בחינה באלגוריתמים - מועד א'

תאריך הבחינה: 9.2.2004

מספר קורס: 67504

הנחיות כלליות

משך הבחינה: שלוש שעות. חומר סגור.
ענו על כל השאלות. ניתן לצבור עד 110 נקודות.
כאשר ברצונכם להשתמש בתוצאות שהוכחו בכיתה אין צורך להוכיחן אך יש לצטטן במדויק, תוך ציון מפורש של ההנחות.
בכל מקום בו נדרש אלגוריתם, יש לתאר את האלגוריתם היעיל ביותר.
כתבו בקצרה ככל הניתן.

חלק א'

1. (5) הגדירו את הנורמות הווקטוריות $1,2,\infty$, ואת הנורמה האופרטורית $\infty \to \infty$.
2. (5) הגדירו זיווג בגרף. יהי $G=(V,E)$ גרף כלשהו. נגדיר $\mathcal{I}=\{M\subseteq E \,|\, M \text{ is a matching}\}$ האם $\mathcal{M}=(E,\mathcal{I})$ הוא מטרואיד? הוכיחו או תנו דוגמא נגדית.
3. (4) תארו כיצד עובד האלגוריתם החמדן על מטרואיד $\mathcal{M}=(E,\mathcal{I})$.
4. (4) נתון ווקטור $a\in\mathbb{R}^n$, ו- $\hat{a}\in\mathbb{C}^n$ טרנספורם פורייה שלו. הוכיחו כי לכל $1\le k\le n-1$ מתקיים $\hat{a}_k=\overline{\hat{a}_{n-k}}$, ו- $\hat{a}_0$ ממשי.
5. (4) תהי A מטריצה $m\times n$. הגדירו מהם הערכים הסינגולריים של A. הוכיחו שהם חיוביים.
6. (4) תארו מהי מערכת הצפנה עם מפתח פומבי. מה הופך אותה לבטוחה?
7. (3) תארו את מערכת ההצפנה RSA.

חלק ב'

נתונות n נקודות במישור $p_1=(x_1,y_1),\ldots,p_n=(x_n,y_n)$ כך ש- $x_1<x_2<\cdots<x_n$. מעגל המילטוני הוא מסלול המתחיל ומסתיים באותה נקודה, ובכל נקודה אחרת עובר בדיוק פעם אחת. המשקל של מסלול המילטוני כזה הוא סכום המרחקים בין הנקודות העוקבות במסלול. כלומר, אם המסלול הוא $(p_{i_1},p_{i_2},\ldots,p_{i_n})$, משקלו

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{(x_{i_{j+1}}-x_{i_j})^2+(y_{i_{j+1}}-y_{i_j})^2}+\sqrt{(x_{i_1}-x_{i_n})^2+(y_{i_1}-y_{i_n})^2}$$

נגביל את עצמנו למעגלים המילטוניים שמתחילים בנקודה השמאלית ביותר p_1, מתקדמים כל הזמן ימינה עד שמגיעים לנקודה הימנית ביותר p_n ואז מתקדמים כל הזמן שמאלה עד שחוזרים לנקודת ההתחלה. אנו מחפשים את המסלול מסוג זה שמשקלו מינימלי.
נגדיר לכל $i\le j$ את המושג "מסלול ביטוני" מ- p_i ל- p_j. זהו מסלול המתחיל בנקודה p_i, מתקדם רק שמאלה עד נקודה p_1, לאחר מכן מתקדם רק ימינה עד לנקודה p_j ועובר בכל הנקודות בין p_1 ל- p_j בדיוק פעם אחת.
לכל $i\le j$ יהי $b(i,j)$ משקל המסלול הביטוני המינימלי מ- p_i ל- p_j.

1. (3) נניח ש- $i<j-1$. הוכיחו כי אם נתון מסלול ביטוני מינימלי מ- p_i ל- p_j אז הוא מכיל את המסלול הביטוני המינימלי מ- p_i ל- p_{j-1}. כתבו ביטוי רקורסיבי ל- $b(i,j)$.
2. (3) כעת נניח ש- $i=j-1$. הוכיחו כי אם נתון מסלול ביטוני מינימלי מ- p_{j-1} ל- p_j, והקדקוד שקודם ל- p_j במסלול זה הוא p_k אז המסלול מכיל את המסלול הביטוני המינימלי מ- p_k ל- p_{j-1}. כתבו ביטוי רקורסיבי ל- $b(j-1,j)$.
3. (3) כעת נניח ש- $i=j$. הוכיחו כי המסלול הביטוני המינימלי מ- p_j לעצמו מכיל את המסלול הביטוני המינימלי מ- p_{j-1} ל- p_j. כתבו ביטוי רקורסיבי ל- $b(j,j)$.
4. (13) תארו אלגוריתם המוצא את המשקל של המעגל ההמילטוני המינימלי עבור n נקודות נתונות. מהו זמן הריצה?
5. (5) תארו אלגוריתם המוצא את המעגל ההמילטוני המינימלי עבור n נקודות נתונות. מהו זמן הריצה?

חלק ג'

1. (5) הגדירו מהי קונבולוציה של שני ווקטורים $a,b\in\mathbb{C}^n$.

2. (5) הראו שאם נתונים שני פולינומים $p(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$ ו-$q(x)=\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i$ אז ניתן למצוא את המקדמים של פולינום המכפלה $p(x)q(x)=\sum_{i=0}^{2n-2}c_ix^i$ בעזרת קונבולוציה של שני ווקטורים. מהם הווקטורים הללו?

3. (14) נתונות שתי קבוצות A,B של שלמים בתחום $[0,n]$. נגדיר

$$C=\{x+y\,|x\in A,y\in B\}$$

אנו מעוניינים למצוא את C, ולכל איבר ב-C למצוא את מספר הדרכים השונות שבהן ניתן להציג אותו כסכום של איבר מ-A ואיבר מ-B.
רמז: ביחרו פולינומים מתאימים והשתמשו בסעיף 2.

4. (3) הראו כיצד עושים זאת בזמן ריצה $O(n\lg n)$.

חלק ד'

1. (5) הגדירו דרגת קשירות צלעית של גרף לא מכוון $G=(V,E)$.

2. (7) תנו אלגוריתם המוצא חתך מינימלי ברשת זרימה.

3. (10) תנו אלגוריתם יעיל למציאת דרגת הקשירות הצלעית של גרף לא מכוון.

4. (5) מהו זמן הריצה של האלגוריתם?