הבעייה הראשונה הנפתרת ע"י אלגוריתם חמדני שבה נעסוק היא בעיית קידוד המקור ואלגוריתם Huffman הפותר אותה. נניח שלפנינו טקסט הכתוב בא"ב סופי כלשהו C . אנו מעוניינים "לתרגם" את הטקסט ולרשום אותו בא"ב בינרי $\{0,1\}$. נניח גם שידוע לנו מהי השכיחות $f\left(x\right)$ לכל $x \in C$. כלומר המספרים $f\left(x\right)$ הם אי שליליים וסכומם $\sum_{x \in C} f\left(x\right) = 1$. מטרתנו בתרגום היא לדחוס את המידע ככל האפשר, כלומר להביא למינימום את אורך הטקסט בייצוגו הבינרי. "תרגום" (או "קידוד מקור" כפי שמקובל לקרוא לזה בתורת האינפורמציה) פירושו שאנו מתאימים לכל אות $x \in C$ מחרוזת של ביטים $\phi\left(x\right)$. במילים אחרות, אנו מקודדים את x ע"י המחרוזת $\phi\left(x\right)$. את אורכה של המחרוזת $\phi(x)$ נסמן ב-$\ell\left(x\right)$. התנאי על האופטימליות של הדחיסה פירושו שהקידוד ϕ מקיים את התנאי ש $\sum_{x \varepsilon C} f\left(x\right) \ell\left(x\right)$ מינימלי.

אולם הקידוד חייב גם כמובן להיות ניתן לפיענוח. אנו מצפים שמי שקורא את הטקסט בתרגומו לא"ב בינרי יוכל להבינו באופן חד משמעי. קל לראות שתנאי מספיק ליחידות הפענות הוא חוסר רישא. כלומר, אם $x, y \in C$ אותיות בא"ב המקורי אסור שהמחרוזת $\phi\left(x\right)$ תהיה רישא של המחרוזת $\phi\left(y\right)$.

אם התנאי מתקיים קל לקרוא את הטקסט המתורגם לקוד בינרי: מתחילים מתחילת הטקסט. יש בדיוק רישא אחת ויחידה שלו שהיא מהצורה $\phi\left(z\right)$ ל- $z \in C$ כלשהי. יוצא ש- z היא האות הראשונה בטקסט המקורי. מסלקים את הרישא $\phi\left(z\right)$ מהטקסט הבינרי וממשיכים באותו אופן. (הערה: מתברר שהדרישה על העדר רישא אינה פוגעת כמעט ביכולת הדחיסה שלנו, כלומר במזעור של $\sum_c f\left(x\right) \ell\left(x\right)$. הוכחה של טענה זו ניתנת במסגרת תורת האינפורמציה ואינה קשה במיוחד).

נחזור לדיוננו, יש התאמה חח"ע בין מחרוזות של ביטים לקדקדים בעץ בינרי.

נחשוב על אוסף המחרוזות $\{\phi\left(x\right) \mid x \in C\}$ גם כקבוצת קדקדים בעץ בינרי. נעיר ש - $\ell\left(x\right)$ הוא בדיוק עומקו של $\phi\left(x\right)$ בעץ הבינרי. תנאי העדר הרישא אומר שאין שניים מבין הקדקדים שאחד מהם הוא אב קדמון של האחר. במילים אחרות, יש עץ בינרי שאוסף העלים שלו הוא בדיוק $\{\phi\left(x\right) \mid x \in C\}$. מתקבל אם כן הניסוח הבא לבעייתנו:

בעייה: נתונים המספרים האי שליליים $\{f\left(x\right) \mid x \in C\}$. נתבונן בעצים בינריים T בעלי $|C|$ עלים שעליהם מותאמים חד חד ערכים לאיברי C. מחפשים T כנ"ל כך ש $\sum f\left(x\right) h\left(x\right)$ מזערי. כאן $h(x)$ הוא עומקו של העלה x בעץ.

המפתח לפתרון הבעייה הוא הלמה הפשוטה הבאה: יהיו נתונים המספרים האי שליליים $\{f\left(x\right) \mid x \in C\}$. ונרצה למצוא עץ T שקב' עליו היא C כך שהסכום

$\sum_{x\in C} f\left(x\right) h\left(x\right)$ מזערי. יהיו $x,y \in C$ שני האיברים בעלי $0 < f\left(y\right) \geq f\left(x\right)$ הנמוכים ביותר. אז יש עץ אופטימלי כנ"ל T שבו x,y עלים "אחים".

הוכחה: יהיה *T כלשהו ויהיו a,b עלים אחים בו בעלי עומק מירבי. נסמן $h^*\left(z\right)$ את עומקו של העלה z בעץ *T . בגלל ההנחה על עומקם של a,b מתקיים $h^*\left(a\right) = h^*\left(b\right)$ $h^*\left(a\right) \geq h^*\left(x\right), h^*\left(y\right)$ כמו כן, אם $f\left(a\right) \geq f\left(b\right)$ אז בהכרח $f\left(a\right) \geq f\left(x\right)$, $f\left(b\right) \geq f\left(y\right)$.

עתה נעבור מהעץ *T לעץ T כדלקמן: נחליף בין העלה a לעלה x ובין העלה b לעלה x .

נראה כי

$$h^*\left(a\right)\left(f\left(a\right)+f\left(b\right)\right)+h^*\left(x\right)f\left(x\right)+h^*\left(y\right)f\left(y\right) \geq h^*\left(a\right)\left(f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)+h^*\left(a\right)f(x)+h^*\left(y\right)f\left(b\right)$$

כדי להוכיח את האי שיוויון שימו לב שההפרש בין שני האגפים הוא

$$\left(f\left(a\right)-f\left(x\right)\right)\left(h^*\left(a\right)-h^*\left(x\right)\right)+\left(f\left(b\right)-f\left(y\right)\left(h^*\left(a\right)-h^*\left(y\right)\right)\right) \geq 0$$

שימו לב שאגף שמאל באי שויון הקודם הוא התרומה של a,b,x,y לעץ *T ואגף ימין - תרומתם לאחר ההחלפה. קיבלנו אם כן עץ טוב לא פחות מ- *T שבו x,y עלים אחים בעומק מירבי.

מסקנה: יהיו C,x,y כנ"ל. נבנה א"ב חדש $C^{'} = C\backslash\{x,y\} \cup \{z\}$ (z אות חדשה שאינה ב-C). אזי ניתן לקבל קוד אופטימלי ל- $C^{'}$ כך: מהעלה z בעץ האופטימלי של $C^{'}$ נגדל שני עלים אחים והם x,y. בפרט $Opt\left(C\right) = Opt\left(C^{'}\right)+f\left(x\right)+f\left(y\right)$.

מהמסקנה הזו מתקבל מייד אלגוריתם אופטימלי כדקלמן: בהינתן א"ב C ומשקלות $\{f\left(u\right) \mid u \in C\}$ יהיו $x,y \in C$ בעלות f מזערי. נעבור ל- $C^{'}$ כנ"ל נבנה (בקריאה רקורסיבית) עץ אופטימלי ל- $C^{'}$ ונתקן כנ"ל את העץ לעץ של C. העץ המתקבל הוא אופטימלי ל- C.