קירובים יעילים לבעיות קשות

אחד ההישגים הגדולים של התיאוריה של מדעי המחשב הוא פיתוח המושג של NP-שלמות והתיאוריה שמסביבו. זהו נושא עיקרי בקורס "אוטומטים, שפות פורמליות וסיבוכיות החישוב" שתלמדו בסמסטר הבא. לכן נתאר את המושג החשוב הזה בקיצור ובאופן לא פורמלי. התורה של מורכבות חישובים מתחילה את הדיון בבעיות הכרעה. אלו הן שאלות אלגוריתמיות כגון: "נתון גרף G, ובו שני קדקדים s,t הכרע האם הם נמצאים באותו רכיב קשירות". "נתון מספר טבעי n, הכרע האם הוא פריק". "נתון גרף דו צדדי $G=(A,B,E)$, הכרע אם יש בו זיווג מושלם" וכו'. בלי לדון בקיומם של אלגוריתמים יעילים לביצוע המשימות הללו, נרצה להצביע על תכונה משותפת של הבעיות האלה: כאשר התשובה חיובית קל לשכנע בזאת. למשל, אם בשאלה הראשונה יראו לנו מסילה בין s ל-t, קל לנו לוודא שהיא אכן כזו ולכן s ו-t באותו רכיב קשירות.

בשאלה השנייה - די להציג בפנינו שני מספרים טבעיים x,y ועלינו מוטלת המשימה הקלה לאמת ש-$n=xy$.

גם בשאלה השלישית קל לנו לאמת. די אם יראו לנו אוסף של צלעות ואנו נאמר שזהו זיווג מושלם (כלומר כל קדקד בגרף מכוסה ע"י הצלעות שהוצגו בפנינו בדיוק פעם אחת). באופן די מדויק, ניתן לומר ש-NP הוא אוסף כל הבעיות האלה שקל להשתכנע בכך שיש להן פתרון חיובי. לבעיות שהוזכו לעיל יש אלגוריתמים יעילים (שניים מהם כבר למדתם - קשירות וזיווג מושלם. על בעיית ההכרעה של פריקות נדבר בהמשך הקורס). עתה נרצה לדבר מעט על בעיות קשות יותר שאיננו יודעים לפתור באופן יעיל. למשל: בעיית המעגל ההמילטוני. מעגל המילטוני בגרף הוא מעגל פשוט המבקר כל קדקד בגרף בדיוק פעם אחת. גם כאן קל לשכנע בקיום תשובה חיובית - מציגים סידור ציקלי של הקדקדים ומוודאים שאכן כל שני קדקדים עוקבים בסידור זה הם שכנים. תורת הסיבוכיות מאפשרת לנו להוכיח שבעיית המעגל ההמילטוני "קשה לפחות כמו כל בעייה אחרת במחלקה NP" במילים: "היא בעייה שלמה במחלקה NP" ובקיצור "היא NP-קשה". לא ניכנס לדיון מפורט יותר ונסתפק באמירה שאיננו יודעים אלגוריתם יעיל לבעייה זו ויש עדויות נסיבתיות חזקות מאוד לכך שאין אלגוריתם יעיל בשבילה. תעלומה זו קרויה "הבעייה האם P=NP ?" והיא מן הסתם הבעייה הפתוחה הידועה ביותר בתיאוריה של מדעי המחשב (ואגב, לפני כשנתיים הוקצב עליה פרס של מיליון דולר). אבל נשוב לעיקר דיוננו. עד כאן דיברנו על בעיות הכרעה - שאלות שעליהן התשובה האפשרית היא "כן" או "לא".

נעבור עתה ונדבר על בעיות אופטימיזציה. אלו בעיות שהתשובה עליהן היא מספר-ית. רוצים למקסם/למנם גודל כלשהו בכפוף לאילוצים מסויימים. למשל, אפשר לשאול שאלות מהסוג "נתון גרף G ושני קדקדים בו s,t, מהו האורך המזערי של מסילה בין s ל-t ?" (שאלה שאת פתרונה כבר למדתם).

או למשל: נתון גרף דו צדדי $G=(A,B,E)$ מהו הגודל המירבי של זיווג בו? (גם זו שאלה שניתן לפתור בעזרת התורה של זרימה ברשתות. האם תוכלו לתת אלגוריתם יעיל לבעיה?).

נחזור לבעיית הגרף ההמילטוני וננסח גם כאן בעיית אופטימיזציה קרובה. נניח שעתה נתון לנו גרף $G=(V,E)$ ופונקציית משקל אי שלילית $w:E\to\mathbf{R}^+$. על $w(e)$ אנו חושבים כאורך הצלע e. אנו מבקשים עתה מסילה המילטונית ב-G בעלת משקל כולל מזערי (המחיר של מסילה P מוגדר כ-$\sum_{e\in P}w(e)$). בעייה זו ידועה בשם בעיית הסוכן הנוסע (TSP - Traveling Salesman Problem): יש סוכן נוסע שמוטל עליו לבקר בכל הערים במדינה ולשוב לעיר מגוריו בסוף הסיור. הוא מחפש את המסלול בעל האורך המזערי שיאפשר לו לבקר בכל הערים.

לא קשה לראות שגם זו בעייה NP-קשה. אולם כאן נפתחת אפשרות מעניינת. במקרים רבים, כשמתעורר הצורך לפתור בעיית אופטימיזציה NP-קשה, ייתכן שאין זה הכרחי לפתור אותה באופן מושלם אלא רק באופן מקורב (שימו לב: זו הסיבה שעברנו מדיון בבעיות הכרעה לדיון בבעיות אופטימיזציה. כשמדובר בבעיות הכרעה, קשה לראות מהי המשמעות של פתרון מקורב). למשל, נניח שאמנם איננו יודעים למצוא באופן יעיל את המסלול הקצר ביותר של הסוכן הנוסע, אולם ידועה לנו דרך יעילה

למצוא לו מסלול שמובטח כי אורכו לא יעלה בהרבה על האורך המזערי. למטרות רבות (אף כי לא תמיד) פתרון מקורב כזה הוא תחליף מצויין לפתרון האופטימלי, ומבחינה מעשית אין חשיבות לפער קטן באורך המסלול. אנו נציג בשיעור ובתרגילים פתרונות יעילים מקורבים למספר בעיות אופטימיזציה קשות.

ניגש אם כן לטיפול ספציפי בבעיית הסוכן הנוסע. אנו נצטרך לצמצם מעט את הבעייה ולדון בגירסה שלה הקרוייה Δ-TSP: בעיית הסוכן הנוסע באילוצי אי שויון המשולש. מדובר בהנחה הבאה על המספרים $w(e)$: אם i,j,k שלושה קדקדים בגרף אזי $w(i,j)+w(j,k)\geq w(i,k)$ זו הנחה סבירה ביותר במקרים רבים. היא מבטאת את העיקרון שהמרחק מהעיר i לעיר k אינה עולה על המרחק מ-i ל-j ועוד המרחק מ-j ל-k. מכל מקום זוהי הבעייה שבה נדון: בעיית הסוכן הנוסע שבה המשקלות מקיימות את אי שויון המשולש. נוסיף שתי הערות: הנחה זו של אי שויון המשולש היא לא רק עניין של נוחות. ניתן להוכיח שאם $\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$ אז לא ניתן בזמן פולינומי גם למצוא קירוב סביר לבעיית הסוכן הנוסע בצורתה הכללית. הערה נוספת היא שבהנחת אי שויון המשולש בעצם אין מדובר כבר בגרף אלא בפונקצייה $w:V\times V\rightarrow\mathbf{R}^+$ שהיא מטריקה.

אנו נראה תחילה איך למצוא בהינתן קלט לבעיית ה-Δ-TSP פיתרון שמחירו לכל היותר פי 2 מהפתרון האופטימלי. אח"כ נרמוז גם איך ניתן למצוא באופן יעיל גם פתרון שמחירו פי 3/2 מן האופטימום.

פתרוננו לבעייה מתחיל מן האבחנה הבאה: נבנה עץ פורש מינימלי T בגרף G שלצלעותיו המשקלות $w(e)$. נטען כי מחירו $w(T)$ אינו עולה על הפתרון של בעיית ה-Δ-TSP. ואכן, אם P מסילת סוכן אופטימלית אז לכל צלע $e\in P$, גם $P\setminus e$ הוא עץ פורש של G ולכן:

$$\mathrm{opt}:=w(P)\geq w(P\setminus e)\geq w(T)$$

בשלב הבא של פתרוננו, ניצור מ-T מסלול סגור, לאו דווקא פשוט המבקר בכל קדקדי G ואורכו $\leq 2w(T)$. נחליף כל צלע $e=[xy]\in T$ בזוג צלעות מכוונות (x,y) ו-(y,x). הגרף המכוון המתקבל הוא גרף אוילר ולכן ניתן לערוך מהלך אוילר לאורכו אשר סורק כל צלע של T פעמיים ומבקר כמובן בכל הקדקדים. מחיר המסלול הזה לכן $2w(T)$.

עתה נתקן את המסלול שקיבלנו. מדי צעד נקצר אותו ונקטין את מספר הביקורים העודפים בקדקדים, עד שבסופו של דבר נגיע למעגל המילטוני המבקר בכל קדקד בדיוק פעם אחת ועדיין אורכו $\leq 2w(T)\leq 2\mathrm{opt}$.

ואכן, יהיה y קדקד שהמסלול בצורתו הנוכחית מבקר בו יותר מפעם אחת. נניח שהמסלול עובר מ-x ל-y ואז ל-z. אם נשנה אותו, ונדלג ישר מ-x ל-z, עדיין המסלול מבקר בכל הקדקדים ואורכו לא גדל כתוצאה מכך, שהרי $w(x,y)+w(y,z)\geq w(x,z)$ (אי שויון המשולש) בזה נשלמת הבנייה.

נעבור עתה לתאר בקיצור אלגוריתם קירוב טוב יותר. האלגוריתם הזה מוצא בזמן פולינומי קירוב לבעיית ה-Δ-TSP שמחירו לכל היותר פי 3/2 מן האופטימום. נעיר שאי שויון המשולש מאפשר לנו להסב כל גרף אוילריני קשיר ופורש K המשתמש רק בצלעות של G (אפשר להשתמש באותה הצלע גם פעמיים) למעגל המילטוני H במשקל $w(K)\geq w(H)$. הבנייה הראשונה מתבססת על כך שהגרף המתקבל מהכפלה של כל צלע בעץ פורש הוא גרף אוילריני וכי משקלו של MST אינו עולה על המחיר המזערי של מסילת סוכן נוסע.

נפנה לבנייה האחרת. כמקודם, יהיה T עץ פורש מינימלי. נתבונן עתה בקבוצה S של הקדקדים שיש להם דרגה אי זוגית ב-T. מספרם של הקדקדים האלה $|S|$ הוא זוגי (מדוע?) נניח ש-M זיווג מושלם של קדקדים אלה, דהיינו אוסף של צלעות זרות הפוגשות כל קדקד ב-S. נשים לב שהגרף שצלעותיו הם $T+M$ (אני רושם + ולא $\cup$ על מנת להדגיש כי אם צלע כלשהי נמצאת ב-$T\cap M$, אז היא נלקחת פעמיים) הוא אוילריני וקשיר. הרי לכל קדקד ב-$T+M$ דרגה זוגית והצלעות ב-T כבר מבטיחות קשירות ופרישה. טענתנו תוכח אם נוכל להבטיח שני דברים: א' יש זיווג מושלם של קבוצת

הקדקדים שמחירה $\leq \mathrm{opt}/2$ ב' אנו מסוגלים למצוא זיווג כזה באופן יעיל (דהיינו בזמן פולינומי). את טענה ב' לא נוכיח. נעיר רק שכבר הוצג בקורס זה אלגוריתם יעיל למציאת זיווג מושלם מקסימלי/מינימלי בגרף דו צדדי וההרחבות לגרף כללי ומשוקלל מעניינות ולא טריביאליות אולם הן אינן מכוסות בקורס זה.

הוכחת טענה א': נביט בקדקדים של S בסדר שבו הם מופיעים במעגל הסוכן הנוסע האופטימלי, נאמר שסידרם $x_1, \ldots, x_{2t}$. נתבונן בשני זיווגים

$$M_1 = \{[x_1, x_2], [x_3, x_4] \ldots, [x_{2t-1}, x_{2t}]\}$$

ו-

$$M_2 = \{[x_{2t}, x_1], [x_2, x_3] \ldots, [x_{2t-2}, x_{2t-1}]\}$$

נשים לב שבגלל אי שויון המשולש $w(M_1) + w(M_2) \leq \mathrm{opt}$ ולכן לקטן מבין השניים משקל $\frac{1}{2}\mathrm{opt}$, כפי שטענו.