# מטרואידים

29 באוקטובר 2002

נזכיר תחילה שמשפחה של קבוצות $\mathcal{F}$ נקראת משפחה תורשתית, אם לכל $A \in \mathcal{F}$ ולכל $B \subseteq A$, גם $B \in \mathcal{F}$. כעת ניתן לנסח את הבעייה הכללית:
נתונה משפחה תורשתית $\mathcal{F}$ של תת-קבוצות מתוך $[n]$, ופונקצית משקל $w : [n] \to \mathbf{R}^+$ על האיברים. מצא קבוצה באוסף שמשקלה מירבי. לאילו משפחות מובטח שהאלגוריתם החמדן יצליח (לכל פונקצית משקל)?

לצורך התשובה, עלינו להגדיר מושג חדש: תהיה $\mathcal{F}$ משפחה תורשתית של תת קבוצות של $[n] = \{1, \ldots, n\}$ . אומרים ש-$\mathcal{F}$ היא אוסף הקבוצות הבלתי תלויות של מטרואיד, אם היא מקיימת את אקסיומת ההחלפה דהיינו, אם $A, B \in \mathcal{F}$ ואם $|A| > |B|$, אז יש איבר $x \in B \setminus A$ כך ש: $A \cup \{x\} \in \mathcal{F}$

להלן התשובה: למשפחה התורשתית $\mathcal{F}$ יש התכונה שהאלגוריתם החמדן מצליח לכל פונקציית משקל $w$ אם"ם $\mathcal{F}$ הוא אוסף הקבוצות הבלתי תלויות של מטרואיד.

הכרחיות (רעיון ההוכחה): אם יש קבוצות $A, B \in \mathcal{F}$ המפרות את אקסיומת ההחלפה, נגדיר פונקציה $w$ כדלקמן: אם $x \in A$, אז $w(x) = 1$. אם $x \in B$, אז $w(x) = 1 - \epsilon$ כאשר $\epsilon > 0$ קטן דיו. בכל מקרה אחר $w = 0$. קל לראות שהבחירה האופטימלית (אם $\epsilon$ מספיק קטן) היא $B$ ומאידך האלגוריתם החמדן יבחר באיברי $A$ בזה אחר זה ולא יוכל להמשיך אח"כ.

מספיקות (הרעיון): ניתן להגדיר במסגרת תורת המטרואידים מושג אנלוגי למעגל בגרפים. "מעגל" בהקשר זה, זו קבוצה $C$ שאינה ב-$\mathcal{F}$ ומינימלית בתנאי זה. כלומר, לכל $x \in C$ מתקיים: $C \setminus x \in \mathcal{F}$ . בעזרת מושג זה ומספר תכונות פשוטות שלו שמוכיחים, ניתן לחזור, באופן מילולי על ההוכחה שהראינו לבעיית העץ הפורש ולבעיית התזמון של משימות באורך יחידה.

לא קשה להראות שאם $E$ קב' הצלעות של הגרף $G$ ואם מגדירים $A \in \mathcal{F}$ אם"ם $A$ אינה מכילה מעגל, אז $\mathcal{F}$ אוסף הקבוצות הב"ת של מטרואיד ("המטרואיד הגרפי של $G$").

ניתן גם להראות שאם $S$ קב' סופית של וקטורים ואם $\mathcal{F}$ כוללת כל תת-קבוצה של $S$ שהיא בלתי תלויה ליניארית, אז $\mathcal{F}$ אוסף הקבוצות הב"ת של מטרואיד ("מטרואיד ליניארי"). זה היה גם מקור ההשראה להגדרת מושג המטרואיד.

יהיה $G = (V, E)$ גרף וכמקודם נגדיר $A \in \mathcal{F}$ אם אינה כוללת מעגל. במילים אחרות, אם הגרף $(V, A)$ הוא יער. ברור ש- $\mathcal{F}$ תורשתית. רוצים להראות ש-$\mathcal{F}$ היא אוסף הקבוצות הב"ת של מטרואיד, כלומר שהיא מקיימת את אקסיומות ההחלפה. ניתן לעשות זאת בשתי דרכים:

א. להראות שמדובר במטרואיד ליניארי ואז אקסיומת ההחלפה נובעת מאלגברה ליניארית.

ב. משיקול קומבינטורי ישיר.

סקירת הוכחה א': מביטים במטריצה $M$ - מטריצת החילה של $G$. זו מטריצה ששורותיה מתאימות לאיברי $V$ (הקדקדים) ועמודותיה לאיברי $E$ (הצלעות). מוכיחים שקבוצה של צלעות $A \in \mathcal{F}$ אם"ם קבוצת העמודות המתאימה ב-$M$ היא בלתי תלויה ליניארית מעל השדה עם שני איברים.

סקירת ההוכחה ב': תהיינה $A, B \in \mathcal{F}$ כש- $|A| > |B|$ , ותהיה $e \in B \setminus A$ . מתי ניתן להעביר את $e$ ל- $A$ כך ש- $A \cup \{e\}$ אינה כוללת מעגל? קל לראות שזהו המצב אם"ם $e$ מחברת בין שני רכיבי קשירות שונים של היער $(V, A)$ . נניח בה"כ ש- $G$ קשיר ויש בו $n$ קדקדים. שימו לב שאם $X \in \mathcal{F}$ אז לגרף $(V, X)$ יש $n - |X|$ רכיבי קשירות. יהיו, אם כן, $U_1, \ldots, U_k$ רכיבי הקשירות בגרף $(V, A)$ ויהיו $u_i = |U_i|$ העוצמות שלהם. נשים לב כי $\sum u_i = n$ וכאמור $k = n - |A|$. על מנת שצלע $f \in B$ תיפסל מלהתאים לאקסיומת ההחלפה, כלומר על מנת ש- $A \cup \{f\} \notin \mathcal{F}$, הכרחי ששני הקדקדים של $f$ נמצאים באחת הקב' הנ"ל. מכיוון שגם $(V, B)$ הוא יער, מס' הצלעות כנ"ל אינו עולה על $u_i - 1$.

יוצא שמספר הצלעות $f \in B$ שאינן מקיימות את אקסיומת ההחלפה, אינו עולה על

$$\sum_1^k (u_i - 1) = n - k = |A|$$

ואולם $|A| < |B|$ ולכן יש לפחות צלע אחת המחברת בין שני רכיבי קשירות שונים, נאמר $U_i, U_j$. את הצלע הזו ניתן לצרף ל- $A$ בלי לסגור מעגל, כנדרש.