) = a \cdot \mathbb{E}X$$

(ניתן להוכיח באותו אופן כמו (1)).

לאס כק הוכחנו את הלמה.

דף כאן המכיל להטפות.

(5)

וכעת לעציה אלגוריתמית:

MAX-LIN-2

העציה נקראת:

(תהיה מערכת משוואות ליניאריות ב n משתנים מעל $\mathbb{Z}_2$)

יש m משוואות, כאשר $m \geq n$

עצומה:

$$m \text{ משוואות } \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = 0 \\ x_3 + x_{10} + x_{n-1} + x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \end{array} \right.$$

קלט: מערכת של m משוואות ליניאריות ב n משתנים מעל $\mathbb{Z}_2$

פתרון מותר: הצבה למשתנים $x_1, \dots, x_n$, מותר להציב קל משתנה 0 או 1

אויכות הפתרון: (q) מספר המשוואות המסופקות בהצבה.

מטרה שמספקת פתרון מסוים הוא משואה שמתקיימת אם מציבים

בה את הפתרון.

למשל: אם הפתרון הציב: $x_1=1, x_2=1, x_3=1$

אז המשוואה $\checkmark$ $x_1 = x_2 = 0$ מספקת

והמשואה $\times$ $x_1 + x_3 = 1$ לא מספקת

באת בעיית מקסימיזציה NP-קשה.

אלגוריתם הסתברותי

זה אלגוריתם שמותיר לו להטיל מטבעות ולהחליט על סמך תוצאות ההטלה.

באת אומרת, האלגוריתם לא מחזיר תמיד את אותה תשובה אלפי מחזיר אותה

מתוך אוסף תשובות, ולכל אחת מהתשובות באוסף יש הסתברות ≥ 1 שהיא מחזיר.

זה מחזיר מרחק הסתברות לט שהאופקים בו הם התשובות האפשריות של האלגוריתם

למציאת עליו פונקציות הסתברות הטבעות מהסתברות של תוצאות ההטלה השונות.

(6)

הערה: האובכות של פתרון מתאמה לכל פתרון מותר מספר

ממשי, זאת אומרת: $q: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
אז נוכל לחשוב עליה כעל מסתנה מקרי!

נצטרך את האלגוריתם על סמך העץ המצוינה $\mathbb{E}q(0)$ של
הפתרון 0 שהאלגוריתם מחזיר.

↓
הערה: אלגוריתם הסתברותי הית $\frac{C}{\text{מקרה}}$
(עדויות מקסומליות) אם $\frac{q(OPT)}{\mathbb{E}q(0)} = C$

וארשיו:

אלגוריתם הסתברותי 2-מקרה MAX-LIN-2

נאיל מטבע הוען n פאזיס באוק לתי תלוי. נקבל סדרה
של תוצאות $a_1, \dots, a_n$ כאשר $a_i \in \{0, 1\}$
אנצוב $x_i = a_i$

טענה: זה אלגוריתם 2-מקרה
היבחה לטענה

(1) $q(OPT) \leq m$ (שקרי נתונות יק m משוואות אנצל הותר כולן
זהו מסופקות)

(2) אם נוכיח ש $\mathbb{E}q(0) = \frac{m}{2}$

⇓
 $\frac{q(OPT)}{\mathbb{E}q(0)} \leq 2$

7

$$\mathbb{E}q(0) = \frac{m}{2} =: \delta_3''$$

הוכחה

נגדיר עבור $j=1, \dots, m$ משתנה מקרי X_j באופן הבא:

$$X_j(0) = \begin{cases} 1 & \text{המשתנה היה מסופק} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מתקיים: $q = \sum_{j=1}^m X_j$ שתי q זה איכות הפתרון שבה מספר המשוואות המסופקות.

$$\mathbb{E}q = \sum_{j=1}^m \mathbb{E}X_j$$

↓
בגלל ליניאריות התוחלת מתקיים:

אז צרינו מספיק שנגדיר כי $1 \leq j \leq m$ $\mathbb{E}X_j = \frac{1}{2}$ ונסיים.

$$\mathbb{E}q = \sum_{j=1}^m \mathbb{E}X_j = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

כי אז

אז צ"ל: $\mathbb{E}X_j = \frac{1}{2} \quad 1 \leq j \leq m$

הוכחה

קודם כל נכתוב מה זה $\mathbb{E}X_j$:

ניתן לעגור מבו $\mathbb{E}X_j$ בשתי דרכים:

$$\mathbb{E}X_j = \sum 1 \cdot P(0) = \left| \begin{matrix} \text{מספר הפתרונות} \\ \text{0 שבהם} \\ \text{המשתנה} \\ \text{היה מסופק} \end{matrix} \right| \cdot \frac{1}{2^n}$$

↓
מכיון שכל הפתרונות
0 שבהם המשתנה היה
מסופק.

① לפי הגדרת תוחלת:

② $\mathbb{E}X_j$ זו פשוט ההסתברות לכך שהמשתנה היה מסופק.

↪

8

לפי הערה (1) אם נראה ש $2^{n-1} = \left| \begin{matrix} \text{מספר הסדרות} \\ \text{שבהם המשוואה} \\ \text{נ' מסופקת} \end{matrix} \right|$

אז נקבל ש: $E X_j = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$

ואת זה נראה בשיעור ביום חמישי באמצעות קומבינטוריקה.

בשיעור זה נראה ש $E X_j = \frac{1}{2}$ לפי הערה (2) באומרת ש $E X_j$ זו ההסתברות לכך שהמשוואה הנ' מסופקת.

שהרי מהי ההסתברות לכן שהמשוואה הנ' מסופקת?
נניח שהמשוואה הנ' היא: $X_1 + X_2 + \dots + X_{k-1} + X_k = 0$

(ניח שיש משוואה נ' k משתנים.
לא חשוב מה שרצוי k (ו- k) המשתנים האשונים המופיעים
במשוואה הנ', העובדה הוא המשוואה מסתפקת או לא (נקבעת
לפי ההצבה במשתנה האחרון. וזו מציחה בהסתברות $\frac{1}{2}$ בדיוק.

לכן ההסתברות שהמשוואה נ' מסופקת היא $\frac{1}{2}$

לכן $E X_j = \frac{1}{2}$

נ.ש.נ.