

ביסודי: (1) בוחשם האלמנטים הסדורים לעדיין באופן ויזני על זוג-רציונליזציה -העשרה

(2) הישגים נוספים.

אלמנטים לעדיין באופן (נחשם מחסבי Carmichael)

הוועט ח

(1) בוחשם a מקני בין 1 ל- $(n-1)$.

(2) בוחשם האם $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$

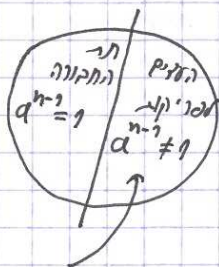
זה עדיין כי אם n אינו ראשוני (ואינו מס' Carmichael)

יש למחשם מחפשי מו- a שכל לבחור הומונימי: $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$

וכי כי ראוי כי a הומונימי $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ הוולוס מ-חבורה של $\mathbb{Z}_n^*$

$$1 \leq a \leq n-1$$

$$(a, n) = 1$$



נראה מוסק את האלמנטים הצבאמיים (זה גרמין הדח-רציונליזציה)

ס'א וברו סידרה $a_1, \dots, a_t$ של מספרים בין 1 ל- $(n-1)$ שאינם מקוים לחלוט

$$a_i^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$$

והזעם t -י יהיה קטן. t פולינומי באורך הוועט והימאי של n ס'א n - 2 .

נצרכה: אם n אינו ראשוני, נבחר את השאלה ϵ וישמר כל המספרים

$$1, 2, \dots, n-1$$

הזעם סדרה $1 \leq a_1, \dots, a_t \leq n-1$ כך שאיבר אחד נבחרה בסיידה לא שיק לקדושה

$$L \text{ של "עזי הוועט" הומונימי } a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

מכיון שאיננו ס'א יועים וורבו של L חול מק ϵ : $|L| \leq \frac{n-1}{2}$, נראה פנימה

$a_1, \dots, a_t$ כך שכל קדושה M באורך $\frac{n-1}{2}$ יש איבר a_i $a_i \leq t$

$$n \in M$$

מחירה בסיידה נס' לא עומד פנימה, כי נניח בשאלה פנימה סידרה נס' $A = \{a_1, \dots, a_t\}$

$$n \in t \text{ מספר קטן } t \leq \frac{n-1}{2}$$

נתון $A = M$ אז $|M| < \frac{n-1}{2}$, ובאופן סימטרי אין איבר A

שלא שייך ל- M , בסדרה סדורה.

שאלה נכונה יותר: מהם סדרה (תר-קופה) $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \{1, \dots, n\}$

כך שלא תת-חבורה $L \subseteq \mathbb{Z}_n^*$ מתקיים $A \not\subseteq L$.

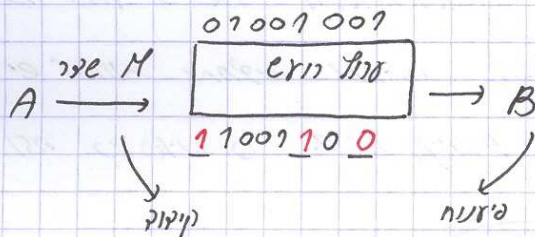
(זה ייחסי אך לא סדרה נכונה - is שאלה קשה).

מחשבה איז מנסה לבנות באופן סדרה דאמינסטי שמישהו מחקור סדרה מקרה.

דיון: נוסח

רופים לבנות בעיה "ערות נוסח".

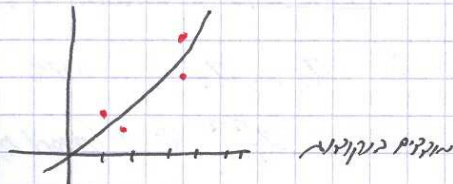
פונקציה: (ר) מקסור



הקידוק עוזר לנוחיות עם "הנחש" (הסדר שלא הועבר בתצורה).

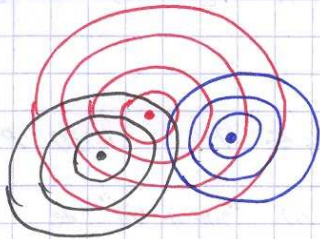
(2) מדידת על מדידות

שאלות נקמה: יש מדידה פיזיקלית ומתמטית לפי חוק מסוים (המתאם עם פולינום נוסח).



הנתונים מוקדים אולם מקומם של המדידות בקווי הם נקודות.

(3) כמה חוקים משפטים ב-NS-M



המדידה למעשה היא המדידה ולכן מה הנוסחה המשפטים.

(4) עיקר המדידה יש המדידה - מדידה

$$A = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}_{n \times n}$$

כאשר הדרגה של A $r(A)$ מדידה. לפי כטור נניח $r(A) = 3$.

מעבירים את A בעזרת כושר, מקבלים מטריצה חדשה B , כאשר B קרויה A - δ .
אז $r(B)$ ידועה.

השאלה האלמנטרית: בהינתן מטריצה B , למצוא מטריצה A כך ש: $r(A) \leq r(B)$.
(2) $r(A)$ נמוכה.

ננסה להבין את מושג המרחק בין מטריצות.

(1) מרחק בין וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$: נומור.

נומרי $\| \cdot \|$ היא מטריצה $n \times n$ מממנים אי-שליליים המוקיימת:

$$x=0 \Leftrightarrow \|x\|=0, \|x\| \geq 0 \quad (1)$$

$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad (2)$$

$$\|ax\| = |a| \|x\| \quad (3)$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

פונקציה:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

נומרי מטריצה

(1) נומרי $\|A\|_2$ "הנורמה", בהינתן מטריצה A שהוא $n \times n$ שמי:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n d_{ij}^2}$$

הנומרי הנורמלי מרחק בין מטריצות: המרחק בין A ל- B הוא $\|A-B\|_2$

(2) מטריצה A מעבירה העסקה ליניארית $\mathbb{R}^n$ למצב, והיא מעבירה x ל- Ax .

נקיט את הנומרי האלמנטרי A כ:

$$\|A\| = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

למה: הנומרי האלמנטרי היא ערכה (הנורמה-המינימלית)

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

אם הנומרי הוקטורי בהעברה הן אלקטרי

שמן את הנומרי האלמנטרי $\|A\|_{2 \rightarrow 2}$ ב-

• B
מתחלק מטרצה כסו
שני קוטר B-ס
מטרצה A
 $r(A) \leq 5$

קוטר: נניח B-ס היא מטרצה מוקדית כל-שלילי

כ"ס B היא מטרצה סימטרית עם ערכים עצמיים $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$

ניתן לרשום:
(כ"ס מטרצה סימטרית נקראת ערכים)
 $B = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} V^t$ כאשר V היא מטרצה

אורתוגונלית (כ"ס) הרכבת של V הן וקטורי יחידה והן ניפרדת (is).

הערה: $V^t = V^{-1}$

נכונות א- והערה הקאה: (מפא מטרצה A $r(A)=1$ הקוטר קוטר B-ס)

הערה: λ_2

למה: מטרצה A היא מעוקלת 1 אפ ונק אפ היא נקרא ערכים הקאה:

$$A = X Y^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}_{n \times n}$$

האיבר העליון
המטרצה

is מוכנה חיצונית-
מקבלים מטרצה

עבור $X, Y \in \mathbb{R}^n$

הוכחה: המטרצה $(X_i y_j) = X Y^t$ היא מעוקלת $1 \geq$ כי כל השורה שלה

בשורה ע" הוקטור $(y_1, \dots, y_n) = Y$

$$\begin{pmatrix} X_1 y_1 & \dots & X_1 y_n \\ X_2 y_1 & \dots & X_2 y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n y_1 & \dots & X_n y_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} X_1 Y \\ X_2 Y \\ \vdots \\ X_n Y \end{matrix}$$

מציג ש, אפ $r(A) \leq 1$ קי"מ שורה (בה"ח השורה והאשורה) של אפ

השורה הן נכנסה שלה, ומפן אורה ב-Y

$A = X Y^t \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} Y \\ X_2 Y \\ X_3 Y \\ \vdots \\ X_n Y \end{pmatrix}$
 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

למה: $B = \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i V_i^t$

כאשר $V = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

הוכחה: נראה כי לכל V_i מתקיים $1 \leq i \leq n$

$$BV_i = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j V_j V_j^t \right) \cdot V_i$$

מכיון ש $V_1, \dots, V_n$ הם בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$, נניח כי V_i הוא הווקטור.

$$\begin{aligned} BV_i &= \left(V \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} V^t \right) V_i = \left(V \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} V^{-1} \right) V_i = \left(V \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \right) (V^{-1} V_i) = \\ &= V \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_i = V \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i V_i \end{aligned}$$

(V_i הוא וקטור עצמי של B עם ערך עצמי λ_i)

$$\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j V_j V_j^t \right) V_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j (V_j V_j^t) V_i \stackrel{\text{לפי גורמים}}{=} \lambda_i V_i$$

$$(V_j V_j^t) V_i = \left(\begin{pmatrix} | & \square & | \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} | \\ \downarrow \\ V_j \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & \square & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \downarrow \\ V_j^t \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \downarrow \\ V_i \\ | \end{pmatrix}$$

מבטוי
היחידה

מבטוי
היחידה

מבטוי
היחידה

$$= \langle V_i, V_j \rangle \cdot V_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ V_i & i = j \end{cases}$$