

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה א' - ערכת הישרדות.

מאת נריה אור. השימוש על אחריות הקורא בלבד וייתכנו טעויות;

טורים + זהויות:

- טור הנדסי\גיאומטרי: אם ההפרש בין כל שני איברים הוא q , אזי $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.
- אם $|q| < 1$, אזי $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ (הסכום של טור גיאומטרי מתכנס, פשוט).
- וגם: $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- סדרה חשבונית, מוגדרת ע"י: $a_{i+1} - a_i = d$. אז $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot k = n \cdot 2^{n-1}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = 0$$

תוחלת, שונות:

$$E[X] = \sum_x x \cdot Pr(X = x)$$

אם $Y = g(X)$ פונקציה של X , אז $E(Y) = \sum_y y \cdot P(Y = y) = \sum_x g(x) \cdot P(X = x)$

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - E^2(X)$$

מתקיים תמיד: $Var(X) \geq 0$.

• קיימים מ"מ שאין להם תוחלת.

• קיימים מ"מ שיש להם תוחלת אבל אין להם שונות.

שונות משותפת Covariance:

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_{i,j} (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y)P(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j x_i y_j P_{ij} - \mu_X \mu_Y = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- X, Y ייקראו **בלתי מתואמים** אם $Cov(X, Y) = 0$. נשים לב שבמקרה זה, $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- אם X, Y בלתי תלויים \Leftarrow אז X, Y בלתי מתואמים. הכיוון ההפוך לא בהכרח נכון!

מקדם המתאם בין X ל-Y:

(X, Y) בעלי שונות חיוביות: $(Var(X), Var(Y) > 0)$:

$$\rho(X, Y) = Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

- $\rho(X, X) = 1$
- $\rho(X, c)$ עבור c קבוע זה לא מוגדר.
- $\rho(aX + b, cY + d) = \pm \rho(X, Y)$ עם סימן + כאשר a, c שווי-סימן, וסימן - כאשר a, c שוני סימן.
- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ כלומר $\rho^2(X, Y) \leq 1$.

זהויות של תוחלת, שונות, שונות משותפת:

- $E(aX + b) = aE(X) + b$ •
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ •
- $E[b + \sum_{i=1}^n a_i X_i] = b + \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$ •
- ישירות מהגדרת השונות: $E(X^2) = Var(X) + E^2(X)$ •
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ ונשים לב שזה אומר גם ש- $Var(X + c) = Var(X)$ •
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$ •
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$ •
- $Var[b + \sum_{i=1}^n a_i X_i] = Var[\sum_{i=1}^n a_i X_i] = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i) + 2 \sum_{i < j} a_i a_j Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j Cov(X_i, X_j)$ •
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$ •
- $Cov(X, X) = Var(X)$ •
- $Cov(aX + b, cY + d) = ac \cdot Cov(X, Y)$ •
- $Cov(c, Y) = Cov(Y, c) = 0$ עבור c קבוע. •
- $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$ •

התפלגויות:

תיאור	פי"מ: $m_X(t)$	$Var[X]$	$E[X]$	$P(X = k)$	
		$\frac{N^2-1}{12}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{1}{N}$	$X \sim U(N)$
	$e^{-\lambda(1-e^t)}$	λ	λ	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$X \sim Pois(\lambda)$
	$(pe^t + 1 - p)^n$	$np(1-p)$	np	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$X \sim B(n, p)$
	$p \frac{e^t}{1-qe^t}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$(1-p)^{k-1} p$	$X \sim G(p)$
יש כד וכו N כדורים. r מהם "מיוחדים", $N - r$ לא מיוחדים. מוציאים מהכד באופן מקרי בזה אחר זה וללא החזרה n כדורים. מה ההס' שקיבלנו k מיוחדים?		$\frac{n \cdot \frac{r}{N} \cdot (1 - \frac{r}{N}) \cdot (N-n)}{N-1}$	$\frac{nr}{N}$	$\frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$X \sim HG(N, D, n)$
ניסויי ברנולי, עד לקבלת ההצלחה ה- r . זה כמו סכום של m ניאומטריים (בערך).		$r \cdot \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{r}{p}$	$\binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$	$(r \in \mathbb{N}) X \sim NB(r, p)$

זהויות על $Pois(\lambda)$:

- אם $X \sim Pois(\lambda_1)$, $Y \sim Pois(\lambda_2)$ והם ב"ת, אז $X + Y \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$ •
- באותן הנחות, אם נתון לנו ש- $X + Y = k$, אז $X | (X + Y) \sim Bin(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, k)$ •
- אם $X \sim Pois(\lambda)$ אז $E(X^3) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$ •
- אם $X \sim Pois(\lambda)$ אז $P(X \text{ is even}) = \frac{(1+e^{-2\lambda})}{2}$ •

זהויות על התפלגות גיאומטרית:

- אם $X \sim G(p)$, $Y \sim G(p)$ (ונשים לב שהם גם שווי התפלגות), אז $X + Y \sim NB(2, p)$ •
- באותן הנחות, אם נתון לנו ש- $X + Y = k$, אז $X | (X + Y) \sim U(k - 1)$ •
- אם $X \sim G(p)$ אז $P(X > k) = q^k$ ו- $P(X \geq k) = q^{k-1}$ •
- אם $X_1, \dots, X_n \sim G(p)$ (עם אותו p), אז $Y = \min(X_1, \dots, X_n) \sim G(1 - q^n)$ •
- אם $X_1 \sim G(p_1)$, $X_2 \sim G(p_2)$ ב"ת, אז $Y = \max(X_1, X_2)$ וגם $E(Y) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{1 - q_1 q_2}$ •

• אם $X \sim G(p)$ אז $P(X \text{ even}) = \frac{q}{1+q}$, $P(X \text{ odd}) = \frac{1}{1+q}$.

• אם שני אנשים מטילים כ"א מטבע שהסתברותו לראש p עד לקבלת ראש לראשונה, ההסתברות שאחד מהם סיים לפני השני היא $\frac{q}{1+q}$. ("ראובן לפני שמעון, או שמעון לפני ראובן" - אין הבדל. כמו כן נשים לב ששניהם מטילים מטבע בעל אותו p , אחרת הנוסחה הזו לא נכונה).

- ההסתברות ששניהם יסיימו יחדיו (באותן ההנחות) היא $\frac{p}{1+q}$.

א"ש צ'בישב:

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

א"ש מרקוב (עבור מ"מ אי-שלילי):

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

תיקנון של מ"מ:

X מ"מ, $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = Var(X)$, סטיית התקן. **ונדרוש** $Var(X) > 0$. אז התיקנון של X : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ומתקיים $E(Z) = 0$, $Var(Z) = 1$.

תחזיות ועלויות השגיאה

• מגרילים את המ"מ X , הקנס הוא ריבוע השגיאה. ההימור שלנו הוא $\hat{x} = m$. אז הקנס יהיה $(X - m)^2$.
ה- m שימצא את תוחלת הקנס (שהיא $E[(X - m)^2]$) זהו $m = E(X)$. כמה נשלם, זה בדיוק $Var(X)$ (לפי הגדרת ה- Var , זוהי תוחלת הקנס עבור $m = E(X)$).

• עבור שני מ"מ X, Y , אם ידוע לנו Y אז נבחר את $E(X|Y = y)$, ואז נשלם $Var(X|Y = y)$.
הוכחנו את הזהות $Var(X) = Var[E(X|Y)] + E[Var(X|Y)]$ כאשר $Var(X)$ היא תוחלת התשלום ממקודם (ללא האינפורמציה) ו- $E[Var(X|Y)]$ היא תוחלת התשלום עכשיו (עם האינפורמציה לגבי מהו Y). ולכן **החסכון** עם האינפורמציה החדשה הוא בדיוק $Var[E(X|Y)] = Var(X) - E[Var(X|Y)]$. **החסכון היחסי:** $\frac{Var(X) - E[Var(X|Y)]}{Var(X)}$.

• אם רוצים להעריך את X לפי Y , אז הערכה גסה (**אומדן ליניארי**) למהו X היא: $\hat{x} = aY + b$, כאשר $a = \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}$, $b = E(X) - aE(Y)$.

אז הקנס יהיה $E[(X - aY - b)^2]$, והרווח $Var(X) - E[(X - aY - b)^2]$. **החסכון היחסי:** $\frac{Var(X) - E[(X - aY - b)^2]}{Var(X)}$.
ונשים לב שה**חסכון היחסי במקרה זה (הליניארי) הוא שווה ל-** $\rho^2(X, Y)$.

מומנטים ופ"מ:

X מ"מ, $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$. אם קיימת התוחלת: $E[(X - a)^r]$, כלומר הטור $\sum_x (x - a)^r P(X = x)$ מתכנס בהחלט, אז זהו המומנט מסדר r של X סביב a .

• המומנט מסדר 1 של X סביב 0 הוא $E(X)$. המומנט מסדר 2 של X סביב μ הוא השונות.

• **פונקציה יוצרת מומנטים (פ"מ = mgf):**

$m_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} P(X = x)$. זוהי פונקציה של t . מתקיים $m_X(0) = 1$ תמיד. פ"מ קיימת אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|t| < \delta$ הטור $m_X(t)$ מתכנס בהחלט. אם קיים מומנט מסדר r כלשהו של X סביב a כלשהו, אז קיימים כל המומנטים מסדר $r \geq$.

• אם גוזרים: $\dot{m}_X(t) = \frac{d}{dt} m_X(t)$ אז $\dot{m}_X(0) = E(X)$, $\ddot{m}_X(0) = E(X^2)$ וכן הלאה: $\frac{d^r}{dt^r} m_X(t)|_{t=0} = E(X^r)$.

• **פ"מ של פונקציה ליניארית של מ"מ:** אם X מ"מ ויש לו פ"מ $m_X(t)$, ואם $Y = aX + b$, אז יש ל- Y פ"מ: $m_Y(t) = e^{tb} m_X(at)$.

• אם X, Y ב"ת, אז $m_{X+Y}(t) = m_X(t) \cdot m_Y(t)$.

- מומנטים משותפים: המומנט מסדר t של X סביב a ומסדר s של Y סביב b הוא:

$$E[(X - a)^r (Y - b)^s] = \sum_i \sum_j (x_i - a)^r (y_j - b)^s P_{ij}$$

נשים לב: מומנט מסדר 1 של X סביב μ_X ומסדר 1 של Y סביב μ_Y הוא בדיוק $Cov(X, Y)$.

מ"מ דו-מימדי:

$x \backslash y$	y_1	y_2	y_3	...
x_1				
x_2				
x_3				
\vdots				

ובתא ה- k, j שמים את $P_{k,j} = P(X = x_k, Y = y_j)$ בונים טבלה:

הסכום של שורה $k: P(X = x_k, Y = y_j) = P(X = x_k)$. הסכום של עמודה $j: P(X = x_k, Y = y_j) = P(Y = y_j)$. הסכום של כל הטבלה: 1.

- מ"מ בלתי תלויים: X, Y הם ב"ת אם $P(X = x_k, Y = y_j) = P(X = x_k) \cdot P(Y = y_j)$ $\forall k, j$.

- התפלגות מותנה: נתונים מ"מ X, Y , ונתון שקרה $Y = y_j$ אז $P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$

משפט:

$$E[E(X|Y)] = \sum_k E(X|Y = k) \cdot P(Y = k) = E(X)$$

- אם X, Y בלתי תלויים, אז $E(X|Y = y_j) = E(X)$ $\forall j$.

$$Var(X|Y) = E(X^2|Y) - E^2(X|Y)$$

- נוסחת הקונבולוציה: יהיו X, Y מ"מ ב"ת. אז מתקיים:

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k P(X = i \cap Y = k - i) = \sum_{i=0}^k P(X = i)P(Y = k - i)$$

הסתברות מותנה, Bayes, מאורעות ב"ת, נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \text{ : Bayes}$$

- מאורעות בלתי תלויים: A, B מאורעות, ייקראו בלתי תלויים אם $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. נשים לב: בלתי תלויים \neq זרים.

- נוסחת ההסתברות השלמה: אם B_1, \dots, B_n מאורעות זרים בזוגות, ובנוסף $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \text{ אז } P(B_i) > 0, i \text{ לכל ואם } P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$$

בסיס - אקסיומות וכו':

מרחב הסתברות: $\langle \Omega, \mathcal{B}, P \rangle$ כאשר Ω מרחב המדגם, \mathcal{B} שדה המאורעות, P פונקציית ההסתברות.

$$\emptyset, \Omega \in \mathcal{B}$$

$$\text{אם } A \in \mathcal{B} \text{ אז } \bar{A} \in \mathcal{B}$$

- אם A, B מאורעות אז גם $A \cup B$ וגם $A \cap B$ מאורעות.

תכונות של פונק' הסתברות:

$$P(A) \geq 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

- אדיטיביות בת-מניה: אם A_1, A_2, \dots זרים בזוגות, כלומר $A_i \cap A_j = \emptyset$ $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ אז $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

מסקנות שנובעות מהנ"ל:

$$P(\emptyset) = 0 \bullet$$

• אדיטיביות סופית: אם A_1, \dots, A_n זרים בזוגות, אז $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \bullet$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \bullet$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \bullet$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \bullet$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \bullet$$

• אם $B \subseteq A$ אז $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$

זהויות של קבוצות:

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	$B \setminus A = B \cap \bar{A}$
$A \cup (B \setminus A) = A \cup B$	$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$	$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$