

2 בדצמבר 2004
וט' כסליו תשס"ה

(1)

הרצאה באנליזות חסם
סיכמה: מהלך

הצית MAX-LIN-2 (המשק)

נחזור לאותה הציה שראינו בשיעור הקודם והיום נראה:

(1) פרק קומבינטורית: להוכיח שהאלגוריתם שראינו בשיעור הקודם הוא 2-מקרי

(2) דה רנפומציה: אלגוריתם דטרמיניסטי, אפיון

ההציה:

מספר מקסמום של משוואות ליניאריות מודולו 2.

אסטרטגיה פירוט:

נתונה מערכת של m משוואות ליניאריות ב n משתנים (חז"מ)

מאטריצה $A \in \mathbb{Z}_2^{m \times n}$.

מחפשים הצבה למשתנים המספקת מספר מקסימלי של משוואות.

ואנחנו ניסוח במטריות:

$$\begin{matrix} \leftarrow n \rightarrow \\ \uparrow m \downarrow \\ \boxed{A} \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \end{pmatrix}$$

מחפשים הצבה $b = b_1 \dots b_n$ לתוך $x = x_1 \dots x_n$

כך שהוקטור $A \cdot b$ קרוב כמה שיותר לוקטור היעד C .

(הציה זו חשובה בהוכחה לתיקון שגיאות)

↙

(2)

נסביר שום מהו:

אלגוריתם הסתברותי:

אנחנו מניחים לאלגוריתם לנתח, זאת אומרת האלגוריתם לא מחזיר תמיד אותה תשובה אלא בוחר תשובה אחת מתוך אוסף תשובות אפשריות. לכל תשובה באוסף יש משקל (הסתברות) וסכום המשקלים 1.

בניסוח מתמטי:

$$O = \{(O_1, P_1) \dots (O_k, P_k)\} \quad \text{האלגוריתם בוחר מתוך קבוצה}$$

כאשר O_j $1 \leq j \leq k$ הם השמות (התוצאות האפשריות)

P_j הוא המשקל של התוצאה O_j , $P_j \geq 0$

$$\sum_{j=1}^k P_j = 1$$

(גזיר: איכות התוצאה $q(O)$:

$$q(O) = \sum_{j=1}^k P_j \cdot q(O_j)$$

(אנחנו יודעים ש-0 הוא C קוראים לעצמו מקסומיזציה אם $\frac{q(OPT)}{q(O)} \leq C$

דוגמה

$$O = \{O_1, O_2\} \leftarrow \text{איכות התוצאה: } q(O) = \frac{2}{3} q(O_1) + \frac{1}{3} q(O_2)$$

$\downarrow$
 $P_1 = \frac{2}{3}$

$\downarrow$
 $P_2 = \frac{1}{3}$

③

האלגוריתם מקטיוח שממחיש הוא יבחר תשובה טובה.

(במציאות לא מספיק לדגוש שממחיש התשובה שתקצר הטובה
אלא צריך גם לדגוש שיש סיכוי גבוה שתבחר תשובה טובה,
כלומר שהשונות תהיה קטנה)

ועדכיון: דרך קומבינאטורית לבנות את האלגוריתם הסתברותי לקיבוץ
שנאמן בשיעור הקודם:

(הפעם נשתמש במינוחים קצת שונים ממה שהשתמשנו בשיעור הקודם)

האלגוריתם שנאמן הוא אלגוריתם הסתברותי בשלב מתוקדם כ'
מרחם התשובות שמחן הוא בוחר הוא בשלב אולם כל התשובות האפשריות

$$O = \left\{ \begin{matrix} \text{נבצחים} \\ (0, 0, \dots, 0) \end{matrix} \dots \begin{matrix} \text{נבצחים} \\ (1, 1, \dots, 1) \end{matrix} \right\}$$

אולם התשובות האפשריות מכיל 2^n תשובות ולא אחת משקל $\frac{1}{2^n}$.

$$q(O) = \sum_{j=1}^k P_j \cdot q(O_j) = \sum_{j=0}^{2^n-1} P_j \cdot q(O_j) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} q(O_j)$$

כי יש 2^n תשובות אפשריות $\frac{1}{2^n}$ כי המשקל של תשובה הוא

$$q(O) = \frac{m}{2}$$

נראה להראות שהאלגוריתם הוא ב-מקרה, כלומר ש

כדי להראות זאת נגיש טורק...

לדבר: האיכות $Y_j(A)$ של הפרתן A לגבי קומבינאיה ה' j

באופן הבא:

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{התשובה ה' נ'ת מסוימת} \\ 0 & \text{אם לא} \end{cases}$$

(4)

$$q(A) = \sum_{j=1}^n Y_j(A) \quad \text{מתקיים}$$

$$q(0) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{j=0}^{2^n-1} q(0_j) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{j=0}^{2^n-1} \sum_{t=1}^m Y_t(0_j) \quad \text{מתקיים}$$

$$= \sum_{t=1}^m \left[\frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} Y_t(0_j) \right] = m \cdot \frac{1}{2} = \frac{m}{2} \geq \frac{q(\text{OPT})}{2}$$

אם נראה שזה

t של $\frac{1}{2}$

אז

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{j=0}^{2^n-1} Y_t(0_j) \quad \text{אז } \frac{1}{2} \text{ שווה } t \text{ של } \frac{1}{2}$$

זה פשוט מספר ההשמות שמספקות את המשוואה t . כי לפי ההצגה $Y_t=1$ אם המשוואה t מסופקת.

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} Y_t(0_j)$$

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{j=0}^{2^n-1} Y_t(0_j) = \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2} \quad \text{אם נראה שקיטוי זה שווה אז סימננו, כי:}$$

כחלים אחרות, צריך להבנות שמספר ההשמות שמספקות את המשוואה t הוא 2^{n-1} או $\sqrt[n]{2^{n-1}}$ חצי מתוך כל ההשמות מספקות את המשוואה t .

צ"ל: בדיוק חצי מתוך כל ההשמות מספקות את המשוואה t .

לשם כך (נראה התאמה חד חד ערכית) אלא בין ההשמות המספקות והלא מספקות.

↪

(5)

$$X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = 0 \quad : \quad t \text{ משתתף במשוואה}$$

נחלק את ההשמות לכמות כך שבאותו זמן 2 ההשמות נקבעות כך
בקיט ה-n (למחרת בקיט שמושלם ב-n)

בחלוקה כל כפל זמן יש השמה אחת מספקת ואחת לא!
נפטר שאם הקיט ה-n שונה אז בוודאי ערך המשוואה 0 באחת
ההשמות ו-1 בשניה אז אחת מהן מספקת ואחת לא.

לסיכום: הראנו שאפשר לחלק את כל ההשמות לזוגות כשכל זמן השמה
אחת מספקת ואחת לא או
בדיוק חצי מתוך כל ההשמות מספקות את המשוואה t .
נ.ש.ל.

אנחנו רוצים רנדומיזציה

זה רנדומיזציה - הפיכת אלגוריתם הסתברותי לאלגוריתם דטרמיניסטי
זה נושא עמוק.

ראינו כעת שבדיוק חצי מתוך כל ההשמות מספקות את המשוואה t
מכך נובע

שהשמה מקרית מספקת לפחות חצי מהמשוואות

נשתמש בהקרה זו כדי לבנות אלגוריתם 2-קירוב דטרמיניסטי
MAX-LIN-2.

ל

6

$$\begin{cases} X_1 + X_3 + \dots + X_n = 0 \\ \vdots \\ X_{n-1} + X_{n-2} + \dots + X_1 = 0 \end{cases} \quad m \text{ משוואות}$$

נניח שהאלגוריתם הגרמניסטי ותחילת המציאת השמה שתספק את המשוואה הראשונה, יוכל להיות שההשמה זו (צורה משתנים) כן שבה נפרד משוואה אחרת ונמצא מתנה להיות מסופקת.

הצורה: לא משוואה j $1 \leq j \leq n$ תהי S_j קבוצת המשתנים המופיעים בה.

אלגוריתם גרמניסטי 2-מקרה

① נבחר משוואה S_j כך שלשום j לא מתקיים $S_j \subseteq S_j$

מוכל ולא שווה

② נצביע צרכים במשתנים S_j כך שהמשוואה S_j תתקיים.

③ צרכיו של 2 אפשרויות:

א) לשום $S_j \neq S_j$ לא מתקיים $S_j = S_j$, במקרה כזה אחת הדרכה ב S_j הצגנו למערכת משוואות חדשה עם $m-1$ משוואות ו $|S_j| - n$ משתנים.

ב) יש k משוואות עם קבוצת משתנים S_j (שהיא קבוצה) כשהם

צרכן 0 וחסרן צרכן 1 .
במקרה כזה נצביע במשתנים ב S_j את הצרכים המופיעים על k המשוואות האלה.

(7)

הצרות והסברים על האלגוריתם

* בשלב (3) במקרה (א) ציורם להצביע במשתנים את "הערך המועדף" על א המשוואות. מה זאת אומרת?

עוד שיש לנו 5 משוואות שכולן:

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_1 = 0$$

$$x_1 = 1$$

3 מק צורעות שהמשוואה תהיה 1

2 צורעות שהמשוואה תהיה 0

אז נציב את המשתנים של S כך שערך המשוואות יהיה 1.

* בשלב (2) אפשר בקלות למצוא הצבה שמספקת את סך.

הוכחה שהאלגוריתם הוא 2-מקרי

ההוכחה מתבססת על ההכנה שרגענו קודם שהשמה מקוונת מספקת לפחות חצי מהמשוואות.

כאן הוכחה של האלגוריתם

* ברור לנו נצטרך להוכיח שהאלגוריתם כלל בזמן

8

וכעת לנטא חרש:

צורת קולות Network flow

קולות לנטאום שלמנו עד חשיו, קולטא זה (בתור בעיה סבביות).

מהי חשיו?

חשיו הוא חלל (מכון)

קולטא חלל מכון חלל מנדרום בה (5) ו- (t)

קולטא מנדרום (קולטא) לל צלל: חכמות החקטוליות של חומר
שלמנו חכמות קולטא.

הצורה פורמלית לרשיו:

חשיו צורתא חלל מכון $G=(V,E)$

עם שני קולקודים חיוחודים: $V \ni s, t$

s- קולקוד החקור

t- קולקוד הקולר

אעם פונקציה $C: E \rightarrow \mathbb{R}^+$

כאשר עקור $e \in E$ $C(e)$ זה קולטא חלל e .

אעם קולקוד $(u,v) \notin E$ (נדר) $C(u,v)=0$

לכן כיו חתת חשיו ציוק חתת $G=(V,E,s,t,C)$

אלו חשיוחיו שלמנדרום חשיו.

נדרוש שחשיו חצורתא חקיוח חק שחור חחומר:

לל $v \in V, v \neq s, t$

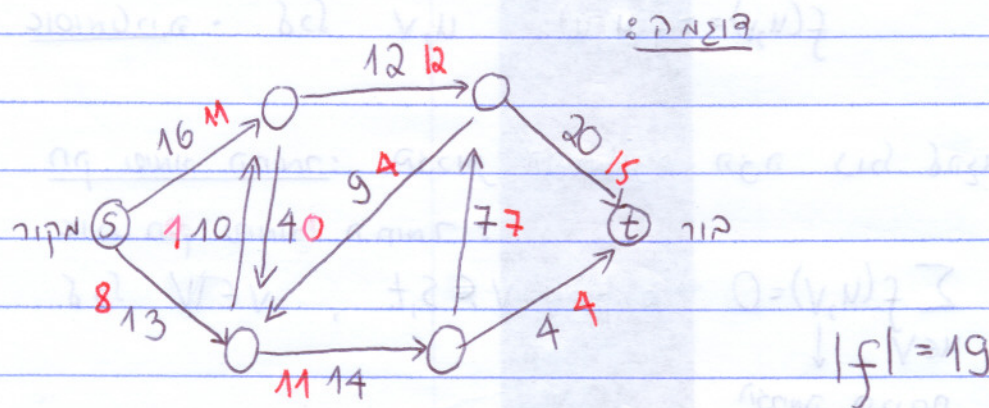
כמות חצורתא חנדרוסת ל v שווה לכמות חצורתא חקציות.

הגדרת הערך (או השטף) של הזרמה: (מסנים ב $|f|$)

כמות הזרמה הנוצרת מתוך קובץ הקוד.

המטרה: למצוא זרמה אופטימלית ברשת נתונה.

זרמה אופטימלית היא זרמה מותרת ברשת כך שהשטף של הזרמה הוא מקסימלי.



הקובץ של כל צלע כתוב לידה בשחור.

באדום יש דוגמה לזרמה מותרת ברשת. (לא בהכרח אופטימלית)

אנחנו נראה פתרון בצדן פולינומלי לבעיה.

צוהי דעוה כללות לאורך שמתאימה להרבה בעיות תצאונות ואם נראה

שיש בעיות שאפשר לעשות להן דיוקדיוה להפיה זו.

כדי לפתור את הבעיה נצטק להשתמש בפורמליזם מיוחד אנפיה זרימה

שלימות. זה קצת יסורל את העניינים.



הגדרה: פורמליזם של פחמה ברשת: $G=(V,E,s,t,c)$

הפחמה היא פונקציה $f: \underbrace{V \times V} \rightarrow \mathbb{R}$

כלל: נקודות הקובקוליות!

שתי תכונות 3 תנאים:

① אוליגו. הקובקול: $f(u,v) \leq c(u,v) \quad u,v \in V /$ לכל

② אסומטריה: $f(u,v) = -f(v,u) \quad u,v$ לכל

③ חק שימור החומר: $\sum_{u \in V} f(v,u) = 0$ וכן $\sum_{u \in V} f(u,v) = 0$ לכל $v \neq s, t, v \in V$ מתקיים

אם $\sum_{u \in V} f(v,u) = 0$ וכן $\sum_{u \in V} f(u,v) = 0$ לכל $v \neq s, t, v \in V$ מתקיים

↓
הצמחה היוצאת $V \setminus N$

↓
הצמחה הנכנסת $V \setminus N$

הצרות והסברים

על תנאי ③

תנאי ③ רוצה להגיד שכמות הצמחה החיובית שנכנסת לקובקול V שווה לכמות הצמחה החיובית שיוצאת מקובקול V .
מפוע. זו דרך שקולה להגיד את זה?

שהיו כלל הצמחה שיוצאת $V \setminus N$ שווה לכמות החיובית היוצאת N פחות הצמחה החיובית הנכנסת N .

ברמת מתמטי:

$$\sum_{u \in V} f(v,u) = \sum_{u \in V} f(v,u) - \sum_{w \in V} f(w,v)$$

↓
הצמחה החיובית היוצאת $V \setminus N$

↓
הצמחה החיובית הנכנסת $V \setminus N$

אם הצורה החיובית הנכונה V שווה לצורה החיובית שיוצאת V^N
אז ההפרש שלהן יהיה 0.

2) תנאי

תנאי זה יוצר כמה בעיות:

- * לפעמים לא קיימת ברשת פלס הפוכה
- * אפשר לתאר צורה מותרת שלא תהיה תנאי זה, כלומר שיהיה בה $f(u,v) > 0$ ו $f(v,u) > 0$.

אז כדי שצורה נתונה תעמוד בתנאי 2) נרצה אותה כך:

1) המקרה הקל: אם אין ב קודקודים $u, v \in V$ כך ש $f(u,v) > 0$ ואם $f(v,u) > 0$
נרצה את הצורה בצורה הא-סימטרית,
כאמור למעלה:

אם $f(u,v) > 0$ (גדור $f(v,u) = -f(u,v)$)
ואם אין צורה באף כיוון בין u ל v (גדור $f(u,v) = f(v,u) = 0$)

2) המקרה הקשה: אם קיימים ב קודקודים $u, v \in V$ כך ש $f(u,v) > 0$
ואם $f(v,u) > 0$

(הערה: בפרט, אם $f(u,v) > 0$ ואם $f(v,u) > 0$)
כלומר, באף קיימות שתי הצלעות: $(u,v) \in E$ $(v,u) \in E$

הפתרון יהיה בעצם (תיקון): הרי אנחנו לא צריכים נתיב ונתיב
הפוך לא, מספיק לנו שבין ב קודקודים תהיה צורה חיובית רק בטרן
אחד, ואין צורך צורה חזשה שבה יהיה בין ב הקודקודים
צורה חיובית רק בכיוון אחד. הלא לפסוע בערך הצורה.

בעזרת התיקון:

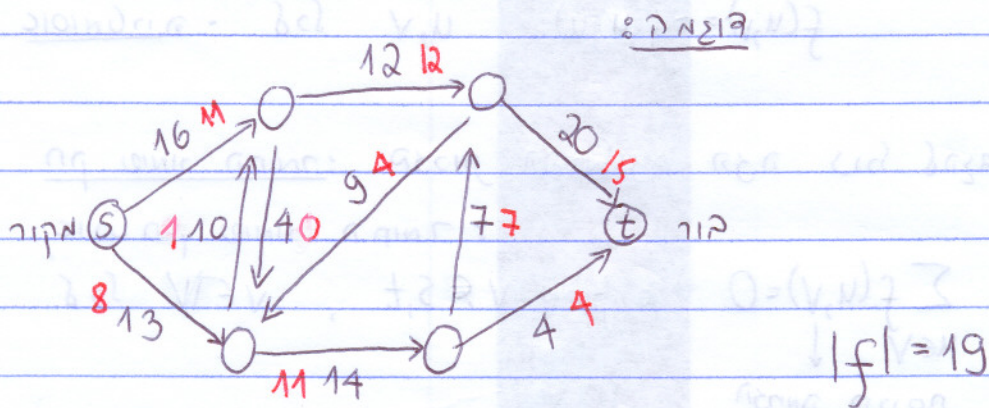
נגזיר צימח חדשה חיוביות f' באופן הקאס
סל $f'(x,y) = f(x,y)$ $(x,y) \neq (u,v)$

• ועל (u,v) נמצא מיטל, זאת אומרת (מיטל את הצימח הקלנה יותר.

זה רק על קצה המזלג, ביטויור הבא נסביר יותר על בעלת התיקון.

הערכת הערך (או השלל) של הצומחה: (מסמנים ב $|f|$)
כמות הצומחה הנוצאת מתוך קופקוד המקור.

המטרה: למצוא צומחה אופטימלית בהשתתפות נתונה.
צומחה אופטימלית היא צומחה מותרת בהשתתפות $|f|$ שהשלל שלה הצומחה הוא מקסימלי.



הקובץ של כל צלע כתוב סידה בשחור.
באדום יש דעמחה לצומחה מותרת בהשתתפות (לא בהכרח אופטימלית).

אנחנו נראה פתרון בצדן פולינומלי לבעיה.
צוהי דעמחה כלליות מאוד שמתאימה להרכבה בעיות מציאותיות ואם נראה
שיש בעיות שאפשר לעשות להן דיוקציה לעציה זו.

כדי לפתור את הבעיה נצטרך להשתמש בפורמליזם מיוחד ונגדיר צומחה
שלישית. זה קצת יסורל את העניינים.

