

ניסוח מפורש של FFT (n, P)

מניחים ש- n הוא חזקה של 2.

קלט: מקדמים של הפולינום $P(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$.
פלט: n הערכים $P(\omega_n^j)$ עבור $j = 0, \dots, n-1$.

האלגוריתם:

הגדר $P^{(0)}(t) = a_0 + a_2t + \dots$ ו- $P^{(1)}(t) = a_1 + a_3t + \dots$.
 קריאה רקורסיבית: $FFT(\frac{n}{2}, P^{(0)})$, $FFT(\frac{n}{2}, P^{(1)})$.

אזי $P(\omega_n^j) = P^{(0)}(\omega_{n/2}^j) + \omega_n^j P^{(1)}(\omega_{n/2}^j)$.

חישוב הטנספורם ההופכי:

נניח שיש בידינו אלגוריתם יעיל לחישוב DFT. נראה איך לנצל אותו על מנת לחשב את DFT^{-1} באותה סיבוכיות זמן. נזכור ש- DFT הוא מימוש החישוב $c \rightarrow y = Ac$,

כלומר $y_j = \sum_t \omega_n^{jt} c_t$, ומאידך גיסא $c_j = \frac{1}{n} \sum_t \omega_n^{-jt} y_t$ (מפני שבהופכית של A האיבר ה- (j, k) הוא $(\frac{1}{n} \omega^{-jn})$).

נרשום זאת כך:

$$c_j = \frac{1}{n} \sum_t \omega_n^{j(n-t)} y_{n-k}.$$

לכן אם מזינים את DFT בווקטור y כשהוא כתוב בסדר הפוך ומחלקים את ווקטור התוצאה ב- n מקבלים את c .

ניסוח מפורש של הטנספורם ההופכי DFT^{-1}

נחזור ונזכיר שב- DFT מתקיים $y_k = \sum_j \omega^{jk} c_j$ וב- DFT^{-1} מתקיים $c_k = \frac{1}{n} \sum_j \omega^{-jk} y_j$.
 נרשום זאת מחדש כך:

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_j \omega^{(n-j)k} y_j, \text{ and } y_j = \frac{1}{n} \sum_r \omega^{rk} c_{n-r}.$$

כלומר, על מנת לבצע את ה- DFT^{-1} ולקבל את c בהינתן y עלינו להזין את הווקטור $(y_{n-1}, \dots, y_0)$ (כלומר את y בסדר הפוך של האינדקסים) לחשב FFT ולחלק את התוצאה ב- n .

אנליזה הרמונית (אנליזת Fourier)

נחזור על המוטיב העיקרי בעבודתנו על טרנספורם פורייה הבדיד: לפולינום ממעלה k יש שתי צורות ייצוג:

- ע"י $k+1$ מקדמים $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$

- ע"י ערכיו ב- $k+1$ נקודות $f(x_0) = y_0, \dots, f(x_k) = y_k$, כש- $x_0, \dots, x_k$ ערכים ממשיים או מרוכבים שונים זה מזה. עיקר הדגש האלגוריתמי הוא על אלגוריתם יעיל המעביר אותנו בצורת ייצוג אחת למשנה.

על מנת לתת לכס מושג על התמונה הכללית, הבה נחזור למקרה הקלאסי. הרעיון המקורי של Fourier (שנתקבל, אגב, בזמנו בהתנגדות ובספקנות) היה זה: נניח ש- f פונקציה המוגדרת על הישר הממשי והיא מחזורית עם מחזור 2π . פורייה הציע

להציג פונקציות כאלה כצירוף של פונקציות סינוס וקוסינוס $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nx$. נדרש דיון מעמיק בשאלה מהן הנסיבות שבהן הפיתוח הזה תקף. זהו חומר לקורס מלא ולא נעשה זאת כאן. הנקודה העיקרית היא שלפונקציה f יש שני ייצוגים: באמצעות המקדמים $a_0, a_1, \dots; b_0, b_1, \dots$ ובאמצעות הערכים שלה. גם כאן יש נוסחאות מפורשות המאפשרות לנו לעבור מצורה אחת לאחרת.

כאן ניתן לחשוב על f כאות (=סינגל) המתאים לתופעה פיזיקלית כלשהי. f יכולה למשל, להיות אות דיבור או מדידות של אותות מהלב (אלקטרוקרדיוגרמה EKG) או אותות מכוכב פולסר וכו'. מדוע נכון להניח ש- f מחזורית? מדוע נראה סביר שניתן לבטא את f (לפחות בקירוב) ע"י צירופים של סינוסים וקוסינוסים? לפעמים ניתן להצדיק זאת מתוך הבנה של התופעה הפיזיקלית הנדונה. כן, למשל, האותות החשמליים של הלב הם בקירוב מחזוריים ולכן ניתן לתאר f בקירוב טוב כצירוף של סינוסים וקוסינוסים. כאשר מדובר בסינגל מוזיקלי, הפיזיקה של כלי הנגינה מסבירה מה קורה. הצלילים היסודיים שמפיק כלי נגינה מתקבלים ע"י תנודה מחזורית של האוויר שנגרמת, למשל, ע"י רעידת מיתרי הפסנתר. לכן, ניתן לתאר את אות הנגינה בקירוב טוב ע"י צירוף של מספר קטן של סינוסים וקוסינוסים.

במקרים ממשיים רבים אנו מחפשים תופעה דומה אף בהיעדרו של הסבר פיזיקלי פשוט כזה. יתר על כן, בפועל איננו יכולים לנתח פונקציות $f: R \rightarrow R$ (כאן $f(t)$ הוא ערכו של הסינגל הנדון בזמן t). הסיבה היא שלפונקציה ממשית כללית אין תיאור סופי. לכן, אנו מסתפקים במספר סופי של דגימות של f , נאמר בזמנים $t = x_1, \dots, x_n$, ואנו חושבים על f כפונקציה $f: [n] \rightarrow R$. איך נכניס בחזרה לדיוננו את הנחת המחזוריות? לשם כך, נוח יהיה לנו לחשוב על f כמוגדרת לא על הקבוצה $[n] = \{1, \dots, n\}$ אלא על החבורה הציקלית C_n (שאיבריה הם $0, \dots, n-1$ והפעולה בה היא חיבור מודולו n).

אפשר להביט במצב כך: מביטים במרחב הליניארי של כל הפונקציות $f: C_n \rightarrow \mathbb{C}$. אנו מחשפים בסיס של n פונקציות למרחב הזה. באלגברה ליניארית למדתם על מעבר מבסיס לבסיס במרחב ליניארי ולכאורה כל הבסיסים שקולים זה לזה. מכיוון שלמרחב הנדון כאן (מרחב כל הפונקציות מ- C_n ל- $\mathbb{C}$) יש מבנה נוסף, מתברר שיש בסיסים בעלי תכונות ייחודיות המועילות מאוד לפתרון של בעיות ממשיות.

לייצוגים שדיברנו עליהם יש חשיבות מעשית עצומה. כך למשל אם $f(x) = \sum a_n y_n x + \sum b_n \cos x \alpha_j$ במקרה הממשי או אם $f(x) = \sum_j \alpha_j v_j(x)$ במקרה של החבורה הצי-קלית, מתברר שניתן לקבל קירובים טובים מאוד של f ע"י כך שמסכמים

1. רק את המחברים "בעלי תדר נמוך" (n קטן או j קטן, בהתאם).

2. רק את המחברים שבהם המקדם $|a_n|$ או $|b_n|$ או α_j הוא גדול.

ע"י כך אנו:

• מסננים רעש.

• דוחסים את הסינגל.

כפי שראינו בדוגמאות הנכללות במצגת ה- בפלבג.

תכונה רצויה בכל מרחב ליניארי עם מכפלה פנימית היא שיהיה זה בסיס אורתונורמל-לי: אם $x_1, \dots, x_n$ בסיס אורתונורמלי למרחב ווקטורי V אז קל לרשום את ייצוגו של כל $v \in V$ בבסיס זה: $v = \sum_i \langle v, x_i \rangle x_i$. אולם היות שההעתקות שלנו מוגדרות על C_n יש כאן מושג טבעי של "הזזה בזמן": תהיה $f: C_n \rightarrow \mathbb{C}$ ונגדיר $g: C_n \rightarrow \mathbb{C}$ ע"י $g(x) = f(x+1)$ (חיבור מודולו n).

היינו רוצים שיהיה קשר פשוט בין $f = \sum a_i x_i$ ל- $g = \sum b_i x_i$ היות ש- $a_i = \langle f, x_i \rangle$ ו- $b_i = \langle g, x_i \rangle$, כל שעלינו לדרוש הוא קשר פשוט בין $\langle f, x_i \rangle$ לבין $\langle g, x_i \rangle$. נגדיר עתה את הבסיס הרצוי. את $\mathbb{C} \rightarrow C_n : x_j$ אנו מגדירים ע"י $v_j(t) = \omega_n^{jt} / \sqrt{n}$. נבדוק את תנאי האורתונורמליות

$$\langle v_j, v_k \rangle = \frac{1}{n} \sum_t x_j(t) \overline{x_k(t)} = \frac{1}{n} \sum_t \omega^{jt} \cdot \omega^{-kt} = \frac{1}{n} \sum_t \omega^{(j-k)t} = \delta_{jk}.$$

תנאי ההזזה בזמן: אם $g(t) = f(t+1)$ אז

$$\langle g, x_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_t g(t) \omega^{-jt} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_t f(t+1) \omega^{-jt} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_s f(s) \omega^{-j(s-1)} = \frac{\omega^j}{\sqrt{n}} \sum_s f(s) \omega^{-js} = \omega^j \langle f, x_j \rangle.$$

(בשפה של תורת החבורות ההעתקה $\mathbb{C} \rightarrow C_n : x_i \rightarrow x_j(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{jt}$ שבה $x_0, \dots, x_{n-1}$ זהו אוסף של כל הרכטרים של החבורה). ברקטר של החבורה הציקלית

קונבולוציה.

נתחיל בשימוש חשוב של פעולה זו. נניח כמקודם ש- $f : C_n \rightarrow \mathbb{C}$ מתארת סיגנל ממשי כלשהו. כרגיל בסיגנלים מדודים, נכון להניח שהאות נגוע ברעש. אחת הדרכים הפשוטות ביותר לסנן רעש היא למצוא כל ערך של f עם הערכים הקרובים לו. לדוגמה לעבור מ- f לפונקציה המוגדרת ע"י

$$h(t) = \frac{1}{4} f(t-1) + \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{4} f(t+1).$$

אם מגדירים את $g : C_n \rightarrow \mathbb{C}$ כך:

$$g(j) = \begin{cases} \frac{1}{4} & j = -1, 1 \\ \frac{1}{2} & j = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases},$$

אז $h = f \star g$ פעולת הקונבולוציה מוגדרת באופן כללי כך: אם $f, g : C_n \rightarrow \mathbb{C}$ אז גם $h = f \star g$ היא פונקציה $h : C_n \rightarrow \mathbb{C}$ ו- $h(t) = \sum_j f(j)g(t-j)$. באופן כללי טרנספורם פורייה מחליף בין כפל לקונבולוציה. למשל:

משפט: יהיו $f, g : C_n \rightarrow \mathbb{C}$ ותהיה h הקונבולוציה שלהם:

$$h(t) = \sum_j f(j)g(t-j).$$

נניח כי $f = \sum a_i x_i$, $g = \sum b_i x_i$ אז

$$h = \sqrt{n} \sum a_i b_i x_i.$$

הוכחה:

$$\langle h, x_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k h(k) \omega^{-jk} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k \sum_l f(l) g(k-l) \omega^{-jk} =$$

נציב $r = k - l$:

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k,r} f(l) g(r) \omega^{-j(l+r)} = \sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_l f(l) \omega^{-jl} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_r g(r) \omega^{-jr} \right) =$$

$$= \sqrt{n} \langle f, x_j \rangle \langle g, x_j \rangle = \sqrt{n} a_j b_j.$$