# טרנספורם פורייה בדיד וטרנספורם פורייה מהיר

26 בנובמבר 2002

זהו אלגוריתם מרכזי בשני תחומים של חישוב: חישוב אלגברי ועיבוד ספרתי של אותות (Digital signal processing, DSP). נפתח במינוחים: הפעולה שאותה מבצע האלגוריתם נקראת טרנספורם פורייה הבדיד (Discrete Fourier Transform - DFT) ואלגוריתם יעיל למימושה נקרא טרנספורם פורייה המהיר (Fast Fourier Transform - FFT). האלגוריתם הזה הוא אבן פינה בכל מערכת מודרנית לעיבוד אותות ואחת הדוגמאות המובהקות ביותר לפיתוח אלגוריתמי שאפשר פריצת דרך טכנולוגית חשובה. אנו נטפל תחילה בהיבט האלגברי של האלגוריתם ואחר כך נראה את ההקשר הרחב יותר של אנליזה הרמונית ("אנליזת פורייה") ושימושיה בעיבוד ספרתי של אותות.

נפתח בבעייה האלגוריתמית הבאה: נתונים שני פולינומים ממשיים

$$f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \qquad g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$$

ורוצים לחשב את מכפלתם. כזכור, אם $h=fg$ כש-$h(x)=\sum c_i x^i$ אז

$$c_i=\sum_k a_k b_{i-k}$$

(האינדקס $k$ מוגבל לערכים שבשבילם המקדמים $a_k$ ו-$b_{i-k}$ מוגדרים).

מהי הסיבוכיות החישוביות של כפל פולינומים? נניח כי $m=n$ ונכפול את $f$ ב-$g$ ע"פ ההגדרה. קל לראות שבאופן זה נדרשות $\Theta(n^2)$ פעולות אלמנטריות. האבחנה היסודית שביסוד ה-DFT היא שיש הצגה אלטרנטיבית של פולינומים שבה פעולת הכפל דורשת רק $O(n)$ פעולות. כפי שכבר ראינו, פולינום ממעלה $n$ נקבע באופן יחיד ע"י ערכיו ב-$n+1$ נקודות. כלומר מתוך המידע ש: $f(x_i)=y_i$ ל-$i=0,\ldots,n$ כש-$x_i$ נקודות שונות זו מזו, הפולינום $f$ מוגדר ביחידות. נניח שיש $m+n+1$ נק' שונות $x_0,\ldots,x_{m+n}$ וידועים לנו כל הערכים $f(x_i)$ וכן $g(x_i)$ לכל $i=0,\ldots,m+n$ אז ידועים לנו גם $h(x_i)$ והמספרים האלה מגדירים את $h$ ביחידות. כאן נדרשו רק $m+n+1$ פעולות כפל.

נסכם: פולינום ממעלה $k$ יכול להיות מיוצג חד ערכית ע"י $k+1$ מקדמיו וכן הוא מוגדר ביחידות ע"י ערכיו ב-$k+1$ נקודות שונות. בהצגה השנייה פעולת הכפל דורשת רק מספר ליניארי של פעולות אלמנטריות. השאלה המתבקשת היא אם כן: האם יש לנו שיטה יעילה למעבר בין שני הייצוגים של פולינום ("הצגה באמצעות המקדמים" ו"הצגה באמצעות הערכה ב-$k+1$ נקודות") התשובה על כך היא חיובית ומתחילה בבחירה מתוחכמת של הנקודות שבהן נעריך את הפולינום. נזכיר תחילה איך עוברים מייצוג אחד של פולינום למשנהו. אם $c=(c_0,\ldots,c_n)$ הוא ווקטור המקדמים של

הפולינום $P(x)=\sum_0^n c_jx^j$ ואם $x_0,\dots,x_n$ נקודות שונות זו מזו ו-$y_i=P(x_i)$ אז הווקטור $y=(y_0,\dots,y_n)$ מתקבל מ-$c$ הנ"ל באמצעות

$$y=Ac$$

כש-$A$ היא המטריצה שהאיבר ה-$(i,j)$ בה הוא $x_i^j$ (ל-$i,j=0,\dots,n$). היות ש-$x_i$ שונים זה מזה, המטריצה $A$ אינה סינגולרית ויש לה הופכי כך שניתן לרשום גם $c=A^{-1}y$. מהי הסיבוכיות של חישובים אלה? נעיר תחילה שהבחירה בנקודות $x_i$ נעשית "אחת ולתמיד" ולכן אין מדובר כלל במחיר החישוב של המטריצות $A, A^{-1}$ שאותן אנו מחשבים מראש. עלינו להעריך את המחיר של

- חישוב הווקטור $y$ בהינתן $c$ (כאמור $y=Ac$). פעולה זו קרויה טרנספורם פורייה בדיד DFT

- חישוב הווקטור $c$ בהינתן $y$ (כאמור $c=A^{-1}$). פעולה זו קרויה הטרנספורם ההופכי של DFT ומסומנת לפעמים ע"י $DFT^{-1}$

אנו נראה בחירה של קבוצת הנקודות $\{x_i\}$ שבשבילה החישובים הנ"ל עולים רק $O(n\log n)$ פעולות אלמנטריות. הטענה הזו עשוייה להיראות לכם כעומדת בסתירה לטענה שטענו בעבר (ללא הוכחה). אמרנו בשיעור קודם שבמודל החישוב האלגברי המחיר של כפל מטריצה כללית $n\times n$ בווקטור כללי מאורך $n$ הוא $\Omega(n^2)$. האם אין כאן סתירה? לא. מפני שכאן מדובר במטריצה $A$ מסויימת כשרק הווקטור $c$ משתנה (וכיו"ב $A^{-1}$ מסויימת ורק $y$ משתנה).קל לתת דוגמאות למטריצות מסויימות שבשבילן הסיבוכיות נמוכה מ-$n^2$. למשל, אם $A$ היא מטריצת היחידה, לא נדרשות כל פעולות. אם $A$ מטריצה אלכסונית די ב-$n$ פעולות כפל וכו'.

מהן, אם כן, הנקודות המיוחדות שבהן נעריך את הפולינומים שלנו ושיאפשרו לנו לבצע את המעברים הנ"ל ב-$O(n\log n)$ פעולות אלמנטריות? מדובר בשורשי היחידה מסדר $n$. כרגע נראית מן הסתם הבחירה הזו כמין נס לא מוסבר אולם בהמשך נתאר את הבעייה בתוך הקשר רחב יותר שיסביר היטב מדוע מדובר בבחירה הגיונית וסבירה ולא במעשה קסמים.

תזכורת קצרה במספרים מרוכבים: $\omega_n=e^{2\pi i/n}$ נקרא שורש היחידה הפרימטיבי ה-$n$-י והוא פתרון של המשוואה $x^n=1$, כלומר מתקיים $\omega_n^n=1$. כמו כן, אם $n$ זוגי, אז $\omega_n^{n/2}=-1$. עוד טענה קלה שנזדקק לה היא שהסכום $\sum_{j=0}^{n-1}\omega_n^{jk}$ שווה ל-$n$ אם $k$ מחלק את $n$ ואחרת הוא $0$ (קל לאמת זאת תוך שימוש בנוסחה לסכום של טור גיאומטרי). הנקודות שבהן נרצה להעריך את הפולינומים יהיו $x_j=\omega_n^j$ כש-$j=0,\dots,n-1$ (אלו כל הפתרונות של המשוואה $x^n=1$ ולכן המספרים המרוכבים האלה קרויים שורשי היחידה מסדר $n$).

לאחר כל הרקע הזה, ניתן לתאר את אלגוריתם ה-FFT באופן פשוט ביותר: יהיה $A(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$ פולינום ונרצה להעריך אותו בכל שורשי היחידה ה-$n$-יים. נניח ש-$n$ זוגי ונשים לב ש-$n/2$ המספרים $1,\omega_n^2,\omega_n^4,\ldots$ הם בדיוק כל שורשי היחידה מסדר $n/2$. לאור זה כדאי לנו להציג את הפולינום $A$ כך:

$$A(x)=A^{(0)}(x^2)+xA^{(1)}(x^2)$$

באשר $A^{(0)},A^{(1)}$ הם "החלק האי זוגי והזוגי של $A$ בהתאמה" דהיינו:

$$A^{(0)}(t)=a_0+a_2t+a_4t^2+\ldots \qquad A^{(1)}(t)=a_1+a_3t+a_5t^2+\ldots$$

מתוך ההצגה הנ"ל של $A$ יוצא שאנו מצליחים להעריך את $A$ בכל שורשי היחידה ה-$n$-יים ע"י כך שאנו מעריכים שני פולינומים $A^{(0)},A^{(1)}$ בכל שורשי היחידה מסדר

$n/2$ ובנוסף לזה ביצוע של $O(n)$ פעולות אלמנטריות. אם $T(n)$ המחיר לחישוב DFT מסדר $n$ בדרך זו אז מתקבלת ההערכה

$$T(n) \leq 2T(n/2) + O(n)$$

שפתרונה

$$.T(n) \leq O(n \log n)$$

אותה ההערכה תקפה גם לחישוב הטרנספורם ההפוך ל-DFT. כדי לראות זאת נחזור לתיאור במונחי מטריצות. מחשבים תחילה שאם $A$ היא המטריצה המתאימה ל-DFT, זו שבמקום ה-$(j,k)$ שלה רשום $\omega_n^{jk}$ אז ההופכית שלה היא המטריצה שבמקום ה-$(j,k)$ שלה רשום $\frac{1}{n}\omega_n^{-jk}$ . יוצא שגם את הטרנספורם ההופכי ל-DFT ניתן לחשב באופן דומה לדרך החישוב של FFT כפי שתוארה לעיל. כלומר, אנו מעריכים פולינום נתון $B(x)$ בנקודות $x_0 = 1, x_1 = \omega_n^{-1}, x_2 = \omega_n^{-2}, \ldots$ ואנו עושים זאת ע"י הערכה של שני פולינומים $B^{(0)}, B^{(1)}$ בנקודות $.x_0, x_2, \ldots$

עתה ניתן לענות על השאלה שממנה יצאנו: על מנת להכפיל שני פולינומים $f, g$ ממעלה $n$ זה בזה, אנו מעריכים כל אחד מהם ב-$2n$ שורשי היחידה מסדר $2n$ בעזרת FFT ואז מחשבים את הטרנספורם ההופכי על המספרים $f(\omega_{2n}^j) \cdot g(\omega_{2n}^j)$ ל-$j =$ $.0, 1, \ldots 2n-1$