

אלגוריתמים חמדניים

29 באוקטובר 2002

זו משפחה של אלגוריתמים המבוססים על עיקרון כללי שניתן לנסות כד: "בכל צעד בחר בפעולה הנראית כרגע ככדאית ביותר". כמו גם בחיים, הגישה הזו עובדת לפעמים אך לאו דווקא תמיד. הדוגמא המפורסמת ביותר לאלגוריתם חמדני היא בעיית העץ הפורש המינימלי: נתון גרף קשיר $G = (V, E)$ ופונקציית משקל $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ מחפשים עץ פורש T ל- G בעל משקל מזערי. נזכיר ש- $w(T)$ מוגדר כ: $\sum_{e \in T} w(e)$. גם בהמשך ניתקל מספר פעמים בפונקציות משקל $w : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ מקבוצות מסויימות S ובאופן כללי, מגדירים $w(A)$ כ- $\sum_{x \in A} w(x)$. הערה נוספת שגם היא תועיל לנו בהמשך היא שהטיפול בבעיה של עץ פורש מקסימלי (כלומר מבקשים $\max w(T)$) הוא זהה למעשה לבעיית העץ הפורש המינימלי. הסיבה לדבר היא שלכל העצים הפורשים בגרף קשיר בעל n קדקדים יש אותו מספר צלעות, $n-1$. יוצא שאם מגדירים $w'(e) = M - w(e)$ לכל צלע e , כש- M קבוע גדול מספיק, אז בעיית העץ הפורש המקסימלי לפי המשקל w זהה לבעיית העץ הפורש המינימלי לפונקציית המשקל w' ולהיפך. נזכיר אם כן את האלגוריתם החמדן לבעיית העץ הפורש המינימלי.

האלגוריתם: איתחול: T מאותחל כקבוצה ריקה.

בכל צעד מצרפים ל- T צלע בעלת משקל מזערי שאינה סוגרת מעגל.

תזכורת על ההוכחה: יהיה T העץ שבנה האלגוריתם החמדן, ויהיה T^* עץ אופטימלי. לי. מבין העצים האופטימליים, נבחר את T^* כך שיש לו צלעות משותפות רבות ככל האפשר עם T , כלומר $\max |T \cap T^*|$. אם $T \neq T^*$ תהיה e הצלע הראשונה שנכללה (ע"י האלג' החמדן) ב- T ואינה ב- T^* . נצרף את e ל- T^* בגרף $T^* \cup e$ יש מעגל יחיד, C . לכל צלע $f \in C$ מתקיים $w(f) \leq w(e)$, אחרת $T^* \setminus \{e\} \cup \{f\}$ הוא עץ פורש במשקל קטן מ- $w(T^*)$ יתר על כן, $w(f) = w(e)$ רק אם גם $f \in T$. אחרת $T^* \setminus \{e\} \cup \{f\}$ הוא עץ פורש השווה במשקלו ל- $w(T^*)$, ולכן הוא אופטימלי, אך יש לו יותר צלעות משותפות עם T .

לא ייתכן שכל הצלעות של C הן ב T ולכן יש לפחות צלע אחת כד ש $f^* \in C$. מדוע לא צורפה f^* ל T ? היות ש $w(f^*) < w(e)$, הכנסת הצלע f^* ל T עמדה על הפרק לפני שהוכנסה e . הצלע f^* לא צורפה ל T מפני שהיא סוגרת מעגל C^* עם הצלעות ב T שצורפו לפניו, ואולם כל הצלעות האלה של T הן גם ב T^* (נזכור ש e היא הצלע המוקדמת ביותר ב $T \setminus T^*$). יוצא ש T^* מכיל מעגל (דהיינו f^* ביחד עם הצלעות המוקדמות ב T שאיתן היא סוגרת מעגל), סתירה.