אלגברה ליניארית 1

סוכם ע"י נריה אור

ע"פ הרצאות של אלכס לובוצקי

(אין המרצה קשור לסיכום זה בשום דרך או ערב לנכונותו!)

זהו סיכום לא מלא (חסרות כמה טענות ודוגמאות), ואין ערבות לנכונות הדברים שבו - ייתכנו טעויות בסיכום.

גירסא סופית-ב' - לא בהכרח שלמה. מה לעשות, המבחן הגיע.

תוכן עניינים

1 חבורות, שדות 3

1.1 מציין של שדה 4

2 מרחבים וקטוריים 5

2.1 טענות חשובות 6

2.2 צירופים ליניאריים 8

2.3 בסיסים 9

3 טרנספורמציות ליניאריות 13

3.1 מטריצות 17

4 מערכות משוואות 18

4.1 ייצוג ע"י טרנספורמציות ליניאריות 20

4.2 ישריה 22

5 מרחב ההעתקות הליניאריות $Hom(V,W)$ 24

6 המרחב הדואלי 27

6.1 הבסיס הדואלי 30

6.2 מאפסים 31

7 הדטרמיננטה 34

7.1 תמורות 34

7.2 פונק' מולטי ליניאריות 35

7.3 השפעת פעולות אלמנטריות על: $\Phi : M_n(F) \to F$ מולטי ליניארית + חילופית 36

7.4 מסקנות לגבי מט' הפיכות 37

7.5 הדטרמיננטה עצמה 38

1 חבורות, שדות

הגדרה 1.1 חבורה.

חבורה זו קבוצה Gעם פעולה בינארית עליה.

כלומר, לכל $a,b\in G$ מוגדר איבר יחיד $a+b\in G$. וקיים ב־G איבר מיוחד שנקרא לו 0 ומתקיים:

1. **אסוציאטיביות** (קיבוץ): $\forall a,b,c\in G$ מתקיים: $(a+b)+c=a+(b+c)$
2. **איבר יחידה \ איבר ניטרלי:** $\forall a\in G$ מתקיים: $a+0=0+a=a$
3. **איבר נגדי\הופכי:** $\forall a\in G$ קיים איבר $a'\in G$ כך ש: $a+a'=a'+a=0$
4. חבורה $(G,+,0)$ נקראת חבורה **קומוטטיבית****חילופית****אבלית** אם $\forall a,b\in G$ מתקיים: $a+b=b+a$.

הגדרה 1.2 שדה.

שדה זו מערכת $(F,+,\cdot,0,1)$ כך ש: F קבוצה, $+,\cdot$ הן פעולות בינריות על F, $0,1$ הם איברים מסוימים של F ($0\neq 1$) כך ש:

1. $(F,+,0)$ חבורה חילופית
2. $(F\backslash\{0\},\cdot,1)$ חבורה חילופית
3. **חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות):** $\forall a,b,c\in F$ מתקיים: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

טענה 1.3 אם $(G,+,0)$ חבורה, אז האיבר הנגדי הוא יחיד.

הוכחה: יהיו $a',a''\in G$ כך ש־$a+a''=0$ וגם $a+a'=0$ אזי:

$$a'=a'+0=a'+(a+a'')=(a'+a)+a''=0+a''=a'' \qquad \blacksquare$$

טענה 1.4 לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים: $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

הוכחה: $a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$

נחבר בשני הצדדים את $-(a\cdot 0)$

$$0=(-(a\cdot 0)+a\cdot 0)+a\cdot 0$$

$$0=a\cdot 0 \qquad \blacksquare$$

1.1 מציין של שדה

הגדרה 1.5 $\mathbb{F}$שדה, $\mathbb{Z}$ קב' המספרים השלמים. נגדיר:

$$n.a = \begin{cases} a + ... + a \text{ (n times)} & , n > 0 \\ 0_{\mathbb{F}} & , n = 0_{\mathbb{Z}} \\ -_{\mathbb{F}}((-_{\mathbb{Z}}n).a) & , n < 0 \end{cases}$$

טענה 1.6 אם $0 < n \in \mathbb{Z}$, ואם $n = k \cdot l$ אזי $n.1 = (k \cdot l).1 = (k.1) \cdot (l.1)$

הוכחה:

$$(k.1) \cdot (l.1) = \quad \underbrace{(1 + ... + 1)\cdot}_{\text{פעמים } k} \quad \underbrace{(1 + ... + 1) =}_{\text{פעמים } l} \quad \underbrace{(1 + ... + 1)}_{\text{פעמים } k} \quad \cdot 1 + ... + \quad \underbrace{(1 + ... + 1) \cdot 1 =}_{\text{פעמים} k} \quad (k \cdot l).1 = n.1$$

הגדרה 1.7 יהא $\mathbb{F}$ שדה. נגדיר את **המציין של שדה:**

מסתכלים ב־ $\dfrac{\boxed{1, 1+1, 1+1+1, ...}}{\boxed{1.1\ ,\ 2.1\ ,\ 3.1\ ,\ ...}}$.

אם יש שני איברים במקומות שונים בסדרה: נאמר $k.1$ ו־$l.1$,

כאשר $k, l \in \mathbb{N}$ ונניח $0 < k < l$ כך ש־$k.1 = l.1$,

אזי: $(l - k).1 = 0$ כלומר יש מס' חיובי שלם $r = l - k$ כך ש־$r.1 = 0$.

לשלם החיובי הקטן ביותר המקיים זאת קוראים המציין של השדה.

אם אין כזה, נאמר שהמציין של השדה הוא 0.

סימון: $char(\mathbb{F}) = r$.

משפט 1.8 אם $\mathbb{F}$שדה אזי $char(\mathbb{F})$ הוא או 0 או מספר ראשוני.

הוכחה: הוכחה: אם $char(\mathbb{F}) = 0$ גמרנו.

אם לא, קיים n ראשון כך ש־$n.1_F = 0$.

$n = char(F)$ וצ"ל ש־n ראשוני.

נניח שלא, אזי $n = k \cdot l$ כאשר $k, l < n$.

ואז, $0 = n.1_F = (k \cdot l).1 = (k.1_F) \cdot (l.1_F)$ (נעזרנו בטענה הקודמת).

וכעת, אם מכפלת שני איברים בשדה היא 0, אז לפחות אחד מהם הוא 0.

ולכן או $k.1 = 0$ או $l.1 = 0$ וזו **סתירה** כי n הוא הקטן ביותר! ■

2 מרחבים וקטוריים

הגדרה 2.1 מרחב וקטורי.

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$: קבוצה V עם איבר 0 ופעולת חיבור +,

וכן לכל $c \in \mathbb{F}$ ו־$\alpha \in V$ מוגדר: $c\alpha \in V$ יחיד ומתקיים:

לכל $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $c, d \in \mathbb{F}$:

1. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
2. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
3. לכל $\alpha \in V$ קיים $-\alpha \in V$ כך ש־$\alpha + (-\alpha) = 0$
4. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(כלומר ־ חבורה אבלית ביחס לחיבור ו־0).

5. $1\alpha = \alpha$ ($1 \in \mathbb{F}$)
6. $c(d\alpha) = (cd)\alpha$
7. $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$
8. $(c + d)\alpha = c\alpha + d\alpha$

הגדרה 2.2 תת־מרחב וקטורי (תמ"ו).

$\mathbb{F}$ שדה, V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $U \subseteq V$ תת קבוצה תקרא תת־מרחב אם:

1. $U \neq \emptyset$
2. לכל $\alpha, \beta \in U$ גם $\alpha + \beta \in U$
3. לכל $c \in \mathbb{F}$ ולכל $\alpha \in U$ גם $c\alpha \in U$

כלומר קבוצה לא ריקה, סגורה לחיבור ולכפל בסקלר.

הערה: תת מרחב הוא עצמו מ"ו.

2.1 טענות חשובות

טענה 2.3 יהיו $V=F^n$, $b_1,...,b_n\in F$ סקלרים.

וגם: $U=\{(x_1,...,x_n)\in F^n|b_1x_1+...+b_nx_n=0\}$,

אזי U הוא תת־מרחב. (זהו **מרחב הפתרונות** של משוואה הומוגנית בודדת).

הוכחה: נתבונן:

1) $(0,...,0)\in U$ ולכן $U\neq\emptyset$

2) נניח $(y_1,...,y_n),(x_1,..,x_n)\in U$ ונוכיח שסכומם גם ב־U:

$$b_1(x_1+x_2)+...+b_n(x_n+y_n)=(b_1x_1+...+b_nx_n)+(b_1y_1+...+b_ny_n)=0+0=0$$

3) אם $(x_1,...,x_n)\in U$ ו־$c\in\mathbb{F}$ נראה שגם $c(x_1,...,x_n)\in U$:

ונבדוק: $c(x_1,...,x_n)=(cx_1,...,cx_n)$

$$b_1(cx_1)+...+b_n(cx_n)=c(b_1x_1+...+b_nx_n)=c\cdot 0=0$$ ■

טענה 2.4 חיתוך של תת־מרחבים הוא תת־מרחב.

V מ"ו מעל F, $\{U_t|t\in I\}$ אוסף של תתי מרחבים של V. (I קבוצת אינדקס).

אזי: $W=\bigcap_{t\in I}U_t$ הוא תת־מרחב.

הוכחה: 1) $W\neq\emptyset$ כי $\vec{0}\in U_t$ לכל t ולכן הוא גם בחיתוך של כולם.

2) בנוסף, נניח $\alpha,\beta\in W$ ונוכיח $\alpha+\beta\in W$:

מכיוון ש$\alpha,\beta\in W$ ז"א $\alpha,\beta\in U_t$ לכל t, ומאחר שכל U_t הוא תת מרחב,

אזי גם $\alpha+\beta\in U_t$ לכל t ולכן נמצאים בכל החיתוכים, דהיינו ב־W.

3) וגם, אם $\alpha\in W$ ו־$c\in\mathbb{F}$ אז נוכיח ש־ $c\alpha\in W$:

מאותה סיבה כמו ההוכחה לחיבור: כל תמ"ו סגור לכפל בסקלר ולכן זה נובע. ■

הגדרה 2.5 סכום של תתי מרחבים

אם V מ"ו מעל שדה F, $U_1, U_2 \leq F$ תתי מרחבים, נגדיר:

$$U_1 + U_2 = \{\alpha + \beta | \alpha \in U_1, \beta \in U_2\}$$

הערה: גם U_1 וגם U_2 נמצאים ב־$U_1 + U_2$.

כי אם $\alpha \in U_1$ אזי $\alpha = \alpha + 0 \in U_1 + U_2$ וכנ"ל הפוך.

זה מפני ש־$0 \in U$ לכל תמ"ו U.

טענה 2.6 $U_1 + U_2$ הוא תת־מרחב, וזה התמ"ו הקטן ביותר המכיל גם את U_1 וגם את U_2.

הוכחה: $U_1 + U_2$ הוא תמ"ו כי:

1) $0 + 0 = 0 \in U_1 + U_2$ ולכן $U_1 + U_2 \neq \emptyset$.

2) אם $\alpha + \beta \in U_1 + U_2$, $\alpha' + \beta' \in U_1 + U_2$ כאשר $\alpha, \alpha' \in U_1$, $\beta, \beta' \in U_2$

אזי $(\alpha + \beta) + (\alpha' + \beta') = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') \in U_1 + U_2$,

כי U_1, U_2 תמ"ו־ים ולכן סגורים לחיבור.

3) אם $\alpha + \beta \in U_1 + U_2$, $\alpha \in U_1$, $\beta \in U_2$ ו־$c \in F$ אזי

$$c(\alpha + \beta) = (c\alpha) + (c\beta) \in U_1 + U_2$$

כי U_1, U_2 תמ"ו־ים ולכן סגורים לכפל בסקלר.

ולכן $U_1 + U_2$ **תת מרחב.**

נוכיח שהוא התמ"ו הקטן ביותר המכיל את U_1 ואת U_2:

נניח W תמ"ו המכיל את U_1 ואת U_2. אזי, לכל $\alpha \in U_1$, $\beta \in U_2$,

גם $\alpha \in W$ וגם $\beta \in W$.

מכיוון ש־W תמ"ו, הוא סגור לחיבור ואז גם $\alpha + \beta \in W$,

ולכל כל איבר של $U_1 + U_2$ נמצא ב־W. ■

2.2 צירופים ליניאריים

הגדרה 2.7 צירוף ליניארי

F שדה, Vמ"ו מעל F, $A=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}\subseteq V$.

נאמר שוקטור β הוא צירוף ליניארי (להלן: צ"ל) של A אם

קיימים $a_1,...,a_n\in F$ סקלרים, כך ש־ $\beta=a_1\alpha_1+...+a_n\alpha_n$.

נסמן: אוסף כל הצ"ל של איברי A = $span(A)$, ייקרא **המרחב הנפרש ע"י A.**

טענה 2.8 $span(A)$ **הוא תת־מרחב של** V

הוכחה: נראה שמתקיימות שלושת הדרישות:

1) $0=0\alpha_1+...+0\alpha_n\in span(A)$

2) אם: $a_1\alpha_1+...+a_n\alpha_n\in span(A)$, $b_1\alpha_1+...+b_n\alpha_n\in span(A)$,

אזי $(a_1+b_1)\alpha_1+...+(a_n+b_n)\alpha_n\in span(A)$

3) אם: $a_1\alpha_1+...+a_n\alpha_n\in span(A)$, אזי

$c(a_1\alpha_1+...+a_n\alpha_n)=(ca_1)\alpha_1+...+(ca_n)\alpha_n\in span(A),$ ■

משפט 2.9 תנאים לתלות ליניארית. (ללא הוכחה...)

יהי F שדה, V מ"ו, $A=\{\alpha_1,...,\alpha_k\}\subseteq V$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) קיימים $a_1,...,a_k\in F$, **לא כולם 0**, כך ש־$a_1\alpha_1+...+a_k\alpha_k=0$.

2) אחד מה־α_i־ים הוא צ"ל של האחרים.

3) קיים i ,$1\le i\le k$ כך ש־α_i הוא צ"ל של $\alpha_1,...,\alpha_{i-1}$,

כלומר אחד מהוקטורים הוא צ"ל של קודמיו.

(ללא הוכחה, אין זמן!!!)

הגדרה 2.10 נאמר ש־$A=\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$ **תלויה ליניארית,**

אם מקיימת את אחד (ולכן את כל) התנאים הנ"ל.

להלן: תלויה ליניארית = ת"ל, בלתי תלויה ליניארית = בת"ל.

מסקנה 2.11 $A=\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$ היא בת"ל $\Leftrightarrow$ מקיימת ש:

אם $a_1\alpha_1+...+a_k\alpha_k=0$ אזי $a_1=...=a_k=0$.

מסקנה 2.12 קבוצה המכילה את הוקטור $\vec{0}$ היא תמיד תלויה ליניארית.

2.3 בסיסים

הגדרה 2.13 בסיס

F שדה, V מ"ו, $A = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subseteq V$ תיקרא בסיס ל־V אם:

1) A בת"ל

2) $span(A) = V$

משפט 2.14 כתיבה באופן יחיד של וקטור ע"י הבסיס:

$V \supseteq \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} = A$ אזי A בסיס של V אם"ם

כל וקטור $\beta \in V$ ניתן לכתיבה באופן יחיד: $\beta = c_1\alpha_1 + ... + c_n\alpha_n$.

הוכחה: כיוון ראשון: נניח ש־A בסיס. יהא $\beta \in V$.

מאחר ש־A פורשת, הרי ניתן לכתוב את β כ־$\beta = c_1\alpha_1 + ... + c_n\alpha_n$.

נניח שגם מתקיים $\beta = c_1'\alpha_1 + ... + c_n'\alpha_n$ ($c_i, c_i' \in F$).

אז ניקח: $\beta - \beta = \vec{0} = (c_1 - c_1')\alpha_1 + ... + (c_n - c_n')\alpha_n$.

ומכיוון ש־A בת"ל, אזי $c_i - c_i' = 0$ לכל i, כלומר $c_i = c_i'$ לכל i.

כיוון שני: נניח שכל וקטור $\beta \in V$ ניתן לכתיבה באופן יחיד: $\beta = c_1\alpha_1 + ... + c_n\alpha_n$.

מיידית נובע ש־$V = span(A)$ כלומר A פורשת.

כמו כן נובע שאת $\vec{0}$ ניתן לכתוב כצ"ל באופן יחיד והוא: $\vec{0} = 0\alpha_1 + ... + 0\alpha_n$,

וזה בדיוק אומר שהם בת"ל. ■

משפט 2.15 למת ההחלפה

נניח ש־ $B = \{\beta_1, ..., \beta_{r-1}, \beta_r\}$ קב' וקטורים **בת"ל** ב־V.

ונניח ש־ $A = \{\alpha_1, ..., \alpha_s\}$ קב' וקטורים **כלשהי** ב־V.

$U = sp\{\beta_1, ..., \beta_{r-1}, \alpha_1, ..., \alpha_s\}$ (נשים לב: ללא β_r).

<u>**ונניח ש־**$\beta_r \in U$</u> כלומר הוא צ"ל של איברי U. (חשוב לשים לב!!)

אזי, קיים $1 \leq j \leq s$ כך ש־ $U = sp\{\beta_1, ..., \beta_{r-1}, \beta_r, \alpha_1, ..., \hat{\alpha}_j, ..., \alpha_s\}$

(כאשר $\hat{\alpha}_j$ מסמל את הקבוצה, ללא α_j).

הוכחה: מהנתון ש־$\beta_r \in U$ נובע שקיימים סקלרים b_i, a_i כך ש־

$\beta_r = b_1\beta_1 + ... + b_{r-1}\beta_{r-1} + a_1\alpha_1 + ... + a_s\alpha_s$. ★

לא ייתכן שכל ה־a_i־ים הם 0, כי אז β_r היה צ"ל של $\beta_1, ..., \beta_{r-1}$ בניגוד להנחה.

יהא $s \geq j \geq 1$ כך ש $a_j \neq 0$.

אז נכתוב את ★ כך:

$$-a_j\alpha_j = b_1\beta_1 + ... + b_{r-1}\beta_{r-1} - \beta_r + a_1\alpha_1 + ... + a_{j-1}\alpha_{j-1} + a_{j+1}\alpha_{j+1} + ... + a_s\alpha_s$$

וכעת קיים הופכי ל־$-a_j$ כי אמרנו $a_j \neq 0$, אז נכפיל בו:

$$\alpha_j = (-a_j^{-1})b_1\beta_1 + ... + ...\text{blah blah blah}... + ... + (-a_j^{-1})a_s\alpha_s$$

וקיבלנו: $\alpha_j \in sp\{\beta_1, ..., \beta_{r-1}, \beta_r, \alpha_1, ..., \hat{\alpha}_j, ..., \alpha_s\} = W$.

אם כך,

מתקיים $\beta_1, ..., \beta_{r-1}, \alpha_1, ..., \alpha_j, ...\alpha_s \in W$ **ולכן** $U \subseteq W$.

כמו כן,

ניזכר ש־$U = sp\{\beta_1, ..., \beta_{r-1}, \alpha_1, ..., \alpha_s\}$,

ומכך שהנחנו ש־$b_r \in U$, **אזי:**

$$\beta_1, ..., \beta_{r-1}, \beta_r, \alpha_1, ..., \hat{\alpha}_j, ...\alpha_n \in U$$

ולכן $W \subseteq U$.

ובסה"כ $U = W$. ■

טענה 2.16 (מס' האיברים בקבוצה בת"ל ב־V קטן או שווה למס' האיברים בקבוצה הפורשת את V).

אם $A = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\} \subseteq V$ כך ש־$V = sp(A)$ (כלומר A פורשת),

וגם: $B = \{\beta_1, ..., \beta_k\}$ קב' בת"ל ב־V,

אזי $k \leq m$.

הוכחה: נסמן $r=1$, $B'=\{\beta_1\}$. זו קבוצה בת"ל. ואז $\{\beta_1,...,\beta_{r-1}\}=\emptyset$.

נסמן: $U=sp\{\alpha_1,...,\alpha_m\}=V$.

לפי למת ההחלפה, קיים $1\le j\le m$ כך ש־$V=U=sp\{\beta_1,\alpha_1,...,\hat{\alpha}_j,...,\alpha_m\}$.

עכשיו נסמן $B'=\{\beta_1,\beta_2\}$, $A=\{\alpha_1,...,\hat{\alpha}_j,..,\alpha_m\}$.

כעת נשתמש בלמת ההחלפה עם $r=2$:

נסמן $U=sp\{\beta_1,\alpha_1,...,\hat{\alpha}_j,...,\alpha_m\}=V$ (זה נכון מהצעד הקודם).

ולכן $\beta_2\in U=V$ ולכן שוב עפ"י למת ההחלפה קיים $1\le j'\le m$, $j\ne j'$

כך ש: $sp\{\beta_1,\beta_2,\alpha_1,...,\hat{\alpha}_j,...,\hat{\alpha}_{j'},...,\alpha_m\}=U=V$.

בצעד הבא נסתכל ב־$sp\{\beta_1,\beta_2,\alpha_1,...,\hat{\alpha}_j,...,\hat{\alpha}_{j'},...,\alpha_m\}=V$,

וכו', **ואחרי** k **צעדים , נקבל קבוצה פורשת:**

$\beta_1,...,\beta_k,\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_t}$.

ובפרט, כש־ $k\le m$. ■

משפט 2.17 אם $A=\{\alpha_1,...,\alpha_m\}$, $B=\{\beta_1,...,\beta_k\}$ הם 2 בסיסים של מ"ו V מעל F,

אזי $k=m$.

הוכחה: לפי הטענה הקודמת, $k\le m$ וגם $m\le k$ ולכן $k=m$. ■

הגדרה 2.18 מימד

הגודל המשותף של כל הבסיסים (הסופיים, אם קיימים) נקרא

המימד של V מעל F, ויסומן: $dim_{\mathbb{F}}V=dimV$.

אם אין בסיס סופי, נאמר ש־$dimV=\infty$.

משפט 2.19 משפט המימדים I

V מ"ו ממימד סופי, $U,W\subseteq V$ תת־מרחבים, אזי:

$$dim(U+W)=dim(U)+dim(W)-dim(U\cap W)$$

(לאלו מאיתנו שלומדים דיסקרטית: זהו עיקרון ההכלה וההדחה!)

הוכחה: נסמן: $Y = U \cap W$. יהא $\alpha_1, ..., \alpha_r$ בסיס ל־Y.

$\alpha_1, ..., \alpha_r$היא קבוצה בת"ל ב־U ולכן ניתן להמשיכה **לבסיס של** U: $\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, .., \beta_l$.

באותו אופן נמשיך ונקבל **בסיס ל־**W: $\alpha_1, ..., \alpha_r, \gamma_1, .., \gamma_k$.

ולכן: $dimU = r + l$, $dimW = r + k$.

נטען ש: $\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, .., \beta_l, \gamma_1, ..., \gamma_k$ בסיס של $U + W$.

ואז יינבע: $dim(U + W) = r + l + k$ ויתקיים:

$dimU + dimW - dim(U \cap W) = (r + l) + (r + k) - (r) = r + l + k$.

נוכיח את הטענה:

פרישה: יהא $\gamma \in U + W$, אזי $\gamma = \alpha + \beta$ כאשר $\alpha \in U$, $\beta \in W$.

ולכן קיימים סקלרים ב־F: $c_1, ..., c_k, b_1, ..., b_l, a_1, ..., a_r, a'_1, ..., a'_r$ כך ש:

$$\alpha = a_1\alpha_1 + ... + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + ... + b_l\beta_l$$

$\beta = a'_1\alpha_1 + ... + a'_r\alpha_r + c_1\gamma_1 + ... + c_k\gamma_k$ ולכן:

$$\gamma = \alpha + \beta = (a_1 + a'_1)\alpha_1 + ... + (a_r + a'_r)\alpha_r + b_1\beta_1 + ... + b_l\beta_l + c_1\gamma_1 + ... + c_k\gamma$$

וזה מוכיח פרישה.

אי תלות:

נניח ש־ $a_1\alpha_1 + ... + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + ... + b_l\beta_l + c_1\gamma_1 + ... + c_k\gamma = \vec{0}$.

צריך להוכיח שכל המקדמים הם 0. נעביר אגף: (אפשר כי זה שדה...)

$$a_1\alpha_1 + ... + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + ... + b_l\beta_l = -c_1\gamma_1 - ... - c_k\gamma_k$$

ונשים לב: **האגף השמאלי שייך ל־**U **והימני שייך ל־**W**.**

ולכן, $\mathbf{-c_1\gamma_1 - ... - c_k\gamma_k \in U \cap W}$.

ולכן נייצג אותו עם איברי הבסיס של $U \cap W$:

$$-c_1\gamma_1 - ... - c_k\gamma_k = a'_1\alpha_1 + ... + a'_r\alpha_r$$

כלומר: $0 = a'_1\alpha_1 + ... + a'_r\alpha_r + c_1\gamma_1 + ... + c_k\gamma_k$

אבל הקבוצה $\{\alpha_1, ..., \alpha_r, \gamma_1, .., \gamma_k\}$ בת"ל כי היא **בסיס ל־**W, ולכן

$a'_1 = ... = a'_r = \mathbf{c_1} = ... = \mathbf{c_k} = \mathbf{0}$.

נחזור למשוואה מקודם ונציב זאת:

$a_1\alpha_1 + ... + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + ... + b_l\beta_l = \vec{0}$

אבל $\{\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, .., \beta_l\}$ בסיס ל־U, ולכן בת"ל, ולכן

$a_1 = ... = a_r = b_1 = ... = b_l = 0$ וסיימנו! ■

3 טרנספורמציות ליניאריות

או: העתקות ליניאריות. להלן: ט"ל או ה"ל.

הגדרה 3.1 טרנספורמציה ליניארית

F שדה, V, W מ"ו מעל F.

העתקה: $T : V \to W$ תיקרא טרנספורמציה ליניארית אם מקיימת:

1) לכל $\alpha, \beta \in V$: $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$

2) לכל $c \in F$, $\alpha \in V$: $T(c\alpha) = cT(\alpha)$

תנאי שקול, הוא אם לכל $\alpha, \beta \in V$, $a, b \in F$:

$T(a\alpha + b\beta) = aT(\alpha) + bT(\beta)$

טענה 3.2 אם $T : V \to W$ ט"ל אזי $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.

הוכחה: $T(\vec{0}_v) = T(\vec{0}_v + \vec{0}_v) = T(\vec{0}_v) + T(\vec{0}_v)$

ולכן $\vec{0}_W = T(\vec{0}_v)$ ■

משפט 3.3 שתי ט"ל שוות אם הן שוות על איברי בסיס

נניח ש־$T, S : V \to W$ שתי ט"ל. ונניח: $A = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ בסיס ל־V.

ונניח שלכל $i = 1...n$, $T(\alpha_i) = S(\alpha_i)$.

אזי, $S = T$ כלומר לכל $\beta \in V$, $S(\beta) = T(\beta)$.

הוכחה: יהא $\beta \in V$ אז קיימים $b_1, ..., b_n \in F$ כך ש־ $\beta = b_1\alpha_1 + ... + b_n\alpha_n$. ואז:

$$S(\beta) = S(b_1\alpha_1 + ... + b_n\alpha_n) = b_1S(\alpha_1) + ... + b_nS(\alpha_n)$$

$$= b_1T(\alpha_1) + ... + b_nT(\alpha_n) = T(b_1\alpha_1 + ... + b_n\alpha_n) = T(\beta) \quad \blacksquare$$

טענה 3.4 (ניתן להגדיר ט"ל יחידה כך ש־$T(\alpha_i) = \gamma_i$ כאשר α_i בסיס ל־V, ו־$\gamma_i \in W$).

אם $A = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ בסיס של V, ויהיו $\gamma_1, ..., \gamma_n$ וקטורים ב־W,

אזי קיימת ט"ל T **יחידה:** $T : V \to W$ המקיימת: $T(\alpha_i) = \gamma_i$ לכל $i = 1...n$.

הוכחה: לפי הטענה הקודמת יש לכל היותר T אחת המקיימת זאת.

כדי להוכיח שיש T כזאת, פשוט נגדיר אותה:

יהא $\beta \in V$ וקטור כלשהו, אזי קיימים $b_1, ..., b_n$ **יחידים** כך ש: $\beta = b_1\alpha_1 + ... + b_n\alpha_n$.

נגדיר: $T(\beta) = b_1\gamma_1 + ... + b_n\gamma_n$.

ראשית, $\alpha_i = 0\alpha_1 + ... + 1\alpha_i + ... + 0\alpha_n$ ולכן $T(\alpha_i) = 0\gamma_1 + ... + 1\gamma_i + ... + 0\gamma_n$ כנדרש.

נראה ש־T ט"ל. יהיו $\beta, \beta' \in V$.

$\beta = \sum_{i=1}^n b_i\alpha_i$, $\beta' = \sum_{i=1}^n b'_i\alpha_i$ אזי נראה חיבוריות:

$$T(\beta + \beta') = T(\sum_{i=1}^n b_i\alpha_i + \sum_{i=1}^n b'_i\alpha_i) = T(\sum_{i=1}^n (b_i + b'_i)\alpha_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n (b_i + b'_i)\gamma_i = \sum_{i=1}^n b_i\gamma_i + \sum_{i=1}^n b'_i\gamma_i = T(\beta) + T(\beta')$$

כמו כן נראה כפליות:

$$T(c\beta) = T(\sum_{i=1}^n (cb_i)\alpha_i) = \sum_{i=1}^n (cb_i)\gamma_i = c\sum_{i=1}^n b_i\gamma_i = cT(\beta) \quad \blacksquare$$

הגדרה 3.5 גרעין, תמונה.

תהי $T : V \to W$ ט"ל. נגדיר:

$Ker(T) = \{\alpha \in V | T(\alpha) = \vec{0}_W\}$ הגרעין של T

$Im(T) = \{\beta \in W | \exists\alpha \in V \ , T(\alpha) = \beta\}$ התמונה של T.

טענה 3.6 $Ker(T)$ הוא תמ"ו של V, ו־$Im(T)$ הוא תמ"ו של W.

הוכחה: א)

כמובן, $0 \in Ker(T)$. ואם $\alpha, \beta \in Ker(T)$, $a, b \in F$ אזי:

$$T(a\alpha + b\beta) = aT(\alpha) + bT(\beta) = a \cdot 0_W + b \cdot 0_W = 0_W$$

ולכן גם $a\alpha + b\beta \in Ker(T)$ וגמרנו.

ב)

$\vec{0} \in Im(T)$. נניח ש־$\gamma_1, \gamma_2 \in Im(T)$, $a, b \in F$. ונראה שגם: $a\gamma_1 + b\gamma_2 \in Im(T)$.

מכיוון ששניהם בתמונה, אזי קיימים $\alpha, \beta \in V$ כך ש־ $T(\alpha) = \gamma_1$, $T(\beta) = \gamma_2$.

נחשב: $T(a\alpha + b\beta) = aT(\alpha) + bT(\beta) = a\gamma_1 + b\gamma_2$

ולכן $a\gamma_1 + b\gamma_2 \in Im(T)$ כנדרש. ■

טענה 3.7 $T : V \to W$ חח"ע $\Leftrightarrow$ $Ker(T) = \{0_V\}$.

הוכחה: כיוון ראשון: נניח T חח"ע, ונוכיח $Ker(T) = \{0\}$.

יהא $\alpha \in Ker(T)$. אזי $T(\alpha) = 0_W = T(0_V) \Leftarrow \alpha = 0_V$(מחח"ע T).

ולכן $Ker(T) = \{0\}$.

כיוון שני: נניח $Ker(T) = \{0\}$ ונוכיח T חח"ע, כלומר: אם $T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$ אז $\alpha_1 = \alpha_2$.

ואכן, אם $T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$ אזי $T(\alpha_1 - \alpha_2) = T(\alpha_1) - T(\alpha_2) = 0$,

ולכן $\alpha_1 - \alpha_2 \in Ker(T)$, כלומר, $\alpha_1 - \alpha_2 = 0_V$ כלומר $\alpha_1 = \alpha_2$. ■

משפט 3.8 משפט המימדים II

יהי V מ"ו ממימד סופי מעל שדה F, ויהי W מ"ו מעל F. תהי $T : V \to W$ ט"ל.

אזי,

$dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(V)$. **הוכחה:** $Ker(T)$ תמ"ו של V. נבחר בסיס $\alpha_1, ..., \alpha_k$ של $Ker(T)$.

$Im(T)$ תמ"ו של W. נבחר בסיס $\gamma_1, ..., \gamma_m$ של $Im(T)$.

נראה שקיים בסיס של V בגודל $k + m$:

מכיוון ש$\gamma_1,...,\gamma_m \in Im(T)$ אזי קיימים $\beta_1,...,\beta_m \in V$ כך ש$T(\beta_i) = \gamma_i$ לכל i.

נטען: $\alpha_1,...,\alpha_k,\beta_1,...,\beta_m$ בסיס של V.

א) $\alpha_1,...,\alpha_k,\beta_1,...,\beta_m$ בת"ל:

נניח שקיימים סקלרים $a_i b_i \in F$ כך ש:

★ $\sum_{i=1}^k a_i\alpha_i + \sum_{i=1}^m b_i\beta_i = 0$ ונפעיל את T על שני האגפים:

$\sum_{i=1}^k a_iT(\alpha_i) + \sum_{i=1}^m b_iT(\beta_i) = 0$

אבל $\alpha_i \in Ker(T)$ ולכן המחובר השמאלי הוא 0.

כמו כן, $\sum_{i=1}^m b_iT(\beta_i) = \sum_{i=1}^m b_i\gamma_i = 0$

וכעת, $\gamma_1,...,\gamma_m$ בסיס ל־$Im(T)$ ובפרט, בת"ל, ולכן $b_1 = ... = b_m = 0$.

נציב זאת ב־★: $\sum_{i=1}^k a_i\alpha_i = 0$.

וכעת, $\alpha_1,...,\alpha_k$ בסיס ל־$Ker(T)$ ובפרט, בת"ל, ולכן $a_1 = ... = a_k = 0$.

ולכן הראינו ש־$\alpha_1,...,\alpha_k,\beta_1,...,\beta_m$ בת"ל.

ב) $\alpha_1,...,\alpha_k,\beta_1,...,\beta_m$ פורשים את V:

יהי $v \in V$. אזי $T(v) \in Im(T)$.

$\gamma_1,...,\gamma_m$ בסיס ל־$Im(T)$, ולכן קיימים סקלרים c_i כך ש־ $T(v) = \sum_{i=1}^m c_i\gamma_i$.

ולכן: $T(v) = \sum_{i=1}^m c_i\gamma_i = \sum_{i=1}^m c_iT(\beta_i) = T(\sum_{i=1}^m c_i\beta_i)$

ומליניאריות:

$T(\alpha - \sum_{i=1}^m c_i\beta_i) = 0$ כלומר $\alpha - \sum_{i=1}^m c_i\beta_i \in Ker(T)$.

$\alpha_1,...,\alpha_k$ בסיס ל־$Ker(T)$, ולכן קיימים סקלרים a_i

כך ש־$\alpha - \sum_{i=1}^m c_i\beta_i = \sum_{i=1}^k a_i\alpha_i$. נעביר אגפים ונקבל:

$\alpha = \sum_{i=1}^k a_i\alpha_i + \sum_{i=1}^m c_i\beta_i$

ולכן $\alpha_1,...,\alpha_k,\beta_1,...,\beta_m$ פורשים את V. ■

3.1 מטריצות

הגדרה 3.9 המטריצה של ה"ל

יהיו V,W מ"ו מעל שדה F, W $T:V\to W$ ה"ל.

נבחר בסיסים: $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ ל־V, $\{\beta_1,...,\beta_m\}$ ל־W.

$T(\alpha_1)\in W$ אז,

$$T(\alpha_1)=a_{11}\beta_1+a_{21}\beta_2+...+a_{m1}\beta_m$$

$T(\alpha_2)\in W$ אז,

$$T(\alpha_1)=a_{12}\beta_1+a_{22}\beta_2+...+a_{m2}\beta_m$$

$$\vdots$$

$T(\alpha_n)\in W$ אז,

$$T(\alpha_n)=a_{1n}\beta_1+a_{2n}\beta_2+...+a_{mn}\beta_m$$

נגדיר מטריצה:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

המטריצה שבנינו נקראת המטריצה המייצגת את הה"ל $T:V\to W$,

ביחס לבסיסים (α_i) של V ו־ (β_i) של W.

מסמנים: $A=[T]^{(\alpha_i)}_{(\beta_j)}$.

העמודה ה־j במטריצה מורכבת מהמקדמים של $T(\alpha_j)$ בפיתוח לפי הבסיס $\beta_1,...,\beta_m$.

למה 3.10 המטריצה המייצגת הרכבת ה"ל

יהיו V,U,W מ"ו מעל F, ויהיו

$\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ בסיס ל־V, $\{\beta_1,...,\beta_m\}$ בסיס ל־U, $\{\gamma_1,...,\gamma_l\}$ בסיס ל־W.

ויהיו T,S ט"ל:

$$\underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{V} \quad {}^{T}\!\rightarrow \quad \underset{\beta_1,\ldots,\beta_m}{U} \quad {}^{S}\!\rightarrow \quad \underset{\gamma_1,\ldots,\gamma_l}{W}$$

תהי $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(F)$ המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיסים $(\alpha_i),(\beta_i)$.

תהי $B=(b_{ij})\in M_{l\times m}(F)$ המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיסים $(\beta_i),(\gamma_i)$.

$A=[T]_{(\beta_i)}^{(\alpha_i)}$, $B=[S]_{(\gamma_i)}^{(\beta_i)}$.

נשאל: מהי המטריצה המייצגת את $S\circ T$ ביחס לבסיסים: $(\alpha_i),(\gamma_i)$.

$$(ST)(\alpha_k)=S(T(\alpha_k))=S(\sum_{j=1}^m a_{jk}\beta_j)=\sum_{j=1}^m a_{jk}S(\beta_j)=$$

$$=\sum_{j=1}^m a_{jk}(\sum_{i=1}^l b_{ij}\gamma_i)=\sum_{i=1}^l(\sum_{j=1}^m b_{ij}a_{jk})\gamma_i$$

כאשר המעבר האחרון הוא שינוי סדר הסכימה.

(כל "סיגמא" כאן היא למעשה ייצוג של עמודה במט' המייצגת את הט"ל S,T).

נסמן: $C\in M_{l\times n}$: $C_{ik}=\sum_{j=1}^m b_{ij}a_{jk}$

אזי המטריצה המייצגת את $S\circ T$ ביחס לבסיסים: $(\alpha_i),(\gamma_i)$ היא בדיוק C.

הגדרה 3.11 כפל מטריצות

המטריצה C המוגדרת ע"י $C_{ik}=\sum_{j=1}^m b_{ij}a_{jk}$ שווה למכפלת המטריצות BA.

טענה 3.12 כפל מטריצות הוא אסוציאטיבי ודיסטריביוטיבי.

כלומר: $(AB)C=A(BC)$,

וגם $(A+B)C=AC+BC$ וגם $D(E+F)=DE+DF$.

(כאשר החיבור והכפל מוגדרים).

4 מערכות משוואות

טענה 4.1 ייצוג של פעולות אלמנטריות על מטריצה באמצעות מטריצות אלמנטריות

נבטא כ"א מהפעולות האלמנטריות על השורות ע"י כפל משמאל במטריצה אלמנטרית.

(**מט' אלמנטרית:** מטריצה המתקבלת ממט' היחידה ע"י פיולה אלמנטרית)

א) החלפת שתי שורות זו בזו $L_i \leftrightarrow L_j$. לדוגמא: החלפת $L_2 \leftrightarrow L_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ב) כפל שורה בסקלר $c \neq 0$: $L_i \leftarrow cL_i$ לדוגמא: $L_2 \leftarrow -6L_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ג) הוספת כפולה c של שורה j לשורה i $(i \neq j)$: $L_i \leftarrow L_i + cL_j$

לדוגמא: $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

הגדרה 4.2 מטריצה הפיכה:

מטריצה $m \times m$ B ריבועית תיקרא הפיכה אם קיימת מטריצה B' כך ש $BB' = B'B - I$.

טענה 4.3 המטריצות האלמנטריות הן מטריצות הפיכות, וההופכיות להן גם כן אלמנטריות.

הוכחה: כ"א מהפעולות האלמנטריות על השורות הן פעולות הפיכות.

כלומר ניתן לחזור אל המערכת המקורית ע"י ביצוע פעולות אלמנטריות.

ולכן המטריצות המייצגות אותן הפיכות.

(אם כפלנו ב־c אז נכפול ב־$\frac{1}{c}$ כדי להפוך, וכו').

(ניתן לרשום זאת בדרך יותר רשמית). ■

מסקנה 4.4 כל מכפלה של מט' אלמנטריות היא הפיכה.

הוכחה: יהיו $E_1, ..., E_s$ מט' אלמנטריות. ראינו שהן הפיכות.

נגדיר: $A = E_1 \cdot ... \cdot E_s$, $B = E_s^{-1} \cdot ... \cdot E_1^{-1}$ ונראה ש־B הופכית ל־A:

$$AB = (E_1 \cdot ... \cdot E_s)(E_s^{-1} \cdot ... \cdot E_1^{-1}) = I$$

זה נכון בגלל האסוציאטיביות ־ נכפול "מבפנים החוצה":

קודם $E_s E_s^{-1} = I$ וכו'. ■

למה 4.5 יהיו B, C מטריצות הפיכות. אזי BC הפיכה, ו־ $(BC)^{-1} = (C^{-1}B^{-1})$.

הוכחה: $(C^{-1}B^{-1})(BC) = C^{-1}(B^{-1}B)C = C^{-1}IC = C^{-1}C = I$

$(BC)(C^{-1}B^{-1}) = B(CC^{-1})B^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I$ ■

למה 4.6 אם היא קיימת, המטריצה ההופכית היא יחידה.

הוכחה: תהי A מט' הפיכה. נניח B, C הופכיות לה.

$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$ ■

טענה 4.7 תהי $A \in M_n(F)$ ו־ $b \in F^n$. אזי למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד $\Leftrightarrow$ A הפיכה.

הוכחה: כיוון **ראשון**: נניח A הפיכה. נטען ש־$\alpha = A^{-1}b$ הוא פתרון יחיד.

זהו פתרון: $A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$.

הוא יחיד: נניח $\beta \in F^n$ פתרון. ז"א $A\beta = b$. נכפיל את שני האגפים משמאל ב־A^{-1}:

$$A^{-1}A\beta = A^{-1}b \;\Rightarrow\; \beta = A^{-1}b$$

כיוון **שני**: נניח שיש למערכת פתרון יחיד.

ולכן בפתרון מערכת המשוואות הגענו ע"י פעולות אלמנטריות למטריצת היחידה.

ממשפט שלמדנו (וכנראה לא בסיכום זה...), אם ניתן להגיע מ־A למט' היחידה אזי A הפיכה. ■

4.1 ייצוג ע"י טרנספורמציות ליניאריות

טענה 4.8 ההעתקה "T_A":

תהא $A \in M_{m\times n}(F)$. ההעתקה $T_A : F^n \to F^m$ המוגדרת ע"י:

$T_A(\alpha) = A\alpha$ עבור $\alpha \in F^n$ היא ט"ל.

הוכחה: עקב דיסטריביוטיביות כפל מטריצות:

$$T(\alpha_1 + \alpha_2) = A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = T(\alpha_1) + T(\alpha_2)$$

וגם: $T(c\alpha) = A(c\alpha) = cA(\alpha) = cT(\alpha)$ ■

מסקנה 4.9 בהינתן מערכת משוואות אי הומוגנית, $A\vec{x}=\vec{b}$,

אנו למעשה מחפשים את כל הוקטורים $\alpha \in F^n$ כך ש־ $T_A(\alpha)=\vec{b}$.

מקרה פרטי: $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ ואז הפתרונות של המערכת הם בדיוק $Ker(T_A)$,

שהוא **תת־מרחב.**

__כלומר:__

מימד מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית = $dim(Ker(T_A))$

= מספר המשתנים החופשיים = $n-r$

(כאשר n הוא מס' המשתנים,

r היא דרגת השורות של A = מימד המרחב הנפרש ע"י השורות של A).

טענה 4.10 דרגת השורות של A= $r=Im(T_A)$

עקב הסבר לא מובן, ידוע ש־$Im(T_A)$ שווה גם ל**דרגת העמודות** של A.

(נחוץ הסבר, זה קטע שלא הבנתי).

הוכחה: לפי משפט המימדים:

$$dim(Im(T_A))=dim(F^n)-dim(Ker(T_A))=n-(n-r)=r \quad \blacksquare$$

הגדרה 4.11 ט"ל הפיכה:

F שדה, V,W מ"ו מעל F. ט"ל $T:V\to W$ תקרא הפיכה

אם קיימת $T':W\to V$ ט"ל כך ש: $T'\circ T=Id_V$ וגם $T\circ T'=Id_W$.

למה 4.12 אם $T:V\to W$ ט"ל שהיא חח"ע ועל, אזי קיימת **ט"ל** הופכית $T':W\to V$,

יחידה, כך ש: $T'\circ T=Id_V$ וגם $T\circ T'=Id_W$.

הוכחה: ידוע מתורת הפונקציות הכללית שקיימת העתקה יחידה כזאת.

מה שצריך להוכיח זה שהיא אכן ליניארית.

נבדוק:

1) אם $\beta_1, \beta_2 \in W$ אזי $T'(\beta_1 + \beta_2) = T'(\beta_1) + T'(\beta_2)$.

מאחר ו־T חח"ע, מספיק להוכיח ש־$T(T'(\beta_1 + \beta_2) = T(T'(\beta_1) + T'(\beta_2))$

וכעת: $T(T'(\beta_1 + \beta_2)) = (T \circ T')(\beta_1 + \beta_2) = Id(\beta_1 + \beta_2) = \beta_1 + \beta_2$

ומצד שני,

$$T(T'(\beta_1) + T'(\beta_2)) = T(T'(\beta_1)) + T(T'(\beta_2)) =$$

$$= (T \circ T')(\beta_1) + (T \circ T')(\beta_2) = Id(\beta_1) + Id(\beta_2) = \beta_1 + \beta_2$$

2) לכל $\beta \in W$, $c \in F$, $T'(c\beta) = cT'(\beta)$:

שוב מספיק להראות ש $T(T'(c\beta)) = T(cT'(\beta))$ כי T חח"ע.

$$T(cT'(\beta)) = cT(T'(\beta)) = c(Id\beta) = c\beta$$

ומצד שני, $T(T'(c\beta)) = (T \circ T')(c\beta) = Id(c\beta) = c\beta$. ■

4.2 ישריה

הגדרה 4.13 ישריה

יהא V מ"ו מעל F, $U \subseteq V$ תת־מרחב. ויהי $\alpha_0 \in V$.

הקבוצה: $\alpha_0 + U = \{\alpha_0 + \beta | \beta \in U\}$ נקראת ישריה.

נאמר שישריה זו <u>מקבילה</u> לתת־המרחב U.

נגדיר: **מימד הישריה** שווה למימד של U.

משפט 4.14 ישריה היא אוסף פתרונות של מע' משוואות:

תהא $A\vec{x} = \vec{b}$ מערכת משוואות. ($A \in M_{m\times n}(F)$, $x \in F^n$, $b \in F^m$)

נסמן ב־U את אוסף הפתרונות של המע' ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$.

זהו תת־מרחב.

יהא $\alpha_0 \in F^n$ פתרון כלשהו של $A\vec{x} = \vec{b}$. (אזהרה: אולי הוא לא קיים!)

אזי, אוסף הפתרונות של $A\vec{x} = \vec{b}$ הוא בדיוק הישריה $\alpha_0 + U$.

הוכחה: נסמן: Z=קב' הפתרונות של המערכת $A\vec{x}=\vec{b}$, ז"א $\delta \in Z$ אם"ם $A\delta=\vec{b}$.

צריך להוכיח:

1) $\alpha_0+U \subseteq Z$

2) $\alpha_0+U \supseteq Z$

נוכיח:

1)

$A(\alpha_0+u)=A\alpha_0+Au=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$ ולכן $\alpha_0+u \in Z$ (עבור $u \in U$)

2)

נניח $\delta \in Z$ כלומר $A\delta=\vec{b}$ וצריך להוכיח שקיים $u \in U$ כך ש־ $\delta=\alpha_0+u$.

$$A(\delta-\alpha_0)=A\delta-A\alpha_0=\vec{b}-\vec{b}=\vec{0}$$

ולכן $\delta-\alpha_0 \in U$ (כי הוא פתרון להומוגנית).

כעת נקרא לו u וקיבלנו, $\delta=\alpha_0+(\delta-\alpha_0)=\alpha_0+u \in \alpha_0+U$. ■

טענה 4.15 אם U תמ"ו, $\alpha_0 \in V$ ו־ $\gamma \in \alpha_0+U$ אזי $\alpha_0+U=\gamma+U$

הוכחה: צריך להוכיח:

1) $\alpha_0+U \subseteq \gamma+U$ וגם: **2)** $\alpha_0+U \supseteq \gamma+U$

1) יהא $\beta \in \alpha_0+U$ אזי $\beta=\alpha_0+u_0$ כאשר $u_0 \in U$.

וגם: $\gamma=\alpha_0+u_1$ לאיזשהו $u_1 \in U$.

אז:

$$\beta-\gamma=(\alpha_0+u_0)-(\alpha_0+u_1)=u_0-u_1$$

ומכיוון שU תמ"ו, הוא מקיים סגירות לחיבור ולכן $u_0-u_1 \in U$.

נסמנו $u_0-u_1=u_2$.

ולכן, $\beta=\gamma+(\beta-\gamma)=\gamma+u_2 \in \gamma+U$.

2) נניח ש$\beta=\gamma+u_0$ כאשר $u_0 \in U$, וצ"ל ש־ $\beta \in \alpha_0+U$.

כאמור: $\gamma=\alpha_0+u_1$ ולכן,

$$\beta=\gamma+u_0=\alpha_0+u_1+u_0=\alpha_0+(u_1+u_0) \in \alpha_0+U$$

(המעבר האחרון עוד פעם מסגירות לחיבור של U).

טענה 4.16 אם U_1, U_2 תת־מרחבים של V, $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ כך ש: $\alpha_1 + U_1 = \alpha_2 + U_2$ אזי $U_1 = U_2$.

הוכחה: צריך להוכיח

1) $U_1 \subseteq U_2$ וגם **2)** $U_1 \supseteq U_2$.

1) נשים לב ש־ $\alpha_2 = \alpha_2 + 0 = \alpha_2 + U_2 = \alpha_1 + U_1$

(כי 0 נמצא בכל תמ"ו, ומהנתון).

כעת לפי הטענה הקודמת, $\alpha_2 + U_1 = \alpha_1 + U_1$.

(כי נסמן $\alpha_2 = \gamma$, $\alpha_1 = \alpha_0$ ואז: $\alpha_2 \in \alpha_1 + U_1 \Leftarrow \alpha_1 + U_1 = \alpha_2 + U_2$).

אבל ראינו גם שמתקיים שזה שווה ל־

$\alpha_2 + U_1 = \alpha_1 + U_1 = \alpha_2 + U_2$

ולכן $\alpha_2 + U_1 = \alpha_2 + U_2$

כעת יהיה $\beta_1 \in U_1$ אזי :

$\alpha_2 + \beta_1 \in \alpha_2 + U_1 = \alpha_2 + U_2$

כלומר קיים $\beta \in U_2$ כך ש:

$\alpha_2 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$

ולכן $\beta_1 = \beta_2$ כלומר $\beta_1 \in U_2$.

2) ומשיקולי סימטריה, גם $U_2 \subseteq U_1$. ■

■

5 מרחב ההעתקות הליניאריות $Hom(V,W)$

הגדרה 5.1 יהיו V, W מ"ו מעל שדה F. נסמן: $Hom(V,W)$ את **אוסף כל הה"ל מ־V ל־W**.

משפט 5.2 $Hom(V,W)$ הוא מ"ו מעל השדה F,

כאשר החיבור מוגדר: $(S+T)(\alpha)=S(\alpha)+T(\alpha)$

והכפל בסקלר מוגדר: $(cS)(\alpha)=c\cdot S(\alpha)$

(עבור $S,T\ :V\to W$, $\alpha\in V$, $c\in F$).

ההוכחה פשוטה אך ארוכה ולכן לא כאן.

משפט 5.3 אם V,W ממימד סופי מעל F,

אזי $dim(Hom(V,W))=dimV\cdot dimW$.

הוכחה: נניח $dimV=n\ ,\ dimW=m$.

יהיו $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ בסיס ל־V, $\{\beta_1,...,\beta_m\}$ בסיס ל־W.

נבנה בסיס ל־$Hom(V,W)$ המכיל $m\cdot n$ איברים:

לכל $1\le l\le m$, $1\le k\le n$ **נגדיר** $\mathbf{E_{kl}\in Hom(V,W)}$:

$$E_{kl}(\alpha_i)=\begin{cases}\beta_l & \text{if } i=k\\ 0 & \text{if } i\neq k\end{cases}$$

(או בקיצור $E_{kl}(\alpha_i)=\delta_{ik}\beta_l$ כאשר δ_{ik} היא הדלתא של קרונקר).

כעת, E_{kl} היא ט"ל כי היא הוגדרה על איברי הבסיס של V.

1) נראה ש: $\{E_{kl}\}_{1\le l\le m}^{1\le k\le n}$ בת"ל ב־$Hom(V,W)$:

נניח שקיימים סקלרים $\{a_{kl}\}_{1\le l\le m}^{1\le k\le n}$ ב־F כך ש־ $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}a_{kl}E_{kl}=0$.

נציב את α_i בשיויון ונשים לב שהמון איברים נעלמים:

$$0=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}a_{kl}E_{kl}(\alpha_i)=\sum_{l=1}^{m}a_{il}\beta_l$$

וכעת, $\beta_1,...,\beta_m$ בסיס ל־W, ובפרט בת"ל, ולכן $a_{i1}=...=a_{im}=0$.

מהצבת α_i לכל $1\le i\le m$ נקבל שכל המקדמים בצ"ל הם 0.

ולכן $\{E_{kl}\}$ בת"ל.

2) נראה ש־$\{E_{kl}\}$ פורשים את $Hom(V,W)$:

תהי $T \in Hom(V,W)$. לכל $1 \le j \le n$, $T(\alpha_j) \in W$ ולכן נציגו כצ"ל של הבסיס $\beta_1, ..., \beta_m$ של W:

$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i$.

כעת נראה ש־ $T = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_{kl}E_{kl}$

ומכאן נסיק ש־$\{E_{kl}\}$ פורש את $Hom(V,W)$:

מאחר ובשני האגפים יש ה"ל, כדי להראות שויון שלהן די לבדוק שויון על איברי הבסיס של V.

$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_{lk}E_{kl}(\alpha_i) = \sum_{l=1}^{m} a_{li}\beta_l = T(\alpha_i)$

ולכן הראינו את כל הנדרש, ו־$\{E_{kl}\}_{1\le l\le m}^{1\le k\le n}$ בסיס ל־$Hom(V,W)$. ■

טענה 5.4 יהי V ממימד n מעל שדה F, ויהי $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ בסיס ל־V.

ויהי W ממימד m מעל שדה F, ויהי $\{\beta_1, ..., \beta_m\}$ בסיס ל־W.

אזי ההתאמה $\mu : Hom(V,W) \to M_{m\times n}(F)$ המתאימה לכל ה"ל $T : V \to W$

את המטריצה המייצגת אותה ביחס לבסיסים (α_i) ו־(β_i):

$\mu(T) = [T]_{\{\beta_1,...,\beta_m\}}^{\{\alpha_1,...,\alpha_n\}}$

היא **איזומורפיזם של המרחב** $Hom(V,W)$ **על** $M_{m\times n}(F)$**.**

כלומר שומרת על כפל בסקלר וחיבור, ובנוסף חח"ע ועל.

הוכחה: 1) μ חיבורית:

נראה שלכל $T,S \in Hom(V,W)$, $\mu(T+S) = \mu(T)+\mu(S)$:

נסמן: $\mu(T) = A = (a_{ij})$, $\mu(S) = B = (b_{ij})$

כלומר, $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i$, $S(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\beta_i$

נחשב המטריצה המייצגת את $T+S$ ביחס לבסיסים (α_i) ו־(β_j):

$(T+S)(\alpha_j) = T(\alpha_j)+S(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\beta_i =$

$= \sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})\beta_i = \sum_{i=1}^{m}(A+B)_{ij}\beta_i$

ולכן המטריצה המייצגת את $T+S$ ביחס לבסיסים (α_i) ו־(β_j) היא המטריצה $A+B$:

$$\mu(T+S) = A+B = \mu(T)+\mu(S)$$

2) μ שומרת על כפל בסקלר:

יהיו $S \in Hom(V,W)$, $c \in F$.

נסמן: $\mu(S) = A = (a_{ij})$ כלומר $S(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i$.

נחשב את המטריצה המייצגת את cS ביחס לבסיסים (α_i) ו־(β_i):

$$(cS)(\alpha_j) = c \cdot S(\alpha_j) = c \cdot \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i = \sum_{i=1}^{m}(c \cdot a_{ij})\beta_i = \sum_{i=1}^{m}(cA)_{ij}\beta_i$$

ולכן המטריצה המייצגת את cS ביחס לבסיסים הנ"ל היא cA.

$$\mu(cS) = cA = c\mu(S)$$

$\Leftarrow$ולכן μ היא ט"ל מ־$Hom(V,W)$ ל־ $M_{m\times n}(F)$.

3) נראה ש־μ חח"ע:

מכך שהיא ט"ל, מספיק לראות ש־$Ker(\mu) = \{0\}$.

יהי $T \in Ker(\mu)$. זאת אומרת, $\mu(T) = 0_{m\times n}$.

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot \beta i = 0$$

קיבלנו ש־T מתאפסת על כל הבסיס, ולכן $T = 0$ (העתקת האפס).

4) μ על:

כמסקנה ממשפט המימדים:

$$dim(Im(Hom(V,W))) = dim(M_{m\times n}(F)) + 0 = mn$$

ולכן, ה"ל שהיא חח"ע מ־$Hom(V,W)$ ל־$M_{m\times n}(F)$ היא גם על. ∎

6 המרחב הדואלי

הגדרה 6.1 פונקציונל ליניארי

F שדה, V מ"ו מעל F.

העתקה ליניארית $\varphi : V \to F$ תיקרא **פונקציונל ליניארי על** V.

הגדרה 6.2 המרחב הדואלי

$V* = Hom(V,F) =$ {אוסף כל הפונק' הליניאריים על V}

ייקרא המרחב הדואלי ל־V.

משפט 6.3 המימד של $V*$

נניח $dim_F V = n$ מימד סופי. ונזכור ש־$V*$ בעצמו מ"ו.

אזי, $dim(Hom(V,F)) = (dimV) \cdot (dimF) = n \cdot 1 = n$

הגדרה 6.4 $V** = (V*)* = Hom(V*, F)$

טענה 6.5 דוגמא לאיבר ב־$V**$:

יהא $\alpha \in V$ וקטור כלשהו. נסמן: $\hat{\alpha} : V* \to F$

$\hat{\alpha}(\varphi) = \varphi(\alpha)$, $\varphi \in V*$

נטען ש $\hat{\alpha}$ אכן פונק' ליניארי על $V*$:

הוכחה: יהיו $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in V*$, $c \in F$:

$$\hat{\alpha}(\varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_1 + \varphi_2)(\alpha) = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) = \hat{\alpha}(\varphi_1) + \hat{\alpha}(\varphi_2)$$

$$\hat{\alpha}(c\varphi) = (c\varphi)(\alpha) = c\varphi(\alpha) = c\hat{\alpha}(\varphi)$$ ■

טענה 6.6 למעשה, הגדרנו העתקה $M : V \to V**$,

$M(\alpha) = \hat{\alpha}$, $\alpha \in V$.

נטען ש־M היא ט"ל.

הוכחה: ראשית נבדוק האם מתקיים: $M(\alpha + \beta) = M(\alpha) + M(\beta)$:

צריך להוכיח שלכל $\varphi \in V*$,

$$(M(\alpha + \beta))(\varphi) =^? (M(\alpha))(\varphi) + (M(\beta))(\varphi)$$

כלומר:

$$\widehat{(\alpha + \beta)}(\varphi) =^? \hat{\alpha}(\varphi) + \hat{\beta}(\varphi)$$

$$\varphi(\alpha + \beta) =^? \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

התשובה ל-"$\stackrel{?}{=}$" האחרון היא **כן**, כי φ פונק' ליניארי.

צריך גם לבדוק:

$$M(c\alpha) =^? cM(\alpha)$$

כלומר צ"ל שלכל $\varphi \in V*$:

$$(M(c\alpha))(\varphi) =^? (cM(\alpha))(\varphi)$$

$$\hat{c\alpha}(\varphi) =^? c\hat{\alpha}(\varphi)$$

$$\varphi(c\alpha) =^? c \cdot \varphi(\alpha)$$

שוב פעם התשובה היא כן כי φ היא פונק' ליניארי. ■

משפט 6.7 אם $dimV = n < \infty$ אזי ההעתקה: $M : V \to V**$, $M(\alpha) = \hat{\alpha}$ היא **איזומורפיזם.**

(טענת עזר: אם $dimV = n$, ו־$0 \neq \alpha \in V$ אזי קיים פונק' ליניארי על V, φ, כך ש־ $\varphi(\alpha) \neq 0$.

הוכחת הטענה: נשלים את α לבסיס: $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ של V. (תמיד אפשר).

ועכשיו, יש פונק' ליניארי $\varphi : V \to F$ כך ש: $\varphi(\alpha_1) = 1$ ו־$\varphi(\alpha_i) = 0$ לכל $i = 2, ..., n$.)

הוכחה: (למשפט עצמו):

כזכור, $n = dimV = dimV* = dimV**$,

ו־M ט"ל, ולכן מספיק להוכיח ש־ $Ker(M) = \{0\}$ כי אז M חח"ע ואז:

$$dim(Im(M) = n - dim(Ker(M)) = n - 0 = n$$

כלומר $Im(M) = V**$ והיא גם על.

ואכן M חח"ע, כי אם $\alpha \in Ker(M)$,

אזי $\hat{\alpha}$ הוא פונקציונל האפס, כלומר לכל $\varphi \in V*$, $\hat{\alpha}(\varphi) = 0$.

ז"א, $\varphi(\alpha) = 0$ לכל $\varphi \in V*$.

וע"פ טענת העזר, $\alpha = 0$ ולכן $Ker(M) = \{0\}$. ■

6.1 הבסיס הדואלי

הגדרה 6.8 בסיס דואלי:

$dimV = n$. יהא $B = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ בסיס של V.

לכל $i = 1...n$ קיים $\varphi_i \in V*$ יחיד כך ש:

$$\varphi_i(\alpha_j) = \begin{cases} 0 & , j \neq i \\ 1 & , j = i \end{cases}$$

נסמן: $B* = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$**,** מהווה בסיס ל־$V*$, וייקרא **הבסיס הדואלי ל־B.**

נוכיח שזהו באמת בסיס:

הוכחה: $\{\varphi_{1,...,}\varphi_n\}$ קבוצה בת"ל:

נניח $a_1, ..., a_n \in F$, ושמתקיים: $\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i = 0$,

אזי לכל וקטור $\alpha \in V$,

$\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(\alpha) = 0$

ובפרט לכל $\alpha_j \in B$ (כלומר בבסיס של V),

$a_j = a_j \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(\alpha_j) = 0$

ולכן $a_1 = ... = a_n = 0$ ולכן $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ בת"ל.

נראה ש־$B*$ **פורשת** את $V*$:

יהא $\varphi \in V*$.

נניח $\varphi(\alpha_i) = a_i \in F$, $i = 1, ..., n$.

ונטען ש־ $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i$.

כדי להוכיח זאת מספיק שנבדוק ששני הצדדים מתלכדים על הבסיס (כי אלו פונק' ליניאריים).

$a_j = \varphi(\alpha_j) =^? (\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i)(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(\alpha_j) = a_j \cdot 1 = a_j$ ■

טענה 6.9 $V ** \supset (B*)* = B ** = \{\hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_n\}$

הוכחה: $\hat{\alpha}_i(\varphi_j)=\varphi_j(\alpha_i)=\delta_{ji}=\begin{cases}1 & ,\ i=j\\ 0 & ,\ i\neq j\end{cases}$

וזה בדיוק מקיים את הגדרת הבסיס הדואלי. ■

מסקנה 6.10 בעצם ראינו שהה"ל $M:V\to V**$ שהגדרנו קודם: $M(\alpha)=\hat{\alpha}$,

לוקחת את הבסיס B לבסיס $B**$, ולכן זוהי הוכחה נוספת לכך ש־M איזומורפיזם.

טענה 6.11 $T:V\to W$ היא איזומורפיזם אם"ם לוקחת בסיס של V לבסיס של W. (ללא הוכחה...?)

6.2 מאפסים

הגדרה 6.12 מאפסים:

V מ"ו מעל F, $A\subseteq V$ **תת־קבוצה.** נסמן:

המאפס של A=$A^0=\{\varphi\in V*|\varphi(\alpha)=0\ ,\ \forall\alpha\in A\}$.

טענה 6.13 A^0 הוא תת־מרחב של $V*$.

הוכחה: ראשית, פונקציונל ה־0 נמצא ב־A^0 ולכן היא לא ריקה.

כעת, אם $\varphi_1,\varphi_2\in A^0$, ו־ $c_1,c_2\in F$, צריך להוכיח: $c_1\varphi_1+c_2\varphi_2\in A^0$.

ואכן, אם $\alpha\in A$:

$$(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)(\alpha)=c_1\varphi_1(\alpha)+c_2\varphi_2(\alpha)=c_1\cdot 0+c_2\cdot 0=0$$ ■

טענה 6.14 $A^0=(sp(A))^0$

הוכחה: מכיוון ש־$A\subseteq sp(A)$,

אזי כל פונקציונל שמתאפס על $sp(A)$ וודאי מתאפס גם על A.

ולכן $(sp(A))^0\subseteq A^0$.

נוכיח את כיוון ההכלה השני:

נניח $\varphi\in A^0$ וצריך להוכיח: $\varphi\in(sp(A))^0$.

אז יהא $\beta \in sp(A)$, כלומר קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_r \in A$ וסקלרים c_i

כך ש־ $\beta = c_1\alpha_1 + ... + c_r\alpha_r$. נבדוק שמתקיים $\varphi(\beta) = 0$:

$$\varphi(\beta) = \varphi(c_1\alpha_1 + ... + c_r\alpha_r) = c_1\varphi(\alpha_1) + ... + c_r\varphi(\alpha_r) = c_1 \cdot 0 + ... + c_r \cdot 0 = 0 \blacksquare$$

טענה 6.15 יהא V מ"ו ממימד n מעל F, ו־A תת מרחב ממימד r.

אזי, $dim(A^0) = n - r$.

כלומר $dim(A^0) = dim(V) - dim(A)$.

הוכחה: יהא $\{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ בסיס ל־A. נמשיך אותו לבסיס של V: $\{\alpha_1, ..., \alpha_r, ..., \alpha_n\}$.

יהא $\{\varphi_1, ..., \varphi_r, ..., \varphi_n\}$ הבסיס הדואלי (כלומר זה שמקיים $\varphi_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$).

נטען ש־$A^0 = sp\{\varphi_{r+1}, ..., \varphi_n\}$, וזה יוכיח את טענתינו!

(זה מפני ש־$\{\varphi_{r+1}, ..., \varphi_n\}$ קבוצה בת"ל כחלק מבסיס, וגודלה $n-r$ וזה מה שאנו מחפשים.)

ברור ש־$\{\varphi_{r+1}, ..., \varphi_n\} \in A^0$, כי

לכל $r+1 \leq j \leq n$, ו־ $1 \leq i \leq r$: מתקיים $\varphi_j(\alpha_i) = 0$.

ידוע שהקבוצה הזו היא בת"ל ולכן נותר להראות פרישה:

יהא $\varphi \in A^0$. וצריך להוכיח ש־φ צ"ל של $\varphi_{r+1}, ..., \varphi_n$.

ידוע לנו כבר ש־$\varphi = c_1\varphi_1 + ... + c_r\varphi_r + c_{r+1}\varphi_{r+1}... + c_n\varphi_n$.

נראה שכל $\varphi_{1\leq i\leq r}$ לא משפיע על הצ"ל, כלומר מקדמו הוא 0:

נחשב עבור $1 \leq i \leq r$:

$$0 = \varphi(\alpha_i) =$$

$$= c_1\varphi_1(\alpha_i) + ... + c_r\varphi_r(\alpha_i) + c_{r+1}\varphi_{r+1}(\alpha_i)... + c_n\varphi_n(\alpha_i) =$$

$$= c_i \cdot 1 = c_i$$

כאשר שיויון האפס בצד שמאל נובע מכך ש־$\varphi \in A^0$,

והשיויון ל־c_i נובע מהגדרת העתקות הבסיס הנ"ל.

כלומר $c_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq r$. $\blacksquare$

טענה 6.16 אם $U \leq V$ תת־מרחב, אזי $U^{00} = U$ (תחת הזיהוי בין V ל־$V**$).

הוכחה: נראה ש־$U \subseteq U^{00}$:

אם $\alpha \in U$, $\varphi \in U^0$, אזי:

$$\hat{\alpha}(\varphi) = \varphi(\alpha) = 0$$

כאשר השיויון השמאלי הוא לפי ההגדרה, והימני הוא כי $\varphi \in U^0$.

כעת נחשב מימדים:

$$.dim(U^{00}) = dim(U^0)^0 =$$

ועקב הטענה הקודמת: (כאשר $U^0 \subseteq V*$)

$$= dim(V*) - dim(U^0) =$$

ועוד פעם הטענה הקודמת:

$$dim(V) - [dim(V) - dim(U)] = dim(U)$$

ובשל שיויון המימדים + הכלה, נקבל $U^{00} = U$. ■

הגדרה 6.17 (לא בדיוק הגדרה) - **מהו** U^{00}?

$$U^{00} = (U^0)^0 = \{\Psi \in (V*) * | \Psi(\varphi) = 0 \ , \ \forall \varphi \in U^0\} =$$

$$= \{\alpha \in V | \hat{\alpha}(\varphi) = 0 \ , \ \forall \varphi \in U^0\} =$$

$$= \{\alpha \in V | \varphi(\alpha) = 0 \ , \ \forall \varphi \in U^0\}$$

משפט 6.18 $U, W \leq V$ תתי מרחבים. אזי:

1) $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$

2) $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$

הוכחה: 1) נוכיח: $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$

ראשית, מכיוון ש־$U+W$ מכיל גם את U וגם את W,

אזי $(U+W)^0$ מוכל גם ב־U^0 וגם ב־W^0 ולכן בחיתוך, ולכן:

$.(W+U)^0 \subseteq U^0 \cap W^0$ **(*)**

כעת,

מתקיים גם: $\begin{array}{c} U\cap W\subseteq U \\ U\cap W\subseteq W \end{array}$ ולכן, $(U\cap W)^0$ מכיל גם את U^0 וגם את W^0.

ומאחר ש-$(U+W)^0$ תת־מרחב, הוא מכיל גם את סכומם:

$U^0+W^0\subseteq(U\cap W)^0$. **(**)**

וכעת נתבונן:

$$U+W=\quad(U+W)^{00}=\quad((U+W)^0)^0\quad\supseteq\quad(U^0\cap W^0)^0\supseteq\quad U^{00}+W^{00}=U+W$$

↑טענה קודמת ↑לפי (*),וכמו כן המאפסים הופכים הכלה ↑לפי (**)

לכן, יש שיויון בין הקצה השמאלי והימני ולכן לאורך כל הדרך.

ובפרט: $((U+W)^0)^0=(U^0\cap W^0)^0$

ולכן $(U+W)^0=U^0\cap W^0$.

הוכחה: 2) נוכיח: $(U\cap W)^0=U^0+W^0$.

$$U\cap W=\quad(U\cap W)^{00}=\quad((U\cap W)^0)^0\quad\subseteq\quad(U^0+W^0)^0=\quad U^{00}\cap W^{00}=U\cap W$$

↑טענה קודמת ↑לפי (**),וכמו כן המאפסים הופכים הכלה ↑לפי ההוכחה הקודמת (1)

לכן, יש שיויון בין הקצה השמאלי והימני ולכן לאורך כל הדרך.

ובפרט: $((U\cap W)^0)^0=(U^0+W^0)^0$

ולכן $(U\cap W)^0=U^0+W^0$ ■

■

7 הדטרמיננטה

7.1 תמורות

הגדרה 7.1 תמורה

הגדרה 7.2 תמורה על $\{1,...,n\}$ זו פונקציה $\sigma:\{1,...,n\}\to\{1,...,n\}$ חח"ע ועל.

נסמן בד"כ: $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

הגדרה 7.3 הסימן של תמורה σ על $\{1,...,n\}$ הוא:

$$sg(\sigma)=(-1)^{|\{(i,j)| \ , \ 1\leq i<j\leq n \text{ and } \sigma(i)>\sigma(j)\}|}=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$$

נאמר שתמורה עם $sg=1$ היא זוגית, ותמורה עם $sg=-1$ היא אי זוגית.

טענה 7.4 אם σ,π תמורות ב־S_n אזי $sg(\sigma\circ\pi)=sg(\sigma)\cdot sg(\pi)$

הוכחה: $sg(\sigma\circ\pi)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{(\sigma\circ\pi)(j)-(\sigma\circ\pi)(i)}{j-i}=$

$$=\prod(\frac{(\sigma\circ\pi)(j)-(\sigma\circ\pi)(i)}{\pi(j)-\pi(i)}\cdot\frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i})=\prod\frac{\sigma(\pi(j))-\sigma(\pi(i))}{\pi(j)-\pi(i)}\cdot\prod\frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i}$$

והביטוי האחרון שווה ל־

$sg(\sigma)\cdot sg(\pi)$ ■

7.2 פונק' מולטי ליניאריות

הגדרה 7.5 פונקציה מולטי ליניארית:

V מ"ו מעל F. פונק' $\Phi:V\times V\times ...\times V\to F$ (n פעמים "מכפלה")

תקרא מולטי ליניארית אם:

- לכל $\alpha_1,...,\alpha_n,\beta\in V$ ולכל $1\leq i\leq n$:
$$\Phi(\alpha_1,...,\alpha_i+\beta,...,\alpha_n)=\Phi(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_n)+\Phi(\alpha_1,...,\beta,...,\alpha_n)$$
- לכל $c\in F$:
$$\Phi(\alpha_1,...,c\alpha_i,...,\alpha_n)=c\cdot\Phi(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_n)$$

מסקנה 7.6 לכל פונק' מולטי ליניארית:

- $\Phi(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\vec{0},...,\alpha_n)=0$
- $\Phi(\mathbf{c}\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_n)=\Phi(\alpha_1,...,\mathbf{c}\alpha_i,...,\alpha_n)$ וכו'.

הגדרה 7.7 פונקציה חילופית

$\Phi:V\times...\times V\to F$ תיקרא חילופית (alternating) אם מקיימת:

לכל $\alpha_1,...,\alpha_n\in V$, אם יש $1\leq i\neq j\leq n$ כך ש: $\alpha_i=\alpha_j$ אזי:

$\Phi(\alpha_1,...,\alpha_n)=0$

טענה 7.8 אם $\Phi : V\times ...\times V \to F$ פונק' מולטי ליניארית וחילופית, אזי לכל $1 \le i \neq j \le n$:

$$\Phi(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ..., \alpha_n) = -\Phi(\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n)$$

הוכחה: עקב זה שהיא חילופית, מתקיים:

$$0 = \Phi(\alpha_1, ..., (\alpha_i + \alpha_j), ..., (\alpha_i + \alpha_j), ..., \alpha_n) =$$

$$= \Phi(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_i + \alpha_j, ..., \alpha_n) + \Phi(\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_i + \alpha_j, ..., \alpha_n) =$$

$$= \Phi(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n) + \mathbf{\Phi(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ..., \alpha_n)} +$$

$$+\Phi(\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_j, ..., \alpha_n) + \mathbf{\Phi(\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n)}$$

וכמובן ששני האיברים שבהם יש שני α עם אינדקבים שווים מתאפסים, (אלה שלא מודגשים),

וכשמעבירים אגף התוצאה נובעת. ∎

משפט 7.9 תהינה $\Phi, \Phi' : M_n(F) \to F$ 2 פונק' מולטי ליניאריות וחילופיות,

(כאשר חושבים עליהן כפונק' על n השורות של $M_n(F)$),

ונניח ש־Φ לא זהותית 0.

אזי, קיים סקלר $c \in F$ כך ש־$\Phi' = c\Phi$

הוכחה: ההוכחה תנבע מהטענות הבאות: ∎

7.3 השפעת פעולות אלמנטריות על: $\Phi : M_n(F) \to F$ מולטי ליניארית + חילופית

יהיו $A, B \in M_n(F)$.

- <u>החלפת</u> <u>שורות</u>:
  אם B מתקבלת מ־A ע"י החלפת שורות,
  אזי $\Phi(B) = -\Phi(A)$
- <u>הכפלת</u> <u>שורה</u> i <u>בסקלר</u> $c \neq 0$:
  אם B מתקבלת מ־A ע"י הכפלת שורה i בסקלר $c \neq 0$,
  אזי $\Phi(B) = c\Phi(A)$

- <u>הוספת c פעמים שורה i לשורה j</u> ($i \neq j$):
אם B מתקבלת מ־A ע"י הוספת c פעמים שורה i לשורה j
אזי $\Phi(b) = \Phi(A)$.

כי: $$= \Phi(b) = \Phi\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j + c\alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \Phi\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ c\alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= \Phi(A) + c\Phi\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \Phi(A) + c \cdot 0 = \Phi(A)$$

7.4 מסקנות לגבי מט' הפיכות

מסקנה 7.10 פעולות אלמנטריות יכולות לשנות את Φ, אבל אם היתה 0 על A, תישאר 0.

ואם היתה שונה מ־0 על A, תישאר שונה מ־0.

מסקנה 7.11 נזכיר שאם A מט' $n \times n$ מעל שדה, אזי יש 2 אפשרויות:

- A לא הפיכה, ופעולות אלמנטריות מביאות אותה למטריצה מדורגת $n \times n$
D כך שהשורה האחרונה ב־D היא 0. ולכן $\Phi(D) = 0$ ולכן גם $\Phi(A) = 0$.

כלומר אם A לא הפיכה, אזי $\Phi(A) = 0$**.** (כאשר Φ מולטי ליניארית + חילופית, $A \in M_n(F)$)

- A הפיכה, ובמקרה זה, הפעולות האלמנטריות מביאות אותנו למט' היחידה I_n.
אז יש שתי אפשרויות:
אם $\Phi(I) = 0$ אזי גם $\Phi(A) = 0$ וזה כך לכל A הפיכה, ולכן $\Phi \equiv 0$ לכל מטריצה
כלומר מעין העתקת האפס.

אם לא, נניח $\Phi(I) = t \in F$, $t \neq 0$.

ונניח $\Phi'(I) = c \in F$.

טענה 7.12 בתנאים הנ"ל, לכל $A \in M_n(F)$: מתקיים $\Phi'(A) = \frac{c}{t}\Phi(A)$.

הוכחה: זה נכון עבור I.

כמו כן לכל A לא הפיכה זה נכון, כי אז $\Phi'(A) = \Phi(A) = 0$. (נשכח מחלוקה באפס...)

ואם A הפיכה:

אזי ניתן להגיע ממנה למט' היחידה ע"י כפל במט' אלמנטריות המייצגות פעולות: E_i.

וכל פעולה אלמנטרית כזאת כופלת את Φ ב־ ϵ_i (כלומר 1, -1, c או 1 בהתאם לסוג הפעולה)

ולכן:

$$\begin{cases} t = \Phi(I) = \epsilon_r \cdot ... \cdot \epsilon_1 \cdot \Phi(A) \\ c = \Phi'(I) = \epsilon_r \cdot ... \cdot \epsilon_1 \cdot \Phi'(A) \end{cases}$$ ולכן נחלק זו בזו וקיבלנו:

$$\frac{\Phi'(A)}{\Phi(A)} = \frac{\epsilon_r \cdot ... \cdot \epsilon_1 \cdot \Phi'(A)}{\epsilon_r \cdot ... \cdot \epsilon_1 \cdot \Phi(A)} = \frac{c}{t}$$ ■

מסקנה 7.13 יש לכל היותר פונק' מולטי ליניארית וחילופית **אחת** Φ המקיימת: $\Phi(I) = 1$

עובדה: יש אחת ויחידה כזו וקוראים לה $\Phi = det$!!!

מסקנה 7.14 (נוספת): אם $\Phi : M_n(F) \to F$ מולטי ליניארית + חילופית,

ו־$\Phi(I_n) = c \in F$ אזי $\Phi(A) = c \cdot det(A)$ לכל A.

7.5 הדטרמיננטה עצמה

הגדרה 7.15 $$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot ... \cdot a_{n\sigma(n)}$$

טענה 7.16 ראינו שdet היא מולטי ליניארית על שורות המט' A.

נטען שהיא **חילופית:** כלומר אם יש ב־A שתי שורות שוות אז $det(A) = 0$.

הוכחה: ראשית נזכור שהסימן של תמורת **חילוף** (כלומר שמחליפים רק שני איברים) הוא -1.

כעת נניח שהשורות s,t שוות: $a_{tr}=a_{sr}$ לכל $1\leq r\leq n$.

נסתכל בתמורה τ שמחליפה את s,t ולא מזיזה אף איבר אחר.

לכל תמורה $\sigma\in S_n$ נתאים בת זוג $\sigma'=\sigma\circ\tau$.

ומתקיים: $sg(\sigma')=sg(\sigma\circ\tau)=sg(\sigma)\cdot sg(\tau)=sg(\sigma)\cdot(-1)=-sg(\sigma)$

ונזכור שיש $n!$ תמורות. (דיסקרטית, מישהו...?)

ולכן, יהיו $\sigma_1,...,\sigma_{\frac{n!}{2}}$ כך ש־ $S_n=\{\sigma_1,\sigma_1',...,\sigma_{\frac{n!}{2}},\sigma_{\frac{n!}{2}}'\}$

ואז:

$$det(A)=\sum_{m=1}^{\frac{n!}{2}}sg(\sigma_m)\cdot a_{1\sigma_m(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma_m(n)}+\sum_{m=1}^{\frac{n!}{2}}sg(\sigma_m')\cdot a_{1\sigma_m'(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma_m'(n)}$$

וכמובן הם נגדיים אחד לשני ולכן סכומם הוא 0. ■

משפט 7.17 אם $A,B\in M_n(F)$ אזי: $det(AB)=det(A)\cdot det(B)$

הוכחה: נקבע את B. ונגדיר: $\Phi:M_n(F)\to F$ ע"י:

$\Phi(A)=det(AB)$.

ברור שמתקיים $\Phi(I)=det(B)$.

לפי המסקנה הקודמת (שלפני הטענה וההגדרה),

אם נוכיח ש־Φ היא מולטי ליניארית וחילופית, אזי נקבל:

(בהצבת $c=det(B)$): $det(AB)=\Phi(A)=det(A)\cdot c=det(A)det(B)$

כעת נוכיח זאת:

1) Φ <u>היא</u> <u>מולטי</u> <u>ליניארית</u>:

אם $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ (כאשר α_i מייצגים שורות),

אז $AB=\begin{pmatrix}\alpha_1B\\ \vdots\\ \alpha_nB\end{pmatrix}$

וכעת, אם $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i + \alpha_i' \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ אזי

$\Phi(A) = det(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i + \alpha_i' \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} B) = det(\begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \vdots \\ \alpha_i B + \alpha_i' B \\ \vdots \\ \alpha_n B \end{pmatrix})$ (נכון עקב דיסט' של כפל מט')

ומכיוון ש־det היא מולטי ליניארית:

$$= det(\begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \vdots \\ \alpha_i B \\ \vdots \\ \alpha_n B \end{pmatrix}) + det(\begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \vdots \\ \alpha_i' B \\ \vdots \\ \alpha_n B \end{pmatrix}) = det(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} B) + det(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i' \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} B)$$

$$= \Phi\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \Phi\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i' \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

ולכן הוכחנו את המולטי ליניאריות לחיבור.

כמו כן להכפלת שורה בסקלר. (ההוכחה דומה).

נראה **חילופיות:** אם שורות t, s שוות, אזי:

$$\Phi\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \\ \vdots \\ \alpha_t \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = det(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \\ \vdots \\ \alpha_t \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} B) = det(\begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \vdots \\ \alpha_s B \\ \vdots \\ \alpha_t B \\ \vdots \\ \alpha_n B \end{pmatrix}) = 0 \qquad \blacksquare$$

הגדרה 7.18 מטריצה משוחלפת

אם $A \in M_{m\times n}(F)$ נסמן: $B = A^T$ היא מטריצה n×m כך ש: $B_{ij} = A_{ji}$.

בפרט, אם $A \in M_{n\times n}(F)$ אז גם $A^T \in M_{n\times n}(F)$.

משפט 7.19 $A \in M_n(F)$, אזי $det(A^T) = det(A)$.

הוכחה: נסמן $B = A^T = (b_{ij})$.

$$det(B) = \sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}\cdot \ldots \cdot b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)1}\cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\cdot a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdot \ldots \cdot a_{n\sigma^{-1}(n)} =$$

וכעת, $sg(\sigma) = sg(\sigma^{-1})$ אז:

$$= \sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma^{-1})\cdot a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdot \ldots \cdot a_{n\sigma^{-1}(n)} =$$

אבל סדר הריצה על ה־σ־ות לא משנה, ולכן

$$= det(A)$$ ■

למה 7.20 למה $sg(\sigma) = sg(\sigma^{-1})$?

כי $\sigma\circ\sigma^{-1} = Id$ ולכן

$$1 = sg(Id) = sg(\sigma\circ\sigma^{-1}) = sg(\sigma)\cdot sg(\sigma^{-1})$$

ולכן או שניהם 1 או שניהם -1.

מסקנה 7.21 $det : M_n(F) \to F$ היא פונק' מולטי ליניארית וחילופית גם על **העמודות** של A.

$$det\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{pmatrix} = det(\ \beta_1 \mid \cdots \mid \cdots \mid \beta_n\ ^T) = det(\ \beta_1 \mid \cdots \mid \cdots \mid \beta_n\ )$$