

חשבון אינפיניטסימלי 2

סיכום: נריה אור

גירסא סופית, 1.01

סוכמו כל ההרצאות, ובנוסף כמה טענות עזר מהתרגול.
ע"פ הרצאות של ד"ר נועם ברגר וינאי גונצ'רובסקי. אין המרצים קשורים לסיכום זה בשום אופן.
בנוסף, המון תודה לכל החברים שהעירו והאירו, ותיקנו טעויות...

אין אחריות לתוכן הסיכום ולדיוקו - ייתכנו טעויות. השימוש על אחריות הקורא בלבד.

תוכן עניינים

6 האינטגרל המסויים	1
6 מוטיבציה	1.0.1
6 תכונות השטח	1.0.2
6 פונקציות מדרגה	1.0.3
7 תכונות אוסף פונקציות המדרגה בקטע סגור	1.0.4
8 האינטגרל של פונקציית מדרגה לא תלוי בחלוקה	1.0.5
8 תכונות האינטגרל	1.0.6
9 אינטגרל של פונקציות חסומות - הגדרה (אינטגרלים עליונים, תחתונים)	1.0.7
9 תנאי אם"ם חשוב לאינטגרביליות: קיום $\varphi_\epsilon \leq f \leq \psi_\epsilon$ מדרגות שחוסמות את הפונקציה	1.0.8
10 סוגי פונקציות אינטגרביליות: מדרגה, רציפות, מונוטוניות. ובנוסף, היות אוסף הפונקציות האינטגרביליות בקטע סגור מרחב ליניארי, סגור לכפל, סגור לניפוח\כיווץ, וסגור ל"הדבקה"	1.0.9
14 מסקנה: $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$	1.0.10
14 הרכבה של פונקציות אינטגרביליות אינה בהכרח אינטגרבילית - דוגמא	1.0.11
15 הרכבה של "רציפה(אינטגרבילית)" היא אינטגרבילית	1.0.12
18 אינטגרלים לפי דרבו, רימן	1.1
18 דרבו	1.1.1
19 רימן	1.1.2
19 שקילות רימן-דרבו	1.1.3
23 משפט על הגבול סכומי רימן של חלוקות בעלות רוחב שואף לאפס	1.1.4
24 עקרון הסנדוויץ'	1.1.5
25 האינטגרל מקיים את תכונת האדיטיביות $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ כאשר $a \leq c \leq b$	1.1.6
26 המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי	1.2
29 אינטגרלים לא אמיתיים	1.3
29 פונקציות שמוגדרות על קטע אינסופי מצד אחד	1.3.1
29 דוגמאות	1.3.2
32 קריטריון קושי, קריטריון השוואה (לקיום האינטגרל הלא אמיתי \int_a^∞)	1.3.3
34 אינטגרלים של פונקציות שאינן חסומות	1.3.4
34 אינטגרל על כל הישר: פלוס-מינוס אינסוף	1.3.5
36 התכנסות בהחלט ובתנאי	1.3.6
36 תנאי לייבניץ להתכנסות ("כולל בתנאי")	1.3.7
37 שיטות אינטגרציה	1.4
40 טורים	2
40 הגדרה כללית	2.1
40 דוגמאות	2.1.1

42	התכנסות טור גוררת שאיפת האיבר הכללי לאפס	2.1.2	
42	קריטריוני התכנסות	2.2	
42	קריטריון קושי	2.2.1	
43	קריטריון ההשוואה לאינטגרל	2.2.2	
43	קריטריון ההשוואה	2.2.3	
44	קריטריון העיבוי	2.2.4	
46	מבחן ההשוואה הגבולי	2.2.5	
46	מבחן ההשוואה המוכלל	2.2.6	
47	מבחן המנה	2.2.7	
48	מבחן השורש	2.2.8	
48	הערה קטנה לגבי מבחן המנה, מבחן השורש	2.2.9	
48	עוד הגדרות וחוקים	2.3	
48	החוק הקומוטטיבי לטורים חיוביים	2.3.1	
50	החוק האסוציאטיבי לטורים מתכנסים	2.3.2	
51	טענה מהתרגול על אסוציאטיביות והכנסת סוגריים על איברים בעלי אותו סימן	2.3.3	
51	קונבולוציה (מכפלת קושי) של טורים	2.3.4	
52	משפט לגבי קונבולוציה	2.3.5	
53	התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי	2.3.6	
54	קריטריון לייבניץ להתכנסות	2.3.7	
55	מסקנה: הטור ההרמוני עם סימנים מתחלפים מתכנס, +הערות נוספות +משפט רימן	2.3.8	
56	x^+ , x^- והטורים הנוגעים להם	2.3.9	
57	משפט לגבי קומוטטיביות של איברים בטור המתכנס בהחלט	2.3.10	
58	משפט על קונבולוציה והתכנסות בהחלט	2.3.11	
60	שני קריטריונים נוספים - דיריכלה, אבל	2.4	
60	קריטריון דיריכלה	2.4.1	
62	קריטריון אבל	2.4.2	
62	מספר דוגמאות	2.5	
63	מכפלות אינסופיות (מהתרגול)	2.6	
64	סדרות וטורים של פונקציות	3	
64	סדרות	3.1	
64	הגדרות בסיסיות	3.1.1	
65	כמה דוגמאות	3.1.2	
67	התכנסות במידה שווה	3.1.3	
67	קריטריון קושי להתכנסות במ"ש	3.1.4	
68	התכנסות במ"ש של פונקציות רציפות גוררת רציפות פונקציית הגבול	3.1.5	

69	תנאי שקול להתכנסות במ"ש	3.1.6	
69	דוגמא למדוע אי אפשר להחליף אינטגרציה עם גבול	3.1.7	
70	אם סדרה של פונק' אינטגרביליות בקטע $[a, b]$ מתכנסת במ"ש ל- f , אז f אינטגרבילית, והאינטגרל שלה הוא הגבול של האינטגרל של הסדרה.	3.1.8	
71	האם התכנסות של פונקציות משמרת גזירות?	3.1.9	
72	משפט לגבי הנגזרות	3.1.10	
72	משפט דיני	3.1.11	
74	משפט וירשטראס	3.1.12	
77	טורים של פונקציות	3.2	
77	הגדרה בסיסית	3.2.1	
77	קריטריון M של וירשטראס	3.2.2	
78	דוגמא	3.2.3	
79	טורי חזקות	3.3	
79	הגדרה	3.3.1	
79	דוגמאות	3.3.2	
79	התנהגות טור חזקות - מתקיימת אחת משלוש אפשרויות	3.3.3	
80	בטור חזקות עם רדיוס $0 <$ הטור מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכל ב- $(-R, R)$	3.3.4	
81	מסקנה לגבי רציפות	3.3.5	
81	משפט קושי-הדמאר	3.3.6	
82	משפט אבל	3.3.7	
83	שני משפטים על טורי חזקות ונגזרות, אינטגרלים	3.3.8	
85	משפט לגבי שיוון של מקדמים בטורי חזקות	3.3.9	
86	פונקציות אנליטיות	3.4	
86	הגדרה ודוגמאות	3.4.1	
86	משפט שגורר את היותה של פונקציה אנליטית בקטע	3.4.2	
88	"אריתמטיקה" של פונקציות אנליטיות	3.4.3	
89	הפונקציות הטריגונומטריות (\sin, \cos) + הגדרת π	3.4.4	
91	חשבון אינפיניטסימלי בכמה משתנים	4	
91	בסיס	4.1	
91	מרחק והיותו מטריקה	4.1.1	
93	גבול של סדרה ב- \mathbb{R}^d ותנאים שקולים לו	4.1.2	
95	תנאי קושי	4.1.3	
95	סביבות של נקודה: כדורים ותיבות	4.1.4	
96	פונקציות - הגדרת הגבול, הגבול לפי סדרות, ורציפות	4.1.5	
97	דוגמאות	4.1.6	
98	נגזרות חלקיות ונגזרות	4.2	

98	הגדרה - נגזרת חלקית	4.2.1
98	שתי דוגמאות קטנות	4.2.2
99	נגזרת: הגדרה, הגדרת הגזירות, ויחידות הנגזרת	4.2.3
100	עובדה לגבי כך שקיום נגזרת ב- x_0 גורר קיום הנגזרות החלקיות, וערכן ידוע	4.2.4
101	פונקציה גזירה ברציפות: הגדרה, ומשפט שאומר שאם f גזירה ברציפות בסביבת x_0 אז היא גזירה ב- x_0	4.2.5
104	דוגמא שבה קיום של נגזרות חלקיות אינו מספיק לקיומה של נגזרת	4.2.6
106	נגזרת כקירוב ליניארי \ אפני	4.2.7
107	דוגמא	4.2.8
108	קריטריון קרטיאודורי לגזירות (חד-מימדי)	4.2.9
108	קריטריון קרטיאודורי לגזירות (רב-מימדי)	4.2.10
111	נגזרות כיוונית	4.3
111	הגדרות וטרמינולוגיה	4.3.1
112	משפט על הגרדיאנט: אם f גזירה ב- x_0 , אז $D_l f(x_0) = \lambda \cdot l$ לכל כיוון l	4.3.2
112	מסקנה - מה קורה אם $\lambda = \bar{0}$, וגם לגבי כיוון הגרדיאנט (הכיוון בו הנ. הכיוונית היא הגדולה ביותר)	4.3.3
113	נגזרות שניות ומשפט הנגזרות המעורבות	4.4
113	נגזרות שניות - הגדרה ודוגמא	4.4.1
114	משפט הנגזרות המעורבות	4.4.2
118	קירובים ריבועיים לפונקציות בכמה משתנים	4.5
118	הקדמה קצרה	4.5.1
119	הוכחת הקירוב הריבועי	4.5.2
124	על תבניות ריבועיות	4.5.3
124	דוגמאות בנוגע לתבניות ריבועיות	4.5.4
125	קצת משפטים על תבניות ריבועיות	4.5.5
127	מיון של נקודות קריטיות	4.6
127	הקשר בין הנגזרת השניה לבין נקודות קריטיות	4.6.1
129	מה קורה כאשר $d \geq 3$ (על קצה המזלג)	4.6.2
130	מסילות וכלל השרשרת	4.7
130	מסילות: הגדרה, כמה דוגמאות, והגדרת הגזירות של מסילה בנקודה	4.7.1
130	כלל השרשרת	4.7.2
132	טענות מהתרגול - לגבי נקודות קריטיות	4.7.3

1 האינטגרל המסויים

1.0.1 מוטיבציה

אנו רוצים להגדיר ולחשב את המושג של שטח של תחום חסום במישור.

אנו מחפשים פונקציה:

$$\mu : \mathbb{R} \rightarrow (\text{אוסף התחומים במישור})$$

שלכל תחום תתן את שטחו.

נציין שלא קיימת פונקציית שטח כללית.

1.0.2 תכונות השטח

1. אי שליליות: לכל תחום R , $\mu(R) \geq 0$.

2. מונוטוניות: אם $R_1 \subseteq R_2$ אז $\mu(R_1) \leq \mu(R_2)$.

3. אדיטיביות: אם $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ אז $\mu(R_1 \cup R_2) = \mu(R_1) + \mu(R_2)$.

4. אינוריאנטיות להזזות: אם $R_2 = R_1 + a$, $a \in \mathbb{R}^2$ אז $\mu(R_1) = \mu(R_2)$.
(כלומר: $R_2 = \{x + a \mid x \in R_1\}$)

5. אם R הוא מלבן שצלעותיו a ו- b אז $\mu(R) = ab$.

נצמצם את הדיון לשטח שכלוא מתחת לגרף של פונקציה f .

יהיו $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. מהו השטח של התחום:

$$\{ \langle x, y \rangle : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x) \}$$

נציין שעבור שטח "שלילי", כלומר שנמצא מתחת לציר ה- x , נבחר לחסרו מהשטח הכולל, כלומר הוא ממש מקבל סימן שלילי.

כעת נגדיר את האינטגרל המסויים:

תוכנית העבודה:

בשלב הראשון נגדיר את האינטגרל המסויים על מחלקה של פונקציות שבה קל להגדירו.

בשלב השני נרחיב את ההגדרה למחלקה יותר רחבה.

בשלב השלישי ניתן הגדרות שקולות.

1.0.3 פונקציות מדרגה

תחילה נגדיר מושג בסיסי שיעזור לנו בהמשך:

הגדרה 1.1 פונקציית מדרגה

יהיו $a < b$. **חלוקה** P (Partition) של $[a, b]$ היא

קבוצה סדורה **סופית** $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ כך ש- $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת **פונקציית מדרגה ביחס לחלוקה** P אם היא קבועה על כל קטע פתוח (x_{i-1}, x_i) .

או במילים אחרות, אם קיימים c_1, \dots, c_n כך ש- $c_i = \varphi|_{(x_{i-1}, x_i)}$.

הערות:

- בהגדרה לא התייחסנו לערך של φ בנקודות החלוקה.
 - φ רציפה בכל נקודה שאינה נק' חלוקה.
 - אם הפונק' רציפה בכל נק' החלוקה אז היא קבועה. (ההוכחה מושארת לקורא).
- פונקציה φ נקראת **פונקציית מדרגה** אם קיימת חלוקה P כך ש- φ היא פונק' מדרגה ביחס ל- P . נסמן ב- $S = S_{[a,b]}$ את אוסף פונקציות המדרגה ב- $[a, b]$.

1.0.4 תכונות אוסף פונקציות המדרגה בקטע סגור

משפט 1.2 תכונותיה של S :

1. S סגורה תחת סכום וכפל בסקלר.
2. S סגורה תחת מכפלה.
3. אם $\varphi \in S_{[a,b]}$ ו- $a \leq c \leq d \leq b$ אז $\varphi|_{[c,d]} \in S_{[c,d]}$.
4. אם $\varphi \in S_{[c,d]}$ ו- $a \leq c \leq d \leq b$ ונגדיר $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ כך:

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{if } x \in [c, d] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

אז ψ גם היא פונק' מדרגה.

הוכחה: (חלקית)

(1)

(i)

תהי φ פונק' מדרגה ביחס לחלוקה P , ו- $\lambda \in \mathbb{R}$ סקלר. אז לכל i , φ קבועה בקטע (x_{i-1}, x_i) ולכן גם $\lambda\varphi$ קבועה על הקטע (x_{i-1}, x_i) . ולכן $\lambda\varphi$ פונק' מדרגה ביחס ל- P .

(ii)

תהי φ_1 פונק' מדרגה ביחס לחלוקה P_1 ,

ו- φ_2 פונק' מדרגה ביחס לחלוקה P_2 .

תהי $P = P_1 \cup P_2$. כעת גם φ_1 וגם φ_2 הן פונק' מדרגה ביחס ל- P .

ולכן, אם $P = \{z_0, \dots, z_n\}$ אז φ_1 ו- φ_2 קבועות בקטע (x_{i-1}, x_i) לכל i ,

ולכן גם סכומן קבוע באותו הקטע,

ולכן $\varphi_1 + \varphi_2$ היא פונק' מדרגה ביחס ל- P .

ולכן $\varphi_1 + \varphi_2 \in S$

(2) אותה הוכחה כמו (1) (ii).

(3,4) לא הוכחנו בהרצאה.

1.3 הגדרה אינטגרל של פונקציית מדרגה

תהי φ פונק' מדרגה ביחס לחלוקה $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ כך ש- $c_i = \varphi|_{(x_{i-1}, x_i)}$.

נגדיר: $I_P \varphi = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$ האינטגרל של φ לפי החלוקה P .

1.0.5 האינטגרל של פונקציית מדרגה לא תלוי בחלוקה

טענה 1.4 האינטגרל של פונק' מדרגה לא תלוי בחלוקה.

הוכחה: תהי פונק' מדרגה לפי P_1 ולפי P_2 .

אנו רוצים להראות ש- $I_{P_1}\varphi = I_{P_2}\varphi$.

נניח ש- $P_1 \subseteq P_2$ כלומר: $P_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$, $P_2 = \{y_0, \dots, y_m\}$

וקיימים h_1, \dots, h_n כך ש- $x_i = y_{h_i}$ לכל i .

עכשיו,

$$I_{P_2}\varphi = \sum_{i=1}^m (y_i - y_{i-1}) \cdot \varphi|_{(y_{i-1}, y_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{h_1} (y_i - y_{i-1}) \cdot \varphi|_{(y_{i-1}, y_i)} + \sum_{i=h_1+1}^{h_2} (y_i - y_{i-1}) \cdot \varphi|_{(y_{i-1}, y_i)} + \dots + \sum_{i=h_{n-1}+1}^{h_n} \dots =$$

$$\varphi|_{(x_0, x_1)} \sum_{i=1}^{h_1} (y_i - y_{i-1}) + \varphi|_{(x_1, x_2)} \sum_{i=h_1+1}^{h_2} (y_i - y_{i-1}) + \dots + \varphi|_{(x_{n-1}, x_n)} \sum_{i=1}^{h_n} (y_i - y_{i-1}) =$$

$$\varphi|_{(x_0, x_1)}(x_1 - x_0) + \varphi|_{(x_1, x_2)}(x_2 - x_1) + \dots + \varphi|_{(x_{n-1}, x_n)}(x_n - x_{n-1}) = I_{P_1}\varphi$$

וכעת, יהיו P_1, P_2 שתי חלוקות כך ש- φ פונק' מדרגה ביחס לכל אחת מהן, מבלי להניח הכלה ביניהן.

נגדיר: $P = P_1 \cup P_2$ אז φ פונק' מדרגה ביחס ל- P .

$$I_{P_1}\varphi = I_P\varphi = I_{P_2}\varphi \quad \text{ולכן ממה שראינו: } P_2 \subseteq P \text{ ו- } P_1 \subseteq P$$

ולכן מכאן ואילך, לפונקציית מדרגה נסמן: $I\varphi = I_{[a,b]}\varphi$.

1.0.6 תכונות האינטגרל

משפט 1.5 תכונות האינטגרל:

יהיו f, g פונקציות מדרגה מהקטע $[a, b]$ ל- \mathbb{R} .

1. חיוביות.

אם $f(x) \geq 0$ לכל $x \in [a, b]$ אז $I f \geq 0$. (ואם $f(x) > 0$ אז $I f > 0$.)

2. ליניאריות.

אם $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ אז $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I f + \beta I g$

3. מונוטוניות.

אם $f(x) \geq g(x)$ לכל $x \in [a, b]$ אז $I_f \geq I_g$.
(נובע מ-1+2, כנראה(?)).

4. אדיטיביות.

תהי $c \in]a, b[$ אז $I_{[a,b]}f = I_{[a,c]}f + I_{[c,b]}f$.

5. יחידה.

אם $f(x) = 1$ לכל x , אז $I_{[a,b]}f = b - a$.

הוכחה: ניתנה בתרגיל (2), חלקית...?

1.0.7 אינטגרל של פונקציות חסומות - הגדרה (אינטגרלים עליונים, תחתונים)

תהי $B[a, b]$ קבוצת הפונקציות החסומות מ- \mathbb{R} ל- $[a, b]$.

אנו רוצים להגדיר את האינטגרל ל- $B[a, b]$.

הערה: לא נצליח להגדיר אינטגרל לכל $f \in B[a, b]$, אבל כן נצליח למשפחה רחבה של פונקציות.

תהי $f \in B[a, b]$. נגדיר:

$$\Phi_f = \{\varphi \in S[a, b] : \varphi \leq f\}$$

$$\Psi_f = \{\psi \in S[a, b] : \psi \geq f\}$$

וגם נגדיר:

$$\underline{I}f = \sup_{\{\varphi \in \Phi_f\}} I\varphi$$

$$\bar{I}f = \inf_{\{\psi \in \Psi_f\}} I\psi$$

כעת, אינטואיטיבית, אם יש אינטגרל I_f ל- f , אז $\underline{I}f \leq I_f \leq \bar{I}f$.

הגדרה 1.6 אינטגרביליות של פונקציה חסומה

תהי $f \in B[a, b]$. אנו אומרים ש- f אינטגרבילית אם $\bar{I}f = \underline{I}f$, ובמקרה זה אנו מגדירים את האינטגרל של f להיות $\underline{I}f$.

סימון: האינטגרל של f על הקטע $[a, b]$ יסומן ע"י $\int_a^b f(x)dx$.

שאלה: למה ה- \sup, \inf הללו קיימים? נראה ש- \sup קיים לדוגמא.
נראה ש- $\{I\varphi : \varphi \in \Phi_f\}$ חסומה ולא ריקה:
לא ריקה: f חסומה ולכן קיים u כך ש- $f(x) \geq u$ לכל x , והפונקציה $\varphi \equiv u$ היא ב- Φ_f .
חסומה: קיים M כך ש- $f(x) \leq M$ לכל x . לכן $\varphi(x) \leq f(x) \leq M$ לכל $\varphi \in \Phi_f$, ו- $I\varphi \leq I(\text{the constant function } M) = M(b-a)$.

כעת נוכיח טענה חשובה:

1.0.8 תנאי אס"ם חשוב לאינטגרביליות: קיום $\varphi_\epsilon \leq f \leq \psi_\epsilon$ מדרגות שחוסמות את הפונקציה

(כנראה שתנאי זה תקף רק בקטע סגור $[a, b]$).

למה 1.7 אם לכל ϵ קיימות פונק' מדרגה $\psi_\epsilon, \varphi_\epsilon$

כך ש- $\varphi_\epsilon \leq f \leq \psi_\epsilon$ ו- $I\psi_\epsilon - I\varphi_\epsilon < \epsilon$, אז אינטגרבילית,

ולהפך - אם f אינטגרבילית אז אפשר למצוא לכל $\epsilon > 0$, $\psi_\epsilon, \varphi_\epsilon$ כאלה.

הוכחה: כיוון ראשון:

יהי $\epsilon > 0$ כלשהו. נניח שקיימים $\psi_\epsilon, \varphi_\epsilon$ כאלה. אז:

$$\underline{I}f = \sup\{I\varphi : \varphi \leq f\} \geq I\varphi_\epsilon \geq I\psi_\epsilon - \epsilon \geq \inf\{I\psi : \psi \geq f\} - \epsilon = \bar{I}f - \epsilon$$

כאשר " $I\varphi_\epsilon \geq I\psi_\epsilon - \epsilon$ " בגלל ההנחה ש- $I\psi_\epsilon - I\varphi_\epsilon < \epsilon$.

וכעת, מההגדרה של $\bar{I}f \geq \underline{I}f$, קיבלנו: $\bar{I}f \geq \underline{I}f \geq \bar{I}f - \epsilon$, ומכיון שזה נכון לכל ϵ ,

אז $\bar{I}f = \underline{I}f$ אינטגרבילית.

בכיוון ההפוך: אם f אינטגרבילית, אז $\int_a^b f dx = \bar{I}f = \underline{I}f$.

ואז קיים: $\psi_\epsilon \in \Psi_f$ כך ש-

$$I\psi_\epsilon \leq \inf\{I\psi : \psi \geq f\} + \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f dx + \frac{\epsilon}{2}$$

ובאותו אופן קיים $\varphi_\epsilon \in \Phi_f$ כך ש-

$$I\varphi_\epsilon \geq \sup\{I\varphi : \varphi \leq f\} - \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f dx - \frac{\epsilon}{2}$$

ואז, $I\psi_\epsilon - I\varphi_\epsilon \leq \epsilon$.

(כזו: $I\psi_\epsilon \leq \int_a^b f dx + \frac{\epsilon}{2}$ וגם $I\varphi_\epsilon \geq \int_a^b f dx - \frac{\epsilon}{2}$ $\Leftrightarrow -I\varphi_\epsilon \leq -\int_a^b f dx + \frac{\epsilon}{2}$)

ומחיבור שני אי השוונות מקבלים את הנדרש

1.0.9 סוגי פונקציות אינטגרביליות: מדרגה, רציפות, מונוטוניות. ובנוסף, היות אוסף הפונקציות האינטגרביליות בקטע סגור מרחב ליניארי, סגור לכפל, סגור לניפוח\כיווץ, וסגור ל"הדבקה"

משפט 1.8 יהי $R[a, b]$ אוסף הפונקציות האינטגרביליות בקטע $[a, b]$.

1. R הוא **מרחב ליניארי**. (סכום של אינטגרביליות, וכפל של אינטגרביליות בסקלר הוא אינטגרבילי).

2. **סגירות לכפל:** אם $f, g \in R$ אז $f \cdot g \in R$ (כאשר $f \cdot g(x) = f(x)g(x)$).

3. R **סגורה לניפוח וכיווץ**.

כלומר, אם $f \in R[a, b]$ ו- $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $g(x) = f[a + \frac{b-a}{d-c}(x-c)]$ אז $g \in R[c, d]$

(כדאי לבדוק ולהציב $f(c)$ וגם $f(d)$ ולראות מה קורה כדי להבין טוב יותר).

4. כל פונקציות **המדרגה** נמצאות ב- R .

5. כל הפונקציות **הרציפות** נמצאות ב- R . (על הקטע הסגור $[a, b]$).

6. כל הפונקציות **המונוטוניות** נמצאות ב- R . (על הקטע הסגור $[a, b]$).

7. סגורה ל"הדבקה", כלומר

אם $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $a < c < b$ ו- $f|_{[a,c]} \in R[a,c]$ ו- $f|_{[c,b]} \in R[c,b]$ אז $f \in R[a,b]$.

טענה 1.9 דוגמה: פונקציית דיריכלה לא אינטגרבילית. (ללא הוכחה).

כעת נוכיח את סעיפי המשפט: **הוכחה:** 4 (מדרגה) - טריוויאלי.

וגם: **הוכחה:** 5 (פונק' רציפות)

תהי f פונקציה **רציפה** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ואנו רוצים להראות שהיא אינטגרבילית.

f רציפה על קטע סגור, ולכן רציפה בו במ"ש. (משפט קנטור, אינפי 1).

לכן לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - y| < \delta$ אז $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$.

תהי $P = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ חלוקה, כך שלכל i , $|x_{i+1} - x_i| < \delta$.

נגדיר את $\psi_\epsilon, \varphi_\epsilon$: לכל i , $\psi_\epsilon(x_i) = \varphi_\epsilon(x_i) = f(x_i)$,

ולכל $x_i < y < x_{i+1}$

$$\varphi_\epsilon(y) = \inf\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} = \min\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$$

$$\psi_\epsilon(y) = \sup\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} = \max\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$$

המינימום והמקסימום מתקבלים כי f רציפה בקטע סגור $[x_i, x_{i+1}]$.

קל להוכיח ש- $\psi_\epsilon, \varphi_\epsilon$ הן פונק' מדרגה, וכן ש- $\varphi_\epsilon \leq f \leq \psi_\epsilon$.

צריך להראות ש- $I\psi_\epsilon - I\varphi_\epsilon < \epsilon$ אז ראשית:

$$I\psi_\epsilon - I\varphi_\epsilon = I(\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon)$$

וכעת, לכל y , אם $y = x_i$ לאיזשהו i אז $\psi_\epsilon(y) - \varphi_\epsilon(y) = 0$

ואם $x_i < y < x_{i+1}$ אז:

$$\psi_\epsilon(y) - \varphi_\epsilon(y) = \max\{f : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} - \min\{f : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} < \frac{\epsilon}{b-a}$$

כי הנקודה בה מתקבלים ה- \min וה- \max מרוחקות פחות מ- δ .

ומקבלים:

$$I(\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon) \leq I\left(\frac{\epsilon}{b-a}\right) = (b-a) \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon$$

(נשים לב ש- $\frac{\epsilon}{b-a}$ הוא פונק' קבועה, ולכן האינטגרל שלה הוא של "מלבן").

וגם: **הוכחה: 6** (פונק' מונוטונית)

תהי f מונוטונית, עולה. (ההוכחה ליורדת דומה אך קצת שונה).

לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ פונק' מדרגה:

נחלק את $[a, b]$ ל- n קטעים באורך שווה.

$$a = x_0, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_k = a + k \frac{b-a}{n}$$

ולכל $0 \leq k \leq n$, $\varphi(x_k) = \psi(x_k) = f(x_k)$, כלומר על נקודות החלוקה, ערכיהן שווים.

לכל $y \in]x_k, x_{k+1}[$ נגדיר:

$$\varphi_n(y) = f(x_k), \psi_n(y) = f(x_{k+1})$$

מכיוון ש- f מונוטונית עולה, $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$.

ולכן לפי הלמה, מספיק להוכיח ש- $I(\psi_n - \varphi_n)$ קטן ככל שנרצה.

וכעת,

$$I\psi_n - I\varphi_n = I(\psi_n - \varphi_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(\psi_{|(x_k, x_{k+1})} - \varphi_{|(x_k, x_{k+1})}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) =$$

נשים לב שזהו סכום טלסקופי, ולכן:

$$= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

נבחר ϵ . אם n הוא כזה ש- $\frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon$ אז ניקח $\varphi_\epsilon = \varphi_n$ ו- $\psi_\epsilon = \psi_n$ וזהו.

. **הוכחה: 1** (R הוא מרחב ליניארי)

סגירות לחיבור:

יהיו $f, g \in R$. נראה ש- $f + g \in R$.

נבחר ϵ . מהלמה, קיימות $\varphi_1 \leq g \leq \psi_1$ ו- $\varphi_2 \leq f \leq \psi_2$ כך ש:

$$I\psi_1 - I\varphi_1 < \frac{\epsilon}{2}$$

$$I\psi_2 - I\varphi_2 < \frac{\epsilon}{2}$$

ואז, $\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g \leq \psi_1 + \psi_2$ ומתקיים:

$$I(\psi_1 + \psi_2) - I(\varphi_1 + \varphi_2) = I(\psi_1 - \varphi_1 + \psi_2 - \varphi_2) = I(\psi_1 - \varphi_1) + I(\psi_2 - \varphi_2) < \epsilon$$

ולכן $f + g$ אינטגרבילית.

סגירות לכפל בסקלר:

הערה: יש הבדל בין סקלר חיובי ושלילי. הוכחה מלאה מושארת כתרגיל....):
יהיו $f, g \in R$ ונראה ש- $h = f \cdot g$ אינטגרבילית. נוכיח זאת במקרה ש- f, g אי שליליות.

עבור המקרה הכללי: f, g חסומות, ולכן יש $M > 0$ כך ש- $f, g > -M$.
ואז: $(M + f)(M + g) \in R$

$$f \cdot g = (M + f)(M + g) - Mf - Mg - M^2$$

כאשר: Mf, Mg הן כפל בסקלר ולכן אינטגרביליות, ו- M^2 קבוע ולכן אינטגרבילי.
ולכן הכל ביחד אינטגרבילי.

נניח ש- $f, g < M$. (נזכור שמניחים שהן אי שליליות)

נבחר: $0 \leq \varphi_1 \leq g \leq \psi_1 \leq M$ ו- $0 \leq \varphi_2 \leq f \leq \psi_2 \leq M$, ונסמן:

ואז: $\lambda_1 = \psi_1 - \varphi_1$ ו- $\lambda_2 = \psi_2 - \varphi_2$

$$I\lambda_1 = I\psi_1 - I\varphi_1 \leq \frac{\epsilon}{3M}$$

$$I\lambda_2 = I\psi_2 - I\varphi_2 \leq \frac{\epsilon}{3M}$$

ועכשיו: (ונשים לב שעכשיו משתמשים באי-שליליות)

$$\varphi_1 \varphi_2 \leq f \cdot g \leq \psi_1 \psi_2$$

ועכשיו:

$$\psi_1 \psi_2 - \varphi_1 \varphi_2 = \psi_1 \psi_2 - [\psi_1 - \lambda_1][\psi_2 - \lambda_2] = \psi_1 \lambda_2 + \psi_2 \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2 \leq M \lambda_2 + 2M \lambda_1$$

ולכן \Leftarrow

$$I\psi_1 \psi_2 - I\varphi_1 \varphi_2 \leq M \cdot I\lambda_2 + 2M \cdot I\lambda_1 \leq 3M \frac{\epsilon}{3M} = \epsilon$$

■

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{1.0.10 מסקנה}$$

1.10 מסקנה נשים לב שאם f, g אינטגרביליות, אז $\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$

הוכחה: מספיק להראות ש- $\underline{I}(f + g) = \underline{I}f + \underline{I}g$ (כי הוא שווה גם ל- \overline{I} ...)

תחילה נראה ש- $\underline{I}(f + g) \geq \underline{I}f + \underline{I}g$:

$$\underline{I}(f + g) \geq I(\varphi_1 + \varphi_2) = I\varphi_1 + I\varphi_2 \geq \underline{I}f - \frac{\epsilon}{2} + \underline{I}g - \frac{\epsilon}{2} = \underline{I}f + \underline{I}g - \epsilon$$

והנ"ל נכון לכל $\epsilon > 0$, ולכן $\underline{I}(f + g) \geq \underline{I}f + \underline{I}g$

באותו אופן מראים ש- $\overline{I}(f + g) \leq \overline{I}f + \overline{I}g$

וכעת:

$$\int_a^b f dx + \int_a^b g dx = \underline{I}f + \underline{I}g \leq \underline{I}(f + g) =$$

$$= \int_a^b (f + g) dx = \overline{I}(f + g) \leq \overline{I}f + \overline{I}g = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

■

$$\int_a^b f dx + \int_a^b g dx = \int_a^b (f + g) dx \quad \text{ומכאן,}$$

1.0.11 הרכבה של פונקציות אינטגרביליות אינה בהכרח אינטגרבילית - דוגמא

1.11 טענה הרכבה של פונקציות אינטגרביליות אינה בהכרח אינטגרבילית.

לדוגמא: $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ שמקיימת:

$$f(0) = f(1) = 0$$

ובנוסף,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{m} & \text{if } x = \frac{n}{m} \text{ (The most reduced form)} \end{cases}$$

זוהי פונקציית רימן, עם וריאציה קלה. הוכחנו בתרגיל 2 (שאלה 5) שפונק' רימן היא אינטגרבילית. כמובן שתוספת שתי הנקודות בקצוות הקטע לא משנה עובדה זו. כעת,

נגדיר: $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ כך:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

כמובן g -פונקציית מדרגה, ולכן אינטגרבילית. וכעת, נרכיב אותן ומתקיים:

$$\text{לכל } x \in]0, 1[$$

$$\text{Dirichlet's function} = g(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

וידוע שפונק' דיריכלה אינה אינטגרבילית. (זוהי פונק' מדרגה עם מספר לא סופי של נק' חלוקה).

1.0.12 הרכבה של "רציפה(אינטגרבילית)" היא אינטגרבילית

משפט 1.12 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית, ותהי $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה,

$$\text{ונגדיר } h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ע"י } h(x) = g(f(x)).$$

אז h אינטגרבילית.

הוכחה: בהינתן ϵ עלינו למצוא פונק' מדרגה $\psi_\epsilon \leq h \leq \varphi_\epsilon$ כך ש- $I(\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon) < \epsilon$.

f חסומה כי היא אינטגרבילית, ולכן קיים $M > 0$ כך ש $M > b - a$,

$$\text{ולכל } x \in [a, b] \text{ מתקיים } -M < f(x) < M.$$

כמו כן, נטען ש- h חסומה, ולכן נבחר את M כך שגם $-M < h(x) < M$.

למה h חסומה? כי f חסומה, ולכן תמונת f בקטע $[c, d]$. כמו כן g רציפה ולכן חסומה בקטע $[c, d]$. ומכאן, $h(x) = g(f(x))$ חסומה.

כעת, יהי $\epsilon' > 0$ מספר המקיים: $\epsilon'(M + 2) < \epsilon$.

יהי $\delta > 0$ מספר המקיים שלכל $-M \leq x, y \leq M$ המקיימים:

$$|g(x) - g(y)| < \epsilon' \text{ מתקיים } |x - y| < \delta.$$

קיים כזה δ כי g רבמ"ש על $[-M, M]$.

(אינפי 1: **משפט קנטור:** רציפות בקטע סגור גוררת רבמ"ש).

$$\text{ויהי } \delta' < \frac{\delta \epsilon'}{M}$$

סוף ה-הי-ים, ניגש להוכחה:

f אינטגרבילית, ולכן קיימים $-M \leq \varphi' \leq f \leq \psi' \leq M$ (מדרגות),

$$\text{כך ש } I(\psi' - \varphi') < \delta'$$

תהי $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ חלוקה של $[a, b]$ שגם φ' וגם ψ' הן פונק' מדרגה לפיה.

נגדיר $\psi_\epsilon, \varphi_\epsilon$ פונק' מדרגה לפי אותה החלוקה באופן הבא:

$$\text{לכל } 0 \leq i \leq n : \varphi_\epsilon(x_i) = h(x_i) = \psi_\epsilon(x_i)$$

ולכל $0 \leq i \leq n - 1$ ו- $x_i \leq y \leq x_{i+1}$ ניקח:

$$\varphi_\epsilon(y) = \inf\{h(x) \mid x_i < x < x_{i+1}\}$$

$$\psi_\epsilon(y) = \sup\{h(x) \mid x_i < x < x_{i+1}\}$$

ברור ש- $\psi_\epsilon \leq h \leq \varphi_\epsilon$ וכן, $\varphi_\epsilon \leq \psi_\epsilon$ וכן, $\varphi_\epsilon \leq h \leq \psi_\epsilon$ הן פונק' מדרגה.

נותר להראות ש- $I(\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon) < \epsilon$.

סימון: אם φ פונק' מדרגה לפי חלוקה $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ אז לכל $i = 0, \dots, (n-1)$, φ_i הוא הערך של φ מקבלת על הקטע (x_i, x_{i+1}) .

כעת, אנחנו יודעים ש- $I(\psi' - \varphi') < \delta' < \frac{\delta \epsilon'}{M}$ (לפי הגדרתם), כלומר:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(\psi'_i - \varphi'_i) < \delta'$$

תהי $B \subseteq \{0, \dots, (n-1)\}$ קבוצת ה- i ים כך ש- $\psi'_i - \varphi'_i \geq \delta$

ותהי $A = \{0, \dots, (n-1)\} \setminus B$ קבוצת ה- i ים כך ש- $\psi'_i - \varphi'_i < \delta$.

טענה:

$$\sum_{i \in B} (x_{i+1} - x_i) \leq \frac{\epsilon'}{M}$$

הוכחה: נניח בשלילה ש- $\sum_{i \in B} (x_{i+1} - x_i) > \frac{\epsilon'}{M}$. אז:

$$I(\psi' - \varphi') = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(\psi'_i - \varphi'_i)$$

ונשים לב שהכל שם חיובי. ולכן אם ניקח רק חלק מהאיברים, נקטין את הסכום:

$$\geq \sum_{i \in B} (x_{i+1} - x_i)(\psi'_i - \varphi'_i) \geq \delta \sum_{i \in B} (x_{i+1} - x_i)$$

כאשר δ נכנס לכאן מהגדרת B . ולפי הנחת השלילה:

$$> \frac{\delta \epsilon'}{M} > \delta'$$

(זה נכון לפי הגדרת δ'). וקיבלנו **סתירה**, כי אמרנו קודם שהסכום הנ"ל קטן מ- δ' .

נוכיח טענת עזר נוספת:

טענה:

לכל $\psi_{\epsilon_i} - \varphi_{\epsilon_i} \leq \epsilon'$, $i \in A$
הוכחה: יהי $i \in A$. לכל $y_1, y_2 \in (x_i, x_{i+1})$, מתקיים:

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq \psi'_i - \varphi'_i < \delta$$

לכן, מבחירת δ (נזכור את הרבמ"ש של g):

$$|h(y_1) - h(y_2)| = |g(f(y_1)) - g(f(y_2))| < \epsilon'$$

ולכן,

$$\psi_{\epsilon_i} - \varphi_{\epsilon_i} = \sup\{h(x) \mid x_i < x < x_{i+1}\} - \inf\{h(x) \mid x_i < x < x_{i+1}\} \leq \epsilon'$$

אז כעת:

$$\diamond I(\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(\psi_{\epsilon_i} - \varphi_{\epsilon_i}) = \sum_{i \in B} (x_{i+1} - x_i)(\psi_{\epsilon_i} - \varphi_{\epsilon_i}) + \sum_{i \in A} \dots$$

ומתקיים:

$$\sum_{i \in B} (x_{i+1} - x_i)(\psi_{\epsilon_i} - \varphi_{\epsilon_i}) \leq 2M \sum_{i \in B} (x_{i+1} - x_i) \leq 2M \frac{\epsilon'}{M} = 2\epsilon'$$

כאשר המעבר האחרון מהטענה מקודם.

וגם:

$$\sum_{i \in A} (x_{i+1} - x_i)(\psi_{\epsilon_i} - \varphi_{\epsilon_i}) \leq \epsilon' \sum_{i \in A} (x_{i+1} - x_i) \leq \epsilon' \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) < \epsilon' M$$

כאשר המעבר הלפני אחרון הוא מכך שהגדלנו את הסכימה לכל הקטע, מקודם שהיה רק $i \in A$.

ולכן לפי \diamond :

$$I(\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon) \leq \epsilon' M + 2\epsilon' = \epsilon'(M + 2) < \epsilon$$

(לפי בחירת ϵ').

הערות, מסקנות:

- מהמשפט הזה אנו לומדים שאם f אינטגרבילית, אז $|f|$ אינטגרבילית, f^2 אינטגרבילית, $\sin(f)$ אינטגרבילית, ועוד...
- אם f רציפה ו- g אינטגרבילית אז $g(f(x))$ היא לא בהכרח אינטגרבילית. דוגמה: עשינו בכיתה, אבל זה נחשב "חומר העשרה" כלומר אין צורך לדעת אותה בע"פ למבחן. אמור להיות ב- owl קובץ עם הדוגמא.

1.1 אינטגרלים לפי דרבון, רימן

1.1.1 דרבון

תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה, ו- $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ חלוקה של $[a, b]$.

הגדרה 1.13 סכום תחתון, עליון של f לפי P . (לפי הסדר: תחתון ואח"כ עליון):

$$\underline{S}(f, p) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \inf\{f(x) \mid x_i < x < x_{i+1}\}$$

$$\overline{S}(f, p) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \sup\{f(x) \mid x_i < x < x_{i+1}\}$$

כמו כן נגדיר:

הגדרה 1.14 אינטגרל תחתון, עליון:

$$\underline{I}f = \sup\{\underline{S}(f, p) \mid P \text{ is a partition}\}$$

$$\overline{I}f = \inf\{\overline{S}(f, p) \mid P \text{ is a partition}\}$$

ובסה"כ:

הגדרה 1.15 אינטגרביליות לפי דרבון:

f אינטגרבילית אם $\overline{I}f = \underline{I}f$ ואז:

$$\int_a^b f \, dx = \underline{I}f$$

1.1.2 רימן

תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה, (ללא דרישה לחסימות, למרות זה שאח"כ משקילות דרבו\רימן זה נובע), ו- $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ חלוקה של $[a, b]$.

הגדרה 1.16 סכום רימן

אנו אומרים ש- S הוא סכום רימן של f לפי P , אם קיימים $0 \leq i \leq n-1$ כך ש-

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(y_i)$$

הערה: ל- f ול- P ייתכן שיש יותר מסכום רימן אחד.

נזדקק לעוד הגדרה:

הגדרה 1.17 רוחב של חלוקה (mesh):

לחלוקה $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ הרוחב של P הוא $\max_{0 \leq i \leq n-1} \{x_{i+1} - x_i\}$. (כלומר "המרווח" הגדול ביותר שקיים בין שתי נקודות בחלוקה). נסמן את הרוחב של P ע"י $|P|$, או לפעמים $\lambda(P)$.

ולבסוף:

הגדרה 1.18 אינטגרביליות רימן:

אנו אומרים ש- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ היא אינטגרבילית רימן אם לכל ϵ קיימת δ כך שלכל חלוקה P של הקטע $[a, b]$ המקיימת $|P| < \delta$, ולכל שני סכומי רימן S_1, S_2 של f לפי P , $|S_1 - S_2| < \epsilon$.

בהמשך נוכיח ש: נניח ש- f אינטגרבילית רימן. אז קיים \hat{S} , כך שלכל ϵ קיים δ כך שלכל חלוקה P של הקטע עבורה $|P| < \delta$, ולכל סכום רימן S של f לפי P , $|S - \hat{S}| < \epsilon$. ו- \hat{S} זה הוא יחיד. (ההוכחה היא חלק מהמשפט הבא).

המשך ההגדרה: האינטגרל לפי רימן של f בקטע $[a, b]$ מוגדר להיות \hat{S} ומסומן $\int_a^b f(x) dx$.

1.1.3 שקילות רימן-דרבו

משפט 1.19 f אינטגרבילית רימן \Leftrightarrow אינטגרבילית דרבו, והאינטגרל הוא אותו אינטגרל. להוכחה שלושה חלקים:

1. אם f אינטגרבילית רימן אז היא אינטגרבילית דרבו.

2. אם f אינטגרבילית רימן אז אינטגרל רימן שלה שווה לאינטגרל דרבו שלה.

3. אם f אינטגרבילית דרבו אז היא אינטגרבילית רימן.

הוכחה: תחילה נוכיח את הלמה שתיארנו קודם, וממנה יינבעו ההוכחות של 1,2 :

ניזכר במה שאנו מוכיחים:

למה 1.20 שממנה נובע:

1. אם f אינטגרבילית רימן אז היא אינטגרבילית דרבו,

2. ואינטגרל רימן שלה שווה לאינטגרל דרבו שלה.

נוסח הלמה: נניח ש- f אינטגרבילית רימן. אז קיים \hat{S} ,

כך שלכל ϵ קיים δ כך שלכל חלוקה P של הקטע עבורה $|P| < \delta$,

ולכל סכום רימן S של f לפי P , $|S - \hat{S}| < \epsilon$. ו- \hat{S} זה הוא יחיד.

הוכחה: נניח $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן, ונבחר ϵ ויהי δ מתאים לו לפי הגדרת רימן.

אנו יודעים ש- $\bar{S}(f, P)$ הוא החסם העליון של סכומי רימן של f לפי P . (מתאים לפי ההגדרה).

ו- $\underline{S}(f, P)$ הוא החסם התחתון של סכומי רימן של f לפי P .

ולכן, $\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \leq \epsilon$.

ולכן, $\underline{S}(f, P) \leq \underline{I}f \leq \bar{I}f \leq \bar{S}(f, P)$.

ולכן $\bar{I}f - \underline{I}f \leq \epsilon$. זה נכון לכל ϵ ולכן f אינטגרבילית דרבו.

נבחר את \hat{S} להיות אינטגרל דרבו של f .

קעת נראה שאם $|P| < \delta$ ו- S סכום רימן של f לפי P , אז $|S - \hat{S}| \leq \epsilon$:

אנו יודעים ש- $\underline{S}(f, P) \leq S \leq \bar{S}(f, P)$ וגם $\underline{S}(f, P) \leq \hat{S} \leq \bar{S}(f, P)$

וכמו כן, $\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \leq \epsilon$ ★

נטען שמתקיים: $|S - \hat{S}| \leq \epsilon$ כתוצאה מכך.

הוכחת הטענה: נניח בשלילה ש- $|S - \hat{S}| > \epsilon$, ובה"כ נניח $\hat{S} < S$. אז:

$$\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = [\bar{S}(f, P) - S] + (S - \hat{S}) + [\hat{S} - \underline{S}(f, P)] \geq 0 + \epsilon + 0 > \epsilon$$

(כלומר $[\bar{S}(f, P) - S] \geq 0$ וגם $[\hat{S} - \underline{S}(f, P)] \geq 0$).

ולכן קיבלנו סתירה ל-★.

נוכיח את יחידות \hat{S} :

נניח ש- \hat{S}_1 וגם \hat{S}_2 מקיימים את התנאי.

נראה שלכל ϵ , מתקיים $|\hat{S}_1 - \hat{S}_2| < 2\epsilon$. אם נעשה זאת, אז נדע ש- $\hat{S}_1 = \hat{S}_2$ ולכן \hat{S} הוא יחיד.

קיים δ כדרוש, ותהי P חלוקה כך ש- $|P| < \delta$, ו- S סכום רימן של f לפי P .

אז $|S - \hat{S}_1| < \epsilon$ וגם $|S - \hat{S}_2| < \epsilon$ ולכן $|\hat{S}_1 - \hat{S}_2| < 2\epsilon$.

בכך הוכחנו את 1,2.

נוכיח את החלק השלישי:

משפט 1.21 אם f אינטגרבילית דרבו אז היא אינטגרבילית רימן:

הוכחה: נשתמש בשיטת הנמוך והרזה: אם אנחנו רוצים להוכיח שאינטגרל מסוים הוא קטן, אנחנו מחלקים אותו לשני חלקים, אחד "נמוך" והשני "רזה". (נודע גם בשם "השמן והרזה" כאשר נמוך=שמן).

תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית לפי דרבו, ונוכיח שהיא אינטגרבילית לפי רימן.

f אינטגרבילית דרבו, ולכן קיים M כך ש- $|f(x)| < M$ לכל $x \in [a, b]$. (כי אינט' דרבו זה לחסומות).

בהנתן ϵ , אנו צריכים למצוא δ כך שלכל חלוקה P המקיימת $|P| < \delta$,

ולכל שני סכומי רימן S_1, S_2 של f לפי P , $|S_1 - S_2| < \epsilon$.

f אינטגרבילית לפי דרבו ולכן קיימת חלוקה P_1 כך ש- $\bar{S}(f, P_1) - \underline{S}(f, P_1) < \frac{\epsilon}{2}$.

נסמן: $P_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$ (החלוקה הנ"ל של $[a, b]$).

נבחר $\delta > 0$ כך ש- $AMn\delta < \frac{\epsilon}{2}$.

תהי $P = \{y_0, \dots, y_m\}$ חלוקה של $[a, b]$ שרוחבה קטן מ- δ .

נסמן ב- A את קבוצת הקטעים ב- P שכוללים נקודות חלוקה של P_1 ,

$$\text{"The thin"} \quad A = \{0 \leq j \leq m-1 \mid \exists 0 \leq i \leq n : x_i \in (y_j, y_{j+1})\}$$

ונסמן:

$$\text{"The short"} \quad B = \{0, \dots, m\} \setminus A$$

יהיו S_1, S_2 שני סכומי רימן של f לפי P , ואנו רוצים להראות ש- $|S_1 - S_2| < \epsilon$.

אנו יודעים ש- $|S_1 - S_2| \leq \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)$, ולכן מספיק להראות ש- $\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$.

לפני שנמשיך, **נביט בקבוצה B ("הנמוך")**

אם $j \in B$, אז לא קיים i כך ש- $y_j < x_i < y_{j+1}$.

לכן קיים $0 \leq i \leq n-1$ כך ש- $(y_j, y_{j+1}) \subseteq (x_i, x_{i+1})$.

לכל $0 \leq i \leq n-1$, נסמן ב- B_i את הקבוצה:

$$B_i = \{0 \leq j \leq m-1 \mid (y_j, y_{j+1}) \subseteq (x_i, x_{i+1})\}$$

ה- B_i ים זרים זה לזה, ואיחודם הוא B .

עכשיו, נבחר $0 \leq i \leq n-1$ מתקיים:

$$\sum_{j \in B_i} \sup\{f(x) \mid y_j < x < y_{j+1}\}(y_{j+1} - y_j) - \sum_{j \in B_i} \inf\{f(x) \mid y_j < x < y_{j+1}\}(y_{j+1} - y_j) \leq$$

כעת אם "נרחיב" את הקבוצה שאנו מתבוננים בה מ- $y_j < x < y_{j+1}$ ל- $x_i < x < x_{i+1}$, אז ייתכן שהסכום יהיה יותר גדול, כי יש יותר ערכים לבחור מתוכם את הסופ\אינף:

$$\leq \sum_{j \in B_i} (y_{j+1} - y_j) \sup\{f(x) \mid x_i < x < x_{i+1}\} - \sum_{j \in B_i} (\text{" "}) \inf\{ \text{" " } \mid x_i < x < x_{i+1}\} \leq$$

וכעת, נזכור שאנו מתבוננים ב- i מסויים, ולכן $\sum_{j \in B_i} (y_{j+1} - y_j) \cdot (x_{i+1} - x_i) \geq$ ולכן אפשר לאמר ש-

$$\leq \sup\{f(x) \mid x_i < x < x_{i+1}\} (x_{i+1} - x_i) - \inf\{f(x) \mid x_i < x < x_{i+1}\} (x_{i+1} - x_i) \quad \star$$

סיימו להתבונן ב- B . כעת, נתבונן:

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{j=0}^{m-1} (y_{j+1} - y_j) \sup\{f(x) \mid y_j < x < y_{j+1}\} - \sum_{j=0}^{m-1} (\text{" "}) \inf\{ \text{" " } \} =$$

$$= \sum_{j \in A} (y_{j+1} - y_j) (\sup - \inf)\{f(x) \mid y_j < x < y_{j+1}\} + \sum_{j \in B} (\text{" "}) (\text{" "}) \{ \text{" " } \}$$

ואנחנו נראה שכל אחד מהסכומים האלה קטן מ- $\frac{\epsilon}{2}$.

נעריך את הסכום על A (הרזה):

ראשית, ברור ש- $|A| \leq n$.

(כי לא ייתכנו יותר קטעים ב- P שמכילים נקודות חלוקה של P_1 ,

מאשר שיש נקודות ב- P_1 , כלומר n . זה מהגדרת A).

לכל $j \in A$,

$|y_{j+1} - y_j| < \delta$ וגם מתקיים:

$$(\sup - \inf)\{f(x) \mid y_j < x < y_{j+1}\} \leq 2M$$

ולכן,

$$\sum_{j \in A} (y_{j+1} - y_j) (\sup - \inf)\{f(x) \mid y_j < x < y_{j+1}\} \leq n\delta \cdot 2M < \frac{\epsilon}{2}$$

(המעבר האחרון לפי בחירת δ).

ונחזור ל-B:

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in B} (y_{j+1} - y_j) (\sup - \inf) \{f(x) \mid y_j < x < y_{j+1}\} = \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j \in B_i} (y_{j+1} - y_j) (\sup - \inf) \{f(x) \mid y_j < x < y_{j+1}\} \right) \leq \end{aligned}$$

ולפי ★:

$$\begin{aligned} & \leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) (\sup - \inf) \{f(x) \mid x_i < x < x_{i+1}\} \leq \\ & \leq \overline{S}(f, P_1) - \underline{S}(f, P_1) < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

ולכן בסה"כ קיבלנו ש-

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ולכן f אינטגרבילית לפי רימן.

1.1.4 משפט על הגבול סכומי רימן של חלוקות בעלות רוחב שואף לאפס

משפט 1.22 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית, ותהי P_n סדרה של חלוקות של $[a, b]$ כך ש- $|P_n| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

לכל n , יהיה S_n סכום רימן של f לפי P_n . אז: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$.

הוכחה: לכל ϵ קיימת δ כך שאם $|P| < \delta$ ו- S סכום רימן לפי P , אז $|S - \int_a^b f(x) dx| < \epsilon$.

קיים N כך שלכל $n > N$, מתקיים $|P_n| < \delta$, ולכן,

לכל $n > N$: מתקיים $|S_n - \int_a^b f(x) dx| < \epsilon$.

1.1.5 עקרון הסנדוויץ'

משפט 1.23 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אז אינטגרבילית אם"ם

לכל $\epsilon > 0$ קיימות פונקציות אינטגרביליות $h, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

כך שלכל $x \in [a, b]$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ וגם $\int_a^b h dx - \int_a^b g dx < \epsilon$.

הוכחה: כיוון א: נניח f אינטגרבילית. אז נסמן: לכל $x \in [a, b]$:

$$g(x) = f(x) - \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

$$h(x) = f(x) + \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

ונקבל:

$$\int_a^b h dx - \int_a^b g dx = \int_a^b (h(x) - g(x)) dx = \int_a^b \frac{2\epsilon}{3(b-a)} dx = (b-a) \frac{2\epsilon}{3(b-a)} = \frac{2}{3}\epsilon < \epsilon$$

כיוון ב: נניח שקיימות h, g כמו במשפט. וצ"ל ש- f אינטגרבילית.

יהי $\epsilon > 0$. מן הנתון, עבור $\frac{\epsilon}{3}$,

יש פונקציות אינטגרביליות $h, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $\int_a^b h dx - \int_a^b g dx < \frac{\epsilon}{3}$ ובעת,

g אינטגרבילית \Leftarrow קיימת פונק' מדרגה $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \leq g$, כך ש- $\int_a^b g(x) dx - I\varphi < \frac{\epsilon}{3}$.

h אינטגרבילית \Leftarrow קיימת פונק' מדרגה $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi \geq h$, כך ש- $I\psi - \int_a^b h(x) dx < \frac{\epsilon}{3}$.

נשים לב: $\varphi \leq g \leq f$ וכן $f \leq h \leq \psi$. ובעת:

$$I\psi - I\varphi = (I\psi - \int_a^b h(x) dx) + (\int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx) + (\int_a^b g(x) dx - I\varphi) <$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

ולכן f אינטגרבילית. ■

ישנו משפט נוסף, שהתבקשנו להוכיח בתרגיל. לא הוכחנו אותו בכיתה, אבל ארשום אותו כאן בכל זאת:

משפט 1.24 (עקרון הסנדוויץ' השני)

תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית אם"ם לכל $\epsilon > 0$ קיימות פונקציות רציפות $h, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

כך שלכל $x \in [a, b]$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ וגם $\int_a^b h dx - \int_a^b g dx < \epsilon$.

ההוכחה היתה בתרגיל 3.

קעת נוכיח משפט חשוב להוכחת המשפט היסודי:

1.1.6 האינטגרל מקיים את תכונת האדיטיביות ($\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ כאשר $a \leq c \leq b$)

משפט 1.25 אם f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ וגם $c \in [a, b]$ אז $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$

הוכחה: f אינטגרבילית, ולכן קיימת חלוקה P כך ש- $\epsilon/3$. $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon/3$.

נגדיר חלוקה: $\hat{P} = P \cup \{c\}$. אז:

$$\overline{S}(f, \hat{P}) \leq \overline{S}(f, P)$$

וגם

$$\underline{S}(f, \hat{P}) \geq \underline{S}(f, P)$$

(זה נכון כי \hat{P} הוא עידון של P ולכן "מדוייק יותר" בקירוב שלו).

נסמן: $\hat{P} = \{x_0, \dots, x_k, \dots, x_n\}$ כאשר $x_0 = a$, $x_k = c$, $x_n = b$

נגדיר: P_1 תהיה החלוקה של הקטע $[a, c]$: $P_1 = \{x_0, \dots, x_k\}$

P_2 תהיה החלוקה של הקטע $[c, b]$: $P_2 = \{x_k, \dots, x_n\}$

ועכשיו, מתקיים (לפי הגדרת ה- $\overline{S}, \underline{S}$):

$$\overline{S}(f, \hat{P}) = \overline{S}(f, P_1) + \overline{S}(f, P_2)$$

$$\underline{S}(f, \hat{P}) = \underline{S}(f, P_1) + \underline{S}(f, P_2)$$

וכמו כן מתקיים:

$$\underline{S}(f, P_1) \leq \int_a^c f dx \leq \overline{S}(f, P_1)$$

$$\underline{S}(f, P_2) \leq \int_c^b f dx \leq \overline{S}(f, P_2)$$

$$\underline{S}(f, \hat{P}) \leq \int_a^b f dx \leq \overline{S}(f, \hat{P})$$

ואז,

$$\int_a^c f dx + \int_c^b f dx - \int_a^b f dx \leq \overline{S}(f, P_1) + \overline{S}(f, P_2) - \underline{S}(f, \hat{P}) =$$

$$= \overline{S}(f, \hat{P}) - \underline{S}(f, \hat{P}) < \frac{\epsilon}{3}$$

כלומר לכל ϵ מתקיים ש- $\int_a^c f dx + \int_c^b f dx - \int_a^b f dx \leq \epsilon$ ולכן,

$$(א) \int_a^c f dx + \int_c^b f dx \leq \int_a^b f dx$$

נוכיח הכיוון השני של אי השוויון:

$$\int_a^b f dx - \int_a^c f dx - \int_c^b f dx \leq \overline{S}(f, \hat{P}) - \underline{S}(f, P_1) - \underline{S}(f, P_2) =$$

$$= \overline{S}(f, \hat{P}) - \underline{S}(f, \hat{P}) < \frac{\epsilon}{3}$$

כלומר לכל ϵ מתקיים ש- $\int_a^b f dx - \int_a^c f dx - \int_c^b f dx \leq \epsilon$ ולכן,

$$(ב) \int_a^b f dx \leq \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

ומצירוף (א),(ב) קיבלנו שוויון מלא: $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$

והוכחנו את האדיטיביות.

■

1.2 המשפט היסודי של החשבון האינפניטסימלי

משפט 1.26 המשפט היסודי:

תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבלית, ונגדיר פונקציה $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י:

$$F(t) = \int_a^t f dx \quad a \leq t \leq b, \text{ ובנוסף נגדיר } F(a) = 0.$$

אי:

1. אם f אינטגרבלית אזי F רציפה.
 2. אם f רציפה בנק' x_0 אז F גזירה ב- x_0 , ו- $F'(x_0) = f(x_0)$.
 3. אם f רציפה בכל $[a, b]$ אז F גזירה בכל הקטע, ומהווה פונקציה קדומה ל- f .
 4. "פונקציה קדומה יש רק אחת", עד כדי קבוע:
- אם f רציפה ב- $[a, b]$ ואם F_1, F_2 שתיהן פונק' קדומות ל- f , וגם $F_1(a) = F_2(a)$, אז $F_1(t) = F_2(t)$ לכל $t \in [a, b]$. (הערה: במקום a היה אפשר לבחור כל נקודה בקטע).

הוכחה: (1) אם f אינטגרבילית אז F רציפה.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית, ולכן חסומה, ולכן קיים M כך ש $|f(x)| < M$ לכל $x \in [a, b]$.
נבחר $a \leq s < t \leq b$ אז:

$$F(t) - F(s) = \int_a^t f \, dx - \int_a^s f \, dx = \int_s^t f \, dx$$

בקטע $[s, t]$, מתקיים $-M \leq f \leq M$. ולכן אם נגדיר $h \equiv M$, $g \equiv -M$, אז $g \leq f \leq h$ בקטע $[s, t]$. ולכן:

$$-M(t-s) = \int_s^t g \, dx \leq \int_s^t f \, dx \leq \int_s^t h \, dx = M(t-s)$$

כלומר,

$$|F(t) - F(s)| \leq M|t - s|$$

נראה רציפות של F : נראה רציפות במ"ש. ניתן לראות שכבר הגענו לתנאי ליפשיץ, אבל נוכיח עד הסוף בכל מקרה. לכל ϵ נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ ואם $|x - y| < \delta$ אז

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y| < M\delta = M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

■

נשים לב שזוהי ההוכחה הכללית לכך שלפשיץ \Leftrightarrow רציפות.

הוכחה: (2) אם f רציפה בנק' x_0 אז F גזירה ב- x_0 , ו- $F'(x_0) = f(x_0)$.

עלינו להראות שהגבול הבא קיים ושווה ל- $f(x_0)$: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$

כעת, מהגדרת F , מתקיים: $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f \, dx$

(נשים לב, עבור $h < 0$ נזכור שהגדרנו: $\int_b^a f \, dx := - \int_a^b f \, dx$ ואז זה מסתדר (כך טוענים...)).

בהנתן ϵ , נבחר δ כך שלכל x המקיים $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

δ כזה קיים מהרציפות של f בנק' x_0 .

יהי $|h| < \delta$. אנו רוצים להראות ש- $|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)| < \epsilon$

נניח בה"כ ש- $0 < h < \delta$. (ההוכחה של $h < 0$ דומה, לבדוק!)

ונגדיר פונקציות קבועות: $f_1(x) = f(x_0) - \epsilon$, וגם $f_2(x) = f(x_0) + \epsilon$.

ובקטע $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ מתקיים: $f_1 < f < f_2$. בפרט, זה מתקיים בקטע $[x_0, x_0 + h]$.

לכן,

$$h(f(x_0) - \epsilon) = \int_{x_0}^{x_0+h} f_1 dx \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f dx \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f_2 dx = h(f(x_0) + \epsilon)$$

קיבלנו:

$$h(f(x_0) - \epsilon) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h(f(x_0) + \epsilon)$$

נחלק את כל האגפים ב- h ונקבל:

$$f(x_0) - \epsilon \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0) + \epsilon$$

כלומר,

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \epsilon$$

וזוהו.

הוכחה: (3) אם f רציפה בכל $[a, b]$ אז F גזירה בכל הקטע, ומהווה פונקציה קדומה ל- f .

זה נובע מיד מחלק (2).

הוכחה: (4) אם f רציפה ב- $[a, b]$ ו- F_1, F_2 שתיהן פונק' קדומות של f , וגם $F_1(a) = F_2(a)$, אז $F_1(x) = F_2(x)$ לכל $x \in [a, b]$

תהי $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $h(x) = F_1(x) - F_2(x)$.

אז מתכונות הנגזרת: $h'(x) = 0$ לכל $x \in [a, b]$ וכמו כן, $h(a) = 0$.

נניח בשלילה שקיים $y \in]a, b[$ כך ש- $F_1(y) \neq F_2(y)$.

ממשפט לגראנז' קיים $c \in]a, y[$ כך ש- $h'(c) = \frac{h(y) - h(a)}{y - a} \neq 0$, בסתירה לכך ש- $h' \equiv 0$.

(משפט לגראנז', אינפי 1: תהי f פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- $]a, b[$ אז קיימת נקודה c כך ש- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.)

כעת, משלמדנו להוכיח את המשפט היסודי, ניתן להוכיח גם את המשפט הסודי. משפט זה מאפשר גישה לשלב הפרות הסודי (מאחורי שפרינצק, לכיוון פלדמן).

מסקנה: חישוב שטחים

המשפט היסודי של האינפי לימד אותנו את הקשר הבא בין האינטגרל המסויים ללא מסויים:

אם f אינטגרבילית ורציפה ו- F פונק' קדומה ל- f אז:

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a)$$

1.3 אינטגרלים לא אמיתיים

בפרק זה נטפל בפונקציות שמוגדרות בקטע שאינו חסום, ובפונקציות לא חסומות.

הערה: לא נצליח (שוב פעם) לטפל בכל הפונקציות.

כמו כן, הסימון שנשתמש בו יהיה אותו סימון: לפונקציה לא חסומה f נסמן ב- $\int_a^b f dx$ את האינטגרל הלא אמיתי שלה. **זהירות:** אנחנו משתמשים באותו סימון למושגים שונים.

1.3.1 פונקציות שמוגדרות על קטע אינסופי מצד אחד

(כגון $[0, \infty[$)

הגדרה 1.27 יהי $a \in \mathbb{R}$, ותהי $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

אנו אומרים ש- f אינטגרבילית (במובן של אינטגרל לא אמיתי) בקטע $[a, \infty[$,

אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. לכל $t > a$, f אינטגרבילית בקטע $[a, t]$.

2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f dx$ קיים וסופי.

במקרה זה, נגדיר:

$$\int_a^\infty f dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f dx$$

נגדיר אינטגרביליות ואינטגרל בקטע $]-\infty, a]$ באותו האופן.

1.3.2 דוגמאות

א. $f(x) = \frac{1}{x}$ בקטע $[1, \infty[$. האם היא אינטגרבילית? לא! נשתמש במשפט היסודי כדי להוכיח זאת.

טענה:

$$\int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

זה למעשה אומר שהשטח הוא אותו שטח בכל בקפוצות של חזקות 2, פשוט "מועכים" אותו כל פעם יותר.

הוכחה: מצד אחד:

$$\int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{x} dx = \ln(2^{n+1}) - \ln(2^n) = (n+1)\ln(2) - n\ln(2) = \ln(2)$$

ומצד שני:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) - 0 = \ln(2)$$

ולכן הטענה נכונה. זה נותן הסבר גרפי למה $\frac{1}{x}$ לא אינטגרבילית בקטע הנ"ל.
 עוד דרך לראות זאת, היא:

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln(t) - \ln(1) = \ln(t)$$

אבל, $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t) = \infty \notin \mathbb{R}$ ולכן הפונק' לא אינטגרבילית.

דוגמא נוספת:

ב. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ בקטע $[1, \infty[$. היא אכן אינטגרבילית.

למה? כי $(\frac{-1}{x})' = \frac{1}{x^2}$ ולכן לכל $t > 1$:

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{t} - \frac{-1}{1} = 1 - \frac{1}{t}$$

ומתקיים

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{t} = 1$$

ולכן הפונק' אינטגרבילית, ומתקיים:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$$

ג. האם $\int_\pi^\infty \sin x dx$ קיים? לא.

ידוע לנו ש- $\cos x$ היא פונק' קדומה ל- $\sin x$.

ולכן לכל $t \in [\pi, \infty[$, מתקיים $\int_\pi^t \sin x dx = \cos(\pi) - \cos(t)$

ולכן האינטגרל קיים רק אם $\lim_{t \rightarrow \infty} \cos(t)$ קיים.

אבל הוא לא. ולכן האינטגרל אינו קיים.

ד. האם האינטגרל $\int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ קיים? כן.

(הערה: בשפה שאנחנו מכירים, לא ניתן לכתוב פונק' קדומה לזה!)

הוכחה: I צריך לראות שלכל $t > \pi$, אינטגרבילית בקטע $[\pi, t]$. זה נובע מרציפות הפונק' $\frac{\cos x}{x^2}$.

II נוכיח שהגבול: $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2} dx$ קיים.

נשתמש בתנאי קושי - עלינו להראות שלכל ϵ קיים M כך שלכל $t_1, t_2 > M$:

$$\left| \int_\pi^{t_1} \frac{\cos x}{x^2} dx - \int_\pi^{t_2} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| < \epsilon$$

נבחר M כך ש- $\int_M^\infty \frac{1}{x^2} dx < \epsilon$.

יש כזה M כי ראינו ש- $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ קיים. איך זה אומר שקיים כזה M ?

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

ולכן, (נשים לב שבסוף אנו מציבים " $\int_1^\infty = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M$ " כדי לקבל 0):

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_M^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx - \int_1^M \frac{1}{x^2} dx \right] = 0$$

ולכן קיים M כזה.

יהיו $t_1, t_2 > M$, ונניח $t_1 < t_2$. אז:

$$\left| \int_\pi^{t_1} \frac{\cos x}{x^2} dx - \int_\pi^{t_2} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos x}{x^2} dx \right|$$

אנחנו יודעים ש- $-1 \leq \cos x \leq 1$ ולכן גם $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, ולכן,

$$-\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{x^2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{-1}{x^2} dx \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos x}{x^2} dx \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{x^2} dx$$

כלומר:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{x^2} dx \leq$$

אבל מימין ישנה פונק' חיובית, ולכן הגדלת טווח האינטגרל מגדילה אולי את השטח. אז:

$$\leq \int_M^\infty \frac{1}{x^2} dx < \epsilon$$

ולכן קיים האינטגרל.

ה. האם $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ קיים? כן. נתבונן:

$$\left(\frac{\cos x}{x} \right)' = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} = -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}$$

כלומר (נעביר אגפים):

$$\frac{\sin x}{x} = -\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x^2}$$

ולכן מתקיים:

$$\int_{\pi}^t \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos(t)}{t} + \frac{\cos \pi}{\pi} - \int_{\pi}^t \frac{\cos x}{x^2} dx$$

נבדוק את התנאים ל- $\frac{\sin x}{x}$:

$$(1) \quad \frac{\sin x}{x} \text{ אינטגרבלית ב-} [\pi, t] \text{ לכל } t > \pi$$

(2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\pi}^t \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos \pi}{\pi} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\cos(t)}{t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\pi}^t \frac{\cos x}{x^2} dx$$

וכעת, ידוע שהגבול הנ"ל של $\frac{\cos(t)}{t}$ קיים ושווה 0, וכמו כן הוכחנו שהגבול הימני ביותר קיים (בסעיף הקודם), ולכן הגבול קיים ולכן גם האינטגרל.

1.3.3 קריטריון קושי, קריטריון ההשוואה (לקיום האינטגרל הלא אמיתי \int_a^{∞})

להלן שני משפטים שמבטיחים קיום של האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

משפט 1.28 קריטריון קושי

תהי $f: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ונניח ש- f אינטגרבלית בקטע $[a, b]$ לכל $b > a$.

אז האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^{\infty} f(x) dx$ קיים אם לכל ϵ קיים M כך שלכל $t > M$:

$$\left| \int_M^t f(x) dx \right| < \epsilon$$

הוכחה: כיוון א: נניח שמתקיים תנאי קושי.

תהי $g: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה $g = \int_a^t f(x) dx$.

אז אנו רוצים להראות ש $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ קיים.

בהנתן ϵ , קיים M כך שלכל $t > M$,

$$|g(t) - g(M)| = \left| \int_a^t f(x) dx - \int_a^M f(x) dx \right| = \left| \int_M^t f(x) dx \right| < \epsilon$$

ולכן g מקיימת את תנאי קושי מסמסטר א', והגבול קיים.

כיוון ב': נניח ש- $\int_a^\infty f(x)dx = I$. ושווה קיים, ושווה I .

אז לכל ϵ קיים M כך שלכל $t \geq M$, $|\int_a^t f(x)dx - I| < \frac{\epsilon}{2}$.
ועכשיו,

$$\begin{aligned} \left| \int_M^t f(x)dx \right| &= \left| \int_a^t f(x)dx - \int_a^M f(x)dx \right| = \left| \left(\int_a^t f(x)dx - I \right) - \left(\int_a^M f(x)dx - I \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^t f(x)dx - I \right| + \left| \int_a^M f(x)dx - I \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

■

משפט 1.29 קריטריון ההשוואה

יהיו $f, h : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ונניח:

א. f, h אינטגרבליות (אינטגרלים אמיתיים) בקטע $[a, b]$ לכל $b > a$.

ב. $\int_a^\infty h dx$ קיים.

ג. לכל x , $h(x) \geq |f(x)|$.

ד. ובפרט, $h \geq 0$.

אזי - $\int_a^\infty f(x)dx$ קיים.

הוכחה: נשים לב: ההוכחה פחות או יותר זהה להוכחת קריטריון ההשוואה של טורים.

$\int_a^\infty h dx$ קיים. ולכן לכל ϵ קיים M כך שלכל $t > M$, מתקיים

$$0 \leq \int_M^t h(x)dx < \epsilon$$

(זה לפי קושי). וכעת, לכל $t > M$:

$$\left| \int_M^t f(x)dx \right| \leq \int_M^t |f(x)|dx \leq \int_M^t h(x)dx < \epsilon$$

ולכן מקריטריון קושי, $\int_a^\infty f(x)dx$ קיים.

ניתן הסבר למעבר הראשון משמאל:

ידוע ש- $|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ ולכן: \Leftarrow

$$-\int_M^t |f(x)|dx = \int_M^t -|f(x)|dx \leq \int_M^t f(x)dx \leq \int_M^t |f(x)|dx$$

ובסה"כ קיבלנו את המעבר:

$$\left| \int_M^t f(x)dx \right| \leq \int_M^t |f(x)|dx$$

ובכך הוכחנו את הנדרש.

תרגיל:

מצאו דוגמה של f, h כך ש- $|h(x)| \geq |f(x)|$ לכל x , וגם $\int_a^\infty h(x) dx$ קיים, וגם $\int_a^\infty f(x) dx$ לא קיים, ו- f רציפה. נשים לב: ההבדל הוא בערך המוחלט.

1.3.4 אינטגרלים של פונקציות שאינן חסומות

הגדרה 1.30 תהי $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונק' שאינה חסומה באף סביבה של a ,

אבל היא אינטגרבילית (אינטגרל אמיתי) בכל קטע $[c, b]$, $c > a$.

אם הגבול $\lim_{t \rightarrow a} \int_t^b f(x)dx$ קיים,

אז אומרים ש- f אינטגרבילית (כאינטגרל לא אמיתי) ב- $]a, b]$, ומגדירים:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a} \int_t^b f(x)dx$$

כמובן שהערך ב- a לא משנה, זוהי נקודה בודדת.

1.3.5 אינטגרל על כל הישר: פלוס-מינוס אינסוף

אנו רוצים להגדיר: $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$, בהינתן $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

הגדרה 1.31 נגיד ש $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ קיים וערכו L , אם f אינטגרבילית בכל קטע סופי $[c, d]$, וקיים מספר $a \in \mathbb{R}$ כך שהאינטגרלים הלא אמיתיים $\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ קיימים, ומתקיים:

$$L = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

נראה שקיום האינטגרל וערכו לא תלויים בבחירת a :

טענה 1.32 יהיו $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. אז:

- $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$, $\int_{a_1}^\infty f(x)dx$ קיימים אם"ם $\int_{a_2}^\infty f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{a_2} f(x)dx$ קיימים.
- אם האינטגרלים הנ"ל קיימים, אז $\int_{-\infty}^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^{a_2} f(x)dx + \int_{a_2}^\infty f(x)dx$.

הוכחה: נניח בה"כ ש- $a_1 < a_2$. אם $\int_{a_1}^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{a_1} f(x)dx$ קיימים,

אז $\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx$ קיים (אינטגרל אמיתי).

לכל $c > a_2$, ידוע ש- $\int_{a_1}^c f(x)dx$ קיים, ולכן גם $\int_{a_2}^c f(x)dx$ קיים, ומתקיים:

$$\int_{a_2}^c f(x)dx = \int_{a_1}^c f(x)dx - \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx$$

נשאיף את c לאינסוף ונקבל:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{a_2}^c f(x)dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\int_{a_1}^c f(x)dx - \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx \right) =$$

$$= \int_{a_1}^{\infty} f(x)dx - \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx$$

באופן דומה, לכל $c < a_1$, האינטגרלים $\int_c^{a_1} f(x)dx$, $\int_c^{a_2} f(x)dx$ קיימים,

(כי f אינטגרלית על $[a_1, a_2]$, $[c, a_1]$, ולכן גם על האיחוד שלהם), ומתקיים:

$$\int_c^{a_2} f(x)dx = \int_c^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx$$

נשאיף את c ל- $-\infty$ ונקבל:

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^{a_2} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx$$

הראינו שהאינטגרלים הלא אמיתיים $\int_{a_2}^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{a_2} f(x)dx$ קיימים. וסכומם:

$$\int_{-\infty}^{a_2} f(x)dx + \int_{a_2}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \int_{a_1}^{\infty} f(x)dx - \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{\infty} f(x)dx$$

וזה מה שהיה צריך להוכיח. ■

1.3.6 התכנסות בהחלט ובתנאי

1.3.3 הגדרה תהי $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ונניח ש- f אינטגרבילית על כל קטע $[a, b]$ לכל $b > a$. אם האינטגרל $\int_a^\infty |f(x)| dx$ קיים, אז אנו אומרים ש- $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס בהחלט. אם $\int_a^\infty f(x) dx$ קיים, אבל $\int_a^\infty |f(x)| dx$ לא קיים, אז נגיד ש- $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס בתנאי.

דוגמא:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

הראינו שהאינטגרל מתכנס, אבל הוא לא מתכנס בהחלט. (לא הוכחנו זאת בכיתה).

1.3.7 תנאי לייבניץ להתכנסות ("כולל בתנאי")

תהי $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה, ונניח ש- f אינטגרבילית על כל תת-קטע סופי של $[a, \infty)$. תהי $a = a_0 < a_2 < a_3 < \dots$ סדרה של נקודות, העולה לאינסוף ומקיימת:

$$1. f \text{ אי-חיובית בכל קטע } [a_{2k}, a_{2k+1}]$$

$$2. f \text{ אי-שלילית בכל קטע } [a_{2k-1}, a_{2k}]$$

$$3. \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx \right| \geq \left| \int_{a_{k+1}}^{a_{k+2}} f(x) dx \right|$$

$$4. \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx \right| = 0$$

טענה 1.3.4 בהנחות אלה, האינטגרל $\int_a^\infty f(x) dx$ קיים.

הוכחה: ראשית נראה שמספיק להראות ש- $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^{a_k} f(x) dx$ קיים.

הסבר: יהי $\epsilon > 0$. נניח ש- $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^{a_k} f(x) dx$ קיים.

נבחר k_0 כך שלכל $k > k_0$, מתקיים $\left| \int_a^{a_k} f(x) dx - L \right| < \frac{\epsilon}{2}$,

וכך שלכל $k > k_0$, $\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$ (לפי הנחה 4).

אז לכל $k > k_0$ ו- $a_k < t < a_{k+1}$,

$$\left| \int_{a_k}^t f(x) dx \right| \leq \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

(ונשים לב שלפי 1,2 הפונקציה לא משנה סימן באמצע הקטע).

ולכן, לכל $t > a_{k_0}$ מתקיים: (אם לוקחים k כך ש- $a_k < t < a_{k+1}$)

$$\left| \int_a^t f(x) dx - L \right| \leq \left| \left(\int_a^{a_k} f(x) dx - L \right) + \int_{a_k}^t f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

- כעת נראה ש- $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^{a_k} f(x) dx$ מתכנס:

נסמן: $b_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx$ (התרומה לאינטגרל מהקטע ה- k).

רוצים להוכיח ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k$ מתכנס. (כלומר הטור האינסופי $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$).

נסמן: $c_n = \sum_{k=1}^n b_k$, וגם: $c_0 = 0$. אז הסדרה:

$$\{d_n\} = \begin{matrix} (c_0, c_0, c_2, c_2, c_4, c_4, c_6, c_6, \dots) \\ \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \\ d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, \dots \end{matrix}$$

יורדת ושולטת מלמעלה על $\{c_n\}$ (כלומר מתקיים $c_n \leq d_n$ לכל n).
באופן דומה, הסדרה:

$$\{e_n\} = \begin{matrix} (0, c_1, c_1, c_3, c_3, c_5, c_5, \dots) \\ \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \\ e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, \dots \end{matrix}$$

היא סדרה עולה הנשלטת ע"י $\{c_n\}$, כלומר מתקיים $e_n \leq c_n$ לכל n .
הראינו ש- $e_n \leq c_n \leq d_n$ לכל n , וכמו כן $\{d_n\}, \{e_n\}$ מונוטוניות ולכן מתכנסות,
(כי d_n חסומה מלמעלה ע"י e_1 ויורדת, e_n חסומה מלעיל ע"י d_1 ועולה...)
וכמו כן, (השאיפה בסוף היא לפי הנחה 4)

$$d_n - e_n \leq |b_n| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

ולכן,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$$

ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ קיים, מ.ש.ל.

1.4 שיטות אינטגרציה

בסעיף זה נתבונן בכמה שיטות למציאת פונקציות קדומות.
ראשית נראה דוגמא של אינטגרל שקיים, אבל אין לו פונקציה קדומה ידועה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(זה יוכח באינפי 3. השאלה היא כמה מאיתנו באמת הולכים להיום שם...)

ובכל זאת, ברוב המקרים חישוב אינטגרל כן עובר דרך מציאת פונק' קדומה, ולכן נדון במס' דרכים למציאת פונקציות קדומות.
מכיוון שהאינטגרל הוא (באיזשהו מובן) הפוך לנגזרת, לכל כלל גזירה מתאים כלל אינטגרציה.

משפט 1.35 אינטגרציה בחלקים

כלל האינטגרציה שמתאים לכלל המכפלה של נגזרות.

יהיו f, g פונקציות גזירות ברציפות (=בעלות נגזרת רציפה), אז:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

לכן,

$$fg = \int (fg)' dx = \int f'g dx + \int fg' dx$$

ולכן,

$$\int fg' dx = fg - \int f'g dx$$

דוגמא:

מהו $\int \log x dx$?

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = (x+5)\log x - \int (x+5) \frac{1}{x} dx =$$

$$x \log x + 5 \log x + \int \frac{x}{x} dx - \int \frac{5}{x} dx = x \log x + 5 \log x - x - 5 \log x + c = x \log x - x + c$$

נשים לב שבחרנו $(x+5)$ "כי זה הביטוי הפשוט ביותר" לדעתינו. :

משפט 1.36 שיטת ההצבה

נזכור את כלל השרשרת: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) g'(x)$.

כמו כן, משפט זה נוגע לאינטגרל המסויים - ללא מסויים יש משפט אחר, כנראה.

תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ו- $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ברציפות (=יש לה נגזרת רציפה).

ונניח ש- $g(c) = a, g(d) = b$ וגם $a \leq g(x) \leq b$ לכל $c \leq x \leq d$. אז:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(x)) g'(x) dx$$

(אין כאן ' על f בכוונה, זוהי לא טעות).

הוכחה: ראשית, שני האינטגרלים קיימים כי הכל רציף.

כעת, תהי F פונקציה קדומה ל- f . אז:

$$F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) g'(x)$$

ומתקיים:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_c^d f(g(x)) g'(x) dx = F(g(d)) - F(g(c)) = F(b) - F(a)$$

■

לדוגמא: נחשב שטח של חצי מעגל. זהו הגרף של $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ בין 1 ל-1.

ולכן שטחו של חצי העיגול הוא $\int_{-1}^1 f(x) dx$. כעת:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_c^d \sqrt{1-g(x)^2} \cdot g'(x) dx$$

כאשר $g(c) = -1$ וגם $g(d) = 1$. אם נבחר את g היטב, אז הביטוי $\sqrt{1-g(x)^2} \cdot g'(x)$ יהיה משהו פשוט. ניחוש טבעי: לקחת $g(x) = \cos(x)$. מתקיים: $\cos(-\pi) = -1$ וגם $\cos(0) = 1$. נקבל:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-\pi}^0 \sqrt{1-\cos^2(x)} \cdot (\cos x)' dx =$$

וכעת, כידוע $\sin x = \pm \sqrt{1-\cos^2 x}$ ולכן, נבחר את המינוס. (היה בלבול בכיתה, כנראה שרק ככה יוצא שטח חיובי). קיבלנו:

$$= \int_{-\pi}^0 (-\sin x)(-\sin x) dx = \int_{-\pi}^0 \sin^2 x dx =$$

וכעת, מהזהות $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ נקבל:

$$\int_{-\pi}^0 \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{2} dx - \int_{-\pi}^0 \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} - \int_{-\pi}^0 \frac{\cos 2x}{2} dx =$$

וכעת נבחר $g(x) = \frac{x}{2}$ ואז $g(-2\pi) = -\pi$, $g(0) = 0$ וגם $g'(x) = \frac{1}{2}$. ואז:

$$= \frac{\pi}{2} - \int_{-2\pi}^0 \frac{\cos x}{2} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \int_{-2\pi}^0 \cos x dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} [\sin 0 - \sin(-2\pi)] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

2 טורים

2.1 הגדרה כללית

הגדרה 2.1 תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נגדיר סדרה $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. אם S_n מתכנסת, כלומר קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, אז נגדיר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

ונאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס (*converges*). אחרת, אם הגבול אינו קיים, נאמר שהטור מתבדר (*diverges*). לסיכום, הגדרנו:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

2.1.1 דוגמאות

טור גיאומטרי: $a_n = q^n$.

טענה 2.2 מתקיים:

$$S_n = \sum_{k=1}^n q^k = \begin{cases} q \frac{q^n - 1}{q - 1} & q \neq 1 \\ n & q = 1 \end{cases}$$

הוכחה: נתבונן:

$$S_n = q + q^2 + \dots + q^n$$

נכפיל ב- q ונקבל:

$$qS_n = q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1} = S_n - q + q^{n+1}$$

$$S_n(1 - q) = q(1 - q^n)$$

$$S_n = q \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

■

כעת, כאשר $q = 1$, $S_n = n$ ולכן כמובן הטור מתבדר.

כאשר $q \neq 1$, נקבל ש- $S_n = \frac{q^{n+1}}{q-1} - \frac{q}{q-1}$. נשים לב שהכל חוץ מהחזקה באן הוא קבוע.

ולכן, במקרה זה הטור מתכנס אמ"מ $|q| < 1$.

טענה 2.3 דוגמא נוספת: כאשר $\alpha > 0$, נתבונן ב-

$$a_n = n^{-\alpha}$$

למשל, אם $\alpha = 2$, נקבל: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

אם $\alpha = 1$ נקבל: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

כעת, ידוע ש-

$$\int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \infty & \text{if } \alpha \leq 1 \\ L \in \mathbb{R} & \text{if } \alpha > 1 \end{cases}$$

ממבחן ההשוואה לאינטגרל (ניסוח+הוכחה בהמשך),

נקבל שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ מתכנס אם $\alpha > 1$.

דוגמא נוספת:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} \dots$$

נשים לב: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ונקבל ש- S_n הוא טור טלסקופי:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

2.1.2 התכנסות טור גוררת שאיפת האיבר הכללי לאפס

טענה 2.4 אם טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

(דעיכת הסדרה היא תנאי הכרחי להתכנסות הטור.)

זהו לא תנאי מספיק. למשל הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

הוכחה: נשתמש בתנאי קושי להתכנסות סדרות:

סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת אם

$$\text{לכל } \epsilon > 0 \text{ קיים } N \in \mathbb{N} \text{ כך שלכל } m, n > N, |S_m - S_n| < \epsilon.$$

בפרט, אם $m = n + 1$, אז נקבל שהתכנסות גוררת $|S_{n+1} - S_n| = |a_{n+1}| \leq \epsilon$.

נראה דוגמה לכך שזהו אינו תנאי מספיק:

$$S_n = (\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sqrt{n}. \text{ ניקח } a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

מתקיים: $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. כמובן ש- $\sqrt{n} \rightarrow \infty$ לא מתכנס למספר סופי כאשר $n \rightarrow \infty$.

אבל, נראה שהאיבר הכללי a_n כן שואף לאפס:

$$\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} (\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

עוד הוכחה, עם משפט ערך הביניים: ניקח $f(x) = \sqrt{x}$. קיים $n-1 \leq \xi \leq n$ כך ש-

$$0 < \frac{f(n) - f(n-1)}{n - (n-1)} = f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

כלומר,

$$0 < \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

2.2 קריטריוני התכנסות

נתונה לנו הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ואנו רוצים למצוא מבחנים לקביעה האם הסכומים החלקיים S_n מתכנסים.

2.2.1 קריטריון קושי

טענה 2.5 הטור מתכנס אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < m < n$, $|S_n - S_m| < \epsilon$.

$$\text{כלומר } \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \epsilon.$$

זהו למעשה קריטריון קושי להתכנסות סדרות הרגיל מאינפי 1.

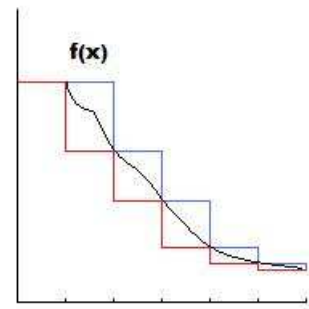
2.2.2 קריטריון ההשוואה לאינטגרל

תהי סדרה יורדת (לא בהכרח ממש), של מספרים אי שליליים. ותהא f פונקציה אי-שלילית יורדת אינטגרבילית, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a_n$. לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=2}^n a_k \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

כלומר,

$$s_n - a_1 \leq \int_1^n f(x) dx \leq s_{n-1}$$



כעת,

- אם $\int_1^\infty f(x) dx$ מתכנס, אז S_n סדרה חסומה מלעיל. מצד שני, S_n מונוטונית עולה, (כי היא סכום של מספרים אי-שליליים), ולכן הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.
- אם $\int_1^\infty f(x) dx \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$ הסדרה איננו קיים, אז הסדרה S_n גם מתבדרת.

מסקנה: הטור מתכנס אם $\int_1^\infty f(x) dx$ קיים.

2.2.3 קריטריון ההשוואה

אם קיימת סדרה אי-שלילית $\{b_n\}$ כך שלכל n , $|a_n| \leq b_n$, והטור $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.

הוכחה: מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנס, אז לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m, n > N$, $|\sum_{k=m+1}^n b_k| = \sum_{k=m+1}^n b_k < \epsilon$. (הורדנו את הערך המוחלט כי זהו טור אי-שלילי). אבל,

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n b_k < \epsilon$$

■

כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מקיים את קריטריון קושי, ולכן מתכנס.

לדוגמא:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}} + \pi + 5000e}$$

נבחר את b_n כך:

$$b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq b_n$, וכמו כן, לפי מה שראינו קודם, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

2.2.4 קריטריון העיבוי

N.B. ~ "אחד הקריטריונים האהובים עלי"

משפט 2.6 תהי סדרה יורדת של מספרים חיוביים.

אז, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ מתכנס.

הוכחה: נתבונן. מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots =$$

$$= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + (a_9 + \dots + a_{16}) + \dots$$

ונשים לב, מכיוון ש- $\{a_n\}$ יורדת של חיוביים, מתקיים:

$$2a_2 \geq (a_3 + a_4) \geq 2a_4, \quad 4a_4 \geq (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) \geq 4a_8, \quad 8a_8 \geq (a_9 + \dots + a_{16}) \geq 8a_{16}$$

ולכן,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

וגם,

$$\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \dots \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ובסה"כ:

$$\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

ולכן מקריטריון ההשוואה, מתקיים הנדרש.

כל שנותר הוא להראות שכאשר a_n סדרה אי שלילית,

אז $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ מתכנס, אם $(a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + (a_3 + a_4) + a_2 + a_1$ מתכנס.

נראה זאת. תהי a_n סדרה אי שלילית. אזי, נראה שמתקיים:

אם $b_k = \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} a_j$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתכנס.

יהיו $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$ הסכומים החלקיים של $\{a_n\}$, ו- $L_k = \sum_{j=0}^k b_j$ הסכומים החלקיים של $\{b_k\}$.

אז S_n סדרה עולה, ו- L_k תת-סדרה של S_n . ולכן L_k עולה גם היא. אז,

S_n מתכנסת \Leftrightarrow היא חסומה (כי היא עולה) $\Leftrightarrow L_k$ חסומה (כי היא ת"ס) $\Leftrightarrow L_k$ מתכנסת.

הערה (שלי): העובדה ש- L_k היא חסומה (כי היא עולה) $\Leftrightarrow L_k$ חסומה (כי היא ת"ס) לא תמיד נכונה, אבל במקרה זה היא אכן נכונה, כי הכל כאן אי-שלילי ומדובר על סכומים. כנראה. ובכל מקרה נראה לי שיותר הגיוני להשתמש כאן בחוק האסוציאטיבי לטורים חיוביים.

■

דוגמאות:

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. קריטריון העיבוי אומר שטור זה ייתכנס אם $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ מתכנס. אבל כמובן, $\sum_{k=0}^{\infty} 1$ מתבדר, ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{2k}}$ מתכנס.

ואכן, $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ מתכנס. ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

• $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$ מקריטריון העיבוי, נקבל שהטור מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log(2^k)}$ מתכנס.

נחשב: $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log(2^k)} = \frac{1}{\log 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ הוא טור מתבדר! ולכן גם $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$ מתבדר.

תרגיל: האם הטור הבא מתכנס?

$$\sum_{n=20}^{\infty} \frac{1}{n \log(n) (\log(\log(n)))^{\frac{3}{2}}}$$

2.2.5 מבחן ההשוואה הגבולי

הערה: מבחן זה **לא נלמד** אצל נועם בהרצאות, אך כן נלמד אצל צביק. היו הרבה פתרונות לתרגילים שהסתמכו עליו, ולכן אני כולל אותו בסיכום.

משפט 2.7 יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים. ונניח $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$. אזי $\sum a_n$ מתכנס אם $\sum b_n$ מתכנס.

הוכחה: הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ קיים.

ולכן קיימים $0 < \alpha < \beta$, כך שכמעט תמיד: $0 < \alpha < \frac{a_n}{b_n} < \beta$.

ולכן, כמעט תמיד מתקיים $\alpha \cdot b_n < a_n < \beta \cdot b_n$.

כעת, אם $\sum b_n$ מתבדר, נקבל שגם $\sum a_n$ מתבדר (נזכור שהם חיוביים...),

ואם $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ גם מתכנס (מהשוואה).

ובסה"כ נקבל התכנסות\התבדרות יחדיו. (נקווה שאין לי פה טעות בלוגיקה, זאת הוכחה שלי פחות או יותר).

■

2.2.6 מבחן ההשוואה המוכלל

משפט 2.8 יהיו $\{a_n\}, \{b_n\}$ סדרות אי שליליות, ונניח:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$

אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

הוכחה: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$ ולכן $\sup\{\frac{b_n}{a_n} \mid n \geq 1\} < \infty$

ולכן קיים C כך ש- $b_n < C a_n$ לכל n .

יהיו $T_n = \sum_{k=1}^n b_k$ הסכומים החלקיים של $\{b_n\}$, ו- $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ הסכומים החלקיים של $\{a_n\}$.

אנו יודעים ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ קיים וסופי, וכן ש- T_n סדרה עולה.

לכן, אם נראה ש- $\{T_n\}$ סדרה חסומה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ יהיה קיים וסופי,

ולכן נדע ש- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

נגדיר: $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. אז $S \geq S_n$ לכל n . וכמו כן, לכל n :

$$T_n = \sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^n C a_k = C \cdot S_n \leq C \cdot S$$

■

ולכן $\{T_n\}$ סדרה חסומה, וקיבלנו את מה שרצינו.

2.2.7 מבחן המנה

משפט 2.9 תהי סדרה של מספרים חיוביים. אז,

• אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$

• אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$

בפרט, אם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ קיים, אז אם הוא קטן מ-1 הטור מתכנס, אם הוא גדול מ-1 הטור מתבדר, ואם הוא שווה ל-1, אין לנו מספיק מידע.

הוכחה: ראשית נוכיח את המקרה של התבדרות:

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$ אז קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$,

$a_n > a_{n-1}$ ובפרט, $a_n > a_{n_0} > 0$. (נזכור שהנחנו שאיברי הסדרה חיוביים).

ולכן, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$,

אבל למדנו שאם הטור מתכנס אז איבריו שואפים לאפס! ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

כעת נוכיח את המקרה של התכנסות:

אנו מניחים שמתקיים: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$

אז קיים $\rho < 1$ (רו) ו- N כך שלכל $n > N$, מתקיים $\frac{a_n}{a_{n-1}} < \rho$. (♠)

טענת עזר: לכל $n \geq N$, מתקיים $a_n \leq \rho^{n-N} a_N$.

נוכיח את הטענה באינדוקציה: עבור $n = N$, זה ברור: $a_N \leq \rho^{N-N} a_N = a_N$.

ניח שהטענה נכונה עבור n , ונוכיח שהיא נכונה עבור $n + 1$.

$$a_{n+1} < \rho a_n \leq \rho \cdot \rho^{n-N} a_N = \rho^{n+1-N} a_N$$

כאשר המעבר השמאלי ביותר הוא בגלל ♠, והמעבר השני משמאל הוא הנחת האינדוקציה.

וכעת, הטענה אומרת (לאחר העברת אגפים), שלכל $n \geq N$,

$$\frac{a_n}{\rho^n} \leq a_N \rho^{-N}$$

ולכן, (ונשים לב ש- $a_N \rho^{-N}$ הוא מספר סופי ולא תלוי- n):

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\rho^n} \leq a_N \rho^{-N} < \infty$$

וכמו כן, $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ מתכנס כי זהו טור גיאומטרי.

ולכן, ממבחן השוואה המוכלל, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

■

2.2.8 מבחן השורש

משפט 2.10 תהי $\{a_n\}$ סדרה של מספרים חיוביים. אז,

• אם $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} < 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

• אם $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} > 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

הוכחה: נוכיח את מקרה ההתכנסות:

אם $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} < 1$ אז קיימים $\rho < 1$ ו- N כך שלכל $n > N$, $a_n^{\frac{1}{n}} \leq \rho$.
לכל $n > N$, $a_n \leq \rho^n$. (העלינו את שני האגפים בחזקת n). ולכן,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\rho^n} \leq 1$$

וממבחן השוואה המוכלל, נקבל ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(כי נזכור ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ מתכנס כמו בהוכחה הקודמת).

- המקרה של התבדרות הושאר כתרגיל, כנראה שהוא זהה למקרה זה במבחן המנה. ■

2.2.9 הערה קטנה לגבי מבחן המנה, מבחן השורש

הערה 2.11 קיימים מקרים שבהם בחינת הגבולות של $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ ושל $a_n^{\frac{1}{n}}$ לא תועיל לנו בכדי לקבוע אם הטור מתכנס.

לדוגמא: נתבונן בטורים $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$.

ידוע לנו משכבר הימים ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר, ואילו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. אבל,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = 1$$

ובאותו האופן,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{\frac{1}{n}} = 1$$

כלומר מבחני המנה והשורש לא עוזרים כאן! אבוי.

2.3 עוד הגדרות וחוקים

2.3.1 החוק הקומוטטיבי לטורים חיוביים

טענה 2.12 תהי סדרה של מספרים אי-שליליים, ותהי $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חח"ע ועל (פרמוטציה).

ונגדיר: $b_n = a_{\sigma n}$.

אזי, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, ובמקרה זה, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

הערה 2.13 זה לא נכון במקרה הכללי. למשל, באמצעות סידור מחדש של איברי הטור $\frac{(-1)^n}{n}$ ניתן להגיע לכל סכום שנרצה. (נזכור ש"אם היינו בני אלמוות ויכולים לקבל אינסוף מקדמות על המשכורת שלנו, היינו עשירים"...).

הוכחה: ראשית נשים לב ש- a_n היא סידור אחר של b_n באמצעות הפרמוטציה σ^{-1} .

$$T_n = \sum_{k=1}^n b_k \quad \text{ו-} \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

יהי $\{a_n\}, \{b_n\}$ שתי סדרות אי-שליליות, ולכן $\{T_n\}, \{S_n\}$ שתי סדרות עולות.

עכשיו, נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, ונראה ש- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס גם הוא.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{אז} \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad \text{ו-} \quad S \geq S_n \quad \text{לכל } n.$$

$\{T_n\}$ היא סדרה עולה, ולכן כל שעלינו להוכיח הוא שהסדרה $\{T_n\}$ היא סדרה חסומה.

נבחר איזשהו n , ונגדיר: $m = \max\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$, אז

$$T_n = \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \dots + a_{\sigma(n)} \leq$$

וכעת, נשתמש בהנחת האי שליליות. הסכום הבא מכיל לפחות את כל האיברים הנ"ל, וייתכן שיותר:

$$\leq a_1 + a_2 + \dots + a_m = S_m \leq S$$

ולכן הסדרה $\{T_n\}$ היא סדרה חסומה, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

ונזכור שכשם ש- $\{b_n\}$ הוא סידור מחדש של $\{a_n\}$, כך גם $\{a_n\}$ הוא סידור מחדש של $\{b_n\}$. ולכן אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

כלומר, הוכחנו ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

$$\text{נותר להוכיח שבמקרה זה, } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ראינו שלכל n , $T_n \leq S$, ולכן, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n \leq S$, ולכן,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ומכיוון שניתן לראות את $\{a_n\}$ כסידור מחדש של איברי $\{b_n\}$,

אז באותו האופן,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ובסה"כ קיבלנו ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ כנדרש.

■

2.3.2 החוק האסוציאטיבי לטורים מתכנסים

טענה 2.14 :

- (א) תהי $\{a_n\}$ סדרה כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. ותהי $\{u_n\}$ סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים. נגדיר: $b_1 = \sum_{k=1}^{u_1} a_k$ ועבור $n > 1$ נגדיר $b_n = \sum_{k=u_{n-1}+1}^{u_n} a_k$. אזי, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ וגם מתכנס, וגם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

וגם,

- (ב) אם $\{a_n\}$ סדרה של מספרים אי שליליים ו- $\{b_n\}, \{u_n\}$ כנ"ל, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הוכחה: ראשית, יהי $S_n = \sum_{k=1}^n a_k, T_n = \sum_{k=1}^n b_k$. אז,

$$T_n = \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=u_{k-1}+1}^{u_k} a_j \right) = \sum_{j=1}^{u_n} a_j = S_{u_n}$$

ולכן הסדרה $\{T_n\}$ היא תת-סדרה של $\{S_n\}$.

נוכיח את (א):

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסת, אז הסדרה $\{S_n\}$ מתכנסת, ולכן $\{T_n\}$ מתכנסת גם היא, ולאותו הגבול. ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

נוכיח את (ב):

אם $\{a_n\}$ אי שלילית, אז S_n סדרה עולה, ואז אם S_n מתכנסת, אז גם T_n מתכנסת. אם $S_n \rightarrow \infty$ אז גם $T_n \rightarrow \infty$.

דוגמא להמחשה:

ניקח:

$$u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 4, u_4 = 9$$

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_4, b_4 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1 + (a_2 + a_3) + a_4 + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9) + \dots$$

הסכום של b_n הוא פשוט השמת סוגריים על הסכום של a_n .

2.3.3 טענה מהתרגול על אסוציאטיביות והכנסת סוגריים על איברים בעלי אותו סימן

טענה 2.15 בהינתן סדרה $\{a_n\}$ (לא בהכרח חיובית!),

וסדרת טבעיים מונוטונית עולה חזק (ולכן לאינסוף) $\{n_k\}$, נגדיר:

$$b_k = \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i$$

(אנו מגדירים $n_0 = 1$)

ונאמר ש- $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ הוא הטור המתקבל ע"י הכנסת סוגריים המקבצים את $a_{n_{k-1}}, \dots, a_{n_k-1}$ לאיבר אחד, לכל k .

הטענה: בסימונים לעיל, אם $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס, ובתוך כל סוגריים הסימן קבוע, (כלומר לכל k , כל האיברים $a_{n_{k-1}}, \dots, a_{n_k-1}$ אי-שליליים או כולם אי-חיוביים),

אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הטענה היתה בתרגול ללא הוכחה (אצלינו בקבוצה לפחות).

כמו כן, כדאי לציין שהכיוון ההפוך תמיד נכון.

2.3.4 קונבולוציה (מכפלת קושי) של טורים

הגדרה 2.16 יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות.

הקונבולוציה שלהן היא הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k}$$

בפרט, לדוגמא, $c_1 = a_1 b_1$, $c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$, $c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$.

דוגמא: יהיו $f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$ ו- $g(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2$.

מה ניתן לומר על $h(x) = f(x)g(x)$?

$$f(x)g(x) = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)(b_1 + b_2 x + b_3 x^2) = \dots\dots(ughhh)\dots$$

כאשר מחשבים את החישוב הזה ומקבצים איברים, מקבלים שהמקדם החופשי הוא $a_1 b_1$, המקדם של x הוא $a_1 b_2 + a_2 b_1$, המקדם של x^3 הוא $a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$ וכן הלאה.

במילים אחרות, המקדם של x^n הוא האיבר n -י של הקונבולוציה של $\{a_n\}$, $\{b_n\}$.

2.3.5 משפט לגבי קונבולוציה

משפט 2.17 יהיו $\{a_n\}, \{b_n\}$ סדרות שאיבריהן אי-שליליים, ונניח שאף אחת מהן אינה זהותית ל-0.

תהי $\{c_n\}$ הקונבולוציה של $\{a_n\}$ ו- $\{b_n\}$.

אז, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס אם"ם הן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים, ובמקרה זה, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$.

הוכחה: כיוון ראשון: נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ לא מתכנס, ושקיים m כך ש- $a_m \neq 0$, ונראה ש- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ לא מתכנס.

לכל $n > m$, מתקיים ש- $c_n \geq a_m b_{n+1-m}$.

(כי $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} + a_n b_{n+1-n}$ והכל פה אי-שלילי). עכשיו,

$$\sum_{k=1}^n c_k \geq a_m \sum_{k=1}^{n+1-m} b_k \rightarrow \infty$$

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתבדר.

כיוון שני: נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים, ונראה ש- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס.

$c_n \geq 0$ לכל n , ולכן מספיק להראות שהסדרה $W_n = \sum_{k=1}^n c_k$ חסומה.

(כי זהו הרי סכום של אי-שליליים, ולכן בהכרח W_n מונוטונית עולה).

נסמן: $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $T_n = \sum_{k=1}^n b_k$, וגם: $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

נראה שלכל n , $W_n \leq ST$ וזה יספיק:

וגם $S_n \leq S$ ולכן $T_n \leq T$ ולכן $S_n T_n \leq ST$ (נשים לב שהשתמשנו באי-שליליות).

מספיק להראות ש- $W_n \leq S_{n+1} T_{n+1}$. אז:

$$S_{n+1} T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \sum_{j=1}^{n+1} b_j$$

ומצד שני, (נשים לב לשיוון הימני, הוא קצת מסובך):

$$W_n = \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j b_{k+1-j} = \sum_{h=1}^n \left(a_h \sum_{j=1}^{n+1-h} b_j \right) \leq$$

כעת, הסכום הבא מכיל יותר איברים:

$$\leq \sum_{h=1}^n \left(a_h \sum_{j=1}^{n+1} b_j \right) \leq \sum_{h=1}^{n+1} a_h \sum_{j=1}^{n+1} b_j = S_{n+1} T_{n+1}$$

ולכן, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס.

ונותר להראות ש- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$

אנחנו יודעים ש- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq T \cdot S$

צריך להראות שלכל $\epsilon > 0$ קיים n כך ש- $W_n = \sum_{k=1}^n c_k > T \cdot S - \epsilon$

יהי m כזה ש- $T_m S_m > S \cdot T - \epsilon$ (יש כזה כי הן מתכנסות), ונבחר $n = 2m$.

$$W_n = \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{h=1}^n \left(a_h \sum_{j=1}^{n+1-h} b_j \right) \geq$$

נעיף חצי מהאיברים:

$$\sum_{h=1}^m \left(a_h \sum_{j=1}^{n+1-h} b_j \right) > \sum_{h=1}^m \left(a_h \sum_{j=1}^m b_j \right) = T_m S_m \geq S \cdot T - \epsilon$$

וסיימו.

2.3.6 התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

תהי $\{a_n\}$ סדרה.

2.18 הגדרה אנו אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

2.19 הגדרה אנו אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס, אבל לא מתכנס בהחלט.

2.20 טענה אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הוכחה: נשתמש בתנאי קושי.

מספיק להראות שלכל ϵ קיים N כך שלכל $n > N$, מתקיים $|\sum_{k=N}^n a_k| < \epsilon$.

נבחר ϵ . כעת, מכיוון ש- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, קיים N כך שלכל $n > N$,

מתקיים $\sum_{k=N}^n |a_k| < \epsilon$. אבל,

$$\sum_{k=N}^n -|a_k| \leq \sum_{k=N}^n a_k \leq \sum_{k=N}^n |a_k|$$

ולכן

$$\left| \sum_{k=N}^n a_k \right| \leq \sum_{k=N}^n |a_k| < \epsilon$$

2.3.7 קריטריון לייבניץ להתכנסות

משפט 2.21 תהי $\{b_n\}$ סדרה מונוטונית יורדת של מספרים אי-שליליים כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, וניקח: $a_n = (-1)^{n-1} b_n$. אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$ מתכנס.

הוכחה: יהי $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. עלינו להראות ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ קיים. נטען שסדרת הסכומים החלקיים הזוגיים עולה, כלומר ש- $S_{2n+2} \geq S_{2n}$. מדוע זה נכון?

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = S_{2n} + b_{2n+1} - b_{2n+2} \geq S_{2n}$$

והמעבר האחרון נכון כי b_n יורדת, ולכן $b_{2n+1} - b_{2n+2} \geq 0$. באופן דומה, לכל n : נטען שמתקיים: $S_{2n+1} \leq S_{2n-1}$. מדוע זה נכון?

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} = S_{2n-1} - b_{2n} + b_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

כעת, מה אנו יודעים על הסדרה $\{S_{2n}\}$? ראשית, היא עולה. ובנוסף,

$$0 \leq \dots \leq S_{2n-4} \leq S_{2n-2} \leq S_{2n} \leq S_{2n} + b_{n+1} =$$

$$= S_{2n+1} \leq S_{2n-1} \leq S_{2n-3} \leq \dots \leq S_1 = b_1$$

מסקנה: לכל n , $0 \leq S_{2n} \leq b_1$.

אז $\{S_{2n}\}$ סדרה עולה וחסומה, ולכן יש לה גבול $L = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$

עכשיו, נראה שגם $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$:

עלינו להראות שלכל ϵ קיים N כך שלכל $n > N$, מתקיים $|S_n - L| < \epsilon$. נבחר ϵ . כעת, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-

$$1. \text{ לכל } k \geq \frac{N}{2}, \text{ מתקיים } |S_{2k} - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$2. \text{ לכל } n > N, \text{ מתקיים } |b_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

ויהי $n > N$

אם n זוגי, אז $n = 2k$ לאיזשהו $k \geq \frac{N}{2}$ ואז $|S_n - L| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$

אם n אי-זוגי, אז $n = 2k + 1$ לאיזשהו $k \geq \frac{N}{2}$, ואז $S_n = S_{2k+1} = S_{2k} + b_n$, ואז

$$\text{ואז, } |S_n - L| = |S_{2k} + b_n - L| \leq |S_{2k} - L| + |b_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

■

2.3.8 מסקנה: הטור ההרמוני עם סימנים מתחלפים מתכנס, + הערות נוספות + משפט רימן

ממשפט זה אנו לומדים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ מתכנס בתנאי ראשית, הוא לא מתכנס בהחלט, כי $|(-1)^{n-1} \frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$ וכבר ראינו שהטור ההרמוני מתבדר. לגבי ההתכנסות, זה נובע ישירות מקריטריון לייבניץ הנ"ל.

הערה 2.22 בנוסף,

- אם $\{a_n\}$ כמו בקריטריון לייבניץ, ו- $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, אז לכל n , $S_{2n} \leq L \leq S_{2n+1}$. (תרגיל)
- אם $\{a_n\}$ מקיים את תנאי לייבניץ החל ממקום מסוים, אז הוא מתכנס, וההערכה שנתנו בשורה הקודמת נכונה מהמקום שבו תנאי לייבניץ מתחיל להתקיים.

כעת נדון בעובדה מעניינת: למדנו שאם ניקח את איבריו של טור חיובי ונשנה את סדרם, אז הטור ימשיך להתכנס, ולאותו ערך. הטענה הזו נכונה לטורים שמתכנסים בהחלט, אבל **לא לטורים שמתכנסים בתנאי**.

נראה דוגמה של טור שמתכנס בתנאי, שכאשר נשנה את סדר איבריו, הוא ימשיך להתכנס אבל לערך אחר: (הערה: עשינו זאת ביותר פורמליות בתרגיל 7).

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots = L$$

עובדה: $L > 0$ (למעשה הוא $\ln(2)$). נשנה את הסדר:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} \dots$$

טענה: הסכום הזה שווה ל- $\frac{L}{2} \neq L$. למה זה נכון? (הוכחה לא פורמלית, כנראה! יש לבדוק בפתרון התרגיל 7).

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \sum_{k \text{ is odd}} \frac{1}{k} - \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} = \sum_{k \text{ is odd}} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k \text{ is odd}} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots) = \frac{L}{2}$$

משפט 2.23 רימן (ללא הוכחה בקורס זה)

תהי $\{a_n\}$ סדרה כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, ויהי $k \in \mathbb{R}$ מספר כלשהו. אז קיימת $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חח"ע ועל, כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma n} = k$. כמו כן, קיימת $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma n}$ לא מתכנס. לא נוכיח את משפט זה בקורס.

2.3.9 x^+, x^- והטורים הנוגעים להם

הגדרה 2.24 יהי $x \in \mathbb{R}$.

החלק החיובי של x מוגדר ע"י

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

החלק השלילי של x מוגדר ע"י

$$x^- = \begin{cases} -x & \text{if } x \leq 0 \\ 0 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

הן החלק החיובי והחלק השלילי הם מספרים אי-שליליים.

הערה 2.25 מתקיים:

$$x = x^+ - x^- \bullet$$

$$|x| = x^+ + x^- \bullet$$

ההוכחה הושארה כתרגיל.

טענה 2.26 אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט,

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנסים בהחלט,

ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

הוכחה: ראשית נשים לב שמתקיים:

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n| \quad , \quad 0 \leq a_n^- \leq |a_n|$$

ובנוסף $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס (מהנתון).

לכן ממבחן ההשוואה, הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנסים. (נשים לב שאלו טורים חיוביים).

נותר להוכיח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

$$.W_n = \sum_{k=1}^n a_k^-, \quad T_n = \sum_{k=1}^n a_k^+, \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

אי:

$$.\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

לכל k , מתקיים $a_k = a_k^+ - a_k^-$, ולכן,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^n a_k^+ - \sum_{k=1}^n a_k^- = T_n - W_n$$

ולכן,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n - \lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

טענה 2.27 אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס **בתנאי**, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ לא מתכנס, וגם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ לא מתכנס. (טענה זו היא לא אם"ס!)

הוכחה: ראשית, נראה שאחד מהם לא מתכנס.

איך נעשה זאת? בשלילה. נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנסים.

אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-)$ מתכנס.

אבל, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, **בסתירה** להנחה שהוא מתכנס בתנאי.

ולכן לא ייתכן ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנסים שניהם, ולכן לפחות אחד מהם מתבדר.

נניח בה"כ ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ מתבדר.

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, T_n = \sum_{k=1}^n a_k^+, W_n = \sum_{k=1}^n a_k^-$$

אנו יודעים ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ קיים.

כמו כן, אנו יודעים ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$ (זהו טור חיובי שמתבדר).

וכעת, לכל n , $S_n = T_n - W_n$ (ראינו בהוכחה הקודמת), כלומר $T_n = S_n + W_n$.

S_n מתכנס. אילו W_n היה מתכנס, אז גם T_n היה מתכנס. ולכן, W_n מתבדר.

2.3.10 משפט לגבי קומוטטיביות של איברים בטור המתכנס בהחלט

משפט 2.28 יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור שמתכנס בהחלט, ותהי $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חח"ע ועל. נגדיר: $b_n = a_{\sigma n}$.

אז, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט, וגם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

הוכחה: ההוכחה מורכבת משני שלבים:

(א) $|b_n| = |a_{\sigma n}|$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ הוא טור חיובי מתכנס. ממשפט שלמדנו על מצב זה, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ מתכנס, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט.

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ הוא טור חיובי מתכנס וכך גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ (מהטענה שלפני הקודמת).

ולכן, מתקיים: (מהחוק הקומוטטיבי לטורים חיוביים)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma n}^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$$

וגם

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma n}^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

וקיבלנו:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

■

2.3.11 משפט על קונבולוציה והתכנסות בהחלט

ראשית, **תזכורת קצרה**: אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות, אז הקונבולוציה שלהן היא הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k}$. הוכחנו שאם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים מתכנסים, אז $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס, וגם $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$.

משפט 2.29 אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים המתכנסים **בהחלט**, ו- $\{c_n\}$ הוא הקונבולוציה של $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס **בהחלט**, ו- $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

הערה 2.30 לגבי התנאים במשפט:

1. מספיק היה לדרוש ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. (לא הוכחנו זאת).
2. לעומת זאת, אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שניהם מתכנסים בתנאי, אז כבר המשפט מפסיק להתקיים.

דוגמא ל-2: ניקח $a_n = b_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. מתקיים ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים (בתנאי) מתנאי לייבניץ. אבל:

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1-k}}$$

$$|c_n| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1-k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

כלומר c_n לא שואף לאפס, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתבדר.

ניגש להוכחת המשפט: הוכחה: א) נראה ש- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס בהחלט.

נגדיר:

$$c_n^* = \sum_{k=1}^n |a_k| |b_{n+1-k}|$$

$c_n^* \geq 0$. c_n^* הוא הקונבולוציה של הטורים החיוביים המתכנסים $|a_n|$ ו- $|b_n|$, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^*$ מתכנס. כמו כן,

$$|c_n| = \left| \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| |b_{n+1-k}| = c_n^*$$

ולכן ממבחן ההשוואה, $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ מתכנס, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס בהחלט.

ב כעת אנו רוצים להוכיח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$.

אנו מכירים את $b_n^+, b_n^-, a_n^+, a_n^-$: כולם טורים חיוביים מתכנסים.

("אם $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^+$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^-$ מתכנסים בהחלט").

נגדיר:

$\{c_n^{++}\}$ הקונבולוציה של $\{a_n^+\}$ עם $\{b_n^+\}$.

$\{c_n^{+-}\}$ הקונבולוציה של $\{a_n^+\}$ עם $\{b_n^-\}$.

$\{c_n^{-+}\}$ הקונבולוציה של $\{a_n^-\}$ עם $\{b_n^+\}$.

$\{c_n^{--}\}$ הקונבולוציה של $\{a_n^-\}$ עם $\{b_n^-\}$.

וכעת נוכיח טענת עזר:

לכל n , מתקיים: $c_n = c_n^{++} + c_n^{--} - c_n^{+-} - c_n^{-+}$. נוכיח זאת:

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} = \sum_{k=1}^n (a_k^+ - a_k^-)(b_{n+1-k}^+ - b_{n+1-k}^-) =$$

$$= \sum_{k=1}^n (a_k^+ b_{n+1-k}^+ - a_k^+ b_{n+1-k}^- - a_k^- b_{n+1-k}^+ + a_k^- b_{n+1-k}^-) =$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k^+ b_{n+1-k}^+ + \sum_{k=1}^n a_k^- b_{n+1-k}^- - \sum_{k=1}^n a_k^+ b_{n+1-k}^- - \sum_{k=1}^n a_k^- b_{n+1-k}^+ =$$

$$= c_n^{++} + c_n^{--} - c_n^{+-} - c_n^{-+}$$

ולכן טענת העזר נכונה.

כעת, a_n^+, b_n^+ טורים חיוביים, ולכן:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{++} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ \right)$$

ובאותו האופן:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{--} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^- \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-+} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{+-} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^- \right)$$

מסקנה:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{++} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{--} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{+-} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-+} = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^- \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^- \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ \right) = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) \end{aligned}$$

■

2.4 שני קריטריונים נוספים - דיריכלה, אבל

2.4.1 קריטריון דיריכלה

משפט 2.31 תהי $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית יורדת (במובן החלש), כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ויהי $0 < M < \infty$, ו- $\{b_n\}$ סדרה המקיימת $|\sum_{k=1}^n b_k| < M$ לכל n .

אז, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

(הערה: נשים לב שקריטריון לייבניץ הוא מקרה פרטי של קריטריון זה!)

הוכחה: תחילה נשים לב שלכל N ולכל $m > N$,

$$\left| \sum_{k=N+1}^m b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^m b_k - \sum_{k=1}^N b_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^m b_k \right| + \left| \sum_{k=1}^N b_k \right| < 2M$$

כעת נראה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מקיים את קריטריון קושי:

נבחר ϵ , וניקח N כך ש- $a_N < \frac{\epsilon}{6M}$.

אנו רוצים להראות שלכל $m > N$,

$$\left| \sum_{k=N+1}^m a_k b_k \right| < \epsilon$$

נגדיר: לכל $n > N$,

$$B_N^N = 0, \quad B_n^N = \sum_{k=N+1}^n b_k$$

מתקיים ש- $|B_n^N| < 2M$ לכל $n \geq N$. (מהעובדה שצינו בתחילת ההוכחה).

כעת, (לשים לב לאינדקסים!)

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^m a_k b_k &= \sum_{k=N+1}^m a_k (B_k^N - B_{k-1}^N) = \sum_{k=N+1}^m a_k B_k^N - \sum_{k=N}^{m-1} a_{k+1} B_k^N = \\ &= \sum_{k=N+1}^{m-1} B_k^N (a_k - a_{k+1}) + a_m B_m^N - a_{N+1} B_N^N \end{aligned}$$

ונזכיר ש- $B_N^N = 0$ אז האיבר הימני מתאפס.

ולכן, (נשים לב לחיוביות a_n והעובדה שהיא יורדת):

$$\left| \sum_{k=N+1}^{m-1} a_k b_k \right| = \left| \sum_{k=N+1}^{m-1} B_k^N (a_k - a_{k+1}) + a_m B_m^N \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{m-1} |B_k^N| (a_k - a_{k+1}) + a_m |B_m^N| \leq 2M \left(\sum_{k=N+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) + a_m \right) =$$

(בשורה הבאה צבעתי בכחול את כל האיברים שמתקזזים):

$$2M (a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+2} - a_{N+3} + a_{N+3} - a_{N+4} + \dots + a_{m-1} - a_m + a_m) =$$

$$= 2M \cdot a_{N+1} \leq 2M \cdot a_N \leq 2M \cdot \frac{\epsilon}{6M} < \epsilon$$

כאשר האי שיוון הראשון משמאל בשורה האחרונה הוא ממונוטוניות a_n .
ולכן מתקיים קריטריון קושי המפורסם, והמשפט נכון.

2.4.2 קריטריון אבל

משפט 2.32 יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס, ו $\{b_n\}$ סדרה מונוטונית וחסומה.
אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ טור מתכנס.

הוכחה: נניח בה"כ ש- b_n סדרה יורדת.

("אם היתה עולה, היה אפשר להחליפה ב- $-b_n$, והטור מתכנס אם"ם המינוס שלו מתכנס")

נסמן: $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, וגם $c_n = b_n - B \geq 0$

("היינו לוקחים $B - b_n$ אם b_n עולה" - למה? כי $-b_n \rightarrow -B$ ואז $c_n = (-b_n) - (-B) = B - b_n$ וזוהי סדרה יורדת לאפס כנדרש).

c_n מונוטונית יורדת, ו $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

מקריטריון דיריכלה, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ טור מתכנס. (כי $\sum a_n$ חסום, מכיוון ש- a_n מתכנסת, כנראה).

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} B \cdot a_n$ מתכנס (כפל בקבוע).

מתקיים:

$$a_n b_n = B \cdot a_n + a_n \cdot b_n - B \cdot a_n = B \cdot a_n + a_n \cdot c_n$$

כלומר $a_n b_n = B \cdot a_n + a_n \cdot c_n$

ולכן, מההתכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} B \cdot a_n$ ושל $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$, אנו מקבלים ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

2.5 מספר דוגמאות

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ מתכנס.

אם נוכיח שסדרת הסכומים החלקיים $\sum_{k=1}^n \sin(k)$ חסומה, נוכל להשתמש בדיריכלה!

הנה נוסחה שנועם הוכיח בעזרת מספרים מרוכבים (או מצא בגוגל) בבוקר ההרצאה:

$$\sum_{k=1}^n \sin(k) = \frac{1}{2} \frac{\sin(n) - \sin(n+1) - \sin(1)}{1 - \cos(1)}$$

כעת, עלינו לוודא שהסדרה $\frac{1}{2} \frac{\sin(n) - \sin(n+1) - \sin(1)}{1 - \cos(1)}$ חסומה.

לכל n ,

$$\left| \frac{1}{2} \frac{\sin(n) - \sin(n+1) - \sin(1)}{1 - \cos(1)} \right| \leq \frac{3}{2(1 - \cos(1))} \leq 100$$

ולכן סדרת הסכומים החלקיים חסומה, וזהו.

הערה כללית על הנוסחה ממקודם:

משתמשים בכך ש- $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$. אז, לפי נוסחה לטור גיאומטרי:

$$\sum_{k=1}^n e^{ik} = \frac{e^{i(n+1)} - e^i}{e^i - 1} = \frac{\cos(n+1) - \cos(1) + i(\sin(n+1) - \sin(1))}{\cos(1) - 1 + i\sin(1)}$$

מחשבים את כל זה, ומקבלים ביטוי ארוך ונוראי. החלק המדומה הוא $\sum_{k=1}^n \sin(k)$ ומקבלים את הנדרש. (ועל זה נאמר בהרצאה - "מי שרוצה לדעת מה עבר עלי היום בבוקר, שיחשב").
הערה: כל העסק הזה הוא בגדר חומר העשרה, אז לא צריך לזכור או להבין את זה.

עוד דוגמא:

כמה זה $\frac{1}{9}$?

$$\frac{1}{9} = 0.11111111\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

בפרט, הצגה עשרונית עם אינסוף ספרות אחרי הנקודה מקבלת משמעות רק לטור מתכנס.

2.6 מכפלות אינסופיות (מהתרגול)

עברנו על הנושא הזה בתרגול, אבל מסבתר שהוא הופיע לפעמים גם במבחנים. אז להלן סיכום עיקר הדברים:

אנו מעוניינים לחקור מכפלות אינסופיות, כלומר אובייקטים מהצורה $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$.

הגדרה 2.33 תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים חיוביים. נגדיר את הסדרה:

$$P_n = \prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

כסדרת המכפלות החלקיות.

אם הסדרה P_n מתכנסת ל- $P > 0$, נאמר שהמכפלה האינסופית $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסת ל- P .

אם הסדרה P_n אינה מתכנסת, נאמר שהמכפלה מתבדרת.

ואם הסדרה P_n מתכנסת ל-0, גם כן נאמר שהמכפלה מתבדרת, אבל היא **מתבדרת לאפס**.

הערה 2.34 (אני שכתבתי את ההסבר הבא מהטקסט של התרגול, אז ייתכנו טעויות).

הרבה יותר קל לנו לעבוד עם טורים רגילים. ולכן, ניתן להתבונן ב- $\ln(P_n)$.

כלומר, אנו מחפשים את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_k$$

וניתן לומר גם שמתקיים (מהחוק): $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln(a_k)$$

וכעת המרנו את הבעיה לבעיית טורים! מה שנקבל בגבול הימני, הוא \ln של הגבול שאנו מחפשים.

כמו כן, נשים לב שאם קיבלנו ש $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(P_n) = -\infty$, אזי $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$.

עוד חוק שכדאי לזכור הוא הכלל: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

כמו כן כדאי לשים לב ש $\frac{P_n}{P_{n-1}} = a_n$.

3 סדרות וטורים של פונקציות

3.1 סדרות

3.1.1 הגדרות בסיסיות

יהי A קטע ב- \mathbb{R} . (כלומר קטע סגור\פתוח בצד אחד או שניהם, וייתכן שאחד או שני הצדדים הוא אינסופי).

תהי B קבוצת הפונקציות $\mathbb{R} \rightarrow A$.

סדרה של פונקציות $\{f_n\}$ היא סדרה $\mathbb{N} \rightarrow B$, כך ש- $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$.

לכל $x \in A$, הסדרה $\{f_n(x)\}$ היא סדרה של מספרים.

3.1 הגדרה התכנסות נקודתית

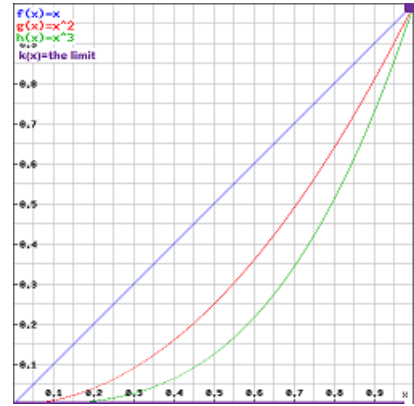
תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות מ- A ל- \mathbb{R} , ותהי $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

אנו אומרים שהסדרה f_n מתכנסת נקודתית ל- f אם לכל $x \in A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

בשפה קצת אחרת, $\{f_n\}$ מתכנסת נקודתית ל- f אם:

$$\forall x, \epsilon (\exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \epsilon))$$

דוגמא:



$$f_n(x) = x^n, A = [0, 1]$$

למשל, עבור $x = \frac{1}{2}$, נקבל $f_n(x) = (\frac{1}{2})^n$.

האם הסדרה הזו מתכנסת נקודתית? אם כן, מהו הגבול?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases} \quad \text{התשובה לכך היא שהגבול קיים, והוא הפונקציה}$$

הוכחה: צריך להראות שלכל x , $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

אם $x < 1$ אז $f_n(x) = x^n$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$.

מאידך, אם $x = 1$ אז $f_n(x) = 1$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

הבחנו בתופעה מטרידה

f_n רציפות כולן, אבל גבולן f היא פונקציה לא רציפה.

- עד כמה גרוע יכול המצב להיות? האם קיימת סדרה של פונקציות רציפות שגבולה הנקודתי הוא פונקציית דיריכלה?
- האם ניתן להגדיר התכנסות באופן אחר, כך שגבול של פונקציות רציפות יהיה רציף? (התשובה היא כן)
- מה לגבי גזירות? אינטגרביליות? גורל האנושות??

3.1.2 כמה דוגמאות

דוגמא א:

$A = [0, 1]$, ונגדיר:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ n(\frac{2}{\sqrt{n}} - x) & \text{if } \frac{1}{\sqrt{n}} \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{if } \frac{2}{\sqrt{n}} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

מה הגבול הנקודתי של f_n כאשר $n \rightarrow \infty$? תשובה: אפס.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, x \in [0, 1]$$

עבור $x = 0$, זה ברור.

עבור $0 < x \leq 1$, לכל $n > \frac{4}{x^2}$ מתקיים $x > \frac{2}{\sqrt{n}}$,

ולכן $f_n(x) = 0$ החל ממקום מסויים, ונקבל $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

נשים לב שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(f_n) = \infty$, אבל במונח הנקודתי, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

דוגמא ב:

$A = [-1, 1]$ ונגדיר:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{1}{n} \leq x \\ nx & \text{if } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -1 & \text{if } x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

טענה: הגבול הנקודתי של הסדרה $\{f_n\}$ הוא הפונקציה הבאה: $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

f אינה רציפה, ונקודות אי-הרציפות שלה אינה סליקה.

הוכחה: עבור $x = 0$, $f_n(x) = 0$ לכל n , ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

עבור $x > 0$, לכל $n > \frac{1}{x}$ מתקיים $x > \frac{1}{n}$ ולכן החל ממקום מסויים, $f_n(x) = 1$ ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$.

עבור $x < 0$, לכל $n > -\frac{1}{x}$ מתקיים $x < -\frac{1}{n}$,

ואז החל ממקום מסויים $f_n(x) = -1$ ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = -1$.

דוגמא ג:

לא קיימת סדרה של פונקציות רציפות שגבולה הנקודתי הוא פונקציית דיריכלה. אבל, נטען ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \cdot \pi x)^{2m}) \right) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

נראה זאת. ראשית נניח x רציונלי, כלומר $x = \frac{p}{q}$.

לכל $n > q$, $n!x$ הוא מספר שלם. (המכנה הצטמצם). ולכן, $\cos(n! \cdot \pi x) \in \{-1, 1\}$.

ומכאן, $(\cos(n! \cdot \pi x))^{2m} = 1$. כלומר כאשר x רציונלי, הגבול הנ"ל הוא 1.

אם x אינו רציונלי, אז $n!x$ אינו שלם לאף n .

נבחר n . $n!x$ אינו שלם, ולכן $-1 < \cos(n! \cdot \pi x) < 1$.

ולכן, לכל n , $\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \cdot \pi x)^{2m}) = 0$.

ולכן הגבול כולו במקרה זה הוא 0.

3.1.3 התכנסות במידה שווה

הגדרה 3.2 יהי A קטע, ו- $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות מ- A ל- \mathbb{R} , ו- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

אנו אומרים ש- f_n מתכנסת במידה שווה ל- f ,

אם לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ ו- $x \in A$ נקבל $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

כלומר

$$\forall \epsilon > 0 (\exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N, x \in A |f_n(x) - f(x)| < \epsilon))$$

ההבדל בין התכנסות במ"ש להתכנסות נקודתית הוא שבהתכנסות במ"ש, ה- N תלוי רק ב- ϵ . (בהתכנסות נקודתית הוא תלוי גם ב- x).

טענה 3.3 אם f_n מתכנסת ל- f במ"ש, אז היא מתכנסת ל- f נקודתית.

הוכחה: יהי $x_0 \in A$, ו- $\epsilon > 0$.

מהתכנסות במ"ש, קיים N כך שלכל $n > N$ ו- $x \in A$ נקבל $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

בפרט, לכל $n > N$, מתקיים $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$.

דוגמא: סדרה שמתכנסת נקודתית, אבל לא מתכנסת במידה שווה.

$$f_n(x) = x^n, A = [0, 1], \text{ ראינו קודם ש-} f_n \text{ שואפת ל-} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases} \text{ נקודתית.}$$

ונראה שהתכנסות זו היא לא במ"ש.

עלינו למצוא ϵ (ניקח $\epsilon = \frac{1}{4}$) וסדרה x_n כך שלכל n , $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \epsilon$.

אם נצליח, אז נראה ש- f_n לא מתכנסת במ"ש ל- f .

נבחר $x_n = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$, $0 < x_n < 1$ ולכן $f(x_n) = 0$.

$$f_n(x_n) = x_n^n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{2}$$

ולכן $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2} > \epsilon$.

3.1.4 קריטריון קושי להתכנסות במ"ש

משפט 3.4 תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות מקטע I ל- \mathbb{R} .

קיימת פונקציה $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $\{f_n\}$ מתכנסת ל- f במ"ש

אם"ם לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n, m > N$ ו- $x \in I$ נקבל $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$.

הוכחה: כיוון א: נניח שמתקיים קריטריון קושי.

(הערה: ההוכחה שניתנה בהרצאה לא היתה טובה, לדעתי. החלפתי אותה בהוכחה שלי, אז תיתכן טעות).

לכל $x \in I$ סדרת המספרים $\{f_n(x)\}$ מקיימת את קריטריון קושי לסדרות מספרים (מאינפי 1),

ולכן, לכל x הסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת, ונסמן $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

f היא פונקציה, וראינו שהסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת נקודתית ל- f . נראה ש- f_n מתכנסת ל- f במ"ש:

נבחר ϵ , ויהי N כזה שלכל $n, m > N$ ולכל x , $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. (לפי ההנחה זה קיים).

יהי $m > N$, ויהי $x_0 \in I$.

קיים $N_0 > N$ גדול מספיק כך שלכל $n > N_0$, $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$.

(קיים כזה כי $f_n \rightarrow f$ נקודתית).

אז נבחר $n > N_0$ ונקבל,

$$|f_m(x_0) - f(x_0)| \leq |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ולכן קיבלנו, שלכל ϵ קיים N , כך שלכל $x \in I$ ולכל $m \geq N$, $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$.

ולכן הסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת ל- f במ"ש.

כיוון ב: (גם, הוכחה שלי, תיתכן טעות).

אם f_n מתכנסת ל- f במ"ש, אז לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n \geq N$ ו- $x \in A$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.

אז, לכל $x \in I$ ו- $n > N$:

$$|f_n(x) - f_N(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_N(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_N(x)| < \epsilon$$

■

3.1.5 התכנסות במ"ש של פונקציות רציפות גוררת רציפות פונקציית הגבול

משפט 3.5 יהי I קטע ב- \mathbb{R} , ותהי סדרה של פונקציות רציפות מ- I ל- \mathbb{R} ,

שמתכנסת במ"ש לפונקציה $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. אז, רציפה.

הוכחה: נניח בשלילה ש- f אינה רציפה.

אז קיימת נקודה $x_0 \in I$ וסדרת נקודות $\{x_k\}$ ב- I ,

כך ש- $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$, אבל $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \neq f(x_0)$.

(פירוש ה- \neq הוא או שקיים הגבול ושונה, או שלא קיים בכלל).

בפרט, **בה"כ**, קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל k גדול מספיק, $|f(x_k) - f(x_0)| > \epsilon$.

(הערה שלי: ייתכן שבמקום המשפט האחרון, צריך להגיד כאן שקיים $\epsilon > 0$ כך שבאופן שכיח מתקיים הנ"ל.)

יהי N כזה שלכל $n > N$, ולכל $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4}$. (*)

נבחר $n > N$ מסויים.

f_n רציפה. ונזכור ש- $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$, ולכן $\lim_{k \rightarrow \infty} f_n(x_k) = f_n(x_0)$.

בפרט, לכל k גדול מספיק, $|f_n(x_k) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{4}$. (**)

ניקח k גדול מספיק, כזה שעבורו $|f(x_k) - f(x_0)| > \epsilon$ לפי הנחת השלילה.

ונחשב:

$$f(x_k) - f(x_0) = (f(x_k) - f_n(x_k)) + (f_n(x_k) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0))$$

ולכן

$$|f(x_k) - f(x_0)| \leq |f(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{3\epsilon}{4} < \epsilon$$

כאשר השתמשנו ב- (*), (**), (*).

הגענו לסתירה, ולכן עלינו לשלול את ההנחה ש- f אינה רציפה.

3.1.6 תנאי שקול להתכנסות במ"ש

זהו תנאי שלמדנו בתרגול, והוא מאוד יעיל בפתרון תרגילים:

יהיו f_n, f בקטע I .

מדוע התכנסות במ"ש של $f_n \rightarrow f$ בקטע I שקולה ל- $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$?

זה נכון, מכיוון ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|) = 0$$

\Leftrightarrow

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

\Leftrightarrow

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

זוהי צורה מאוד שימושית ופרקטית - כדאי לזכור אותה.

ראינו שהתכנסות במ"ש משמרת רציפות. אבל האם היא משמרת גם גזירות, אינטגרביליות? בהנחה שכן, האם הנגזרת או האינטגרל של הגבול היא\הוא גבול הנגזרות\אינטגרלים?

3.1.7 דוגמא למדוע אי אפשר להחליף אינטגרציה עם גבול

נגדיר סדרת פונקציות $\{f_n\}$ מ- $[0, 1]$ ל- \mathbb{R} :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ n^2(\frac{2}{n} - x) & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

טענה: לכל x , $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. מדוע? כי אם $n > \frac{2}{x}$ אז $x > \frac{2}{n}$, ו- $f_n(x) = 0$ ולכן לכל x , אם n גדול מספיק, אז $f_n(x) = 0$ ולכן $\{f_n\}$ מתכנסת נקודתית לאפס. וכעת, לכל n :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f_n(x) dx + \int_{\frac{2}{n}}^1 f_n(x) dx = \\ &= n^2 \left(\int_0^{\frac{1}{n}} x dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \left(\frac{2}{n} - x \right) dx + 0 \right) = 1 \end{aligned}$$

כלומר

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1$$

אבל, מצד שני:

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$$

כלומר

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

אי אפשר להחליף אינטגרציה עם גבול!

3.1.8 אם סדרה של פונק' אינטגרביליות בקטע $[a, b]$ מתכנסת במ"ש ל- f , אז f אינטגרבילית, והאינטגרל שלה הוא הגבול של האינטגרל של הסדרה.

משפט 3.6 תהי סדרה של פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a, b]$ שמתכנסת במ"ש לפונקציה f . אז f אינטגרבילית, ומתקיים

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

הוכחה: א. נראה ש- f אינטגרבילית.

כזכור, פונקציה f היא אינטגרבילית אם לכל ϵ קיימות פונקציות אינטגרביליות g, h כך ש- $g \leq f \leq h$, ו- $\int_a^b h(x) - g(x) < \epsilon$.

$\{f_n\}$ מתכנסת ל- f במ"ש, ולכן קיים N כך שלכל $n > N$, ולכל $x \in [a, b]$, מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. אז נבחר $n > N$ מסויים. ניקח:

$$g(x) = f_n(x) - \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

$$h(x) = f_n(x) + \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

מדוע $g \leq f \leq h$? כי:

$$h(x) - f(x) = \frac{\epsilon}{2(b-a)} + f_n(x) - f(x) \geq \frac{\epsilon}{2(b-a)} - |f_n(x) - f(x)| > 0$$

ולכן $f \leq h$. באותו אופן, גם $g \leq f$, וכעת,

$$\int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (h(x) - g(x)) dx = \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \epsilon$$

ולכן f אינטגרבילית.

ב. נותר להוכיח ש- $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$.

נבחר ϵ . יהי N כך שלכל $n > N$, ולכל x , מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. אז,

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \epsilon$$

■

3.1.9 האם התכנסות של פונקציות משמרת גזירות?

נתבונן בדוגמא הבאה: נגדיר סדרה $\{f_n\}$ של פונקציות $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{if } |x| > \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2}nx^2 & \text{if } |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

עובדות לגבי הסדרה $\{f_n\}$:

1. לכל n , f_n גזירה בקטע $(-1, 1)$. (על מנת לראות זאת צריך לבדוק רק את $\frac{1}{n}$ ואת $-\frac{1}{n}$...).
2. $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x) = |x|$. בפרט, לכל n ולכל $x \in [-1, 1]$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{2}{n}$.

קיבלנו ש- f_n מתכנס במ"ש ל- f , f_n גזירה בכל נקודה, ו- f לא גזירה בכל נקודה.

← התכנסות במידה שווה לא משמרת גזירות.

ננסח משפט שרלוונטי לנושא הכאוב הזה:

3.1.10 משפט לגבי הנגזרות

משפט 3.7 תהי סדרה של פונקציות גזירות ברציפות בקטע I . ונניח שקיימת נקודה $a \in I$ כך שהסדרה $\{f_n(a)\}$ מתכנסת, וכן שסדרת הנגזרות $\{f'_n\}$ מתכנסת במ"ש על כל תת-קטע סגור. אז f_n מתכנסת נקודתית לפונקציה גזירה f , המקיימת: $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

הוכחה: תהי $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ הגבול של f'_n . פונקציה רציפה כי היא גבול במ"ש על כל תת-קטע סגור של פונקציות רציפות. g רציפה ולכן אינטגרבילית בכל קטע סגור. נגדיר לכל $x \in I$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) + \int_a^x g(t) dt$$

מהמשפט היסודי,

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

נותר להראות, שלכל $x \in I$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, אזי,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a)) =$$

ומהמשפט היסודי:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) + \int_a^x g(t) dt = f(x)$$

כאשר המעבר האחרון הוא מהמשפט הקודם שהוכחנו. ■

3.1.11 משפט דיני

משפט 3.8 דיני

תהי סדרה של פונקציות רציפות בקטע סגור $[a, b]$ שמתכנסת נקודתית לפונקציה רציפה f . נניח בנוסף שהסדרה היא מונוטונית יורדת (עולה). כלומר, לכל $x \in [a, b]$, n ולכל $x \in [a, b]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ (\geq). אזי, $\{f_n\}$ מתכנסת ל- f במ"ש.

הוכחה: נסמן: $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$.

$\{g_n\}$ היא סדרה יורדת של פונקציות רציפות שמתכנסת נקודתית לאפס.

מספיק להוכיח ש- $\{g_n\}$ מתכנסת במ"ש לאפס.

כלומר, עלינו להוכיח ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [a, b]} g_n(x) \right) = 0$$

נסמן: (המעבר הוא כי הפונקציה מקבלת מקסימום בקטע סגור)

$$M_n = \sup_{x \in [a, b]} g_n(x) = \max_{x \in [a, b]} g_n(x)$$

ולכל n , תהי x_n נקודה כך ש- $g_n(x_n) = M_n$.

M_n סדרה יורדת וחסומה מלמטה, ולכן קיים גבול:

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$$

למה M_n יורדת וחסומה מלמטה?
אם נניח בשלילה ש- $M_n \leq M_{n+1}$, אזי מכיוון ש- M הוא מקסימום שמתקבל עבור x כלשהו, נקבל סתירה להנחה ש- f_n (ולכן גם g_n) יורדת לכל x .
ולכן M_n יורדת.
כמוכן שהיא חסומה מלמטה ע"י 0 שהוא הגבול של $\{g_n\}$.

אנו רוצים להוכיח ש- $M = 0$.

נניח בשלילה ש- $M > 0$. (הוא אי-שלילי, אז לא ייתכן $M < 0$).

למה M אי-שלילי?
אמרנו ש- $\{g_n\}$ היא סדרה יורדת של פונקציות רציפות שמתכנסת נקודתית לאפס.
ולכן g_n אי-שלילית. מכיוון ש- $M_n = \max(g_n)$, נקבל שגם M אי-שלילי.

אז,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M$$

x_n סדרה בקטע סגור, ולכן יש לה ת"ס מתכנסת $\{x_{n_k}\}$. (בולצנו-ויירשטרס).

יהי $x_0 \in [a, b]$ כך ש-

$$x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$$

נתבונן:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_0) = 0$$

הגבול הוא 0 כי $\{g_n\}$ היא סדרה יורדת של פונקציות רציפות שמתכנסת נקודתית לאפס. (הרי f_n מתכנסת נקודתית ל- f ולכן g_n מתכנסת לאפס).

לכן קיים K כך שלכל $k > K$, מתקיים ש- $g_{n_k}(x_0) < \frac{M}{2}$.

יהי $k_0 > K$.

$g_{n_{k_0}}$ רציפה, ולכן קיימת סביבה של x_0 , כך שלכל x בסביבה, $g_{n_{k_0}}(x) < \frac{3M}{4}$.

(נשים לב ש- $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ ולכן זה מסתדר עם מה שאמרנו. זוהי בחירה שרירותית בכל אופן).

לכל k גדול מספיק, נמצא בסביבה הזאת של x_0 .

(כי הרי $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$).

לכן, לכל k גדול מספיק, $g_{n_{k_0}}(x_{n_k}) < \frac{3M}{4}$.

נניח גם ש- $k > k_0$. אז:

$$M \leq M_{n_k} = g_{n_k}(x_{n_k}) \leq g_{n_{k_0}}(x_{n_k}) < \frac{3M}{4}$$

הגענו לסתירה! ולכן $M = 0$.

3.1.12 משפט ויירשטראס

בהרצאה צויין שזהו "משפט יפהפה".

משפט 3.9 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

אז קיימת סדרה $\{f_n\}$ של פולינומים שמתכנסים במידה שווה ל- f בקטע $[a, b]$.

בפרט, לפונקציה f שאינה גזירה (באף נקודה), ניתן למצוא סדרה של פונקציות גזירות אינסוף פעמים שמתכנסת אליה במ"ש.

הוכחה: נניח בה"כ שהקטע הוא $[0, 1]$.

למה אפשר להניח את זה? כי אם $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ נגדיר $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $g(x) = f(a + (b-a)x)$.
 אז קיימת סדרת פולינומים $\{g_n\}$ שמתכנסת במ"ש ל- g .
 נסמן: $p_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $p_n(x) = g_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$
 אז p_n פולינומים ומתכנסים במ"ש ל- f .
 למה p_n מתכנסים במ"ש ל- f ?

$$\sup_x |p_n(x) - f(x)| = \sup_x \left| g_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(נשים לב ש- $f\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = f\left(a + (b-a)\frac{x-a}{b-a}\right) = f(a + x - a) = f(x)$)
 קיבלנו:

$$\sup_x |p_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ולכן p_n מתכנסת ל- f במ"ש.

נמשיך בהוכחה: אנו מניחים ש- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

נשתמש בכמה טענות עזר לגבי **מקדמים בינומיים**.

ראשית, לכל $x \in [0, 1]$, n , ו- $0 \leq k \leq n$, $k \in \mathbb{N}$, נגדיר:

$$u(n, k, x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

טענה א': לכל x ולכל n , מתקיים $\sum_{k=0}^n u(n, k, x) = 1$

הוכחה: מנוסחת הבינום של ניוטון, $\sum_{k=0}^n u(n, k, x) = (x + (1-x))^n = 1^n = 1$

טענה ב': לכל $x \in [0, 1]$, n , ו- $0 \leq k \leq n$, מתקיים $u(n, k, x) \geq 0$. (ברור).

טענה ג': לכל $\delta > 0$ ו- $\epsilon > 0$, קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ ולכל $x \in [0, 1]$, (*)

אם נסמן $k_1 = \lfloor (x + \delta)n \rfloor$, $k_0 = \lfloor (x - \delta)n \rfloor$ אז

$$\sum_{k=k_0}^{k_1} u(n, k, x) > 1 - \epsilon$$

(*) נשים לב שהקטע הזה מזכיר התכנסות במ"ש

נאמין לטענות הנ"ל ונוכיח את משפט ויירשטראס.

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. נגדיר סדרה של פולינומים שנקראים **פולינומי ברנשטיין**, p_n , שייתכנסו במ"ש ל- f .

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n u(n, k, x) \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

נטען ש:

1. p_n הוא פולינום לכל n .

2. p_n מתכנס ל- f במ"ש.

למה זה פולינום? כי לכל n, k , מתקיים ש $u(n, k, x)$ הוא פולינום. $f(\frac{k}{n})$ הוא קבוע (לא תלוי ב- x). ולכן p_n הוא קומבינציה ליניארית של פולינומים ולכן פולינום.

נותר לוודא שהסדרה $\{p_n\}$ אכן מתכנסת במ"ש ל- f .

נבחר $\epsilon > 0$, ונראה שקיים n_0 כך שלכל $n > n_0$, $x \in [0, 1]$, מתקיים $|p_n(x) - f(x)| < \epsilon$

f רציפה בקטע הסגור $[0, 1]$ ולכן היא רציפה במ"ש וחסומה בקטע.

יהי $M \geq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ ויהי δ כזה שאם $|x - y| < \delta$ אז $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. (מרציפות במ"ש).

יהי n_0 כזה שטענה ג' מתקיימת לכל $n > n_0$ עם $\delta = \frac{\epsilon}{3M}$.

נוכיח שלכל $n > n_0$, $x \in [0, 1]$, $|p_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

נחשב:

$$p_n(x) - f(x) = \left[\sum_{k=0}^{k_0-1} u(n, k, x) f\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=k_1+1}^n u(n, k, x) f\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=k_0}^{k_1} u(n, k, x) f\left(\frac{k}{n}\right) \right] - f(x)$$

ולכן

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{k_0-1} u(n, k, x) f\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=k_1+1}^n u(n, k, x) f\left(\frac{k}{n}\right) \right|}_{(*)} + \underbrace{\left| \left(\sum_{k=k_0}^{k_1} u(n, k, x) f\left(\frac{k}{n}\right) \right) - f(x) \right|}_{(**)}$$

נעריך את (*):

$$\left| \sum_{k=0}^{k_0-1} u(n, k, x) f\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=k_1+1}^n u(n, k, x) f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |u(n, k, x)| + \sum_{k=k_1+1}^n |u(n, k, x)| \leq$$

$$\leq M \left(\sum_{k=0}^{k_0-1} u(n, k, x) + \sum_{k=k_1+1}^n u(n, k, x) \right) = M \left(1 - \sum_{k=k_0}^{k_1} u(n, k, x) \right) < M \frac{\epsilon}{3M} = \frac{\epsilon}{3}$$

כאשר השוויון השמאלי הוא מטענה א', והאי שוויון הימני הוא מטענה ג'.

נעריך את (**):

נזכור שמבחירת k_0, k_1 , אם $k_0 \leq k \leq k_1$, אז $|\frac{k}{n} - x| < \delta$

ולכן, $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. אז:

$$\left(\sum_{k=k_0}^{k_1} u(n, k, x) f\left(\frac{k}{n}\right) \right) - f(x) = \left[\sum_{k=k_0}^{k_1} u(n, k, x) \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right] - \left(1 - \sum_{k=k_0}^{k_1} u(n, k, x) \right) f(x)$$

ולכן, (נשים לב לאי-שלייליים שאפשר להוציא מהערך המוחלט):

$$|(**)| \leq \left(\sum_{k=k_0}^{k_1} u(n, k, x) \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \right) + |f(x)| \left(1 - \sum_{k=k_0}^{k_1} u(n, k, x) \right) \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{3} \cdot \sum_{k=k_0}^{k_1} u(n, k, x) + M \cdot \frac{\epsilon}{3M} \leq \frac{\epsilon}{3} \cdot 1 + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2}{3}\epsilon$$

ולכן,

$$|p_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2}{3}\epsilon = \epsilon$$

■

3.2 טורים של פונקציות

3.2.1 הגדרה בסיסית

הגדרה 3.10 תהי סדרה של פונקציות מ- I ל- \mathbb{R} .

אנו אומרים ש- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס נקודתית ל- f אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת נקודתית ל- f .
נאמר ש- f_n מתכנס במידה שווה ל- f אם S_n מתכנסת במ"ש ל- f .

3.2.2 קריטריון של וירשטראס

משפט 3.11 תהי סדרה של פונקציות חסומות.

נסמן:

$$M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$$

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש.

הוכחה: (מהתרגול):

יהי $\epsilon > 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס, ולכן מקיים את קריטריון קושי. כלומר קיים $N \in \mathbb{N}$,

כך שלכל $m > n > N$, מתקיים $\sum_{i=n}^m M_i < \epsilon$.

נשים לב: לכל x בקטע,

$$\sum_{i=n}^m |f_i(x)| \leq \sum_{i=n}^m M_i < \epsilon$$

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ מתכנסת במ"ש מתנאי קושי. בנוסף,

$$\left| \sum_{i=n}^m f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n}^m |f_i(x)| < \epsilon$$

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש.

הערה 3.12 באופן מעשי:

אם קשה למצוא את ה- \sup , אבל אפשר לחסום אותו מלעיל, אז זה גם טוב, כי ממבחן ההשוואה נקבל את המבוקש.

3.2.3 דוגמא

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

האם הטור מתכנס נקודתית? כן. נבחר x , ונראה ש- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ מתכנס, בהחלט.

כלומר נוכיח ש- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$ מתכנס. נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)\text{th member}}{(k)\text{th member}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}}{\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} = 0 < 1$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט.

האם הוא מתכנס במ"ש? לא. נבחר $\epsilon = \frac{1}{2}$. נראה שלכל N קיים x כך ש- $|f_N(x)| > \epsilon$, ואז קריטריון קושי לא מתקיים. עלינו למצוא x כך ש- $\frac{|x|^{2N+1}}{(2N+1)!} > \frac{1}{2}$. נבחר $x = ((2N+1)!)^{2N+1}$, נציב זה יפעל.

(תזכורת לק. קושי: $\{f_n\}$ מתכנסת ל- f במ"ש אם"ם לכל ϵ קיים M כך שלכל $n, m > M$, $x \in I$,

$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$. מה שעשינו כאן זה לקחת כל $N \in \mathbb{N}$ (ובפרט לכל M , קיים $N > M$), ואז יש התכנסות במ"ש אם"ם $|f_N(x) - f_{N-1}(x)| = \left| \sum_{k=0}^N a_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right| = |a_N|$.

בנוסף, יהי $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. האם פונקציה רציפה? כן.

נראה זאת ע"י שנראה שלכל $M > 0$, הטור מתכנס במ"ש בקטע $[-M, M]$. נתבונן:

$$\sup_{x \in [-M, M]} |f_k(x)| = \frac{M^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

הטור $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{2k+1}}{(2k+1)!}$ מתכנס ממבחן המנה. ולכן הטור מתכנס במ"ש בקטע $[-M, M]$ לכל M . (ויירשטראס).

לכן f רציפה בקטע $[-M, M]$ לכל M , ולכן f רציפה ב- \mathbb{R} .

3.3 טורי חזקות

3.3.1 הגדרה

הגדרה 3.13 טור חזקות הוא טור של פונקציות מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ כאשר המקדמים $\{c_n\}$ הם קבועים כלשהם. (נשים לב שאנו מתחילים את האינדקס מ-0, ואז יש לנו מקדם חופשי).

3.3.2 דוגמאות

לכל אחת מהדוגמאות להלן, אנו שואלים לאילו ערכי x הטור מתכנס ולאילו ערכים הוא מתבדר.

בכל הדוגמאות, **ובפרט בכל טור חזקות**, הטור מתכנס ב- $x = 0$.

$$(א) \sum_{n=0}^{\infty} (n!) x^n$$

טור זה מתבדר לכל $x \neq 0$. מדוע? יהי $x \neq 0$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} n! |x|^n = \infty$. ולכן הטור לא מתכנס.

(הסיבה היא שאם היתה התכנסות, אז האיבר הכללי a_n היה שואף לאפס. ואם $a_n \rightarrow 0$ אז $|a_n| \rightarrow 0$).

$$(ב) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{לא הוכחנו})$$

$$(ג) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (\text{לא הוכחנו})$$

$$(ד) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{מהו תחום ההתכנסות?}$$

עבור $|x| > 1$, נקבל $|\frac{x^n}{n}| \rightarrow \infty$ ולכן אין התכנסות.

עבור $|x| < 1$, נקבל $|\frac{x^n}{n}| < |x^n|$ ולכן, מקריטריון ההשוואה הטור מתכנס בהחלט. \Leftarrow ובפרט, מתכנס.

$$\text{נותרו: } x = 1, -1$$

כאשר $x = 1$, הטור הוא הטור ההרמוני, שמתבדר.

כאשר $x = -1$, הטור הוא הטור ההרמוני בסימנים מתחלפים, ומקריטריון לייבניץ מתכנס (בתנאי).

ולכן תחום ההתכנסות הוא $[-1, 1)$.

$$(ה) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad (\text{לא הוכחנו})$$

3.3.3 התנהגות טור חזקות - מתקיימת אחת משלוש אפשרויות

משפט 3.14 יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ טור חזקות. אז קורה בדיוק אחד משלושת הדברים הבאים:

1. הטור מתכנס עבור $x = 0$ ומתבדר עבור $x \neq 0$.

2. הטור מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$.

3. קיים $0 < R < \infty$ כך שהטור מתכנס לכל x המקיים $|x| < R$. (נשים לב שלא פירטנו מה קורה בקצוות הקטע).

הגדרה 3.15 רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $\sup(x \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ converges})$. במקרה (1) נקבל שרדיוס ההתכנסות הוא ∞ . במקרה (2) נקבל שרדיוס ההתכנסות הוא R .

הוכחה: נתחיל עם העובדה הבאה:

אם $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ מתכנס, אז $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ מתכנס, לכל x המקיים $|x| < |x_0|$.

מדוע? כי, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ מתכנס, ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0$. כלומר, $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n x_0^n| = 0$.

ולכן קיים M כך ש- $|c_n x_0^n| < M$ לכל n .

אז לכל n ,

$$|c_n x^n| = |c_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

הטור $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ מתכנס כי הוא טור הנדסי עם קבוע $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ (לפי בחירת $|x| < |x_0|$ מקודם).

ולכן, מקריטריון ההשוואה, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ מתכנס בהחלט.

המשך הוכחת המשפט:

נניח שלא מתקיימים מקרים (1) ו-(2), ונראה שמתקיים מקרה 3.

לא מתקיים מקרה (2), ולכן קיים x_0 כך ש- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ מתבדר.

מטענת העזר, הטור מתבדר לכל x כך ש- $|x| > |x_0|$. (אחרת נקבל סתירה).

כלומר, **תחום ההתכנסות חסום**. ונבחר:

$$R = \sup\{|x| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ converges}\}$$

נשים לב: $0 < R < \infty$ (סופי כי תחום ההתכנסות חסום).

יהי $|x| < R$.

אז קיים x_0 כך ש- $|x_0| > |x|$, $|x_0| \leq R$, והטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ מתכנס. (הידד לארכימדיות!)

מהעובדה שהוכחנו, נקבל ש- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ מתכנס.

יהי $|x| > R$.

אז $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ מתבדר, כי R הוא הסופרימום של הערכים שבהם יש התכנסות.

ולכן קורה מקרה (3).

הערה 3.16 הוכחנו התכנסות נקודתית בתחום ההתכנסות. האם ההתכנסות היא במ"ש?

דוגמא: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ מתכנס (נקודתית) בקטע $(-1, 1)$, אבל ההתכנסות במקרה זה היא לא במ"ש.

(הושאר כתרגיל).

העובדה הבאה נוגעת לדבר:

3.3.4 בטור חזקות עם רדיוס $0 < R$ הטור מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכל ב- $(-R, R)$

טענה 3.17 יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $0 < R \leq \infty$.

אז הטור מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכל ב- $(-R, R)$.

הוכחה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ טור חזקות שרדיוס ההתכנסות שלו $0 < R \leq \infty$,

ויהי $[a, b] \subset (-R, R)$ (נציין ש- a, b סופיים!).

יהי $m = \max(|a|, |b|)$.

אז $x \leq m$ מתקיים $x \in [a, b]$ ולכל $m < R$,

יהי $m < x_0 < R$.

אז $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ מתכנס, ולכן הסדרה $|c_n x_0^n|$ חסומה ע"י איזשהו מספר M .
 כעת, לכל $x \in [a, b]$ ולכל n ,

$$|c_n x^n| \leq |c_n m^n| = |c_n x_0^n| \cdot \left|\frac{m}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{m}{x_0}\right|^n$$

וכעת, $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{m}{x_0}\right|^n$ מתכנס כי $\left|\frac{m}{x_0}\right| < 1$.

ולכן, מקריטריון ויירשטראס, הטור מתכנס במ"ש בקטע $[a, b]$.

3.3.5 מסקנה לגבי רציפות

נגדיר $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ בתחום ההתכנסות.

אז f רציפה בקטע $(-R, R)$.

3.3.6 משפט קושי-הדמאר

משפט 3.18 לטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, רדיוס ההתכנסות הוא:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

כאשר במקרה זה, $\frac{1}{0} = \infty$ ו- $\frac{1}{\infty} = 0$. (ונשים לב שזה $\overline{\lim}$, זה לא כ"כ ברור בתצוגה כאן...)

הוכחה: ראשית, נניח ש- $0 < R < \infty$. (אותו R שמוגדר במשפט).

יהי $|x| > R$, אז,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x| = |x| \cdot \frac{1}{R} > 1$$

לכן יש תת-סדרה בה $\sqrt[n]{|c_n x^n|} > 1$, ולכן יש תת-סדרה $|c_n x^n| > 1$.

ובפרט, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x^n \neq 0$ (שונה מאפס או לא קיים).

ולכן $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ מתבדר.

מאידך, אם $|x| < R$ אז

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \frac{|x|}{R} < 1$$

ולכן ממבחן השורש, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ מתכנס בהחלט.

ההוכחה במקרים $R = \infty$, $R = 0$ הושארה כתרגיל. (אבל כנראה שהיא זהה).

3.3.7 משפט אבל

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $0 < R < \infty$, ונגדיר $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.
 ראינו ש- $f(x)$ רציפה ב- $(-R, R)$. בהנחה ש- f מוגדרת בנקודות קצה, האם היא בהכרח רציפה שם?
משפט 3.19 נניח שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ מתכנס לפונקציה f בקטע $(-R, R]$, אז $\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = f(R)$.
 (זה נכון גם כשתחום ההתכנסות הוא $[-R, R]$ וגם לרציפות ב- $-R$ כאשר f מוגדרת בו).

הוכחה: נניח בה"כ ש- $R = 1$. (למה זה בה"כ? הושאר כתרגיל... כנראה שצריך להסתכל על $\sum \frac{c_n}{R^n} x^n$).
 אנו יודעים ש- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ מתכנס, ועלינו להראות ש- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.
 נסמן $S_n = \sum_{k=0}^n c_k$, ו- $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.
 ניקח $0 < x < 1$.
 מה אנו יכולים לדעת על $f(x)$?

$$\frac{1}{1-x} f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) =$$

זה נכון כי האיבר השמאלי מתכנס ל- $\frac{1}{1-x}$. כמו כן נשים לב ששניהם מתכנסים בהחלט, אז מכפלתם היא הקונבולוציה שלהם:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n c_k x^k \cdot x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n c_k x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n c_k = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

מסקנה: קיבלנו ש- $f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ לכל $x \in (-1, 1)$. (כנראה שההוכחה ל- x שלילי זהה).
 כמו כן, נזכור ש- $1 = [(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n]$ עבור $x \in (-1, 1)$ (מההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ל- $\frac{1}{1-x}$).
 מכאן,

$$f(1) - f(x) = S - (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n =$$

ונשים לב שהביטוי הבא בסוגריים המרובעים הוא "דרך קצת מסובכת לכתוב את המספר 1":

$$\left[(1-x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \right] \cdot S - (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n (S - S_n)$$

נסמן: $M = \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |S - S_n| < \infty$

($M < \infty$) כי $|S - S_n|$ היא סדרה ששואפת לאפס).

אנו רוצים להראות ש- $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

כלומר שלכל ϵ קיימת δ כך שאם $0 < 1-x < \delta$ אז $|f(1) - f(x)| < \epsilon$.

נבחר $\epsilon > 0$. קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$, מתקיים $|S_n - S| < \frac{\epsilon}{2}$.

ניקח $\delta < \frac{\epsilon}{4M(n_0+1)}$.

עכשיו, יהי $x < 1$ כך ש- $x < \delta$. 1. $x < 1$. (נשים לב, אנו בוחרים את x כך שהוא חיובי), ואז,

$$|f(1) - f(x)| = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n (S - S_n) \right| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n |S - S_n| =$$

$$= (1-x) \sum_{n=0}^{n_0} x^n |S - S_n| + (1-x) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} x^n |S - S_n| \leq$$

נזכור ש- $x^n < 1$ ולכן:

$$\leq \delta \cdot (n_0 + 1) \cdot M + (1-x) \left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} x^n \right) \frac{\epsilon}{2} \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2}(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{3}{4}\epsilon < \epsilon$$

■

(כאשר השוויון האחרון הוא כי $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1$).

תרגיל: בתנאי והנחות המשפט, הראו שלכל $-1 < a < 1$, הטור מתכנס במ"ש בקטע $[a, 1]$. (לא הוכחנו בכיתה).

3.3.8 שני משפטים על טורי חזקות ונגזרות, אינטגרלים

משפט 3.20 יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $0 < R \leq \infty$.

ותהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

אז לכל $x \in (-R, R)$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n x^{n-1}$$

משפט 3.21 יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $0 < R \leq \infty$.

ותהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ בתחום ההתכנסות.

אז לכל $b < R$, ו- $-R < a$,

$$\int_a^b f(x) dx = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \right) \Big|_a^b$$

(הסימון $\Big|_a^b$ הוא של הצבת הערכים, כמו שעושים לאינטגרלים תמיד עם המשפט היסודי...)

הוכחה: לשני המשפטים:

ראשית, רדיוס ההתכנסות של הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n x^{n-1}$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ הוא R .

מדוע? מנוסחת קושי-הדמר:

יהי R_d רדיוס ההתכנסות של הטור של הנגזרת, ו- R_i רדיוס ההתכנסות של האינטגרל. אז,

$$R_d^{-1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{n \cdot |c_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|c_n|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{n} =$$

לפי טענת העזר שנוכיח אח"כ, זה שווה:

$$= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|c_n|} = R^{-1}$$

ולכן $R_d = D$ ובאותו האופן, $R_i = R$.

עוד הערה קטנה: גבול עליון של מכפלה לא שווה למכפלה של גבולות עליונים, אבל כן שווה למכפלה של גבול עליון כפול גבול רגיל, במידה והוא קיים. זה מסביר את המעבר כשהוצאנו את n מהגבול קודם.

טענת העזר שהשתמשנו בה: לכל סדרה c_n , מתקיים:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{c_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n}$$

הוכחה: נחלק לשלושה חלקים:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} > 1 \text{ או } < 1 \text{ או } = 1.$$

נעשה את המקרה $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{c_n} > 1$ ושאר המקרים הושארו כתרגיל.

יהי $a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n}$, וגם $b = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{c_n}$. ונבחר $\gamma > 1$.

לכל n גדול מספיק, $n - 1 > \frac{n}{\gamma}$, ולכן,

$$\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} \right)^\gamma = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n}^\gamma \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{c_n} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n}$$

קיבלנו **שלכל** $\gamma > 1$, $a^\gamma \geq b \geq a$, ולכן $a = b$. (כי זה נכון לכל $\gamma > 1$).

המשך הוכחת המשפט:

למדנו משפט שאם $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות כך ש- $\{f'_n\}$ מתכנסות במ"ש, ו- $f_n(0)$ מתכנסת,

אז f_n מתכנסת במ"ש לפונקציה f , וגם $f'_n \rightarrow f'$.

וכעת,

אחרי שראינו שרדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n x^{n-1}$ הוא R , מתקיימים תנאי המשפט,

ולכן $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n x^{n-1}$ לכל $x \in (-R, R)$.

הוכחת המשפט השני זהה (למדנו משפט דומה על אינטגרלים...).

(כנראה שהסיבה שתנאי המשפט מתקיימים היא המשפט שהוכחנו:

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $0 < R \leq \infty$. אז הטור מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכלל ב- $(-R, R)$.)

3.3.9 משפט לגבי שוויון של מקדמים בטורי חזקות

משפט 3.22 יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ טורי חזקות עם רדיוסי התכנסות $R_a, R_b > 0$ (ייתכן אינסוף).

ונניח שקיים $x \in (-r, r)$ שלכל $0 < r \leq \min(R_a, R_b)$ מתקיים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

אז לכל n , $a_n = b_n$.

הוכחה: תהי $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

נחשב את הנגזרות של f באפס:

$$f^{(0)}(0) = f(0) = a_0$$

$$f^{(1)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n 0^{n-1} = a_1$$

$$f^{(2)}(0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n 0^{n-2} = 2a_2$$

⋮

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

(אנו יודעים שהיא גזירה אינסוף פעמים מהמשפט שהוכחנו קודם. באינדוקציה אפשר להראות שהיא גזירה אינסוף פעמים).

קיבלנו שלכל n ,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

באותה צורה,

$$b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

מסקנה: $a_n = b_n$ לכל n .
 בשלב זה אמורות לעלות במוחינו מחשבות נפלאות על פולינומי מקלורן...



הערה 3.23 את התורה שפיתחנו לטור חזקות סביב אפס, ניתן לפתח לטורי חזקות סביב כל נקודה x_0 (מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$).

3.4 פונקציות אנליטיות

3.4.1 הגדרה ודוגמאות

הגדרה 3.24 יהיו $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

פונקציה $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת **אנליטית** אם לכל $x_0 \in (a, b)$ קיים $r > 0$ ומקדמים c_0, c_1, \dots , כך שלכל $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ מתקיים: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$.

דוגמאות:

• כל פולינום הוא פונקציה אנליטית

• $e^x, \cos(x), \sin(x)$

• $\frac{1}{x^2+1}$ (יהיה בתרגול, או בש.ב.).

מה מיוחד בפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$?

היא אנליטית כפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, אבל, סביב כל נקודה, רדיוס ההתכנסות של טור החזקות הוא סופי. (סביב x_0 הרדיוס הוא $\sqrt{x_0^2+1}$. זה כמובן חומר העשרה, לא צריך לזכור את זה בע"פ...)

מדוע $e^x, \cos(x), \sin(x)$ אנליטיות?

3.4.2 משפט שגורר את היותה של פונקציה אנליטית בקטע

משפט 3.25 יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_1)^n$ טור חזקות שמתכנס ב- $(x_1 - R, x_1 + R)$ כלשהו (כאשר R קטן או שווה לרדיוס ההתכנסות).

אז $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_1)^n$ אנליטית בקטע $(x_1 - R, x_1 + R)$.

הוכחה: נניח בה"כ ש- $x_1 = 0$ (אחרת, ניתן להזיז את הפונקציה, או משהו כזה...).

נבחר $x_0 \in (-R, R)$. אנו רוצים להראות שקיימים מקדמים b_0, b_1, \dots

כך שלכל x עבורו $|x-x_0| < R - |x_0|$, מתקיים:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

עכשיו,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_0 + (x - x_0))^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x - x_0)^k x_0^{n-k} \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n c_n \binom{n}{k} x_0^{n-k} (x - x_0)^k \right]$$

טענה: $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n |c_n| \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |x - x_0|^k \right]$ מתכנס. את זה נוכיח בסוף.
עכשיו נאמין לטענה ונמשיך. מותר לעשות את הצעדים הבאים בגלל ההתכנסות בהחלט:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n c_n \binom{n}{k} x_0^{n-k} (x - x_0)^k =$$

$$= c_0 \binom{0}{0} x_0^{0-0} (x - x_0)^0 + c_1 \binom{1}{0} x_0^{1-0} (x - x_0)^0 + c_1 \binom{1}{1} x_0^{1-1} (x - x_0)^1 + \dots$$

נשחק קצת עם הביטוי (מותר כי הוא מתכנס בהחלט, אז כל שינוי סדר ישמור על הסכום):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n c_n \binom{n}{k} x_0^{n-k} (x - x_0)^k \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=k}^{\infty} c_n \binom{n}{k} x_0^{n-k} (x - x_0)^k \right] =$$

נשים לב שבשוויון השני משמאל (למעלה) אנחנו עדיין לוקחים את כל הזוגות ש- $n \geq k$, רק בשינוי סדר.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=k}^{\infty} c_n \binom{n}{k} x_0^{n-k} \right] (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

$$.b_k = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \binom{n}{k} x_0^{n-k} \text{ כאשר}$$

נוכיח את טענת העזר: $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n |c_n| \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |x - x_0|^k \right]$ מתכנס:

הוכחה: נזכור שטור חזקות מתכנס בהחלט בפנים של תחום ההתכנסות.

ולכן, לכל $0 < y < R$, מתקיים ש- $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| y^n$ מתכנס.

נבחר: $y = |x_0| + |x - x_0|$. אז $0 < y < R$ (כי דרשנו ש- $|x - x_0| < R - |x_0|$).

ולכן,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n |c_n| \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |x - x_0|^k \right] = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |x - x_0|^k \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| [|x_0| + |x - x_0|]^n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| y^n$$

ואמרנו שהטור הזה מתכנס.

3.4.3 "אריתמטיקה" של פונקציות אנליטיות

משפט 3.26 מתקיים:

1. אם $f_1, f_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ אנליטיות, אז $f_1 + f_2$ אנליטיות.
2. אם $f_1, f_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ אנליטיות, אז $f_1 \cdot f_2$ אנליטיות.
3. אם $f : (a, b) \rightarrow (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ אנליטיות, אז $g \circ f$ אנליטיות.
4. אם $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ אנליטית, אז f' אנליטית, ו- $\int f dx$ אנליטית. (הלא מסויים - זוהי קבוצה של פונקציות...)

הוכחה: (1)

תהי $x_0 \in (a, b)$ אז קיימים $r_2 > 0, r_1 > 0$ ומקדמים $c_0, c_1, \dots, d_0, d_1, \dots$ כך שלכל $x \in (x_0 - r_1, x_0 + r_1)$ מתקיים $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, ולכל $x \in (x_0 - r_2, x_0 + r_2)$ מתקיים $f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n$. יהי $0 < r = \min(r_1, r_2)$. אז לכל $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ מתקיימים שני הדברים לעיל. מאריתמטיקה של גבולות,

$$f_1(x) + f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n (x - x_0)^n + d_n (x - x_0)^n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) (x - x_0)^n$$

כלומר, הצגנו את $f_1 + f_2$ כטור חזקות סביב x_0 . מכיוון שזה נכון לכל x_0 , קיבלנו ש- $f_1 + f_2$ אנליטית.

(2)

שוב ניקח $x_0, r_1, r_2, c_0, c_1, \dots, d_0, d_1, \dots$ כמו קודם. $r = \min(r_1, r_2)$ ניקח $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ אז,

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n$$

ושני הטורים מתכנסים בהחלט (הם בתוך תחום ההתכנסות). ולכן, (קונבולוציה!)

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k \cdot d_{n-k} (x - x_0)^{n-k} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n c_k \cdot d_{n-k} (x - x_0)^n \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n c_k d_{n-k} \right] (x - x_0)^n$$

ולכן המכפלה היא טור חזקות.

(3) לא הוכחנו (וכנראה שגם לא נוכיח).

(4) הושאר כתרגיל (בעעעעע)

■

3.4.4 הפונקציות הטריגונומטריות (sin, cos) + הגדרת π

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

• זה נובע מנוסחת הגזירה לטורי חזקות. $\frac{\sin'}{\cos'} = \frac{\cos}{-\sin}$

• \sin, \cos חסומות ע"י 1:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ לכל x . מדוע? אם $x = 0$, אז $\cos(x) = 1$, $\sin(x) = 0$, ואז,

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)' = (\sin^2 x)' + (\cos^2 x)' = 2 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x = 0$$

ולכן זו פונקציה קבועה (שיפועה הוא 0) ולכן לכל x , $\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 0 + \cos^2 0 = 1$

ולכן, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \leq 1$ ולכן $|\sin x| \leq 1$ ולכן $|\cos x| \leq 1$.

• כעת אנו רוצים להוכיח שלכל x מתקיים $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

אבל לא לפני שנגדיר את π !

הגדרה 3.27 π

טענה: קיים $x_0 > 0$ עבורו $\cos x_0 = 0$. נאמין לטענה זאת בינתיים (היא תוכח בהמשך).

כעת,

יהי $y_0 = \inf\{y > 0 : \cos(y) = 0\}$.

נשים לב ש- $\cos y_0 = 0$. מדוע? כי אם נניח ש- $\cos y_0 \neq 0$, אז y_0 לא שייך לקבוצה הנ"ל, ולכן יש סדרה של מספרים בקבוצה שנסמנם $\{y_n\}$ כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ וגם $\cos(y_n) = 0$ לכל n . אבל מרציפות הפונקציה \cos , נקבל ש- $\cos(y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(y_n) = 0$.

נגדיר:

$$\pi := 2 \cdot \min\{y > 0 : \cos(y) = 0\}$$

וכעת נוכיח את הטענה שקיים עבורו x_0 $\cos(x_0) = 0$.

אנו יודעים ש- $\cos(0) = 1$, וש- \cos היא פונק' רציפה.

לכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < x < \delta$ מתקיים $\cos(x) > \frac{1}{2}$.

נתבונן:

$$\sin(\delta) = \int_0^\delta \sin' x \, dx = \int_0^\delta \cos x \, dx \geq \frac{\delta}{2}$$

ועכשיו נראה שיש $0 < x_0 < \frac{2}{\delta} + 2\delta$ כך ש- $\cos(x_0) = 0$.

נניח בשלילה ש- $\cos(x) \neq 0$ לכל $0 < x < \frac{2}{\delta} + 2\delta$.

$\cos x$ רציפה, וגם $\cos 0 = 1$, ולכן $\cos(x) > 0$ לכל $0 < x < \frac{2}{\delta} + 2\delta$.

ולכן לכל $0 < x < \frac{2}{\delta} + 2\delta$ מתקיים:

$$\sin(x) = \sin(\delta) + \int_\delta^x \sin'(t) \, dt \geq \frac{\delta}{2} + 0 = \frac{\delta}{2}$$

ועכשיו,

$$\cos\left(\frac{2}{\delta} + 2\delta\right) = \cos(\delta) + \int_\delta^{\frac{2}{\delta} + 2\delta} \cos'(x) \, dx = \cos(\delta) - \int_\delta^{\frac{2}{\delta} + 2\delta} \sin(x) \, dx \leq$$

ואחרי הצבה רגילה לחלוטין של המשפט היסודי נקבל:

$$\leq 1 - \left(\frac{2}{\delta} + \delta\right) \cdot \frac{\delta}{2} = 1 - 1 - \frac{\delta^2}{2} < 0$$

בסתירה לכך שפונקציית הקוסינוס אי-שלילית בקטע.

נמשיך בהוכחת הזהות $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$:

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. מהו $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$? מתקיים $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ולכן $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

כלומר $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ הוא 1 או -1. נבדוק איזה הוא הנכון:

בקטע $(0, \frac{\pi}{2})$, היא פונקציה אי-שלילית ולכן,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cdot) \geq 0$$

ולכן $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

כעת, $\cos(x)$ היא פונקציה אנליטית בקטע $(-\infty, \infty)$, ולכן היא ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב $\frac{\pi}{2}$, ונקבל:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k$$

כלומר, (פשוט נציב תוספת של $\frac{\pi}{2}$ ל- x):

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!} (x)^k$$

כעת נטען שלכל k , מתקיים $\cos^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin^{(k)}(0)$. זה נכון מפני ש-

$$\cos^{(0)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \cos^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \cos^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \cos^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ולכן,

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!} (x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k = -\sin(x) = \sin(-x)$$

ולכן $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ כנדרש.

4 חשבון אינפיניטסימלי בכמה משתנים

4.1 בסיס

4.1.1 מרחק והיותו מטריקה

הגדרה 4.1 מרחק

יהי $x, y \in \mathbb{R}^d$

המרחק בין x ל- y שיוסומן ע"י $d(x, y)$ יוגדר ע"י:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x^i - y^i)^2} = \|x - y\|$$

הערה: כאשר x^i הם מסמנים x , הכוונה היא לקואורדינטה ה- i של $x \in \mathbb{R}^d$, ולא לחזקה!

משפט 4.2 לגבי המרחק:

1. לכל x, y , $d(x, y) \geq 0$ ו- $d(x, y) = 0$ אם ורק אם $x = y$.

2. $d(x, y) = d(y, x)$.

3. אי-שוויון המשולש: $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

4. לכל x, y, h מתקיים $d(x, y) = d(x + h, y + h)$ (אינווריאנטיות להזזות).

הגדרה 4.3 מטריקה היא פונקציית מרחק שמקיימת את הדרישות 1, 2, 3.

הוכחה: ראשית,

(1) לכל $1 \leq i \leq d$, $(x^i - y^i)^2 \geq 0$,

ולכן $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x^i - y^i)^2}$ שורש של מספר אי שלילי ולכן אי-שלילי.

אם $x \neq y$ אז קיים i_0 כך ש- $x^{i_0} \neq y^{i_0}$. במקרה זה,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x^i - y^i)^2} \geq \sqrt{(x^{i_0} - y^{i_0})^2} = |x^{i_0} - y^{i_0}| > 0$$

ואם $x = y$ אז ברור ש- $d(x, y) = 0$.

(2) נובע מכך ש- $(y^i - x^i)^2 = (x^i - y^i)^2$.

(3) יהיו $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ ואנו רוצים להראות ש- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

נשתמש באי-שוויון קושי-שוורץ (!!) שאומר: לכל $a, b \in \mathbb{R}^d$:

$$\sum_{i=1}^d (a^i b^i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d (a^i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^d (b^i)^2}$$

(תזכורת מאלגברה ליניארית: למעשה קושי-שוורץ אומר ש- $|(a, b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|$)

נסמן $a = y - x$, $b = z - y$ ו- $a + b = z - x$ ומתקיים:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (a^i)^2}, \quad d(y, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (b^i)^2}, \quad d(x, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (a^i + b^i)^2}$$

ועכשיו,

$$(d(x, z))^2 = \sum_{i=1}^d (a^i + b^i)^2 = \sum_{i=1}^d ((a^i)^2 + (b^i)^2 + 2a^i b^i) = \sum_{i=1}^d (a^i)^2 + \sum_{i=1}^d (b^i)^2 + 2 \sum_{i=1}^d a^i b^i \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^d (a^i)^2 + \sum_{i=1}^d (b^i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^d (a^i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^d (b^i)^2} = d^2(x, y) + d^2(y, z) + 2d(x, y)d(y, z) = \\ &= (d(x, y) + d(y, z))^2 \end{aligned}$$

ואם נוציא שורש משני האגפים, נקבל את אי-שוויון המשולש.

הוכחה יותר פשוטה למי שיודע אלגברה ליניארית: בסימונים $a = y - x$, $b = z - y$, עלינו להוכיח שמתקיים $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$. אז (נזכור שאנחנו בממ"פ מעל \mathbb{R}):

$$\begin{aligned} \|a + b\|^2 &= \sqrt{\langle a + b, a + b \rangle}^2 \leq |\langle a, a \rangle| + |\langle b, b \rangle| + 2|\langle a, b \rangle| \leq \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\| = \\ &= (\|a\| + \|b\|)^2 \end{aligned}$$

נוציא שורש וקיבלנו את המבוקש. זאת ההוכחה ממקודם, אבל זה יותר קריא ככה לדעתי.

(4) פשוט מתקיים:

$$d(x + h, y + h) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x^i + h^i - (y^i + h^i))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x^i - y^i)^2} = d(x, y)$$

■

תרגיל: יהי $\lambda \in \mathbb{R}$. הראו ש- $d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(x, y)$

4.1.2 גבול של סדרה ב- \mathbb{R}^d ותנאים שקולים לו

הגדרה 4.4 תהי סדרה של נקודות ב- \mathbb{R}^d , ו- $x \in \mathbb{R}^d$

אנו אומרים ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$, $d(x_n, x) < \epsilon$.

משפט 4.5 התנאים הבאים שקולים:

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - x = 0$$

4. לכל $1 \leq i \leq d$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = x^i$$

הוכחה: השקילות של 1,2,3 היא טריוויאלית.

אנחנו נוכיח את השקילות של 1 ו-4.

למה 4.6 לכל $x, y \in \mathbb{R}^d$ ולכל i_0 , מתקיים

$$(x^{i_0} - y^{i_0})^2 \leq d^2(x, y) \leq d \cdot \max_{1 \leq i \leq d} (x^i - y^i)^2$$

הוכחת הלמה: ברור.

כעת נוכיח $4 \Leftrightarrow 1$:

תהי $1 \leq i_0 \leq d$. מרציפות השורש, ומהלמה לעיל, נקבל:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n^{i_0} - x^{i_0}| = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{i_0} - x^{i_0})^2} \leq \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} d^2(x_n, x)} = 0$$

ולכן, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{i_0} = x^{i_0}$.

נוכיח $1 \Leftrightarrow 4$:

אנו יודעים שלכל $1 \leq i \leq d$, מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = x^i$

כלומר לכל ϵ ולכל i קיים N_i כך שלכל $n > N_i$, $|x_n^i - x^i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}$.

יהי $N = \max\{N_1, \dots, N_d\}$.

עבור $n > N$, לכל i , $|x_n^i - x^i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}$, ולכן,

$$(x_n^i - x^i)^2 < \frac{\epsilon^2}{d}$$

כלומר, גם $\max_{1 \leq i \leq d} (x_n^i - x^i) < \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}$, ולכן מהלמה, נקבל

$$d^2(x_n, x) < d \cdot \frac{\epsilon^2}{d} = \epsilon^2 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, x) < \epsilon$$

כלומר הסדרה מתכנסת. ■

4.1.3 תנאי קושי

הגדרה 4.7 אנו אומרים שסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב- \mathbb{R}^d מקיימת את תנאי קושי אם לכל ϵ קיים N כך שלכל $n > N$, מתקיים $d(x_n, x_N) < \epsilon$.

משפט 4.8 סדרה $\{x_n\}$ מתכנסת אם"ם היא מקיימת את תנאי קושי.

הוכחה: כיוון א': נניח שהסדרה מתכנסת.

יהי x הגבול של הסדרה. לכל ϵ קיים N כך שלכל $n \geq N$, $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$.

ולכן, $d(x_n, x_N) \leq d(x_n, x) + d(x_N, x) < \epsilon$,

כיוון ב': נניח שמתקיים תנאי קושי.

אז לכל $1 \leq i \leq d$, הסדרה $\{x_n^i\}$ מקיימת את תנאי קושי.

מדוע? נבחר ϵ , אז קיים N כך שלכל $n > N$, $d(x_n, x_N) < \epsilon$. (יש כזה מההנחה).

ולכל n כזה, $|x_n^i - x_N^i| \leq d(x_n, x_N) < \epsilon$.

ולכן הסדרה $\{x_n^i\}$ היא סדרת מספרים שמקיימת את תנאי קושי. (נשים לב: מדובר על סדרה ב- \mathbb{R}^1 !)

ולכן קיים הגבול $x^i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i$.

יהי $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^d \end{pmatrix}$ אז מהמשפט שהוכחנו, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

ובפרט, הסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת.

■

4.1.4 סביבות של נקודה: כדורים ותיבות

הגדרה 4.9 כדור פתוח, כדור סגור

אלו הן הגדרות שיעזרו לנו לדבר על סביבה של נקודה כאשר אנו עובדים ב- \mathbb{R}^d :

הכדור הפתוח ברדיוס r סביב נקודה a הוא הקבוצה:

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(a, x) < r\}$$

הכדור הסגור ברדיוס r סביב נקודה a הוא הקבוצה:

$$\overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(a, x) \leq r\}$$

הגדרה 4.10 תיבה פתוחה, תיבה סגורה

ישנה עוד דרך לדבר על סביבות במרחב, והיא במונחים של תיבות:

$A \subseteq \mathbb{R}^d$ היא **תיבה פתוחה**,

אם קיימים d קטעים פתוחים I_1, \dots, I_d כך ש- $A = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$.

$A \subseteq \mathbb{R}^d$ היא תיבה סגורה,

אם קיימים d קטעים סגורים I_1, \dots, I_d כך ש- $A = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$.

זוהי מכפלה קרטזית, כלומר:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^d : x^1 \in I_1, x^2 \in I_2, \dots, x^d \in I_d\}$$

הגדרה 4.11 סביבה

$U \subseteq \mathbb{R}^d$ היא סביבה של נקודה $a \in \mathbb{R}^d$ אם קיים r כך ש- $B_r(a) \subseteq U$.

הגדרה 4.12 סביבה מנוקבת

$U \subseteq \mathbb{R}^d$ היא סביבה מנוקבת של נקודה $a \in \mathbb{R}^d$ אם $a \notin U$ אבל $U \cup \{a\}$ היא סביבה של a .

תרגיל: הוכיחו ש- U סביבה של a אם ורק אם קיימת תיבה פתוחה A כך ש- $A \subseteq U$ ו- $a \in A$. הראו באמצעות דוגמה, שהשקילות לא מתקיימת לתיבות סגורות. (לא הוכחנו בהרצאה, זה ניתן כתרגיל...)

4.1.5 פונקציות - הגדרת הגבול, הגבול לפי סדרות, ורציפות

הגדרה 4.13 גבול של פונקציה בנקודה

תהי $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

אנו אומרים ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$,

אם לכל ϵ קיימת סביבה מנוקבת U של a כך שלכל $x \in U$, $|f(x) - l| < \epsilon$.

משפט 4.14 מתקיים $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ אם ורק אם

לכל סדרה $\{a_n\}$ המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ וגם $a_n \neq a$ לכל n , מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$.

הוכחה: כיוון א': נניח שקיים הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

ותהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת את הדרישות.

לכל ϵ קיימת סביבה מנוקבת U של a כך שלכל $x \in U$, $|f(x) - l| < \epsilon$.

כמו כן, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ו- $a_n \neq a$ לכל n , ולכן קיים N כך שלכל $n > N$, $a_n \in U$.

מכאן, לכל $n > N$, $|f(a_n) - l| < \epsilon$, ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$.

כיוון ב':

נניח שלכל סדרה $\{a_n\}$ כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a_n \neq a$, $\forall n$, מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$.

ונניח בשלילה ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq l$ (או שהוא לא קיים או שקיים ושונה מ- l).

אז קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל סביבה מנוקבת U של a , קיים $x \in U$ כך ש- $|f(x) - l| \geq \epsilon$.

בפרט, לכל n , בסביבה המנוקבת $U_n = B_{\frac{1}{n}}(a) \setminus \{a\}$ של a ,

קיים $a_n \in U_n$ כך ש- $|f(a_n) - l| \geq \epsilon$.

לכל n , $d(a_n, a) < \frac{1}{n}$, ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ וכמו כן $a_n \neq a$ לכל n .

אבל, $|f(a_n) - l| \geq \epsilon$ לכל n , ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq l$ - **בסתירה להנחה!**

משפט 4.15 יחידות הגבול

אם קיים גבול (הן לסדרה והן לפונקציה), אז הוא יחיד.

הוכחה: הושארה כתרגיל. (אותה הוכחה מאינפי 1, כנראה).

הגדרה 4.16 רציפות של פונקציה בנקודה

אנו אומרים שפונקציה $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ היא רציפה ב- a אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

4.1.6 דוגמאות

דוגמא א) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, מוגדרת ע"י

$$f(x^1, x^2) = \frac{x^1 x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad f(0, 0) = 0$$

האם $\lim_{x \rightarrow (0,0)} f(x)$ קיים, ואם כן, מהו?

תהי a_n הסדרה $a_n = (0, \frac{1}{n})$. אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (0, 0)$ וכמו כן,

$$f(a_n) = \frac{0 \cdot \frac{1}{n}}{0^2 + (\frac{1}{n})^2} = 0$$

ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$, ולכן אם לפונקציה יש גבול אז הוא 0.

כעת נביט בסדרה $b_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = (0, 0)$. אבל,

$$f(b_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \frac{1}{2}$, ולכן אם לפונקציה יש גבול אז הוא $\frac{1}{2}$.

ולכן אין גבול! (השתמשנו ביחידות הגבול).

דוגמא ב) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, מוגדרת ע"י

$$f(x^1, x^2) = \frac{(x^1)^2 x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad f(0, 0) = 0$$

האם קיים גבול באפס, ואם כן אז מהו?

תשובה: הגבול $\lim_{x \rightarrow (0,0)} f(x) = 0$.

יהי $\epsilon > 0$. נביט בסביבה $U = B_{\frac{\epsilon}{4}}(0) \setminus \{0\}$.

לכל $x \in U$, $|x^1| < \frac{\epsilon}{4}$ וגם $|x^2| < \frac{\epsilon}{4}$, ואז,

$$|f(x)| = \left| \frac{(x^1)^2 x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \right| \leq \frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{(x^1)^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \leq \frac{\epsilon}{4} < \epsilon$$

כאשר אי השויון החלש האחרון היה מכיוון שהמכנה בשבר הוא גדול מהמונה.
...וסיימנו.

4.2 נגזרות חלקיות ונגזרות

4.2.1 הגדרה - נגזרת חלקית

הגדרה 4.17 תהי $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

הנגזרת החלקית לפי הקואורדינטה ה- k ית של f ב- x_0 היא

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + h \cdot e_k) - f(x_0)}{h}$$

כאשר הוקטור: $e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ עם 1 במקום ה- k . (כמו בבסיס הסטנדרטי מאלגברה ליניארית).

נגזרת חלקית היא נגזרת במונח של אינפי 1:

נגדיר $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $g(x) = f(x_0 + x \cdot e_k)$.

אז הנגזרת החלקית ה- k ית של f ב- x_0 היא פשוט הנגזרת של g ב-0.

סימון:

הנגזרת החלקית ה- k ית של f ב- x_0 מסומנת ע"י

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) \quad , \quad D_k f(x_0)$$

(יש שני סימונים שונים).

4.2.2 שתי דוגמאות קטנות

(א) תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^1 + x^2$.

נטען שמתקיים: $\frac{\partial f}{\partial x^1}(x) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x^2}(x) = 1$.

באופן כללי, זה קורה מפני שאחת הקואורדינטות היא קבועה, והשניה זה "x", והנגזרת (הרגילה) של x היא 1.

בחישוב מפורש:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + e_1 h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^1 + h + x^2 - (x^1 + x^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

(ב) תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^1 x^2$.

מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + e_1 h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^1 + h)x^2 - x^1 x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 h}{h} = x^2$$

ובאותו האופן,

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x) = \dots = x^1$$

4.2.3 נגזרת: הגדרה, הגדרת הגזירות, ויחידות הנגזרת

הגדרה 4.18 אנו אומרים שוקטור $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^d) \in \mathbb{R}^d$ הוא הנגזרת של f ב- x_0 אם

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^d}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda h}{\|h\|} = 0$$

כאשר $\lambda h = \langle \lambda, h \rangle = \sum_{k=1}^d h^k \lambda^k$,

וגם משתמשים בנורמה הרגילה, כלומר $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^d (h^k)^2}$.

הסבר קצר על ההגדרה:

נביט לרגע על ההגדרה של נגזרת לפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (במשתנה אחד). הגדרנו:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

נשים לב שלא מוגדרת לנו חלוקה בוקטור, אז יש פה בעיה. כעת אם נסמן $\lambda = f'(x_0)$ אז

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lambda$$

ולכן,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda h}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \lambda = 0$$

כלומר יש דמיון רב בין שתי ההגדרות ולמעשה ההגדרה המורחבת היא הכללה של המקרה הרגיל.

הגדרה 4.19 פונקציה f היא **גזירה ב-** x_0 אם יש $\lambda \in \mathbb{R}^d$ שהוא הנגזרת של f ב- x_0 .

טענה 4.20 תהי $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ונניח ש- λ_1, λ_2 הם נגזרות של f ב- x_0 . אז $\lambda_1 = \lambda_2$. (יחידות הנגזרת).

הוכחה: נניח בשלילה ש- $\lambda_1 \neq \lambda_2$. אז קיים $1 \leq k \leq d$ כך ש- $\lambda_1^k \neq \lambda_2^k$.
תהי $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ הסדרה $h_n = \frac{\epsilon_k}{n}$, אז,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0) - \lambda_1 h_n}{\|h_n\|} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0) - \lambda_2 h_n}{\|h_n\|} = 0$$

ולכן,

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0) - \lambda_1 h_n - (f(x_0 + h_n) - f(x_0) - \lambda_2 h_n)}{\|h_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2 h_n - \lambda_1 h_n}{\|h_n\|} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2^k \cdot \frac{1}{n} - \lambda_1^k \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lambda_2^k - \lambda_1^k \neq 0$$

■

קיבלנו סתירה! ולכן $\lambda_1 = \lambda_2$.

4.2.4 עובדה לגבי כך שקיום נגזרת ב- x_0 גורר קיום הנגזרות החלקיות, וערכן ידוע

טענה 4.21 אם f גזירה ב- x_0 ונגזרתה היא $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^d)$, אז לכל i , $\lambda_i = D_i f(x_0)$. (מתחבאת כאן הטענה שהנגזרות החלקיות קיימות).

הוכחה: ראשית, אנו יודעים ש-

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^d}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda h}{\|h\|} = 0$$

אז לכל ϵ קיים δ כך שאם $\|h\| < \delta$, (נשים לב שזה אומר שהמרחק שלו מאפס $\delta > 0$)
 אז מתקיים

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda h}{\|h\|} \right| < \epsilon$$

יהי $z \in \mathbb{R}, |z| < \delta$ ונגדיר: $h = z \cdot e_i \in \mathbb{R}^d$.

אז מתקיים $x_0 + z \cdot e_i = x_0 + h$ כמו כן, $\|h\| = |z| < \delta$.

וגם, $\lambda \cdot h = \sum_{j=1}^d \lambda^j \cdot h^j = z \cdot \lambda^i$, כאשר השוויון האחרון הוא כי כל הקואורדינטות פרט ל- i הן 0. וכעת,

$$\left| \frac{f(x_0 + ze_i) - f(x_0) - z\lambda^i}{|z|} \right| = \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda h}{\|h\|} \right| < \epsilon$$

כלומר קיבלנו שמתקיים:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0) - h\lambda^i}{|h|} = 0$$

המשך ההוכחה:
 ולכן,

$$0 = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0) - h\lambda^i}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} - \lambda^i$$

ולכן

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} = \lambda^i$$

■

4.2.5 פונקציה גזירה ברציפות: הגדרה, ומשפט שאומר שאם f גזירה ברציפות בסביבת x_0 אז היא גזירה ב- x_0

הגדרה 4.22 תהי $x_0 \in \mathbb{R}^d, U$ סביבה פתוחה של x_0 , ו- $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

אז f גזירה ברציפות ב- U , אם הנגזרות החלקיות של f קיימות בכל נקודה ב- U , ומהוות פונקציות רציפות.

משפט 4.23 אם f גזירה ברציפות בסביבה של x_0 , אז f גזירה ב- x_0 .

הוכחה: תהי f גזירה ברציפות, ויהי $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^d)$ וקטור הנגזרות החלקיות.

אנו רוצים להוכיח ש- λ היא הנגזרת של f ב- x_0 .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \lambda h}{\|h\|} = 0$$

נשתמש בטענה הבאה:

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |h^i| \leq \|h\| \leq \sum_{i=1}^d |h^i|$$

מדוע הטענה נכונה?
 $h = \sum_{i=1}^d h^i e_i$ ולכן מא"ש המשולש,

$$\|h\| \leq \sum_{i=1}^d \|h^i e_i\| = \sum_{i=1}^d |h^i|$$

בשביל הצד השני נשתמש באי שויון קושי-שוורץ:

$$\sum_{i=1}^d |h^i| = \sum_{i=1}^d |h^i| \cdot 1 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d |h^i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^d 1^2} = \|h\| \cdot \sqrt{d}$$

ולכן

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |h^i| \leq \|h\|$$

נמשיך בהוכחה:

נבחר ϵ , ויהי δ כזה שלכל x כך ש- $d(x, x_0) < \delta$ ולכל $i = 1, \dots, d$ מתקיים

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \right| < \frac{\epsilon}{d}$$

δ כזה קיים, כי כל אחת מהנגזרות החלקיות היא פונקציה רציפה.

יהי h כזה ש- $\|h\| < \delta$. אנו רוצים להראות ש-

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \lambda h}{\|h\|} \right| < \epsilon$$

$$h = \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^d \end{pmatrix} \text{ אז נסמן}$$

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 0 \\
 h_1 &= (h^1, 0, \dots, 0) \\
 h_2 &= (h^1, h^2, 0, \dots, 0) \\
 &\vdots \\
 h_{d-1} &= (h^1, h^2, \dots, h^{d-1}, 0) \\
 h_d &= h
 \end{aligned}$$

ונסמן:

כלומר מתקיים $.h_i = \sum_{k=1}^i h^k e_k$

כמו כן, נשים לב שמתקיים ש- $.h_i - h_{i-1} = h^i e_i$ וכעת, נתבונן:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) =$$

$$= f(x_0 + h_1) - f(x_0 + h_0) + f(x_0 + h_2) - f(x_0 + h_1) + \dots + f(x_0 + h_d) - f(x_0 + h_{d-1}) =$$

(נשים לב שהכל חוץ משני איברים שם מתקזז)

$$= \sum_{i=1}^d [(f(x_0 + h_i) - f(x_0 + h_{i-1}))]$$

מה ניתן לומר על $(f(x_0 + h_i) - f(x_0 + h_{i-1}))$ נגדיר: $.g(y) = f(x_0 + h_{i-1} + y \cdot e_i)$ אז,

$$f(x_0 + h_i) - f(x_0 + h_{i-1}) = g(h^i) - g(0)$$

כמו כן, $.g'(y) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0 + h_{i-1} + y e_i)$

הנגזרת החלקית קיימת בכל הסביבה U של x_0 ולכן הפונקציה g גזירה בקטע $[0, h^i]$. ממשפט הערך הממוצע לנגזרות,

$$g(h^i) - g(0) = h^i \cdot g'(y_0)$$

לאיזשהו $.y_0 \in [0, h^i]$

תזכורת: משפט הערך הממוצע של לגראנז':
 תהי f פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- $]a, b[$.
 אז קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש- $.f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

כלומר, (השויון האחרון במשוואה הבאה הוא סתם סימון):

$$f(x_0 + h_i) - f(x_0 + h_{i-1}) = h^i \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0 + h_{i-1} + y_0 e_i) = h^i \cdot D^{(i)}$$

עכשיו, $\|h_{i-1} + y_0 e_i\| \leq \|h_i\| \leq \|h\|$ (כי מתקיים $\|h_{i-1} + y_0 e_i\| < \delta$), ולכן $|D^{(i)} - \lambda^i| < \frac{\epsilon}{d}$.
ואז,

$$|f(x_0 + h_i) - f(x_0 + h_{i-1}) - \lambda^i h^i| = |D^{(i)} h^i - \lambda^i h^i| = |h^i| \cdot |D^{(i)} - \lambda^i| < \frac{\epsilon}{d} |h^i|$$

ועכשיו,

$$\begin{aligned} |f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda h| &\leq \sum_{i=1}^d |(f(x_0 + h_i) - f(x_0 + h_{i-1}) - \lambda^i h^i)| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^d \frac{\epsilon}{d} |h^i| = \frac{\epsilon}{d} \sum_{i=1}^d |h^i| \leq \frac{\epsilon}{d} \sqrt{d} \cdot \|h\| \leq \epsilon \cdot \frac{\|h\|}{\sqrt{d}} \end{aligned}$$

נחלק את שני האגפים ב- $\|h\|$ ונקבל את הדרוש. ■

4.2.6 דוגמא שבה קיום של נגזרות חלקיות אינו מספיק לקיומה של נגזרת

ניקח: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$f(x^1, x^2) = \begin{cases} \frac{(x^1)^2 x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^4} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

האם f רציפה ב- 0 ?

ראשית, $f(0) = 0$, ואם $|x^2| < \epsilon$ אז

$$|f(x)| = \frac{|x^2|(x^1)^2}{(x^1)^2 + (x^2)^4} \leq \epsilon \frac{(x^1)^2}{(x^1)^2} = \epsilon$$

ולכן, אם $\|x\| < \epsilon$ אז $|f(x)| < \epsilon$. ולכן f רציפה באפס.

מה הן הנגזרות החלקיות באפס?

$$D_1 f(0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(0 + h e_1) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = 0$$

$$D_2 f(0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(0 + he_2) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\frac{0-h}{h^4}}{h} = 0$$

האם f גזירה באפס?

אם f גזירה באפס, אז נגזרתה היא הוקטור $(0, 0)$. (כלומר וקטור הנגזרות החלקיות).

כלומר צריך להתקיים:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^2}} \frac{f(0+h) - f(0) - 0 \cdot h}{\|h\|} = 0$$

אז, נחשב:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^2}} \frac{f(0+h) - f(0) - 0 \cdot h}{\|h\|} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^2}} \frac{f(h)}{\|h\|}$$

ואנו רוצים לבדוק אם אכן הגבול האחרון שווה ל-0.

נביט בסדרה $\{x_n\}$: $x_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$. היא מקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

ולכן, אם אכן מתקיים $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{\|h\|} = 0$, אז מתקיים גם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{\|x_n\|} = 0$.

אבל,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{\|x_n\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}}}{\sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{2}{n^4} \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-5}}{2n^{-4} \sqrt{2n^{-2}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-5}}{2n^{-4} \cdot \sqrt{2}n^{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0 \end{aligned}$$

קיבלנו שהגבול אינו 0! ולכן f לא גזירה באפס.

4.2.7 נגזרת בקירוב ליניארי \ אפיני

הגדרה 4.24 טרנספורמציה $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ נקראת **אפינית** אם קיימת $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ ליניארית, וקבוע $c \in \mathbb{R}^m$ כך שלכל x , $f(x) = g(x) + c$.

קצת הקדמה בנושא:

עבור פונקציות $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

הגרפים האפשריים של פונקציות ליניאריות הם קוים ישרים שעוברים דרך הראשית (חוץ מהישר המאונך לציר ה- x , שאינו נכלל בקבוצה זו).

הגרפים האפשריים של פונקציות אפיניות הם קוים ישרים (שלא בהכרח עוברים בראשית). גם כאן כל ישר שמאונך לחלוטין לציר x אינו נכלל בקבוצה זו.

הגדרה 4.25 משיק (לפונקציה $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

נניח f פונקציה $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, וגזירה בנקודה x_0 .

המשיק לגרף של f ב- x_0 (שהוא גם פולינום טיילור מהמעלה הראשונה סביב x_0)

הוא הפונקציה $h(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

h היא פונקציה אפינית.

h היא הפונקציה האפינית היחידה שמקיימת

$$\star \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - f(x)}{x - x_0} = 0$$

מסקנה:

אם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ב- x_0 אז קיים קירוב אפיני ל- f בסביבה של x_0 במובן של \star .

עבור $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ בעצם קורה בדיוק אותו הדבר.

תהי $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ונניח ש- f גזירה ב- x_0 , $f'(x_0) = \lambda$ (ונושים לב ש- $\lambda \in \mathbb{R}^d$), $f'(x_0)$ שניהם).

נעיין בפונקציה $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$h(x) = f(x_0) + \lambda \cdot (x - x_0)$$

(נזכור ש- $\lambda \cdot (x - x_0)$ היא למעשה מכפלה פנימית: $\lambda \cdot y = \left(\sum_{i=1}^d \lambda^i y^i\right) \in \mathbb{R}$), $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,

היא פונקציה אפינית, שהיא הפונקציה האפינית היחידה שמקרבת את f עכשיו, $h(x) = \underbrace{f(x_0) - \lambda x_0}_{(\uparrow \text{constant})} + \underbrace{\lambda x}_{(\text{linear } \uparrow)}$, בסביבה של x_0 במובן ש:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - h(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

זוה דומה לסיפור שהיה במקרה החד-מימדי.
 נשים לב ש- λ הנגזרת של f ב- x_0 היא החלק הליניארי של h .

מדוע הגבול האחרון נכון?

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - h(x)}{\|x - x_0\|} = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \in \mathbb{R}^d}} \frac{f(x_0 + u) - h(x_0 + u)}{\|u\|} = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \in \mathbb{R}^d}} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0) - \lambda \cdot u}{\|u\|} = 0$$

כאשר השויון האחרון ל-0 הוא בגלל שהנגזרת ב- x_0 היא λ (השתמשנו בהגדרת הנגזרת).
 כמו כן, יחידות הפונק' h נובעת מיחידות הנגזרת.

4.2.8 דוגמא

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$. באילו נקודות f גזירה?
 תשובה: ב-0 היא אינה גזירה, ובכל נקודה אחרת כן.
 נראה שהיא אינה גזירה ב-0:
אם היא היתה גזירה, אז יש לה נגזרות חלקיות. אבל,

$$D_1 f(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2 + 0^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \text{doesn't exist.}$$

ולכן הנגזרת החלקית הראשונה אינה קיימת, ו- f אינה גזירה ב-0.
 נראה שהיא כן גזירה בכל נקודה שאינה 0:
 הוכחנו כבר, שאם בנק' x_0 הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות, אז f גזירה ב- x_0 .
 יהי $x_0 = (x^1, x^2) \neq 0$. נחשב את הנגזרות החלקיות.
 נגדיר: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $g(y) = f(x_0 + ye_1)$, אז,

$$D_1 f(x_0) = g'(0) = \left(\sqrt{(x^1 + y)^2 + (x^2)^2} \right)' (0) = \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} = \frac{x^1}{f(x_0)}$$

כאשר גזרנו לפי y ואז הצבנו $y = 0$, בשויון השלישי משמאל.
 ובאותו האופן,

$$D_2 f(x_0) = \frac{x^2}{f(x_0)}$$

ועכשיו, $x_0 \neq 0$ ולכן בסביבה של x_0 , $\frac{x^1}{f(x_0)}$, $\frac{x^2}{f(x_0)}$ רציפות (כהרכבה וחיבור של רציפות...) ולכן f גזירה ב- x_0 .

4.2.9 קריטריון קרטיאודורי לגזירות (חד-מימדי)

תחילה עבור פונקציה $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

משפט 4.26 תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב- x_0 .

f גזירה ב- x_0 אם ורק אם קיימת פונקציה $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שהיא רציפה ב- x_0 ,

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x), \quad x \text{ שכלל}$$

הוכחה: כיוון א': נניח ש- f גזירה ב- x_0 . וניקח:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

לכל $x \neq x_0$ מתקיים $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$

ועבור $x = x_0$, $f(x) - f(x_0) = 0 = (x - x_0)\varphi(x)$

לגבי הרציפות:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \varphi(x_0)$$

ולכן φ רציפה ב- x_0 .

כיוון ב':

נניח שקיים φ כזה. עלינו להראות ש- f גזירה ב- x_0 .

כלומר להראות שקיים הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \Rightarrow (\text{from } \varphi \text{'s continuity}) \Rightarrow \varphi(x_0)$$

כלומר הגבול קיים, ולכן f גזירה ב- x_0 .

(נשים לב שהשתמשנו כאן בהגדרת φ לפי ניסוח המשפט, ולא בהגדרה מהכיוון הראשון). ■

4.2.10 קריטריון קרטיאודורי לגזירות (רב-מימדי)

משפט 4.27 תהי $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ו- U סביבה של x_0 . ותהי $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

אז f גזירה ב- x_0 אם ורק אם קיימות d פונקציות $\varphi_1, \dots, \varphi_d : U \rightarrow \mathbb{R}$

כך ש- φ_i רציפה ב- x_0 לכל i , ומתקיים שכלל $x \in U$

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^d \varphi_i(x) \cdot (x^i - x_0^i)$$

הוכחה: כיוון א': נניח שקיימות φ_i כאלה, ועלינו להוכיח ש- f גזירה ב- x_0 .

נטען שמתקיים ש- $f'(x_0) = (\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_d(x_0))$,

ונסמן וקטור זה ב- $\lambda = (\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_d(x_0))$.

וכעת עלינו להראות ש- $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^d}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \lambda \cdot h}{\|h\|} = 0$ כדי להראות שזוהי הנגזרת.

אז, נחשב: (הסכום בביטוי בצד ימין הוא פשוט מכפלה פנימית):

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda \cdot h = f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{i=1}^d \varphi_i(x_0) \cdot h^i =$$

ומהנתון לגבי הגדרת φ_i , שאומר ש- $f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^d \varphi_i(x) \cdot (x^i - x_0^i)$, נקבל:

$$= \sum_{i=1}^d \varphi_i(x_0 + h) \cdot h^i - \sum_{i=1}^d \varphi_i(x_0) \cdot h^i = \sum_{i=1}^d h^i (\varphi_i(x_0 + h) - \varphi_i(x_0))$$

סיימנו את חישוב העזר. כעת נבחר ε ,

ואנו רוצים להראות שקיים δ כך שאם $0 < \|h\| < \delta$, אז $|\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \lambda \cdot h}{\|h\|}| < \varepsilon$.

ניקח δ כזה שלכל $\|h\| < \delta$ ולכל i ,

$$|\varphi_i(x_0 + h) - \varphi_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{d}$$

כמובן ש- δ כזה קיים **מרציפות הפונקציות** φ_i בנקודה x_0 .

ועכשיו, נשתמש בחישוב מקודם ונקבל:

$$|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda \cdot h| = \left| \sum_{i=1}^d h^i (\varphi_i(x_0 + h) - \varphi_i(x_0)) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^d |h^i| \cdot |\varphi_i(x_0 + h) - \varphi_i(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{d} \sum_{i=1}^d |h^i| \leq$$

ניזכר שבאחת ההוכחות הקודמות ראינו ש- $\sum_{i=1}^d |h^i| \leq \sqrt{d} \|h\|$, ולכן,

$$\leq \frac{\varepsilon}{d} \sqrt{d} \|h\| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} \|h\| \leq \varepsilon \|h\|$$

ולכן נקבל:

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda \cdot h}{\|h\|} \right| \leq \frac{\varepsilon \|h\|}{\|h\|} = \varepsilon$$

כיוון ב':

אנו מניחים ש- f גזירה ב- x_0 , ורוצים להוכיח שקיימות פונקציות $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ לפי תנאי המשפט, כלומר ש- φ_i רציפות ב- x_0 לכל i , ומתקיים שלכל $x \in U$, $f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^d \varphi_i(x) \cdot (x^i - x_0^i)$.

נבנה את הפונקציות $\varphi_1, \dots, \varphi_d$:

לכל $1 \leq i \leq d$, נגדיר $\varphi_i(x_0) = D_i f(x_0)$. (נשים לב: מניחים ש- f גזירה, ולכן יש נגזרת חלקית).

ועבור $x \neq x_0$, (כאשר λ היא הנגזרת של f ב- x_0):

$$\varphi_i(x) = \varphi_i(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|^2} (x^i - x_0^i)$$

אז,

נוכיח את השוויון הנדרש:

$$\sum_{i=1}^d \varphi_i(x) \cdot (x^i - x_0^i) = \sum_{i=1}^d \left(\left[\varphi_i(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|^2} (x^i - x_0^i) \right] \cdot (x^i - x_0^i) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^d \varphi_i(x_0) (x^i - x_0^i) + \frac{f(x) - f(x_0)}{\|x - x_0\|^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^d (x^i - x_0^i)^2 \right) - \frac{\lambda(x - x_0)}{\|x - x_0\|^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^d (x^i - x_0^i)^2 \right) =$$

נשים לב: $\sum_{i=1}^d (x^i - x_0^i)^2 = \|x - x_0\|^2$, וגם, $\sum_{i=1}^d \varphi_i(x_0) (x^i - x_0^i) = \lambda \cdot (x - x_0)$ (כי λ הוא וקטור הנגזרת החלקית). ולכן,

$$= \lambda \cdot (x - x_0) + f(x) - f(x_0) - \lambda \cdot (x - x_0) = f(x) - f(x_0)$$

ולכן הוכחנו את השוויון כנדרש.

נותר להוכיח ש- φ_i רציפה ב- x_0 , לכל i :

נבחר x . אז, (פשוט נציב את הגדרת φ_i שלנו):

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{\|x - x_0\|^2} \cdot (x^i - x_0^i) \right| \leq$$

$$\leq \frac{|f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)|}{\|x - x_0\|^2} \|x - x_0\| = \frac{|f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} \xrightarrow{(as \ x \rightarrow x_0)} \rightarrow 0$$

(הגבול בסוף הוא בגלל שהגענו לביטוי המפורש של קירוב ליניארי לפונקציה) ולכן,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| = 0$$

כלומר, φ_i רציפה ב- x_0 .

תרגיל: (כלומר ניתן בהרצאה כתרגיל)

1. הוכיחו שאם f גזירה ב- x_0 אז היא רציפה בו (זה נובע מהקריטריון לעיל)
2. הראו שהפונקציה $f(x) = \frac{x^1 \cdot x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$, $f(0) = 0$, אינה רציפה ב- 0 , אבל יש לה נגזרות חלקיות ב- 0 .

4.3 נגזרות כיווניות

4.3.1 הגדרות וטרמינולוגיה

קצת סימונים והבהרות:

גזרות = דיפרנציאביליות

גרדיאנט = וקטור הנגזרות החלקיות.

סימון: הגרדיאנט של f הוא ∇f .

הגדרה 4.28 כיוון

כיוון ב- \mathbb{R}^d הוא וקטור l כך ש- $\|l\| = 1$.

למשל, ב- \mathbb{R}^2 אם l הוא כיוון אז הוא נמצא על מעגל היחידה, וקיימת α כך ש- $l = (\cos \alpha, \sin \alpha)$.

הגדרה 4.29 נגזרת כיוונית

תהי $x_0 \in \mathbb{R}^d$, ו- U סביבה של x_0 . ותהי $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

הנגזרת הכיוונית של f ב- x_0 בכיוון l מוגדרת להיות:

$$D_l f(x_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + l \cdot h) - f(x_0)}{h}$$

וזה שווה ל- $g'(0)$, כאשר $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(y) = f(x_0 + l \cdot y)$.

מקרה פרטי:

וקטורי היחידה $\{e_i\}_{i=1}^d$ הם כיוונים.

והנגזרת החלקית ה- i , כלומר $D_i f$ היא למעשה נגזרת כיוונית בכיוון של וקטור יחידה כלשהו:

$$D_i f = D_{e_i} f$$

4.3.2 משפט על הגרדיאנט: אם f גזירה ב- x_0 , אז $D_l f(x_0) = \lambda \cdot l$ לכל כיוון l

יהי $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ותהי U סביבה של x_0 .

תהי $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ב- x_0 .

ויהי λ הגרדיאנט של f ב- x_0 .

אז לכל כיוון l , מתקיים $D_l f(x_0) = \lambda \cdot l$.

(ונשים לב להערה בהמשך - אם לא מניחים גזירות אז המשפט לא נכון!)

הוכחה: f גזירה ב- x_0 , ונגזרתה λ . ולכן,

$$\lim_{\substack{\hat{h} \rightarrow 0 \\ \hat{h} \in \mathbb{R}^d}} \frac{f(x_0 + \hat{h}) - f(x_0) - \lambda \hat{h}}{\|\hat{h}\|} = 0$$

ובפרט,

אם נחליף וקטור כללי ב- \mathbb{R}^d (\hat{h}) בוקטור $h \cdot l$ ($h \in \mathbb{R}$),

ונשים לב שעבור $h \in \mathbb{R}$, מתקיים $\|h \cdot l\| = |h|$, וכי $h \cdot l = h$ (וכי $h \cdot l = h$ ולכן $h \cdot 1 = h$), נקבל:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + hl) - f(x_0) - \lambda \cdot hl}{|h|} = 0$$

ולכן, (נוריד את הערך המוחלט מ- h כי זו שאיפה לאפס, ולכן לכל היותר שינינו סימן וזה לא משנה ב-0):

$$0 = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + hl) - f(x_0) - h(\lambda \cdot l)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + hl) - f(x_0)}{h} - \lambda \cdot l$$

נותר רק להעביר אגף ולקבל את המבוקש:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + hl) - f(x_0)}{h} = \lambda \cdot l$$

נשים לב שזה מאוד דומה להוכחה שכבר עשינו...

4.3.3 מסקנה - מה קורה אם $\lambda = \bar{0}$, וגם לגבי כיוון הגרדיאנט (הכיוון בו הנ. הכיוונית היא הגדולה ביותר)

1. אם f גזירה ו- $\bar{0} = \lambda$, אז כל הנגזרות הכיווניות הן אפס.

2. אם f גזירה, הכיוון בו הנגזרת הכיוונית היא הגדולה ביותר הוא הכיוון $l = \frac{\lambda}{\|\lambda\|}$ (כיוון הגרדיאנט).

$$D_l f(x_0) = \|\lambda\|$$

נשים לב ש-(2) בעצם מאשש את העובדה שהדרך התלולה ביותר לטפס על הר היא לצעוד ישירות אל הפסגה. **הוכחה:** לגבי (1), זה ברור.

נוכיח את (2):

יהי $l = \frac{\lambda}{\|\lambda\|}$ כיוון הגרדיאנט. אז, מהמשפט הקודם מתקיים:

$$D_l f(x_0) = \lambda \cdot l = \lambda \cdot \frac{\lambda}{\|\lambda\|} = \frac{\lambda \cdot \lambda}{\|\lambda\|} = \frac{\|\lambda\|^2}{\|\lambda\|} = \|\lambda\|$$

ומצד שני, יהי l' כיוון כלשהו. אז, (אי השויון הוא קושי-שוורץ):

$$D_{l'} f(x_0) = \lambda \cdot l' \leq \|\lambda\| \cdot \|l'\| = \|\lambda\|$$

■

הערה 4.30 אם לא מניחים גזירות, אז המשפט והמסקנה אינם נכונים.

לדוגמא:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(0) = 0$, ובנוסף לכל $x \neq 0$, נגדיר

$$f(x) = \|x\| \cdot \sin\left(4 \cdot \arctan\left(\frac{x^1}{x^2}\right)\right)$$

נטען שלפונקציה יש נגזרות כיווניות בכל הכיוונים ב-0: יהי l כיוון. אז

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(hl)}{h} = \sin\left(4 \arctan\left(\frac{l^1}{l^2}\right)\right)$$

(הושאר כתרגיל לבדוק שזה נכון).

כמו כן הושאר כתרגיל להראות שהנגזרות החלקיות כולן אפס.

אבל יש כיוונים שבהם הנגזרת אינה אפס.

4.4 נגזרות שניות ומשפט הנגזרות המעורבות

4.4.1 נגזרות שניות - הגדרה ודוגמא

תהי $x_0 \in \mathbb{R}^d$, U סביבה של x_0 . ותהי $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. ונניח ש- U כדור פתוח.

נניח בנוסף ש- f גזירה ב- U .

ויהיו $\varphi_1, \dots, \varphi_d: U \rightarrow \mathbb{R}$ הנגזרות החלקיות.

הגדרה 4.31 אנו אומרים ש- f גזירה פעמיים ב- x_0 אם לכל $1 \leq i \leq d$ גזירה ב- x_0 .

f גזירה פעמיים ב- U אם היא גזירה פעמיים בכל נקודה ב- U .

f גזירה פעמיים ברציפות ב- U אם לכל $1 \leq i \leq d$ גזירה ברציפות ב- U .

דוגמא:

$f(x) = e^{x^1} \cdot \cos(x^2)$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. נחשב את הנגזרת השנייה של f .

ראשית, הנגזרת הראשונה: ("לא יעלה על הדעת שהיא לא גזירה", ולכן נמצא את הנגזרת החלקיות ונקבל את הנגזרת)

$$\varphi_1(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) = e^{x^1} \cdot \cos(x^2), \quad \varphi_2(x) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(x) = -e^{x^1} \cdot \sin(x^2)$$

ואז,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2}(x) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^1}(x) = e^{x^1} \cdot \cos(x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}(x) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^2}(x) = -e^{x^1} \cdot \sin(x^2)$$

ומצד שני,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(x) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^1}(x) = -e^{x^1} \cdot \sin(x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2}(x) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2}(x) = -e^{x^1} \cdot \cos(x^2)$$

נשים לב שמתקיים $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(x)$. זהו לא צירוף מקרים! המשפט הבא קובע זאת:

4.4.2 משפט הנגזרות המעורבות

משפט 4.32 תהי $x_0 \in \mathbb{R}^d$, ותהי U סביבה של x_0 .

תהי $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות ב- x_0 .

ויהיו $1 \leq i \neq j \leq d$. אז מתקיים ש-

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0)$$

סימון: לעיתים נסמן גם: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = D_i D_j f$

הערה: ייתכן שצריך היה לדרוש שקיימת סביבה U של x_0 שבה f גזירה פעמיים ברציפות. ואז כל בחירת המשתנים בהוכחה צריכה להיות כך שהם מספיק קרובים אל x_0 שהם מוכלים ב- U . זאת הערה שלי, ייתכן שזה לא נחוץ. **הוכחה:** נחשב את:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + he_i + he_j) - f(x_0 + he_i) - f(x_0 + he_j) + f(x_0)}{h^2}$$

נתייחס רק למונה:

$$f(x_0 + he_i + he_j) - f(x_0 + he_i) - f(x_0 + he_j) + f(x_0) =$$

$$= f(x_0 + he_i + he_j) - f(x_0 + he_i) - [f(x_0 + he_j) - f(x_0)]$$

וכעת, נתייחס לביטוי: $f(x_0 + he_i + he_j) - f(x_0 + he_i)$ ♠

נגדיר $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $g(t) = f(x_0 + he_i + te_j)$.

ואז נקבל ש-

$$\spadesuit = g(h) - g(0) = \int_0^h g'(t) dt$$

נשים לב: f גזירה פעמיים, ולכן הנגזרת שלה גזירה, ולכן גם רציפה. והנגזרת של g היא g' . חלקית של f , ולכן גם היא רציפה. ולכן אפשר לכתוב את האינטגרל הנ"ל.

וכעת,

$$g'(t) = D_j f(x_0 + he_i + te_j)$$

ולכן,

$$\spadesuit = f(x_0 + he_i + he_j) - f(x_0 + he_i) = \int_0^h D_j f(x_0 + he_i + te_j) dt$$

ובאותו אופן, נקבל גם שהחלק השני במונה (מתחילת ההוכחה) הוא:

$$f(x_0 + he_j) - f(x_0) = \int_0^h D_j f(x_0 + te_j) dt$$

ולכן המונה הנ"ל בשלמותו הוא:

$$f(x_0 + he_i + he_j) - f(x_0 + he_i) - f(x_0 + he_j) + f(x_0) = \int_0^h D_j f(x_0 + he_i + te_j) dt - \int_0^h D_j f(x_0 + te_j) dt =$$

$$= \int_0^h [D_j f(x_0 + he_i + te_j) - D_j f(x_0 + te_j)] dt = \clubsuit$$

כעת, יהי $\varepsilon > 0$, ויהי δ כזה שלכל x המקיים $\|x - x_0\| < 2\delta$, מתקיים:

$$|D_i D_j f(x) - D_i D_j f(x_0)| < \varepsilon$$

קיימת כזו δ כי הנחנו ש- f גזירה פעמיים ברציפות ב- x_0 . ולכן היא גזירה פעמיים בסביבת x_0 , וב- x_0 הנגזרת השנייה רציפה. ולכן כל אחד מרכיבי הנגזרת השנייה רציף, ובפרט נקבל את הנדרש.

כעת, יהי $h < \delta$, ונעריך את האינטגרל \clubsuit .

נזכור שאנו מעוניינים ב- $\lim_{h \rightarrow 0^+}$, ולכן לכל $0 \leq t \leq h$ נסמן:

$$u(t) = D_j f(x_0 + he_i + te_j) - D_j f(x_0 + te_j)$$

ממשפט הערך הממוצע, לכל t קיים $0 \leq s \leq h$ כך ש-

$$u(t) = h \cdot D_i D_j f(x_0 + se_i + te_j)$$

מדוע?

כי אם ניקח $w(s) = D_j f(x_0 + se_i + te_j)$, אז מתקיים $u(t) = w(h) - w(0)$

ולכן יש $0 \leq s \leq h$ שעבורו $u(t) = h \cdot w'(s)$.

הערה שלי: כי $u(t) = w(h) - w(0) = h \cdot w'(s) \Leftrightarrow \frac{w(h) - w(0)}{h - 0} = w'(s)$

(מ. הערך הממוצע של לגראנז': תהי פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) , אז קיימת נקודה c כך ש- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$), אבל, $w'(s) = D_i D_j f(x_0 + se_i + te_j)$, ולכן, ל- s המתאים,

$$u(t) = h \cdot D_i D_j f(x_0 + se_i + te_j)$$

כמו שנטען מקודם.

עכשיו, נזכור ש- (בגלל ש- $0 \leq s, t \leq h < \delta$, לדעתו).

$$\|(x_0 + se_i + te_j) - x_0\| < 2\delta$$

ולכן, לפי הדרישה על δ ממקודם,

$$|D_i D_j f(x_0 + se_i + te_j) - D_i D_j f(x_0)| < \varepsilon$$

ומכאן, אם נכפול שני הצדדים ב- h , נקבל:

$$h \cdot |D_i D_j f(x_0 + se_i + te_j) - D_i D_j f(x_0)| = |h \cdot D_i D_j f(x_0 + se_i + te_j) - h \cdot D_i D_j f(x_0)| =$$

$$= |u(t) - h D_i D_j f(x_0)| < h\varepsilon$$

כעת, (עוד מעט זה נגמר!) נזכור את המונה מתחילת ההוכחה. **ראינו** שהוא מקיים:

$$f(x_0 + he_i + he_j) - f(x_0 + he_i) - f(x_0 + he_j) + f(x_0) = \int_0^h [D_j f(x_0 + he_i + te_j) - D_j f(x_0 + te_j)] dt = \clubsuit$$

ולכן, ונזכור ש- $u(t) = D_j f(x_0 + he_i + te_j) - D_j f(x_0 + te_j)$

$$\clubsuit = \int_0^h u(t) dt$$

וכעת, מתקיים:

$$\left| \int_0^h u(t) dt - h^2 D_i D_j f(x_0) \right| = \left| \int_0^h (u(t) - h D_i D_j f(x_0)) dt \right|$$

ולכן,

$$\left| \int_0^h u(t) dt - h^2 D_i D_j f(x_0) \right| \leq \int_0^h |u(t) - h D_i D_j f(x_0)| dt \leq \int_0^h (\varepsilon h) dt = \varepsilon h^2$$

מסקנה:

אם $0 \leq h \leq \delta$, אז

$$|f(x_0 + he_i + he_j) - f(x_0 + he_i) - f(x_0 + he_j) + f(x_0) - (h^2 D_i D_j f(x_0))| < \varepsilon h^2$$

ואז,

$$\left| \frac{f(x_0 + he_i + he_j) - f(x_0 + he_i) - f(x_0 + he_j) + f(x_0)}{h^2} - D_i D_j f(x_0) \right| < \varepsilon$$

ולכן, הגבול שרצינו לחשב בהתחלת ההוכחה הוא:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + he_i + he_j) - f(x_0 + he_i) - f(x_0 + he_j) + f(x_0)}{h^2} = D_i D_j f(x_0)$$

נשים לב שהמשוואה האחרונה סימטרית ב- i וב- j , ולכן אותו הגבול שווה גם ל- $D_j D_i f(x_0)$. ומכאן,

$$D_i D_j f(x_0) = D_j D_i f(x_0)$$

וסיימנו! ■

4.5 קירובים ריבועיים לפונקציות בכמה משתנים

4.5.1 הקדמה קצרה

במימד אחד, ראינו:

תהי f פונקציה גזירה ב- x_0 . אז הפונקציה $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ היא הקירוב הליניארי (למעשה אפיני) של f , במובן ש- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0$.

כמו כן, אם $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים ב- x_0 , אז $h(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2$ היא הקירוב הריבועי של f סביב x_0 , במובן ש- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - h(x)}{|x - x_0|^2} = 0$.

וכעת, בכמה מימדים:

תהי $x_0 \in \mathbb{R}^d$, ותהי U סביבה של x_0 . ותהי $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים ב- x_0 .

תהי $\lambda = \nabla f(x_0)$ (הנגזרת של f ב- x_0),

וגם, V תהיה הנגזרת השנייה של f ב- x_0 .

אז V היא המטריצה מסדר $d \times d$:

$$V = \begin{pmatrix} D_1 D_1 f & D_2 D_1 f & \cdots & D_d D_1 f \\ D_1 D_2 f & D_2 D_2 f & \cdots & D_d D_2 f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 D_d f & D_2 D_d f & \cdots & D_d D_d f \end{pmatrix}$$

(V היא מטריצת הנגזרות החלקיות השניות).

כעת, ראינו באחד הסעיפים הקודמים,

שהקירוב הליניארי (אפיני) של f סביב x_0 הוא $g(x) = f(x_0) + \lambda \cdot (x - x_0)$ והקירוב מקיים :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

וכעת, נדבר קצת בשפה של אלגברה ליניארית. אם נניח שוקטור באופן כללי הוא וקטור עמודה, אז מתקיים

$$g(x) = \lambda^t \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

כאשר λ^t (=המשוחלף) הוא וקטור שורה, ו- $(x - x_0)$ הוא וקטור עמודה.

וכעת, **הקירוב הריבועי** של f סביב x_0 הוא: (כאשר V היא המטריצה שראינו קודם)

$$h(x) = \underbrace{f(x_0)}_{a \text{ number}} + \underbrace{\lambda^t(x - x_0)}_{a \text{ number}} + \underbrace{\frac{1}{2!}(x - x_0)^t \cdot V \cdot (x - x_0)}_{a \text{ number}}$$

כמובן ש- $f(x_0)$ הוא מספר, וכמו כן $\lambda^t(x - x_0)$ הוא גם מספר, כי זהו כפל שורה בעמודה (מכפלה פנימית רגילה).

ובנוסף, $(x - x_0)^t \cdot V \cdot (x - x_0)$ הוא גם כן מספר, כי זהו כפל של שורה במטריצה בעמודה, וזה יוצא מספר.

נשים לב שעבור מימד אחד, היה לנו איבר שהוא $\frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$, והאיבר כאן עם המטריצה הוא המקביל שלו.

בצורה מפורשת, לוקטור $y \in \mathbb{R}^d$, מתקיים

$$y^t \cdot V \cdot y = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (D_i D_j f(x_0) \cdot y_i y_j)$$

4.5.2 הוכחת הקירוב הריבועי

משפט 4.33 $h(x)$ הוא הקירוב הריבועי היחיד של f סביב x_0 , במובן שמתקיים:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R}^d}} \frac{f(x) - h(x)}{\|x - x_0\|^2} = 0$$

הערה 4.34 שתי הערות קטנות לפני ההוכחה:

1. לא הנחנו ש- f גזירה פעמיים **ברציפות**. ולכן איננו יודעים ש- V סימטרית. (אם כן, אז משפט הנ. החלקיות היה גורר את זה).

2. התבנית הריבועית $(x - x_0)^t V (x - x_0)$ לא קובעת את V . למשל, לכל וקטור x מתקיים $(x - x_0)^t V^t (x - x_0) = (x - x_0)^t V (x - x_0)$ (גם אם V לא סימטרית), כלומר יכולות להיות שתי מטריצות שונות שיוצרות את אותה תבנית ריבועית.

הדוגמא הזו נכונה, כי אם נסמן $y = (x - x_0)$ אז

$$y^t V y = \sum_{1 \leq i, j \leq d} y^i y^j a_{ij} = \sum_{1 \leq i, j \leq d} y^j y^i a_{ij} = \sum_{1 \leq i, j \leq d} y^i y^j a_{ji} = y^t V^t y$$

הוכחה: למשפט:

$$\lambda = 0, f(x_0) = 0, x_0 = 0$$

נניח בה"כ ש- $\lambda = 0, f(x_0) = 0, x_0 = 0$. למה זה בה"כ? ההנחה ש- $f(x_0) = 0, x_0 = 0$ היא ברורה - הזזה של הפונקציה, וכו'.

לגבי למה הנחנו ש- $\lambda = 0$, בסוף ההוכחה יש הסבר מפורט.

כעת,

f גזירה פעמיים ב- 0 . כלומר לכל ε קיים δ כך שאם $\|x\| < \delta$, אז $\|\nabla f(x) - Vx\| < \varepsilon \|x\|$. (למה זה נכון? כי f גזירה פעמיים ב- 0 ,

$$\text{אז לכל } \varepsilon \text{ קיים } \delta \text{ כך שאם } \|x\| < \delta \text{ אז } \left| \frac{\nabla f(0+x) - \nabla f(0) - Vx}{\|x\|} \right| < \varepsilon \text{ (מהגדרת הנגזרת),}$$

ולכן אם נכפול במכנה נקבל $\|\nabla f(x) - Vx\| < \varepsilon \|x\|$. נשים לב שהנחנו ש- $\lambda = \nabla f(0) = 0$. השתמשנו ב- V ולא ב- λ , כי V היא הנגזרת של הנגזרת.

לי אישית זה עדיין מאוד לא ברור. וכל מה שבסוגריים האלו הוא השערה בלבד.)

תזכורת להגדרת $h(x)$: (לחסוך את הטרחה של להסתכל אחורה...):

$$h(x) = f(x_0) + (x - x_0)^t \cdot \lambda + \frac{1}{2!} (x - x_0)^t V (x - x_0)$$

ועכשיו נסמן:

$$l = \frac{x}{\|x\|}, \quad w = \|x\|$$

ונגדיר שתי פונקציות במשתנה אחד $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$:

$$g(t) = f(t \cdot l), \quad u(t) = h(t \cdot l)$$

כעת, נניח ש- $\|x\| < \delta$. אז, מכיוון ש- $x = \|x\| \frac{x}{\|x\|} = w \cdot l$, מתקיים:

$$h(x) - f(x) = u(w) - g(w)$$

זיה נכון כי $u(w) - g(w) = h(w \cdot l) - g(w \cdot l) = h(x) - f(x)$ וכעת, $u(0) = g(0) = 0$ (כי הנחנו ש- $f(x_0) = 0$ וש- $x_0 = 0$, ולכן הכל מתאפס). ננסה להבין מה הן הנגזרות של u ושל g בנקודה t . נחשב:

$$u(t) = h(t \cdot l) = \frac{1}{2}(t \cdot l)^t V(t \cdot l) = \frac{t^2}{2} \cdot l^t V l$$

המעבר האחרון הוא כי t הוא סקלר. וכעת, נשים לב ש- $l^t V l$ הוא לא תלוי ב- t , כלומר קבוע. כמו כן נשים לב שהסימון " l^t " הוא סימון לשיחלוף הוקטור, ולא "חזקת t !" ולכן, (נגזרת "רגילה", כי זוהי פונקציה במשתנה אחד)

$$u'(t) = t \cdot l^t V l$$

כמו כן, נתבונן ב- g : (עוד פעם, עושים נגזרת רגילה של מימד אחד)

$$g(t) = f(t \cdot l) \Rightarrow g'(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(t \cdot l + h \cdot l) - f(t \cdot l)}{h} =$$

ולפי ההגדרה של נגזרת כיוונית, זה שווה בדיוק ל-

$$= D_l f(t \cdot l) = l^t \cdot \nabla f(t \cdot l)$$

המעבר האחרון הוא ממשפט שהוכחנו בעבר. וכעת,

$$\|\nabla f(t \cdot l) - V \cdot t l\| \leq \varepsilon |t|$$

ולכן,

$$|l^t \cdot \nabla f(t \cdot l) - t \cdot l^t V l| < \varepsilon |t|$$

כלומר $|u'(t) - g'(t)| < \varepsilon|t|$.
 דהיינו, אם נגדיר $s(t) = u(t) - g(t)$ אז נקבל ש- $|s'(t)| < \varepsilon|t|$.
 אז לכל $t \in [0, w]$ וממשפט הערך הממוצע, קיים t כך ש-

$$|s(w)| = |s'(t) \cdot w| \leq \varepsilon w^2$$

ועכשיו,

$$|f(x) - h(x)| = |g(w) - u(w)| = |s(w)| < \varepsilon w^2 = \varepsilon \|x\|^2$$

כלומר

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}^d}} \frac{|f(x) - h(x)|}{\|x\|^2} = 0$$

והוכחנו את הנדרש. ■

למה יכלנו להניח ש- $\lambda = 0$? **הוכחה:** נזכור שאנו מניחים f גזירה פעמיים ב- $x_0 = 0$, ו- $f(0) = 0$ וסימנו $\lambda = \nabla f(0)$.
 היא הנגזרת השניה, וסימנו: $h(x) = \lambda x + \frac{1}{2}x^t V x$. עלינו להוכיח ש- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - h(x)}{\|x\|^2} = 0$
 $x \in \mathbb{R}^d$

נזכור שהוכחנו בעבור המקרה שבו $\lambda = 0$. אז נסמן $g(x) = f(x) - \lambda \cdot x$.
 אז הנגזרת השניה של g באפס היא גם V , וכמו כן $\nabla g(0) = 0$. ולכן g מקיימת את תנאי המשפט שכבר הוכחנו.
 תהי $u(x) = \frac{1}{2}x^t V x$. אז u היא הקירוב הריבועי של g , לפי מה שהוכחנו קודם. כלומר,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}^d}} \frac{g(x) - u(x)}{\|x\|^2} = 0$$

ועכשיו, מתקיים

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + \lambda \cdot x \\ h(x) &= u(x) + \lambda \cdot x \end{aligned}$$

ולכן,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}^d}} \frac{f(x) - h(x)}{\|x\|^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}^d}} \frac{g(x) + \lambda x - (u(x) + \lambda x)}{\|x\|^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}^d}} \frac{g(x) - u(x)}{\|x\|^2} = 0$$

כנדרש. כלומר הרחבנו את ההוכחה גם עבור $\lambda \neq 0$.

נוכיח את היחידות: הוכחה: יהיו:

$$h_2(x) = a_2 + \lambda_2(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t V_2(x - x_0), \quad h_1(x) = a_1 + \lambda_1(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t V_1(x - x_0)$$

קירובים ריבועיים של f . אזי, עלינו להוכיח ש- $h_1(x) = h_2(x)$ לכל x .
נניח בה"כ ש- $x_0 = 0$, אז,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}^d}} \frac{h_1(x) - h_2(x)}{\|x\|^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h_1(x) - f(x)}{\|x\|^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h_2(x) - f(x)}{\|x\|^2} = 0$$

ועכשיו:

$a_1 = a_2$ כי אחרת הגבול לא קיים.

$\lambda_1 = \lambda_2$ מיחידות הקירוב הליניארי.

יהי $U = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)$ אז $h_1(x) - h_2(x) = x^t U x$

אז אנו יודעים שמתקיים: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^t U x}{\|x\|^2} = 0$ (זה בדיוק מה שהראינו 5 שורות למעלה!)

תהי $\{x_n\}$ הסדרה: $x_n = \frac{x_1}{n}$

אז $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, וגם, (מסמנים את הביטוי ב- ρ)

$$x_n^t U x_n = \frac{1}{n^2} (x_1^t U x_1) = \frac{1}{n^2} \rho$$

וגם, $\|x_n\| = \frac{1}{n} \|x_1\|$

ומכאן, נקבל:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^t U x_n}{\|x_n\|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \rho}{\frac{1}{n^2} \|x_1\|^2} = \frac{\rho}{\|x_1\|^2} \neq 0$$

בסתירה לכך שראינו ש- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^t U x}{\|x\|^2} = 0$

ולכן, לא קיים x כך ש- $x^t U x \neq 0$, ולכן $h_1(x) = h_2(x)$ לכל x .

4.5.3 על תבניות ריבועיות

ניתן הגדרה קצרה מהקורס אלגברה ליניארית 2: אם U מרחב וקטורי, \mathbb{F} שדה, אזי:

הגדרה 4.35 אם $f : U \times U \rightarrow \mathbb{F}$ היא תבנית ביליניארית, אזי הפונקציה $q : U \rightarrow \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $q(v) = f(v, v)$ נקראת **התבנית הריבועית** שמתאימה ל- f .

בסעיפים הקודמים דיברנו על התבנית הריבועית $x^t V x$ כאשר V היא מטריצה. אמרנו שהתבנית לא קובעת את המטריצה. כדוגמה לכך, נתבונן במטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. מתקיים:

$$x^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + x^1 x^2$$

$$x^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + x^2 x^1$$

$$x^t \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \frac{1}{2} x^1 x^2 + \frac{1}{2} x^1 x^2$$

קיבלנו אותה תוצאה בדיוק בשלושת המקרים ולכן שלושת המטריצות קובעות את אותה תבנית ריבועית.

טענה 4.36 מטריצות U ו- V קובעות את אותה תבנית ריבועית אם"ם לכל i, j : $V_{ij} + V_{ji} = U_{ij} + U_{ji}$

ההוכחה הושארה כתרגיל, אך ניתן "רמז": $x^t V x = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x^i x^j V_{ij}$

כעת, נמשיך בדיון:

תהי $V \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ונביט בתבנית הריבועית $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^t V x$. נסמן:

$$f(x) = V_{11}(x^1)^2 + V_{22}(x^2)^2 + (V_{21} + V_{12})x^1 x^2 = A(x^1)^2 + 2Bx^1 x^2 + C(x^2)^2$$

כאשר $A = V_{11}$, $B = \frac{V_{21} + V_{12}}{2}$, $C = V_{22}$

האם f מקבלת ערך קיצון באפס? אם כן, מינימום או מקסימום?

לפני שנענה על שאלה מרגשת זו,

4.5.4 דוגמאות בנוגע לתבניות ריבועיות

$$f(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 \quad (1)$$

f מקבלת מינימום באפס. מדוע? כי $f(0) = 0$, ולכל $x \neq 0$, $f(x) = \|x\|^2 > 0$.

$$g(x) = (x^1)^2 - (x^2)^2 \quad (2)$$

אפס איננו מינימום, ואיננו מקסימום. לא רק במובן הגלובלי, אלא גם במובן הלוקאלי.

כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ נמצא y, z כך ש $\|z\| < \varepsilon$, $\|y\| < \varepsilon$ כך ש- $g(y) < 0$, $g(z) > 0$.

ניקח $z = \frac{\varepsilon}{2} \cdot e_1$, $y = \frac{\varepsilon}{2} \cdot e_2$, ואז, $g(z) = \frac{\varepsilon^2}{4}$, $g(y) = -\frac{\varepsilon^2}{4}$. כדרוש.

איך נראה הגרף של g בסביבת 0? g מקבלת **אוכף** ב-0.

הגדרה 4.37 אוכף

אם קיימים שני כיוונים l_1, l_2 כך שהפונקציה במשתנה אחד $u(t) = g(t \cdot l_1)$ מקבלת מקסימום באפס, והפונקציה $w(t) = g(t \cdot l_2)$ מקבלת מינימום באפס, אז אפס היא נקודת אוכף.

$$h(x) = 2x^1x^2 \quad (3)$$

h מקבלת אוכף באפס. מדוע? נביט בכיוונים $l_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $l_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ונקבל:

$$u(t) = h(l_1 \cdot t) = 2 \frac{t}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{2}} = t^2, \quad w(t) = h(l_2 \cdot t) = 2 \frac{t}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-t}{\sqrt{2}} = -t^2$$

u מקבלת מינימום באפס, ו- w מקבלת מקסימום באפס, ולכן h מקבלת אוכף באפס.

4.5.5 קצת משפטים על תבניות ריבועיות

משפט 4.38 תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה $f(x) = A(x^1)^2 + 2Bx^1x^2 + C(x^2)^2$.

ותהי $\Delta = AC - B^2$ הדיסקרימיננטה. אז,

• אם $\Delta > 0$ אז f מקבלת נקודת קיצון באפס.

• אם $\Delta < 0$ אז f מקבלת נקודת אוכף באפס.

כאשר $\Delta > 0, A > 0$, זוהי נקודת מינימום.

כאשר $\Delta > 0, A < 0$, זוהי נקודת מקסימום.

הוכחה: בסגנון אלגברה ליניארית. ראוי לציין שנועם אמר שהיא לא תופיע במבחן בגלל זה.

תהי $V = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ אז $f(x) = x^t V x$. (זה יוצא מחישוב ישיר).

V מטריצה סימטרית, ולכן היא ניתנת לליכסון אורתוגונלי. כלומר קיימת אלכסונית $W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ומטריצה

אורתונורמלית $(PP^t = I)$ כך ש- $V = P^t W P = P^{-1} W P$.

יהי $y = P x$. אז, ונסמן $y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$ כמובן

$$f(x) = x^t V x = x^t P^t V P x = y^t W y = \lambda_1 (y^1)^2 + \lambda_2 (y^2)^2$$

וכעת, (נזכור שהדטרמיננטה היא אינווריאנט ליחס הדמיון)

$$\lambda_1 \lambda_2 = |W| = |V| = AC - B^2 = \Delta$$

ועכשיו,

• אם $\Delta > 0$:

אז $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, כלומר יש ל λ_1, λ_2 את אותו הסימן.

נניח $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. אז לכל $x \neq 0$, $f(x) = \lambda_1(y^1)^2 + \lambda_2(y^2)^2 > 0$ ולכן אפס היא נק' מינימום.

מצד שני, אם $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, אז לכל $x \neq 0$, באותו האופן: $f(x) = \lambda_1(y^1)^2 + \lambda_2(y^2)^2 < 0$ ולכן אפס היא נק' מקסימום.
 • אם $\Delta < 0$:

אז ל λ_1, λ_2 סימנים שונים. בה"כ, נניח $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. ונזכור ש- $f(x) = \lambda_1(y^1)^2 + \lambda_2(y^2)^2$. בכיוון y^1 , אפס היא נקודת מקסימום, ובכיוון y^2 אפס היא נקודת מינימום. ולכן אפס היא נקודת אוכף.

• נותר לוודא שכאשר $\Delta > 0$, הסימן של A קובע אם זו נק' מינימום או מקסימום, וזה הושאר כתרגיל.

נשים לב לשתי עובדות פשוטות על תבניות ריבועיות:

טענה 4.39 אם f תבנית ריבועית, אז לכל $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$ מתקיים $f(tx) = t^2 f(x)$.

הוכחה: מכיוון שזוהי תבנית ריבועית, היא מקיימת את תכונותיה של תבנית ביליניארית שנסמנה $g(u, v)$:

$$f(tx) = g(tx, tx) = t \cdot t \cdot g(x, x) = t^2 f(x)$$

(לא הוכחנו זאת בהרצאה, אבל כללתי כאן הוכחה בכל מקרה).

טענה 4.40 אם f תבנית ריבועית שמקבלת מינימום חזק באפס, אז $\inf\{f(x) : \|x\| = 1\} > 0$

אם f תבנית ריבועית שמקבלת מקסימום חזק באפס, אז $\sup\{f(x) : \|x\| = 1\} < 0$

הוכחה: נניח f מקבלת מינימום באפס. אז $W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, כאשר $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. (בסימונים וכתוצאה מהמשפט האחרון). בה"כ, נניח $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$.

נניח $\|x\| = 1$. כזכור, סימנו $y = Px$. אז $\|y\| = 1$. (למה?..) וכעת,

$$f(x) = \lambda_1(y^1)^2 + \lambda_2(y^2)^2 \geq \lambda_2(y^1)^2 + \lambda_2(y^2)^2 = \lambda_2((y^1)^2 + (y^2)^2) = \lambda_2\|y\|^2 = \lambda_2$$

ולכן,

$$\inf\{f(x) : \|x\| = 1\} \geq \lambda_2 > 0$$

מסקנה:

תהי f תבנית ריבועית המקבלת מינימום חזק באפס, אז קיים $\lambda > 0$ כך שלכל $t > 0$,

$$\inf\{f(x) : \|x\| = t\} \geq \lambda t^2$$

4.6 מיון של נקודות קריטיות

4.6.1 הקשר בין הנגזרת השניה לבין נקודות קריטיות

ראשית, תזכורת קצרה: תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ונניח f גזירה פעמיים ב- x_0 .

אם $f'(x_0) \neq 0$, אז אין נק' קיצון ב- x_0 .

אם $f'(x_0) = 0$:

אם $f''(x_0) > 0$ אז יש מינימום

אם $f''(x_0) < 0$ אז יש מקסימום

אם $f''(x_0) = 0$ אז אין מספיק מידע.

נרצה לדעת - מה קורה ב- \mathbb{R}^2 ?

משפט 4.41 תהי $x_0 \in \mathbb{R}^2$, U סביבה של x_0 , ו- $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים ב- x_0 .

נסמן $\lambda = \nabla f(x_0)$ וב- V את מטריצת הנגזרות השניות החלקיות ב- x_0 .

נסמן: $C = \frac{1}{2}V_{22}$, $A = \frac{1}{2}V_{11}$, $B = \frac{1}{4}(V_{12} + V_{21})$.

כמו כן נסמן: $\Delta = AC - B^2$. אז,

א. אם $\lambda \neq 0$ אז x_0 אינה נקודה קריטית (=היא לא מינימום\מקסימום\אוכף).

ב. אם $\lambda = 0$,

(i) אם $\Delta > 0$ אז x_0 נקודת קיצון.

(ii) אם $\Delta < 0$ אז x_0 נקודת אוכף.

(iii) אם $\Delta = 0$ אז הכל יכול לקרות.

הוכחה: נוכיח תחילה את **א.**

אם $\lambda \neq 0$, יהי $l = \frac{\lambda}{\|\lambda\|}$. ואז,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + lt) - f(x_0)}{t} = \lambda \cdot l = \|\lambda\| > 0$$

ובפרט, עבור $|t|$ קטן מספיק, מתקיים ש- $\frac{f(x_0 + lt) - f(x_0)}{t} > 0$.

וכעת, אם $0 < t$ וקטן מספיק, אז $f(x_0 + lt) > f(x_0)$.

ואם $t < 0$ וקטן מספיק בערכו המוחלט, אז $f(x_0 + lt) < f(x_0)$.

כעת, ראינו ש- x_0 היא איננה נק' מינימום ואיננה נק' מקסימום. אך **מדוע היא גם אינה נק' אוכף?**

קיימים רק שני וקטורי יחידה l_0 ו- l_1 שעבורם $\lambda \cdot l_0 = \lambda \cdot l_1 = 0$, והם מקיימים $l_0 = -l_1$.

(למעשה אלו הם הכיוונים הניצבים ל- λ , כי אנו ב- \mathbb{R}^2).

מדוע זה נכון? נביט במשוואה $\lambda l = 0$. כלומר $\lambda_1 l^1 + \lambda_2 l^2 = 0$.

כל הפתרונות של המשוואה הם מהצורה $l = \alpha(\lambda_2, -\lambda_1)$, ולכן ישנם שני פתרונות מנורמה 1.

(α הוא סקלר קבוע ב- \mathbb{R} כלשהו).

כעת, אם $l \neq l_0$ וגם $l \neq l_1$, אז מהשיקול שראינו קודם, $g(t) = f(x_0 + lt)$ לא מקבלת לא מינימום ולא מקסימום ב-0. אבל בשביל ש- x_0 תהיה נקודת אוכף אנחנו צריכים שני כיוונים שבאחד יהיה מינימום ובשני יהיה מקסימום.

פה נגמרה ההוכחה של א', ייתכן שדרוש עוד הסבר?

נוכיח את ב.:

נניח כעת ש- $\lambda = 0$. בה"כ, נניח $f(x_0) = 0$, $x_0 = 0$.

(למה זה בה"כ? נגדיר $g(x) = f(x_0 + x) - f(x_0)$. אז $g(0) = 0$, וכמו כן g מקבלת מינימום\מקסימום\אוכף ב-0 אם f מקבלת מינימום\מקסימום\אוכף ב- x_0).

אז תהי

$$h(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t V(x - x_0) = \frac{1}{2}x^t Vx =$$

כלומר h הוא תבנית ריבועית כפול סקלר. השיון האחרון הוא בגלל ההנחות שעשינו. ונסמן:

$$= Ax^1)^2 + 2Bx^1x^2 + C(x^2)^2$$

ואנו יודעים ש- h היא קירוב ריבועי של f , כלומר

$$\lim_{x \rightarrow x_0=0} \frac{f(x) - h(x)}{\|x\|^2} = 0$$

(i) אם $\Delta > 0$.

ראשית, נניח $\Delta > 0$, $A > 0$.

אז קיים $\zeta > 0$ כך ש- $\inf\{h(x) : \|x\| = 1\} = \zeta > 0$. (לפי טענה קודמת).

כמו כן, לכל $t \in \mathbb{R}$ ולכל $x \in \mathbb{R}^2$, $h(tx) = t^2 h(x)$.

לכן, לכל $x \in \mathbb{R}^2$, $h(x) \geq \zeta \|x\|^2$.

ועכשיו, מכיוון ש- h הוא קירוב ריבועי של f , אז מהגבול שרשמנו למעלה עקב כך, נקבל שקיים $\delta > 0$ כך שלכל x שעבורו $\|x\| < \delta$, מתקיים:

$$\left| \frac{f(x) - h(x)}{\|x\|^2} \right| < \frac{\zeta}{2}$$

כלומר $|f(x) - h(x)| < \frac{\zeta}{2} \|x\|^2$. ומאי שיון המשולש, נקבל (עבור $x \neq 0$):

$$f(x) \geq h(x) - |f(x) - h(x)| \geq \zeta \|x\|^2 - \frac{\zeta}{2} \|x\|^2 = \frac{\zeta}{2} \|x\|^2 > 0$$

קיבלנו, שלכל $x \neq 0$ המקיים $\|x\| < \delta$, מתקיים $f(x) > 0 = f(0) = f(x_0)$. ולכן 0 הוא מינימום מקומי של הפונקציה f .

שנית, נניח $\Delta > 0$, $A < 0$. אז באותו האופן בדיוק רואים ש-0 היא מקסימום מקומי.

(ii) אם $\Delta < 0$

במקרה זה 0 היא נקודת אוכף של h . כלומר קיימים כיוונים l_1, l_2 כך ש-
 $h(l_1) = h(-l_1) > 0$
 $h(l_2) = h(-l_2) < 0$

ולמה $h(l_i) = h(-l_i)$? כי מתכונות התבנית הריבועית, $h(-l_i) = (-1)^2 h(l_i) = h(l_i)$.

נסמן: $\eta_1 = h(l_1) > 0$, $\eta_2 = h(l_2) < 0$.

ונראה שהפונקציה: $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g_1(t) = f(tl_1)$ מקבלת מינימום באפס,

וגם שהפונקציה: $g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g_2(t) = f(tl_2)$ מקבלת מקסימום באפס.

מכאן נדע שאפס היא נקודת אוכף של f .

לכל t , מתקיים: $h(tl_1) = t^2 h(l_1) = \eta_1 t^2$.

ואנחנו יודעים ש- h היא קירוב ריבועי של f . ולכן קיים $\delta > 0$ כך שאם $|t| < \delta$, אז

$$\frac{\eta_1}{2} > \left| \frac{f(tl_1) - h(tl_1)}{t^2} \right|$$

כלומר, $|g_1(t) - h(tl_1)| < \frac{\eta_1}{2} t^2$. אז לכל $|t| < \delta$,

$$g_1(t) \geq h(tl_1) - |h(tl_1) - g_1(t)| \geq \eta_1 t^2 - \frac{\eta_1}{2} t^2 > 0$$

ולכן g_1 מקבלת מינימום באפס.

באותו אופן, g_2 מקבלת מקסימום באפס. ולכן 0 נקודת אוכף של f .

תרגיל: אם $\Delta = 0$, הראו שיתכנו מקסימום, מינימום ואוכף. (לא הוכחנו בכיתה).

4.6.2 מה קורה כאשר $d \geq 3$? (על קצה המזלג)

תהי $V \in M_{d \times d}$ ונביט בתבנית הריבועית $f(x) = x^t V x = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x^i x^j V_{ij}$.

ונניח ש- V מטריצה סימטרית. (הרי כל תבנית ריבועית ניתנת לייצוג ע"י מטריצה סימטרית...)

אנחנו רוצים לדעת אם f מקבלת נק' קיצון באפס.

V סימטרית, ולכן ניתנת לליכסון אורתוגונלי, ובפרט, קיימת $W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$ אלכסונית ו- P אורתונורמלית, כך

ש- $V = P^t W P$.

נבחר $x \in \mathbb{R}^d$, ונסמן $y = Px$, אז,

$$f(x) = x^t V x = x^t P^t W P x = y^t W y = \sum_{i=1}^d (y^i)^2 \lambda_i$$

ולכן, אם $\lambda_i > 0$ לכל i , אז 0 היא נק' מינימום.

אם $\lambda_i < 0$ לכל i , אז 0 היא נק' מקסימום.

אחרת, אפס איננה נק' מינימום ואיננה נק' מקסימום.

4.7 מסילות וכלל השרשרת

4.7.1 מסילות: הגדרה, כמה דוגמאות, והגדרת הגזירות של מסילה בנקודה

הגדרה 4.42 מסילה d -מימדית היא פונקציה רציפה מ- \mathbb{R} (או מקטע ב- \mathbb{R}) ל- \mathbb{R}^d . (רציפה, במובן של כל אחד מהרכיבים רציף).

דוגמאות:

1. $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ המוגדרת ע"י $\gamma(t) = t \cdot l$ כאשר l הוא וקטור כיוון ב- \mathbb{R}^d . זהו בעצם ישר אינסופי העובר דרך וקטור הכיוון.

2. $\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. זוהי מסילה שהיא למעשה מעגל היחידה.

3. $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. זהו "קפיץ" שכזה, כלומר מעגל היחידה, כמו קודם, אבל הוא מתקדם יחד עם t ולכן יוצר צורה של קפיץ.

הגדרה 4.43 מסילה היא גזירה בנק' t אם כל אחד מהרכיבים שלה גזיר ב- t .

טענה 4.44 תהי $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ רציפות שתיהן, ונגדיר $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $g(t) = f(\gamma(t))$. אז רציפה g .

הוכחה: לא הספקנו להוכיח את זה. ■

4.7.2 כלל השרשרת

משפט 4.45 תהי $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ מסילה גזירה ב- t_0 . נסמן: $x_0 = \gamma(t_0)$.

ותהי $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ב- x_0 .

יהיו $\alpha = \gamma'(t_0)$ ו- $\lambda = \nabla f(x_0)$ (כמו ב- \mathbb{R}^d).

נסמן: $g(t) = f(\gamma(t))$. אז גזירה ב- t_0 , ונגזרתה היא $\alpha \cdot \lambda = \sum_{i=1}^d \alpha^i \cdot \lambda^i$.

הוכחה: נסמן: $u = \alpha \cdot \lambda$.

אנו רוצים להראות ש-

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h} = u \Leftrightarrow \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{g(t_0 + h) - g(t_0) - uh}{h} = 0$$

אז, קיים δ' כך שאם $x \in \mathbb{R}^d$ מקיים $\|x - x_0\| < \delta'$ אז $\left| \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

(כי $\lambda = \nabla f(x_0)$).

כמו כן קיים δ כך שאם $\|h\| < \delta$, אז

$$\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) - \alpha h\| < \frac{\varepsilon|h|}{2\|\lambda\|}$$

זה נכון כי $\alpha = \gamma'(t_0)$, פשוט כפלנו ב- $|h|$ את ההגדרה. כמו כן נדרוש ש- δ יהיה קטן מספיק כך ש-

$$\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\| < \delta'$$

קיים כזה, כי גזירה ב- t_0 ובפרט רציפה שם. (לדעתך).

אנו רוצים לדעת, מה ניתן לומר על $g(t_0 + h) - g(t_0) - uh$ כאשר $|h| < \delta$?

ראשית נסמן: $y = \gamma(t_0 + h) - x_0$.

ואז, $\|y - \alpha h\| \leq \varepsilon|h|$ ולכן אם נדרוש ש- $\varepsilon < \alpha$, מתקיים $\|y\| \leq 2|h| \cdot \|\alpha\|$. (לא ברור לי מה הולך פה).

נחשב:

$$g(t_0 + h) - g(t_0) - uh = f(\gamma(t_0 + h)) - f(x_0) - \lambda \cdot \alpha \cdot h = f(x_0 + y) - f(x_0) - \lambda \cdot \alpha \cdot h =$$

$$= f(x_0 + y) - f(x_0) - \lambda \cdot y - \lambda \cdot (\alpha \cdot h - y)$$

ולכן, (נוסיף ערך מוחלט ונשתמש בא"ש המשולש):

$$|g(t_0 + h) - g(t_0) - uh| \leq |f(x_0 + y) - f(x_0) - \lambda \cdot y| + |\lambda \cdot (\alpha \cdot h - y)| \leq$$

זהו קטן מהביטוי הבא: המחובר השמאלי הוא כי $y < \delta'$ (כנראה), והימני הוא שימוש בא"ש קושי-שוורץ.

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \|y\| + \|\lambda\| \cdot \frac{\varepsilon|h|}{2\|\lambda\|} = \frac{\varepsilon}{2} \|y\| + \frac{\varepsilon}{2} |h| \leq$$

ולפי מה שראינו קודם ($\|y\| \leq 2|h| \cdot \|\alpha\|$), זה חסום ע"י:

$$\leq |h| \cdot \varepsilon \cdot (\|\alpha\| + 1)$$

ואם נחלק ב- $|h|$, קיבלנו:

$$\left| \frac{g(t_0 + h) - g(t_0) - uh}{h} \right| \leq \varepsilon \cdot (\|\alpha\| + 1)$$

אבל $(\|\alpha\| + 1)$ הוא קבוע, וזה נכון לכל ε , ולכן הביטוי הזה שואף לאפס, כנדרש. נשים לב: הנחנו ש- $\lambda \neq 0$ כאשר חילקנו ב- $\|\lambda\|$ קודם. המקרה שבו $\lambda = 0$ לא הוכח: "לא בחומר הקורס".



4.7.3 טענות מהתרגול - לגבי נקודות קריטיות

מכיוון שיש קצת בלאגן בנושא האחרון, מצורפות כמה טענות מהתרגול שעוזרות לפתרון תרגילים. זה למעשה מעין סיכום של המשפטים בחלק האחרון שלמדנו, לצורה פרקטית ושימושית. הטענות הובאו כמו שהן, ללא הוכחה.

הגדרה 4.46 נקודה קריטית

תהי $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$). נקודה $(x_0, y_0) \in D$ תקרא נקודה קריטית אם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:

1. f גזירה לפי שני המשתנים ב- (x_0, y_0) ומתקיים $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ וגם $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

2. לפחות אחת מבין הנגזרות החלקיות של f לא קיימת ב- (x_0, y_0) .

משפט 4.47 "מטריצת הסיאן" (Hessian)

תהי $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר שני.

נניח כי $\bar{x}_0 \in D$ היא נקודה קריטית. אז,

1. אם $\det \begin{pmatrix} f''_{xx}(\bar{x}_0) & f''_{xy}(\bar{x}_0) \\ f''_{yx}(\bar{x}_0) & f''_{yy}(\bar{x}_0) \end{pmatrix} > 0$ וגם $f''_{xx}(\bar{x}_0) < 0$ אזי \bar{x}_0 נק' מקסימום מקומית.

2. אם $\det \begin{pmatrix} f''_{xx}(\bar{x}_0) & f''_{xy}(\bar{x}_0) \\ f''_{yx}(\bar{x}_0) & f''_{yy}(\bar{x}_0) \end{pmatrix} > 0$ וגם $f''_{xx}(\bar{x}_0) > 0$ אזי \bar{x}_0 נק' מינימום מקומית.

3. אם $\det \begin{pmatrix} f''_{xx}(\bar{x}_0) & f''_{xy}(\bar{x}_0) \\ f''_{yx}(\bar{x}_0) & f''_{yy}(\bar{x}_0) \end{pmatrix} < 0$ וגם $f''_{xx}(\bar{x}_0) > 0$ אזי \bar{x}_0 נק' אוכף.

...ונגמר הקורס! (: