ניסוח מפורש של FFT $FFT(n,P)$

מניחים ש-n הוא חזקה של 2.
קלט: מקדמים של הפולינום $P(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}$.
פלט: n הערכים $P(\omega_n^j)$ עבור $j=0,\ldots,n-1$.
האלגוריתם:
הגדר $P^{(0)}(t)=a_0+a_2t+\ldots$ ו- $P^{(1)}(t)=a_1+a_3t+\ldots$
קריאה רקורסיבית: $FFT(\frac{n}{2},P^{(0)})$, $FFT(\frac{n}{2},P^{(1)})$.
אזי $P(\omega_n^j)=P^{(0)}(\omega_{n/2}^j)+\omega_n^jP^{(1)}(\omega_{n/2}^j)$.
חישוב הטרנספורם ההופכי:
נניח שיש בידינו אלגוריתם יעיל לחישוב DFT. נראה איך לנצל אותו על מנת לחשב את DFT^{-1} באותה סיבוכיות זמן. נזכור ש- DFT הוא מימוש החישוב $c\to y=Ac$, כלומר $y_j=\sum_t\omega_n^{jt}c_t$,
ומאידך גיסא $c_j=\frac{1}{n}\sum_t\omega_n^{-jt}y_t$ (מפני שבהופכית של A האיבר ה- (j,k) הוא $\frac{1}{n}\omega^{-jk}$).
נרשום זאת כך:

$$c_j=\frac{1}{n}\sum_t\omega_n^{j(n-t)}y_t=\frac{1}{n}\sum_t\omega_n^{jt}y_{n-t}.$$

לכן אם מזינים את DFT בווקטור y כשהוא כתוב בסדר הפוך ומחלקים את ווקטור התוצאה ב- n מקבלים את c.

אנליזה הרמונית (אנליזת Fourier)

נחזור על המוטיב העיקרי בעבודתנו על טרנספורם פורייה הבדיד: לפולינום ממעלה k יש שתי צורות ייצוג:
- ע"י k+1 מקדמיו $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k$
- ע"י ערכיו ב- k+1 נקודות $f(x_0)=y_0,\ldots,f(x_k)=y_k$, כש- $x_0,\ldots,x_k$ ערכים ממשיים או מרוכבים שונים זה מזה. עיקר הדגש האלגוריתמי הוא על אלגוריתם יעיל המעביר אותנו בצורת ייצוג אחת למשנה.

על מנת לתת לכם מושג על התמונה הכוללת, הבה נחזור למקרה הקלאסי. הרעיון המקורי של Fourier (שנתקבל, אגב, בזמנו בהתנגדות ובספקנות) היה זה: נניח ש-f פונקציה המוגדרת על הישר הממשי והיא מחזורית עם מחזור 2π. פורייה הציע להציג פונקציות כאלה כצירוף של פונקציות סינוס וקוסינוס

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nsin(nx)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cos nx$$

.

נדרש דיון מעמיק בשאלה מהן הנסיבות שבהן הפיתוח הזה תקף. זהו חומר לקורס מלא ולא נעשה זאת כאן. הנקודה העיקרית היא שלפונקציה f יש שני ייצוגים: באמ-צעות המקדמים $a_0,a_1,\ldots;b_0,b_1,\ldots$ ובאמצעות הערכים שלה. גם כאן יש נוסחאות מפורשות המאפשרות לנו לעבור מצורה אחת לאחרת.

כאן ניתן לחשוב על f כאות (=סיגנל,)המתאים לתופעה פיזיקלית כלשהי. f יכולה למשל, להיות אות דיבור או מדידות של אותות מהלב (אלקטרוקרדיוגרמה EKG)

או אותות מכוכב פולסר וכו'. מדוע נכון להניח ש- f מחזורית? מדוע נראה סביר שניתן לבטא את f (לפחות בקירוב) ע"י צירופים של סינוסים וקוסינוסים? לפעמים ניתן להצדיק זאת מתוך הבנה של התופעה הפיזיקלית הנידונה. כן, למשל, האותות החשמליים של הלב הם בקירוב מחזוריים ולכן ניתן לתאר f בקירוב טוב כצירוף של סינוסים וקוסינוסים. כאשר מדובר בסיגנל מוזיקלי, הפיזיקה של כלי הנגינה מסבירה מה קורה. הצלילים היסודיים שמפיק כלי נגינה מתקבלים ע"י תנודה מחזורית של האוויר שנגרמת, למשל, ע"י רעידת מיתרי הפסנתר. לכן, ניתן לתאר את אות הנגינה בקירוב טוב ע"י צירוף של מספר קטן של סינוסים וקוסינוסים.

במקרים ממשיים רבים אנו מחפשים תופעה דומה אף בהיעדרו של הסבר פיזיקלי פשוט כזה. יתר על כן, בפועל איננו יכולים לנתח פונקציות $f : R \to R$ (כאן $f(t)$ הוא ערכו של הסיגנל הנדון בזמן t). הסיבה היא שלפונקציה ממשית כללית אין תיאור סופי. לכן, אנו מסתפקים במספר סופי של דגימות של f, נאמר בזמנים $t = x_1, \ldots, x_n$, ואנו חושבים על f כפונקציה $f : [n] \to R$. איך נכניס בחזרה לדיוננו את הנחת המחזוריות? לשם כך, נוח יהיה לנו לחשוב על f כמוגדרת לא על הקבוצה $[n] = \{1, \ldots, n\}$ אלא על החבורה הציקלית C_n (שאיבריה הם $0, \ldots, n-1$ והפעולה בה היא חיבור מודולו n).

אפשר להביט במצב כך: מביטים במרחב הליניארי של כל הפונקציות $f : C_n \to \mathbb{C}$. אנו מחפשים בסיס של n פונקציות למרחב הזה. באלגברה ליניארית למדתם על מעבר מבסיס לבסיס במרחב ליניארי ולכאורה כל הבסיסים שקולים זה לזה. מכיוון שלמרחב הנדון כאן (מרחב כל הפונקציות מ- C_n ל- $\mathbb{C}$) יש מבנה נוסף, מתברר שיש בסיסים בעלי תכונות ייחודיות המועילות מאוד לפתרונן של בעיות ממשיות. אנו נציג בהמשך בסיס אחד כזה $v_1, \ldots, v_n$.

לייצוגים שדיברנו עליהם יש חשיבות מעשית עצומה. כך למשל אם

$$f(x) = \sum a_n sin(nx) + \sum b_n \cos nx$$

במקרה הממשי או אם $f(x) = \sum_j \alpha_j v_j(x)$ במקרה של החבורה הציקלית, מתברר שניתן לקבל קירובים טובים מאוד של f ע"י כך שמסכמים

1. רק את המחוברים "בעלי תדר נמוך" (n קטן או j קטן, בהתאם).
2. רק את המחוברים שבהם המקדם $|a_n|$ או $|b_n|$ או α_j הוא גדול.

ע"י כך אנו:

- מסננים רעש.
- דוחסים את הסיגנל.

כפי שראינו בדוגמאות הנכללות במצגת ה- $Matlab$.

תכונה רצויה בכל מרחב ליניארי עם מכפלה פנימית היא שיהיה זה בסיס אורתונורמלי: אם $x_1, \ldots, x_n$ בסיס אורתונורמלי למרחב ווקטורי V אז קל לרשום את ייצוגו של כל $v \in V$ בבסיס זה: $v = \sum_i \langle v, x_i \rangle x_i$. אולם היות שההעתקות שלנו מוגדרות על C_n יש כאן מושג טבעי של "הזזה בזמן": תהיה $f : C_n \to \mathbb{C}$ ונגדיר $g : C_n \to \mathbb{C}$ ע"י $g(x) = f(x+1)$ (חיבור מודולו n).

היינו רוצים שיהיה קשר פשוט בין $f = \sum a_i x_i$ ל- $g = \sum b_i x_i$. היות ש-

$a_i = \langle f, x_i \rangle$ ו- $b_i = \langle g, x_i \rangle$, כל שעלינו לדרוש הוא קשר פשוט בין $\langle f, x_i \rangle$ לבין $\langle g, x_i \rangle$.

נגדיר עתה את הבסיס הרצוי. את $x_j : C_n \to \mathbb{C}$ אנו מגדירים ע"י $v_j(t) = \omega_n^{jt}/\sqrt{n}$.
נבדוק את תנאי האורתונורמליות

$$\langle v_j, v_k \rangle = \frac{1}{n} \sum_t x_j(t) \overline{x_k(t)} = \frac{1}{n} \sum_t \omega^{jt} \cdot \omega^{-kt} = \frac{1}{n} \sum_t \omega^{(j-k)t} = \delta_{jk}.$$

תנאי ההזזה בזמן: אם $g(t) = f(t+1)$ אז

$$\langle g, x_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_t g(t) \omega^{-jt} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_t f(t+1) \omega^{-jt} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_s f(s) \omega^{-j(s-1)} = \frac{\omega^j}{\sqrt{n}} \sum_s f(s) \omega^{-js} = \omega^j \langle f, x_i \rangle.$$

(בשפה של תורת החבורות ההעתקה $x_j : C_n \to \mathbb{C}$ שבה $x_j(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{jt}$ זהו כרקטר של החבורה הציקלית. $x_0, \ldots, x_{n-1}$ זהו האוסף של כל הכרקטרים של החבורה).

קונבולוציה.

נתחיל בשימוש חשוב של פעולה זו. נניח כמקודם ש- $f : C_n \to \mathbb{C}$ מתארת סיגנל ממשי כלשהו. כרגיל בסיגנלים מדודים, נכון להניח שהאות נגוע ברעש. אחת הדרכים הפשוטות ביותר לסנן רעש היא למצע כל ערך של f עם הערכים הקרובים לו. לדוגמה לעבור מ- f לפונקציה המוגדרת ע"י

$$h(t) = \frac{1}{4} f(t-1) + \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{4} f(t+1).$$

אם מגדירים את $g : C_n \to \mathbb{C}$ כך:

$$g(j) = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{4} & j = -1, 1 \\ \frac{1}{2} & j = 0 \\ 0 & else \end{array} \right. ,$$

אז $h = f \star g$.

פעולת הקונבולוציה מוגדרת באופן כללי כך: אם $f, g : C_n \to \mathbb{C}$ אז גם $h = f \star g$ היא פונקציה $h : C_n \to \mathbb{C}$ ו- $h(t) = \sum_j f(j) g(t-j)$. באופן כללי טרנספורם פורייה מחליף בין כפל לקונבולוציה. למשל:

משפט: יהיו $f, g : C_n \to \mathbb{C}$ ותהיה h הקונבולוציה שלהם:

$$h(t) = \sum_j f(j) g(t-j).$$

נניח כי $f = \sum a_i x_i$, $g = \sum b_i x_i$. אז

$$h = \sqrt{n} \sum a_i b_i x_i.$$

הוכחה:

$$\langle h, x_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k h(k)\omega^{-jk} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k \sum_l f(l)g(k-l)\omega^{-jk} =$$

נציב $r = k - l$:

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k,r} f(l)g(r)\omega^{-j(l+r)} = \sqrt{n}(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum f(l)\omega^{-jl})(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_r g(r)\omega^{-jr}) =$$

$$= \sqrt{n}\langle f, x_j \rangle \langle g, x_j \rangle = \sqrt{n} a_j b_j.$$