

רשת זרימה $G=(V,E,s,t,c)$

וירואים למצוא זרימה אופטימלית f בהינתן G ,
 כאשר $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ המקסימום את חוק שומר
 חיוביות ואת איזוץ הקיבול.

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) = \sum_{u \in V} f(u,t) \quad : f \text{ של } c$$

המטרה: למצוא זרימה f עם $|f|$ מקסימלי.

הגישה של Ford ו-Fulkerson. לכתוב בעזרת זרימה:
 הנדסת הזרימה בעזרת מסלול חיובי
 (מסלול בין s ל- t בהינתן G).

נושא השני: רשת שירות של f (המושגים f)

על G . מגדירים רשת חדשה $G_f=(V,E_f,s,t,c_f)$

$$\text{האוקן הבא: } c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

$$\text{ורגרי: } E_f = \{(u,v) \mid c_f(u,v) > 0\}$$

בואונו כי בכתוב מסלול P מ- s ל- t

בהינתן G_f . ניתן לשלוח את הזרימה ב- G

$$\text{בסך שבו } c_f(P) = \min_{P \in \mathcal{P}} c_f(P)$$

שלוש דוגמאות שציינים לעתים על מנת להגיש

של Ford ו-Fulkerson. תוצאות:

(1) זיק אוקי (יעיל) למצוא מסלול חיובי, אם יש כזה.

(2) אם אין מסלול חיובי ב- G_f , אזי f זרימה

אופטימלית.

(3) במן כתבסור פולינומי (קצרי) האורך יקבל G .

בניית רשת שורית G_f , ואקדח כי כל מסלול מכונה
 ברשת G_f בין s ל- t הנה מסלול הרחב,
 דיוק על התנאי הראשון שבצדנו.
 (ע"י חישוב כוחד, ניתן למצוא מסלול בהמשך מכונה
 נתון בין 2 קצוות נתונות, או לחלופין שאין
 מסלול כלל, במצב (E) , יתכן מצב ניתן למצוא
 גם את המסלול הקצרים ביותר בין 2 קצוות
 (באלגוריתם מחי, ורשתות בעזרת המחשב).)

תנאי ב': צריך להוכיח כי f אופטימלית
 אומנם אין מסלול בין s ל- t ב- G_f .

$\Leftarrow$ ברור שאם f אופטימלית, אין מסלול הרחב
 סודית, כי אז היינו יכולים להשתמש במסלול
 זו ולשפר את f .

$\Rightarrow$ כדי להוכיח את הכיוון השני (הקשה),
 כלומר שאם אין מסלול הרחב $\Leftarrow f$ אופטימלית
 צריך לבדוק מה קובע לרימה לאופטימלית.

הצדדים: חתך (S, T) בהמשך G זו חלוקה של
 הקצוות של G לשתי קבוצות זרות S, T ,
 כך ש $s \in S$, $t \in T$.

לדבר 1: נניח f זורם ב- G מתחילת s ל- t , $f(s,t) = |f|$.

לדבר 2: $S = \{s\}$, $T = V \setminus \{s\}$ וכל $v \in T$ קרוי.

לדבר 3: נניח

$$\begin{aligned} f(s,t) &= f(s, V \setminus S) = f(s, V) - f(s, S) = f(s, V) = \\ &= f(s, V) + f(s \setminus \{s\}, V) \stackrel{(*)}{=} f(s, V) = |f| \end{aligned}$$

$\left[f(s \setminus \{s\}, V) = \sum_{u \in S \setminus \{s\}} f(u, V) = 0 \right]$ כיוון שכל $u \in S \setminus \{s\}$ אינו מקור.

כל $s, t \notin S \setminus \{s\}$ כי $s, t \in S$.

לדבר 4: נגדיר $c(s,t) := \sum_{\substack{(u,v) \\ u \in S \\ v \in T}} c(u,v)$

נראה שכל זרימה f זורמת מ- s ל- t חייבת לקיים $|f| \leq c(s,t)$.
 נניח $|f| > c(s,t)$ ונראה שזה יוביל לסתירה.

$$|f| = f(s,t) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} f(u,v) \leq \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c(u,v) = c(s,t)$$

$$\max |f| \leq \min c(s,t)$$

על כל זרימה f חייבת להיות $|f| \leq c(s,t)$

$$(\max |f| = \min c(s, t)) \quad \text{Gen Flow Problem}$$

שלוש התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \quad f \text{ זרימה מלאה וחסומה}$$

$$(2) \quad G_f \text{ אין מסלול היתוך}$$

$$(3) \quad f(s, t) = c(s, t) - e \quad \text{כך } G_f$$

הוכחה:

$$(1) \Leftrightarrow (2) \quad \text{ראינו}$$

$$(2) \Leftrightarrow (3) \quad \text{אם אין מסלול היתוך ב- } G_f, \text{ אז ניה}$$

לפיכך $s \rightarrow t$ ב- G_f נמצא:

$$S = \{v \in V \mid v \text{ נמצא ב- } s \rightarrow t\}$$

$$T = V \setminus S$$

$$\text{אם } (v, u) \in G_f \text{ ו- } v \in S, u \in T \text{ אז}$$

אין מסלול היתוך ב- G_f מכיוון ש- $s \rightarrow t$ ו- $u \in T$

אם $u \in S$ אז אין מסלול היתוך ב- G_f

$$\text{אם } (v, u) \in G_f \text{ ו- } v \in S, u \in T \text{ אז}$$

$$c(v, u) = f(v, u) \quad \text{ב- } G_f \text{ אין מסלול היתוך ב- } v \rightarrow u$$

$$\text{אם } (v, u) \in G_f \text{ ו- } v \in T, u \in S \text{ אז}$$

$$f(v, u) = c(v, u) \quad \text{אם } (v, u) \in G_f \text{ ו- } v \in T, u \in S \text{ אז}$$

$$(1) \Leftrightarrow (3) \quad \text{כאשר}$$

$$f \text{ זרימה מלאה וחסומה}$$

ס"מ"נו זמם לזכוכית את קיום הדבישה השניה
 ב'ג'ש' Fulkerson & Ford, ונשאלו לאלו דבישה ישלשית.
 בה נצטחק לעתור את הדיר הבחייב של מסילור
 הדיחוק בצורה אוקב בדי לזכוכית הרנססור מב'יי
 של האלגוריתם.

נצח כריון של Edmonds ו- Karp לקציה זו.

רשתיות: את ק"מ"ר מסילור היחידה ב- G_f .
 נבחר את המסילור בקציות היותו כמסילור
 היחידה, וריתח את הדבישה על ב' המסילור הצור.

משפט: האלגוריתם הרץ למציאת הדבישה האופטימלית
 מתבסס ב- $O(|E|^2 |V|)$ צעדים, עלול חלוף בעדיכ
 הקיבול.

מסקנה: את עדיכ הקיבול הינו מספרים שלמים, כך יצ
 עדיכ הדבישה האופטימלית.

האלגוריתם מ"צ סדרה של רשתות ש'אדיות
 $G, G_{f_1}, G_{f_2}, \dots, G_{f_N}$

הצגה: מיתק מ"י בול קבוצה סופית של קבוצות
 זמם פונקצית מיתק $d: (x, y) \rightarrow \mathbb{R}^+$
 (x, y) נק' בקבוצה.

ז' זכר קט'י, נ'מן לזכיר מיתק מ"ר, כשפונקציה במיתק
 $d(u, v)$ בול במספר המינמלי של צלצור יש לעדור כז'
 ז'ג'יז מתקצקז u לקצקז v .

הוכחת המשפט:

(1) תהי' f , f' שתי פונקציות "עוקבות" ב- G ,
כמומר f' מתקבלת מ- f על ידי איטרציה אחת של
הריבוי.

למשל 1: נקבע $v \in V$ נגדיר $\delta_f(s, v)$ להיות אורך
המסלול הקצר ביותר בין s ל- v ב- G_f .
בצורה זאת נגדיר גם את $\delta_{f'}(s, v)$.
אז $\delta_f(s, v) \geq \delta_{f'}(s, v)$

הוכחת הלמה:

נניח בשלילה כי קיימת קצת'ם $v \in V$ כך ש-

$$\delta_{f'}(s, v) \leq \delta_f(s, v) - 1$$

נבחר v להיות הקצת'ם הקרוב ביותר ל- s בין

הקצת'ם האם ב- G_f .

נצייר מסלול קצר ב- G_f בין s ל- v , ונסמן

ב- u את הקצת'ם
האחרון במסלול
לפני v .



$$\text{אזי } \delta_{f'}(s, u) = \delta_f(s, v) - 1$$

עכ'ן u קרוב יותר ל- s מאשר v (ב- G_f) ולכן

$$\delta_f(s, u) \leq \delta_{f'}(s, u)$$

אלה חנב: נבחר $(u, v) \in E_f$, כי אחרת,

$$\delta_f(s, v) \leq \delta_f(s, u) + 1 \leq \delta_{f'}(s, u) + 1 = \delta_{f'}(s, v)$$

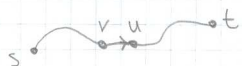
הסתירה עבדירה v .

נשאר עדיין כיצד צלע (u, v) יכולה לא להיות ק"מ
בשרץ G_f , ולכנס בשרץ $G_{f'}$.

$$c(u, v) > f'(u, v) \Leftrightarrow (u, v) \in E_f : c(u, v) = f(u, v) \Leftrightarrow (u, v) \notin E_f$$

אם $(u, v) \in E_f$ אז $c(u, v) = f(u, v)$ וכל עוד $(u, v) \notin E_f$ אז $c(u, v) > f(u, v)$.
הכרחי P , הנחת $f - N$ ו- f' .

מכיון שהמחיר המינימלי הוא מסלול קצר
בין s ל- t , מתק"מ כי הצלע (v, u) נמצאת
על המסלול הקצר בין s ל- t ב- G_f , ולכן



$$\delta_f(s, u) = \delta_f(s, v) + 1$$

a) $\delta_f(s, v) \leq \delta_f(s, u) - 1$ הנחה שלפני:

b) $\delta_f(s, u) \geq \delta_f(s, v) + 1$ הנחה שלפני:

$$c) \delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$$

$$d) \delta_f(s, u) = \delta_f(s, v) + 1$$

נראה שהנחה שלפני:

$$\delta_f(s, v) \leq \delta_f(s, v) - 1 \stackrel{d)}{=} \delta_f(s, u) - 2$$

$$\delta_f(s, v) \leq \delta_f(s, u) + 1 \geq \delta_f(s, u) + 1$$

$$\delta_f(s, u) + 1 \leq \delta_f(s, u) - 2$$

סתירה!

מכאן (בד שחשבו) מתק"מ.