

השאר הקודם העברנו מסדרה V_n המהירה $V_n(j, k) = (\omega^{jk})$
 $\omega = e^{2\pi i/n}$ $j, k = 0, \dots, n-1$ מסדרה n , כלומר $\omega = e^{2\pi i/n}$
 נתון וקטור $\vec{a} = (a_0, \dots, a_{n-1})$ שבו וקטור המקדמים של הפולינום

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

נזכר לחשב את הוקטור $\vec{y} = V_n \cdot \vec{a}$ ונקראו (נקל) טרכסברג
פירוק ההצבה של $\vec{a}$ (נסן)

$$\vec{y} = \text{DFT}_n(\vec{a})$$

 (קוצר)

ניתן אומרים לחשב את $V_n \cdot \vec{a}$ ב $O(n \cdot \log n)$ פעולה אריתמטיות.

דבר, שקורה לקבל את $\vec{y}$ הוא להחליף את הפולינום $P(x)$
 ב n שורשי פיתוח מסדר n : $\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}$ כאשר $\vec{y}_k = P(\omega^k)$

נבחר כי הפיך n הוא חזקה של 2, וניתן אומרים להחליף P
 בשורשי פיתוח ב $O(n \log n)$ פעולה.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

נציג

$$P^0(x) = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \dots + a_{n-2} x^{\frac{n-2}{2}} = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} a_k x^{\frac{k}{2}}$$

$$P^1(x) = a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} a_k x^{\frac{k+1}{2}}$$

למשל:

$$\deg P^0 = \deg P^1 = \frac{n}{2} - 1 \quad (1)$$

$$P(x) = P^0(x^2) + x \cdot P^1(x^2) \quad (2)$$

פירוק:

(1) סדר

(2) נראה שהמקדמים של הפולינום החדש יתנו שניים למקדמי P :

יבא אי שם, אז המקדם של x^k יתן $\text{Coef}(P^1) \cdot x^{\frac{k-1}{2}}$ המקדם של P^1 ב $x^{\frac{k-1}{2}}$

$$\text{Coef}(P^1) \cdot x^{\frac{k-1}{2}} = a_k = \text{Coef}(P) \cdot x^k$$

הסיבה היא שם, צומח ונקל יותר (באופן מפורש ב x).

אם נבחר, אז $0 \leq s \leq n-1$ נקרא

$$P(\omega^s) = P^0(\omega^{2s}) + \omega^s P^1(\omega^{2s})$$

נרשם אז s בין 0 ל- $n-1$.

$$P(\omega^0) = P^0(\omega^0) + \omega^0 P^1(\omega^0)$$

$$P(\omega) = P^0(\omega^2) + \omega P^1(\omega^2)$$

$$P(\omega^{n-1}) = P^0(\omega^{2^{n-2}}) + \omega^{n-1} P^1(\omega^{2^{n-2}})$$

$$P^0(\omega^{2^{n-2}}) = P^0(\omega^{n-2}) \quad \omega^n = 1$$

ראינו כי כאשר ω^s זוגי $[0 \leq s \leq n-1]$ אז ω^s שורש
 פיתרון n - $(\omega^s)^2 = (\omega^{2s})$ - אז פשוט ω^s שורש
 פיתרון $\frac{n}{2}$ -

$$\bar{y}^1 = \text{DFT}_{\frac{n}{2}}(a_1, a_3, \dots, a_{n-1}) \quad , \quad \bar{y}^0 = \text{DFT}_{\frac{n}{2}}(a_0, a_2, a_4, \dots, a_{n-2})$$

$$\text{DFT}_n(\bar{a}) = \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}^0 \\ \bar{y}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}^0 \\ \bar{y}^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{DFT}_{\frac{n}{2}}(\bar{a}^0) \\ \text{DFT}_{\frac{n}{2}}(\bar{a}^1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\omega}_0 \\ \bar{\omega}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{DFT}_{\frac{n}{2}}(\bar{a}^0) \\ \text{DFT}_{\frac{n}{2}}(\bar{a}^1) \end{pmatrix}$$

נראה כי $T(n) \Leftarrow T(n/2) + O(n)$ נכון, מתקיים

$$T(n) \leq 2T(\frac{n}{2}) + O(n) \Rightarrow T(n) \leq O(n \log n)$$

$$(\omega^s)^2 = (\omega^{2s+1})^2$$

הערה: אז $0 \leq s \leq n-1$ נקרא

$$\omega^{2s} = \omega^n \cdot \omega^{2s}$$

לדוגמה - נחלק את שורש פיתרון
 $(\omega_0^n)^2, \dots, (\omega_{\frac{n}{2}-1}^n)^2, \dots, (\omega_{n-1}^n)^2$ - אז צריך של שורש פיתרון
 מסדר $\frac{n}{2}$ - ω^n הוא מסדר $\frac{n}{2}$ - כל שורש פיתרון מסדר $\frac{n}{2}$ -

הוכחנו שניתן לחשב מחדש של שני פולינומים P, Q מסדר $n-1$

(הערה של 2) a וקטור נקראים a (של 4) ו b (של 2)

בזמן $O(n \log n)$ מוצא הפתרון:

$$a * b = \text{DFT}_n^{-1}(\text{DFT}_n(a) \cdot \text{DFT}_n(b))$$

$\text{DFT}_n^{-1}, \text{DFT}_n$ עליו $O(n \log n)$

אז זה לא מוגדר פולינום מחדש יחד $\Leftarrow$ נדרש n זוגי נקרא n קטן.

נצ"ב

מספרים פורמליים

המנהל G מסדר n על פניו כל קומפוטציה -

כל $x, y \in G$ מתקיים $x \cdot y = y \cdot x$. סוג זה של G

המנהל $\mathbb{Z}$ של מספרים שלמים על חיבור מוגדר n : $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\}$

אוסף הפונקציות $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ הפונקציות f וקטור, אם נציב f

(האוסף הזה פגומה (חיבור וכל סקלר) סקלר):

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

מחלק המרחב $n = |G|$.

המסלול הסטנדרטי למרחב הפונקציות f ו n פונקציות

$$\{\delta_x\}_{x \in G} \Rightarrow \delta_x(y) = \begin{cases} 1 & x=y \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

הפונקציות $\{\delta_x\}_{x \in G}$ הן בסיס ופרטית את המרחב n פונקציות

$$f = \sum_{x \in G} f(x) \cdot \delta_x \quad \text{אחרת } f: G \rightarrow \mathbb{C} \text{ ניתנת לכתוב}$$