בעיית הזרימה ברשת

<u>רשת זרימה</u> בנויה מגרף מכוון $G = (V, E)$ שנוספים לו הפרמטרים הבאים:

1. שני קדקדים מיוחדים $s, t \in V$ הקדקד s נקרא קדקד המקור ו-t קדקד הבור.
2. פונקציה $c : E \to \mathbf{R}^+$ המספר $c(e) > 0$ נקרא הקיבול של הצלע e ואם $(u, v) \notin E$ מגדירים $c(u, v) = 0$.

ניתן לחשוב על הצלעות של G ככבישים חד סיטריים ועל $c(e)$ כנפח התנועה המירבי שניתן להזרים בכביש המתאים לצלע זו. מטרתנו, במונחים לא פורמליים היא להזרים כמות גדולה ככל האפשר של סחורה מן המקור s לבור t (נאמר ש-s הוא המקום שבו הסחורה מיוצרת ו-t המקום שבו היא נצרכת). עלינו לעשות זאת בכפוף לשני אילוצים:

- הזרימה בצלע מוגבלת ע"י קיבולה של הצלע.
- בכל קדקד של הגרף, למעט המקור והבור מתקיים חוק שימור החומר. "כמות הסחורה הנכנסת לכל צומת ברשת הכבישים שווה לכמות היוצאת ממנו".

נמשיך בהגדרות. זרימה ברישום הנ"ל זו פונקציה $f : V \times V \to \mathbf{R}$ המקיימת את התנאים הבאים:

1. אילוצי הקיבול: לכל שני קדקדים $u, v \in V$ מתקיים

$$c(u, v) \geq f(u, v)$$

2. אסימטריה: לכל שני קדקדים $u, v \in V$ מתקיים

$$f(v, u) = -f(u, v)$$

(זהו תנאי טכני שנועד לפשט את הסימונים ונשוב אליו בקרוב. הסבר אינטואי-טיבי ראשון הוא שאנו מקודדים את העובדה שזורמות a יחידות של סחורה מ-u ל-v בכך ש-$f(u, v) = a$ וכן $f(v, u) = -a$).

3. חוק שימור החומר: אם $u \in V \setminus \{s, t\}$ אז

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$$

. (הסבר: המחוברים החיוביים בסכום זה מסתכמים לסך הסחורה היוצאת מ-u ובגלל עיקרון האסימטריה שלעיל, המחוברים השליליים מסתכמים לסך הסחורה הנכנסת ל-u ובסימן שלילי. הסכום הכולל מתאפס, לכן, בדיוק אם מתקיים חוק שימור החומר).

הערך $|f|$ (או השטף) של זרימה f מוגדר ע"י $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$. בעניין תנאי האסימ-טריה שהצגנו, מתבקשת עדיין השאלה הבאה: אם הצלע (u, v) נמצאת בגרף, אך (v, u) איננה בגרף, לא קשה להבין שהתנאי $f(v, u) = -f(u, v)$ אינו אלא תנאי טכני ונאמר, $f(u, v) = 5$ כמו גם התנאי השקול $f(v, u) = -5$ מבטאים שניהם את המצב שזורמות 5 יחידות סחורה מ-u ל-v. נניח עתה כי שתי הצלעות הנ"ל נמצאות בגרף נמשיך ונחשוב על f כמתארת זרימה של משאיות המעבירות סחורה בין ערים. האם אין תנאי האסימ-טריה שולל את האפשרות שסחורה תזרום הן מ-u ל-v והן מ-v ל-u? אכן, אפשרות זו נשללת, אולם אין בכך כל בעייה. לצורך פתרון אופטימלי של בעיית הזרימה אין כל טעם להזרים סחורה הלוך ושוב בין שתי הערים האלה. כלומר האילוץ אינו פוגע בערך המיטבי של הזרימה. במילים: בזרימה אופטימלית ניתן בה"כ להניח כי אין זוג קדקדים $u, v \in V$ כך שמזרימים משהו הן מ-u ל-v והן מ-v ל-u.

תכונות הזרימה

נשוב להגדרת השטף. אם חשבתם ש- $|f| = \sum_{v \in V} f(v,t)$ כלומר. השטף שווה לכמות הסחורה הנכנסת לבור, אז הצדק איתכם ולהלן ההוכחה: מגדירים לכל שתי קבוצות $X, Y \subseteq V$ של קדקדים:

$$f(X,Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x,y)$$

להלן כמה אבחנות פשוטות:

.1

$$\forall X \subseteq V \quad f(X,X) = 0$$

.2

$$\forall X, Y \subseteq V \quad f(X,Y) = -f(Y,X)$$

.3 $\forall X, Y, Z \subseteq V$, אם $X \cap Y = \emptyset$, אז:

$$f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$$

$$f(Z, X \cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y)$$

מכאן נובע:

$$|f| = f(s,V) = f(V,V) - f(V \setminus s, V) = -f(V \setminus s, V) =$$

$$= f(V, V \setminus s) = f(V,t) + f(V, V \setminus \{s,t\}) = f(V,t)$$

ההוכחה איננה אלא שימוש בנוסחאות שלפניה. והן נובעות בקלות מהתכונות היסודיות של f למשל, $f(X,X) = 0$ מפני שניתן לארגן את המחוברים בסכום $f(X,X) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} f(x,y)$ בזוגות $f(x,y) + f(y,x)$ שכל אחד מהם הוא 0.

להלן הוכחה נוספת,

אולי אינטואטיבית יותר: ע"פ חוק שימור החומר,

$\sum_v f(u,v) = 0$ לכל $u \neq s,t$

נסכם את השויון ע"פ כל $u \in V \langle s,t \rangle$

נקבל $\sum_{u \neq s,t} \sum_v f(u,v) = 0$.

היות ש $f(p,q) = -f(q,p)$ יוצא שאם הקדקדים p,g שניהם שונים מ- s,t, מופיעים בסכום הנ"ל שני המחוברים $f(p,q) + f(q,p)$ שסכומם 0. לאחר ביטול המחוברים הללו נישאר עם השויון $\sum_{u \neq s,t} \sum_{v = s,t} f(u,v) = 0$ כלומר $\sum_{u \neq s,t} f(u,s) + \sum_{u \neq s,t} f(u,t) = 0$ נוסיף עוד את $f(s,t) + f(t,s) = 0$ ונקבל את מבוקשנו.

שיטת Ford-Fulkerson:

אנחנו קוראים לעיקרון של Ford-Fulkerson "שיטה" ולא "אלגוריתם" מפני שלא כל הפרטים הנחוצים מופיעים בתיאור הפתרון. כפי שנראה, ניתן לבחור גם במימוש בלתי מוצלח שאינו מבטיח זמן ריצה פולינומי. אולם, מאידך גיסא, יש אינטרפרטציה של העי-קרון הזה המספקת אלגוריתם פולינומי לבעיית הזרימה. את האלגוריתם הזה (גירסת Edmonds-Karp לשיטה של Ford-Fulkerson) ננתח בהמשך הדברים. מכאן ואילך, אנו מצמצמים את הדיון למצב שבו כל הקיבולים הם מספרים טבעיים (ולא מספרים ממשיים כלשהם).

<u>העיקרון של Ford-Fulkerson</u>: יוצאים מהזרימה $f = 0$ (f זהותית 0) ומשפרים מדי צעד את הזרימה באמצעות הזרמה על מסילת הרחבה (מושג שיוסבר להלן). נסביר תחילה באופן אינטואיטיבי מהי מסילת הרחבה ואח"כ נפנה להגדרה המדוייקת. תהיה אם כן $G = (V, E, s, t, c)$ רשת זרימה ו-f זרימה עליה. אם ניתן למצוא מסילה פשוטה מ-s ל-t שלאורכה ניתן עדיין להזרים זרימה נוספת מ-s ל-t אנחנו רואים מסילה כזו כמסילת הרחבה. המושג הזה מתפרש כלשונו כשמדובר במסילה מכוונת P מ-s ל-t שאינה רוויה, כלומר בכל צלע $e \in P$ מתקיים $c(e) > f(e)$ (גדול ממש). ראו ציור 1 בנספח.

יש להבין שבציור מופיע רק חלק מהרשת ובפרט בקדקדים המופיעים כאן חלות עוד צלעות שאינן מופיעות בציור זה. בדוגמה זו ניתן להגדיל את הזרימה בכ"א מה-צלעות ב 3 (המספר 3 מתקבל בתור $\min(c(e) - f(e))$ ע"פ צלעות המסילה). שמים לב שאם f זרימה מותרת ואם מגדילים את ערכי f באותו גודל Δ בכל אחד מהצל-עות שלאורך מסילה כלשהי מ-s ל-t, אז גם לאחר ההגדלה f מקיימת את חוק שימור החומר.

הסיבה היא זו: בכל קדקד שאינו במסילה אין כל שינוי, ואילו בקדקדים של המסילה אנו מגדילים הן את הזרימה הנכנסת והן את הזרימה היוצאת ב-Δ. לכן, חוק שימור החומר ממשיך ומתקיים. הנקודה העדינה יותר היא שיש סוג נוסף של מסילת הרחבה וניתן לעשות פעולה דומה לשינוי הזרימה כך שיוגדל השטף גם באמ-צעות מסילה לאו דווקא מכוונת מ-s ל-t. למשל, ראה ציור 2 בנספח.

ניתן לבצע שינוי כדלקמן - ראה ציור 3 בנספח. כאן הגדלנו ב-$\Delta = 3$ את הערך של על כל הצלעות שכיוונן ככיוון המסילה מ-s ל-t, והקטנו ב 3 את הערך של הצלע שכיוונה מנוגד לכיוון המסילה. כאן:

$$\Delta = \min(\min(c(e) - f(e)), \min(f(e))$$

. המינימום הראשון הוא ע"פ צלעות המכוונות ככיוון המסילה מ-s ל-t והמינימום השניע"פ צלעות המכוונות כנגד כיוון המסילה. גם כאן, אם f מקיימת את חוק שימור החומר, אז היא תמשיך לקיימו גם לאחר השינוי. כאן נדרשת עוד אבחנה מעבר למה שעשינו במקרה הקודם. לא חל שינוי בזרימה בצלעות היוצאות מ-x לעומת זאת, גם בזרימה הכוללת לתוך x אין שינוי, מפני שבאחת הצלעות הנכנסות ל-x ירדה הזרימה ב-$\Delta = 3$ ובצלע נכנסת אחרת הזרימה עלתה ב-Δ ובס"ה לא חל שינוי גם בזרימה הכוללת לתוך x. כיו"ב גם בקדקד y (בהחלפת "נכנס" ב"יוצא").

דוגמה להרצה לא יעילה של עיקרון Ford-Fulkerson

יש דוגמאות פשוטות המראות שאת עיקרון Ford-Fulkerson ניתן לממש באופן גרוע כך שלאלגוריתם המתקבל זמן ריצה לא חסום אף אם הרשת היא קטנה. נביט ברשת שבציור 4 בנספח. (המספרים שליד הצלעות הם הקיבולים ו-M הוא מספר טבעי גדול). הזרימה הראשונה היא $f = 0$. עתה אנו בוחרים במסילת ההרחבה העבה שבציור 5 בנספח, מגדילים את הזרימה לאורך מסילת ההרחבה ב-$\Delta = 1$ ומגיעים לזרימה שבציור 6 בנספח.

- עתה בוחרים במסילת ההרחבה הבאה - ראה ציור 7 בנספח.

- ניתן גם עתה להגדיל את הזרימה ב-$\Delta = 1$ ולעבור לזרימה שבציור 8 בנספח.
- שוב נבחר במסילת ההרחבה שבציור 5 בנספח
- נעבור לזרימה שבציור 9 בנספח.

וכן הלאה. התהליך יימשך $\Omega(M)$ צעדים ובסופם נגיע לזרימה האופטימלית שבציור 10 בנספח.

ע"י הגדלת המספר M זמן הריצה יגדל כרצוננו, אף כי ברשת רק ארבעה קדקדים. מאוחר יותר נראה איך לממש באופן יעיל את העיקרון של Ford-Fulkerson.

רשת שיורית

נפתח עתה את המסגרת הפורמלית המאפשרת לנו להגדיר מסילות הרחבה.

נתחיל במושג של רשת שיורית (Residual network). תהיה $G = (V, E, s, t, c)$ רשת זרימה ו-f זרימה בה. נגדיר עתה רשת חדשה-G_f הנקראת הרשת השיורית של G המושרית מ-f. קב' הקדקדים של G_f היא V המקור והבור בה הם s, t כמו ב-G.

לכל זוג קדקדים $u, v \in V$ אנו מגדירים את הקיבול השיורי של (u, v) כ:

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

ועתה ניתן להגדיר את קבוצת הצלעות של הרשת השיורית G_f כך:

$$E_f := \{(u, v) \in V \times V | c_f(u, v) > 0\}$$

והקיבול של צלע $(u, v) \in E_f$ מוגדר כ-$c_f(u, v)$. נשים לב שאם $(u, v) \in E_f$ אז $(u, v) \in E$ או $(v, u) \in E$

במילים אחרות ב-E_f נמצאות רק צלעות של G או היפוכן, מפני שאם $(u, v), (v, u) \notin E$ אז במקרה זה $c(u, v) = c(v, u) = 0$ גם $f(u, v) = f(v, u) = 0$ ולכן גם $c_f(u, v) = c_f(v, u) = 0$.

טענה: תהיה f זרימה ברשת $G = (V, E, s, t, c)$ ותהיה G_f הרשת השיורית המתאימה. תהיה f' זרימה ב-G_f אז $g = f + f'$ זרימה ב-G ומתקיים $|g| = |f| + |f'|$

- הוכחה: אנטיסימטריות - מיידית.
- שימור החומר: יהיה u קדקד שונה מ-s, t, אז:

$$\sum_{v \in V} g(u, v) = \sum_{V} f(u, v) + \sum_{V} f'(u, v) = 0$$

- הזרימה איננה עוברת את הקיבול:

$$g(u, v) = f(u, v) + f'(u, v) \leq f(u, v) + c_f(u, v) = f(u, v) + c(u, v) - f(u, v) = c(u, v)$$

גם הטענה על השטף מיידית.

הערה: שימו לב שכל הטענות נובעות מהליניאריות של ההגדרות הכרוכות בזרימה.

מסילת הרחבה

עתה הגענו להגדרה הפורמלית של מסילת הרחבה:
תהיה $G=(V,E,s,t,c)$ רשת ו-f זרימה בה. מסילת הרחבה P זו מסילה פשוטה מ-s ל-t ברשת השיורית G_f. הקיבול השיורי של P מוגדר כ: $c_f(P) := \min\{c_f(u,v)|(u,v) \in P\}$

טענה: תהיה $G=(V,E,s,t,c)$ רשת ו-f זרימה בה, ותהיה P מסילת הרחבה. נגדיר $\Delta_P : V \times V \to \mathbf{R}$ כך:

- אם המסילה P מכילה את הצלע (u,v), אז $\Delta_P(u,v)=c_f(P)$
- אם המסילה P מכילה את הצלע (v,u), אז $\Delta_P(u,v)=-c_f(P)$
- אחרת $\Delta_P(u,v)=0$

אז הפונקציה $(\Delta_P+f) : V \times V \to \mathbf{R}$ היא זרימה בעלת ערך $|f| < |f| + |c_f(P)|$.

הוכחה: לפי הלמה הקודמת די לוודא ש-Δ_P היא זרימה ב-G_f. ואכן ע"פ ההגדרה Δ_P אסימטרית ואינה עוברת את הקיבולים.

חתכים

חלוקה $V=S \cup T$ של קב' הקדקדים של רשת זרימה לשני חלקים זרים כך ש-$s \in S$ ו-$t \in T$ נקראת חתך ברשת. הקיבול של חתך זה מוגדר כ:

$$c(S,T)=\sum_{x\in S, y \in T} c(x,y)$$

אם f זרימה ו-(S,T) חתך, אז כמובן $c(S,T) \geq f(S,T)$ מפני ש-
$c(S,T)=\sum_{x\in s}\sum_{y \in T} c(x,y) \geq \sum_{x\in s}\sum_{y \in T} f(x,y) = f(S,T)$.

טענה: לכל זרימה f ולכל חתך (S,T) מתקיים: $f(S,T)=|f|$

הוכחה:

$$f(S,T)=f(S,V)-f(S,S)=f(S,V)=f(s,V)+f(S \setminus s, V)=f(s,V)=|f|$$

כל הצעדים מובנים ונובעים על נקלה מן האבחנות הפשוטות שלעיל ובפרט זו המטפלת בקבוצות זרות. ראוי, אולי, להבהיר את המעבר הרביעי כאן. הוא נובע מכך שלכל $A \subseteq V$ שאינה כוללת את s ולא את t, מתקיים $f(A,V)=0$. מפני ש: $f(A,V)=\sum_{a\in A}\sum_{v \in V} f(a,v)=0$.

משפט השטף והחתך: תהיה $G=(V,E,s,t,c)$ רשת ו-f זרימה בה. אז התנאים הבאים שקולים:

1. f זרימה מקסימלית ברשת G (ז"א בעלת שטף מירבי).
2. ברשת השיורית אין מסילת הרחבה.
3. יש חתך (S,T) ב-G המקיים $|f|=c(S,T)$.

הוכחה:

1) גורר 2): כפי שראינו אם יש ברשת השיורית G_f מסילת הרחבה, אז ניתן לשפר את f לזרימה בעלת שטף גדול יותר.
2) גורר 3): נגדיר $S \subseteq V$ כאוסף כל הקדקדים x כך שיש ב-G_f מסילה מ-s ל-x. כמובן $s \in S$ וכן $t \notin S$ (זו בדיוק ההנחה שלנו). כלומר $(S, V \setminus S)$ הוא חתך ב-G. אבל לכל $u \in S, v \notin S$ מתקיים $c_f(u,v) = 0$ כלומר $f(u,v) = c(u,v)$ (אחרת היה ניתן להגיע מ-s גם ל-v, דרך u, בניגוד להנחה ש-$v \notin S$). אם כן, $|f| = f(S, V \setminus S) = c(S, V \setminus S)$ כדרוש.
3) גורר 1): כפי שראינו, כל חתך (S,T) מקיים $|f| \leq c(S,T)$. ולכן, אם מתקיים שויון $|f|$ בהכרח מקסימלי.

כדאי להדגיש כאן תופעה כללית וחשובה:
בהינתן רשת כלשהי $G = (V, E, s, t, c)$ נגזרות ממנה שתי קבוצות של מספרים ממשי-ים: $\mathcal{F}$ זהו אוסף כל השטפים האפשריים $|f|$ של זרימות מותרות ב-G. והשנייה: $\mathcal{C}$ שזהו אוסף כל הקיבולים של חתכים ב-G. קל להוכיח שלכל $\varphi \in \mathcal{F}$ ולכל $\gamma \in \mathcal{C}$ מתקיים $\gamma \geq \varphi$ ותוכן משפט השטף והחתך הוא שהמספר הקטן ביותר ב-$\mathcal{C}$ והמספר הגדול ביותר ב-$\mathcal{F}$ מתלכדים.

זו תופעה אופיינית שנתקלים בה במקרים חשובים רבים שנקראים באופן כללי משפטי min-max. מלבד משפט השטף והחתך ראיתם תופעה כזו גם כאשר למדתם את משפט החתונה של Hall.

הרבה מן התופעות האלה מוסברות במסגרת התורה של תכנון ליניארי ובפרט ע"י משפט הדואליות בתכנון ליניארי שאותו ניתן ללמוד בקורס "אופטימיזציה דיסקרטית".

ועוד הערה חשובה: נניח שלפנינו זרימה f ברשת נתונה G וברצוננו לדעת האם f זרימה מקסימלית ברשת G (ז"א בעלת שטף מירבי). משפט השטף והחתך מספק לנו שיטה לאמת זאת. אם, אכן f אופטימלית, אז יש חתך ברשת כך ש-$c(S,T) = |f|$. חתך כזה מהווה ראייה (או עד - witness) לכך ש-f אופטימלית. לעניין זה עוד נשוב בהמשך.

מימוש יעיל של עיקרון **Ford Fulkerson**

כבר ראינו שניתן לממש את עיקרון Ford-Fulkerson באופן לא יעיל. עתה נציג מימוש יעיל שלו המוצא זרימה אופטימלית בזמן פולינומי $O(VE^2)$. זהו אלגוריתם Edmonds-Karp המממש את העיקרון הנ"ל בזה שתמיד בוחרים מסילת הרחבה קצרה ביותר. התבנית הבסיסית של ההוכחה היא כזאת: מראים שהאלגוריתם מבצע לכל היותר $O(VE)$ חיפושים של מסילות הרחבה (וכל חיפוש כזה ניתן לבצע בזמן $O(E)$, למשל בעזרת חיפוש רוחב). כיצד נחסום את מספר פעולות ההרחבה? בכל מסילת הרחבה שאנו מוצאים, יש צלע קריטית (זו שקובעת כמה נזרים במסילה). אנו נראה שכל צלע בגרף יכולה להיות קריטית לכל היותר ב-$O(V)$ מסילות הרחבה באלגוריתם E-K.

ההוכחה נעשית בשני צעדים ראשיים מוכיחים

טענה 1: תהיה $G = (V, E, s, t, c)$ רשת זרימה, ונפעיל עליה את אלגוריתם Edmonds-Karp יהיה $\delta_f(v)$ המרחק מ-s ל-v ברשת השיורית G_f יחסית לזרימה f. אז המספר הזה לא יורד במהלך האלגוריתם. מטענה 1 אנו מסיקים את:

הוכחת טענה 1: בשלילה. תהיה f זרימה ונניח כי f' התקבלה ממנה ע"י ביצוע אלג' Edmonds-Karp על הרשת השיורית G_f.
נניח כי

$$\delta_{f'}(v) \leq \delta_f(v) - 1$$

וכי $\delta_{f'}(v)$ מזערי בתנאי זה. תהיה $P = s, \ldots, u, v$ מסילת s, v קצרה ביותר ב-$G_{f'}$. אם כן $\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) - 1$ (הרי u נמצאת על מסילה קצרה ביותר ב-$G_{f'}$ מייד לפני v). מתנאי המינימליות של v נובע: $\delta_{f'}(u) \geq \delta_f(u)$. נראה כי $(u,v) \notin E_f$: אחרת,

$$\delta_f(v) \le \delta_f(u) + 1$$

טענה 2: נניח שהצלע (u,v)קריטית לזרימה f וגם לזרימה מאוחרת יותר $f^{'}$. אזי $\delta_{f'}(u) \ge \delta_f(u) + 2$. טענה 2 כבר גוררת את נכונות המשפט. הרי $\delta_g(u)$ נע בתחום $[1, v-1]$. בכל הזדמנות שבה (u,v)קריטית גדל המספר $\delta_g(u)$ ב-2 ולכן (u,v)קריטית לכל היותר $O(v)$ פעמים. נסכם אם כן: כל פאזה של האלגוריתם ניתן לבצע בזמן $O(E)$. בכל איטרציה אחת מ- E הצלעות קריטית וכל צלע יכולה להיות קריטית רק $O(v)$ פעמים. סה"כ זמן הריצה הוא לכן $O\left(VE^2\right)$.
(ניתן להגיע ב-G_f ל-v דרך u +צעד אחד נוסף)

$$\le \delta_{f'}(u) + 1 = \delta_{f'}(v)$$

(כפי שראינו למעלה $\delta_{f'}(u) \ge \delta_f(u)$)
בניגוד להנחתנו על v.

יוצא אם כן ש-$(u,v) \notin E_f$ אבל $(u,v) \in E_{f'}$ משמע שצעד ההרחבה הגדיל את הזרימה מ-v ל-u. אולם אלגוריתם Edmonds-Karp משתמש רק במסילות קצרות ביותר. נובע ש-(v,u) היא צלע במסילה קצרה ביותר ב-G_f מ-s ל-u אם כן:

$$\delta_f(v) = \delta_f(u) - 1 \le \delta_{f'}(u) = \delta_{f'}(v) - 2$$

(הסבר למעבר השני: כפי שראינו מקודם הטענה נובעת מהמינימליות של v)
בסתירה להנחתנו כי $\delta_{f'}(v) < \delta_f(v)$.

עתה נוכל לסיים ולהוכיח:

הוכחת טענה 2:

תהיה $e = (u,v) \in E$ מכיוון ש-EK משתמש במסילות קצרות, כאשר e קריטית מתקיים $\delta_f(v) = \delta_f(u){+}1$. עתה אנו מרווים את הצלע e ע"י תוספת הזרימה על מסילת ההרחבה, ו-(u,v) נעלמת מהרשת השיורית. על מנת שתחזור ותופיע, יש להשתמש בצלע (v,u) באיזושהי מסילת הרחבה, נאמר כשהזרימה היא f' בזמן זה מתקיים $\delta_{f'}(u) = \delta_{f'}(v) + 1$.

אם כן:

$$\delta_{f'}(u) = \delta_{f'}(v) + 1 \ge \delta_f(v) + 1 = \delta_f(u) + 2$$

המעבר השני נובע מטענה מספר 1.

מסקנה: (תכונת השלמות) אם ברשת $G = (V,E,s,t,c)$ ערכי הקיבול c הם שלמים, אז יש זרימה אופטימלית המקבלת ערכים שלמים.

ההוכחה נובעת מכך שאלגוריתם EK מוצא זרימה אופטימלית וכאשר ערכי הקיבול שלמים, תמיד הערך הקריטי במסילת הרחבה הוא שלם. לכן כל הזרימות שמוצא אלגוריתם EK כולל הזרימה האופטימלית הן בערכים שלמים.

תוצאות של משפט הזרימה

ממשפט הזרימה נובעות מסקנות קומבינטוריות רבות ויפות. נראה, למשל, איך להסיק ממנו את משפט החתונה של Hall. נזכיר אותו תחילה.

משפט Hall: יהיה $G=(A,B,E)$ גרף דו צדדי כך ש $|A|=|B|$. יש בגרף הזה זיווג מושלם אם"ם לכל $X\subseteq A$ מתקיים $|\Gamma(X)|\geq|X|$ באשר

$$\Gamma(X)=\{y\in B|\exists x\in X,xy\in E\}$$

אנו נסיק משפט זה ממשפט השטף והחתך כך:

ראשית נהפוך את הגרף הנ"ל לרשת זרימה ע"י שנוסיף מקור s ובור t - קדקדים חדשים. את s נחבר בצלע לכל קדקד ב-A ואת t לכל קדקד ב-B. לכל הצלעות יהיה קיבול יחידה ואת כולן נכוון בצורה $s\to A\to B\to t$. בגלל תכונת השלמות שציינו לעיל, יש זרימה אופטימלית המקבלת רק ערכים $0,1$. קל לוודא שאוסף הצלעות ב-$E(A,B)$ שבהן $f=1$ מהווה זיווג ב-G ולכן יש ב-G זיווג מושלם אם"ם יש זרימה בערך $n=|A|=|B|$ מ-s ל-t. לפי משפט השטף והחתך זהו המצב אם"ם לכל חתך (S,T) ב-G יש קיבול $c(S,T)\geq n$ ועתה: אם יש $X\subseteq A$ כך ש-$|\Gamma(X)|\leq|X|-1$ אז נגדיר $S=\{s\}\cup X\cup\Gamma(X)$.

- נשים לב כי: $c(S,V\setminus S)=n-|X|+|\Gamma(X)|\leq n-1$ (אין צלעות מ-X ל-$B\setminus\Gamma(X)$) ולכן במקרה זה אין זיווג מושלם בגרף.
- מאידך גיסא, נניח ש-$|X|\leq|\Gamma(X)|$ לכל $X\subseteq A$ ונתבונן ב-S כללית ונרשום אותה כ-$S=\{s\}\cup Y\cup Z$ כש-$Y\subseteq A$ ו-$Z\subseteq B$ אז $c(S,T)\geq n-|Y|+|\Gamma(Y)\setminus Z|+|Z|$.
- אם נשתמש בעובדה ש-$|Y|\leq|\Gamma(Y)|$ נראה ש-$n\leq c(S,T)$ כדרוש.

במקרה זה, אם כן, יש בהכרח זיווג מושלם בגרף.