חשבון אינפיניטסימלי 1

סיכם: נריה אור

זהו סיכום הגדרות ומשפטים חשובים. גירסא סופית.

(אלא אם כן חס וחלילה יבוא מועד ב').

מסוכם **חלק** מהחומר, עד כמה שהספקתי ועד כמה שנראה לי רלוונטי לסכם.

מבוסס על הרצאות מפי פרופ' עזריאל לוי ותרגולים עם אלון פינטו.

אין המרצים אחראים לתוכן הסיכום או קשורים אליו בשום אופן.

חלק מההוכחות בפרק הפונקציות עברו אדפטציה מהסיכום הנהדר של דינה ז"ל - מזל שהוא קיים!

תוכן עניינים

1 דברים שכדאי לזכור.

1.1 אלגברה

1.1.1 אי שויון המשולש: $|a+b| \leq |a| + |b|$

1.1.2 אי שויון המשולש השני: $|a-b| \geq ||a| - |b||$

הוכחה: מושארת לקורא...

1.1.3 אי שויון ברנולי

לכל $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ (ייתכן שגם $n \in \mathbb{Z}$, לפי ויקיפדיה?!) ולכל $a \geq -1$, $a \in \mathbb{R}$:
מתקיים $(1+a)^n \geq 1 + na$
(ההוכחה באינדוקציה).

1.1.4 נוסחא להתמודדות עם ביטויים ממעלה שלישית

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ("מה, לא למדתם בתיכון?!")

1.2 $\overline{\mathbb{R}}$ - מה לא מוגדר בגבולות.

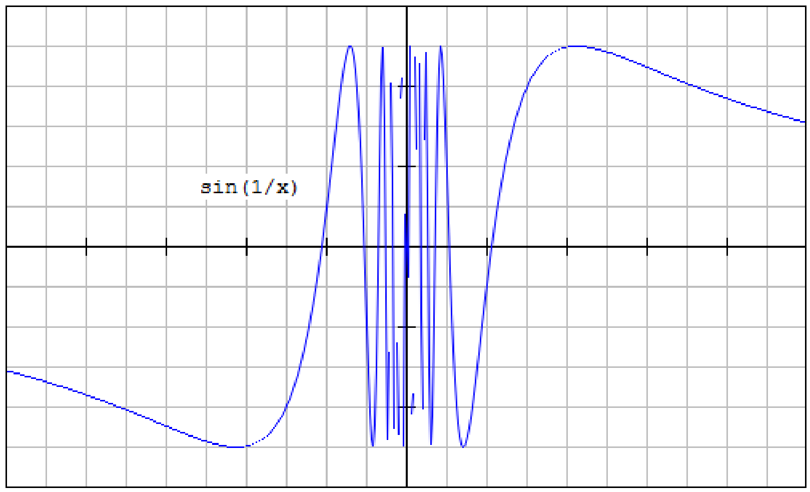
הגדרה: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.
יהי $u \in \overline{\mathbb{R}}$.
<u>לא מוגדרות הפעולות:</u>

- $\infty + (-\infty)$ וגם $(-\infty) + \infty$.
- $0 \cdot \infty$ וגם $\infty \cdot 0$ לא מוגדר, כאשר מדובר ב־0 של גבול, כלומר בשאיפה. ברור ש־0 רגיל זה בסדר.
- $\frac{1}{0}$ (אפס של גבולות) לא מוגדר. אם זה 0^+ אז זה ∞, ואם 0^- אז זה $-\infty$.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{u}{0}$.

1.3 דוגמאות נגד נפוצות

- $\frac{1}{n} \to 0$ תמיד, תמיד, תמיד זה בא כדוגמא נגדית בסדרות.
- $f(x) = sin(\frac{1}{x})$ מתנדנדת אינסוף פעמים ככל שהיא מתקרבת ל־0. לכן אין לה גבול שם.

  ולכן היא לא גזירה שם ולא רציפה שם.



יחד עם זאת, $x \cdot sin(\frac{1}{x})$ מתכנסת ל־0 בנקודה $x = 0$.

(אפשר לפי סדרות, sin חסומה ו־$x \to 0$ ולכן מכפלה של חסומה באפס זה אפס).

- פונקציית **דיריכלה:** $D(x) = \begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Q} \\ 1 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

  פונקציה זו אינה רציפה באף נקודה, כי כל הנקודות שבה הן אי־רציפות מסוג שני.
- פונקציית **רימן:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x\in\mathbb{Q},\ x=\frac{p}{q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

  לפונקציה זו מתקיים שלכל $x_0 \in \mathbb{R}$, $lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

  כמו כן פונקציה זו רציפה בכל $x \notin \mathbb{Q}$ (כי שם הגבול שווה לערך הפונק').

1.4 נגזרות של פונקציות חשובות

חשוב לדעת לקראת המבחן ־ מניחים שאנחנו יודעים את זה. כמו כן כדאי לוודא שיודעים להשתמש בנוסחא לחישוב נגזרת של פונקציה הפוכה כללית, זה עוזר.

- $(log_c x)' = \frac{1}{x \cdot ln(c)}\ ,\ c > 0,\ c \neq 1$
- $(sin(x))' = cos(x)$

- $(cos(x))' = -sin(x)$
- $(tan(x))' = \frac{1}{cos^2(x)}$
- $(arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$
- בעיקר אסור לשכוח את הפונקציה **כמוסינוס**, שהיא כמו סינוס. ^_^

1.5 אתרים מומלצים לתלמידי שנה א' האומללים

- http://rechneronline.de/function-graphs/
  שרטטן גרפים.
- http://wims.unice.fr/wims/en_home.html
  מחשבון פונקציות, חיבור\כפל מטריצות וכו'. מומלץ בחום.

2 בסיס

לא סיכמתי את כל מה שנלמד בנושא זה, כי פשוט אין טעם.

2.1 אקסיומות השדה

כפי שכל מי שלומד אלגברה ליניארית יודע, $\mathbb{R}$ הוא שדה, כלומר שתי חבורות קומוטטיביות שקשורות בחוק הדיסטריביוטיביות. בנוסף מגדירים $1 \neq 0$.

־־ובשפת בני אנוש:

2.1.1 האקסיומות הבסיסיות

$\mathbb{R}$ היא חבורה קומוטטיבית לחיבור. מתקיים: **(אקסיומות החיבור)**

1. **<u>אסוציאטיביות</u>** (קיבוץ): $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ מתקיים: $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. **<u>איבר ניטרלי:</u>** <u>$\forall a \in \mathbb{R}$</u> מתקיים: $a + 0 = 0 + a = a$
3. **<u>איבר נגדי:</u>** $\forall a \in \mathbb{R}$ קיים איבר $a' \in \mathbb{R}$ כך ש: $a + a' = a' + a = 0$ ונסמנו $(-a)$ בהמשך.
4. **<u>קומוטטיביות</u>**: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים: $a + b = b + a$.

$\mathbb{R}$ היא חבורה קומוטטיבית גם לכפל. מתקיים: **(אקסיומות הכפל)**

1. **<u>אסוציאטיביות</u>** (קיבוץ): $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ מתקיים: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
2. **<u>איבר יחידה:</u>** <u>$\forall a \in \mathbb{R}$</u> מתקיים: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
3. **<u>איבר הופכי:</u>** <u>$\forall a \in \mathbb{R}$</u> קיים איבר $a' \in \mathbb{R}$ כך ש: $a \cdot a' = a' \cdot a = 0$ ונסמנו a^{-1} או $\frac{1}{a}$ בהמשך.
4. **<u>קומוטטיביות</u>**: $\forall a,b \in \mathbb{R}$ מתקיים: $a \cdot b = b \cdot a$.

<u>אקסיומות הקשר בין החיבור לכפל:</u>

1. **<u>חוק הדיסטריביוטיביות</u>** (פילוג): $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ מתקיים: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
2. $0 \neq 1$.

2.1.2 אקסיומות הסדר

1. אי רפלקסיביות: $a \not< a$
2. טרנזיטיביות: אם $a < b$ ו־ $b < c$ אז $a < c$.
3. השוואה: לכל a,b או ש־$a = b$ או $a < b$ או $b < a$. לא ייתכנו שניים יחדיו.

2.1.3 אקסיומות הקשר בין הסדר לפעולות האריתמטיות

1. אם $a < b$ אז $a + c < b + c$.
2. אם $a < b$ ו־$c > 0$ אז $ac < bc$.

2.2 מספרים טבעיים

2.2.1 קבוצה אינדוקטיבית

קבוצה A תיקרא אינדוקטיבית אם:

1. $1 \in A$
2. לכל $n \in A$ גם $n + 1 \in A$.

נציין שתכונה של מספרים ממשיים נקראת תכונה אינדוקטיבית,

אם 1 הוא בעל תכונה זאת, וגם אם n הוא בעל התכונה אז $n + 1$ הוא בעל התכונה גם כן.

2.2.2 הגדרה: מספר טבעי

מספר ממשי x ייקרא טבעי אם הוא נמצא **בכל קבוצה אינדוקטיבית**.
נסמן את המספרים הטבעיים ב־$\mathbb{N}$.

2.2.3 משפט האינדוקציה

אם P היא תכונה אינדוקטיבית, אז כל מספר טבעי הוא בעל התכונה P.

הוכחה:

תהי A קבוצת המספרים הטבעיים בעלי התכונה P. נראה כי A קב' אינדוקטיבית.

$1 \in A$ כי $1 \in \mathbb{N}$ בעל התכונה P.

אם $n \in A$ אז לפי הגדרת A, n הוא טבעי בעל התכונה P.

מכיוון ש־n הוא טבעי, גם $n+1$ טבעי, ומכיוון ש־P אינדוקטיבית, גם $n+1$ הוא בעל התכונה P.

ולכן $n+1 \in A$. ולכן, כל מספר טבעי נמצא ב־A ולכן כל טבעי הוא בעל התכונה P.

2.3 מיני\מקסימומים, חסמים, ושאר ירקות.

2.3.1 הגדרה: מינימום\מקסימום

- אם $x \in A$ כך שלכל $y \in A$ קיים $x \leq y$ אז x נקרא **המינימום** של A.
- אם $x \in A$ כך שלכל $y \in A$ קיים $y \leq x$ אז x נקרא **המקסימום** של A.

הערות: (ללא הוכחה)

- אם x, z הם מינימום של A אזי $x \leq z$ וגם $z \leq x$ ולכן, $x = z$ וכך גם למקסימום.
- ל־$\emptyset$ אין מינימום ומקסימום.
- לקבוצה סופית לא ריקה יש תמיד מינימום ומקסימום.
- לקבוצה אינסופית לא ריקה, לא בהכרח קיימים מינימום ומקסימום.

2.3.2 משפט המינימום ("סדר טוב")

לכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים יש מינימום. סדר כזה נקרא סדר טוב.

הוכחה:

תהי $A \neq \emptyset$ קב' של טבעיים. נוכיח באינדוקציה על n שאם A מכילה מספר טבעי $k \leq n$ אז יש ל־A מינימום.

עוגן האינדוקציה: אם ישנו ב־A מספר טבעי $k \leq 1$ אז יש ב־A מינימום.

הוכחת העוגן: יהי $k \in A$, $k \leq 1$. מכיוון ש־k טבעי, $k \geq 1$. ולכן $k = 1$. ולכן $1 \in A$. ו־1 הוא המינימום של A כי הוא קטן או שווה לכל מספר טבעי.

הנחת האינדוקציה: אם קיים $k \in A$, $k \leq n$ אז יש ב־A מינימום.

מטרת צעד האינדוקציה: אם קיים $k \in A$, $k \leq n+1$ אז יש ב־A מינימום.

הוכחת צעד האינדוקציה: מקרה א': קיים $k \in A$, $k \leq n$ אז לפי ההנחה יש ל־A מינימום.

מקרה ב': לכל $k \in A$ מתקיים $n \nleq k$ כלומר, $n > k$. ולכן (לפי משפט...) כל k כזה יקיים $k \geq n+1$.

כעת, קיים $k \in A$, $k \leq n+1$ לפי ההנחה. זה עתה ראינו ש־$k \geq n+1$ כי כל איברי $A \leq n+1$.

ולכן $k = n+1$ ולכן $n+1 \in A$. ומכיוון שכל איברי $A \leq n+1$, $n+1$ הוא מינימום של A.

2.3.3 הגדרה: חסם מלעיל\מלרע

תהי A קבוצה סדורה, ו־$B \subseteq A$.

- איבר $x \in A$ נקרא **חסם מלעיל** (או סתם "חסם") של B אם $x \leq y$ לכל $y \in B$.
- איבר $x \in A$ נקרא **חסם מלרע** של B אם $x \geq y$ לכל $y \in B$.
- B נקראת חסומה מלעיל (או "חסומה") אם יש לה חסם מלעיל.
- B נקראת חסומה מלרע אם יש לה חסם מלרע.

הערה: אם $x \in B$ ו־ x הוא חסם מלעיל של B אז x הוא המקסימום של B. (כנ"ל למינימום).

2.3.4 משפט: לכל קבוצה לא ריקה של טבעיים החסומה מלעיל ע"י מספר טבעי, יש מקסימום.

הוכחה: תהי A קבוצה לא ריקה של טבעיים החסומה מלעיל ע"י מספר טבעי.

תהי B קבוצת כל המספרים הטבעיים שהם חסמים מלעיל של A.

לפי ההנחה, $B \neq \emptyset$. לכן לפי משפט המינימום, יש ל־B מינימום n. נראה כי n זה הוא המקסימום של A.

אם $n \in A$ אז הוא המקסימום של A כי הוא גם ב־A וגם חסם של A.

לכן נותר המקרה שבו $n \notin A$. נשלול מקרה זה ע"י סתירה.

יהי $k \in A$ כלשהו. מכיוון ש־$n \notin A$, אז בגלל ש־n חסם, $n \geq k$ ומכיוון ש $n \notin A$, $n > k$.

ובמיוחד $n > 1$. כעת, כל איבר $k \in A$ מקיים $k < n$ ולכן $k \leq n-1$ (לפי משפט...).

$n-1$ טבעי כי $n > 1$ ולכן $n-1$ גם כן חסם מלעיל של A, ולכן $n-1 \in B$.

$n-1 < n$ וזאת בסתירה לכך ש־n הוא המינימום של B.

2.4 מעבר לטבעיים: צפיפות, אינסופיות וכו'

2.4.1 הגדרה: מספר שלם, מספר רציונלי

- x נקרא מספר שלם אם x טבעי, או $x = 0$, או $-x$ טבעי.
- מספר ממשי נקרא רציונלי אם הוא מהצורה $\frac{k}{l}$ כאשר $l, k \in \mathbb{Z}$, וגם $l \neq 0$.

2.4.2 משפט: צפיפות הרציונליים

קבוצת הרציונליים היא צפופה (בתוך עצמה).

כלומר, לכל שני רציונליים $r < s$ קיים רציונלי t כך ש $r < t < s$.

הוכחה:

מכיוון ש־$r < s$ אזי $\frac{r}{2} < \frac{s}{2}$ ולכן,

$r = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} < \frac{r}{2} + \frac{s}{2} < \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = s$

2.4.3 אקסיומת ארכימדס

אין מספרים ממשיים אינסופיים.

2.4.4 משפט: לא קיים רציונלי $r > 0$ כך ש־ $r^2 = 2$.

הוכחה: נסמן $r = \frac{k}{l}$ כאשר $k, l \in \mathbb{N}$ וזרים.

לכן, נניח בשלילה ש $\frac{k^2}{l^2} = 2$, אז:

$k^2 = 2l^2$ ולכן k זוגי. נסמנו: $k = 2m$, $m \in \mathbb{N}$.

ואז, $k^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2l^2$ ונצמצם:

$2m^2 = l^2$ ולכן l זוגי.

ולכן יש מחלק משותף 2 ל־k, l בסתירה להנחה שהם זרים.

2.4.5 אקסיומת השלמות

אם A, B קבוצות ממשיים לא ריקות ו־ $A \leq B$,

אז קיים ממשי c כך ש: $A \leq c \leq B$.

(ההגדרה של הכתיבה הנ"ל היא ש־ $A \leq B$ אם לכל $a \in A,\ b \in B$ מתקיים $a \leq b$).

2.4.6 חסם עליון, תחתון: sup, inf

- c נקרא חסם עליון של קבוצה A אם הוא חסם מלעיל של A,
  והוא $\geq$ מכל חסם מלעיל של A. כלומר, אם c הוא החסם מלעיל המינימלי של A.

  נסמנו $c = sup(A)$ (יש הקוראים לו $\text{least upper bound} = \text{l.u.b}$).
- c נקרא החסם התחתון של A אם הוא החסם מלרע המקסימלי של A.
  נסמנו $c = inf(A)$.

2.4.7 משפט החסם העליון\תחתון

- לכל קבוצה A של ממשיים לא ריקה וחסומה מלעיל, יש חסם עליון.
- לכל קבוצה A של ממשיים לא ריקה וחסומה מלרע, יש חסם תחתון.

הוכחה: (לחסם העליון)

תהי A קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל, ותהי Bקב' החסמים מלעיל של A.

$B \neq \emptyset$ כי A חסומה מלעיל. ולכן לפי אקסיומת השלמות, קיים $A \leq c \leq B$.

לכל $a \in A$ קיים $a \leq c$ ולכן c חסם מלעיל של A.

כל חסם מלעיל d של A נמצא ב־B ולכן $c \leq d$, ולכן c הוא החסם העליון של A.

ההוכחה לחסם התחתון דומה.

2.4.8 למה לגבי תנאים ל־sup, inf

c הוא החסם העליון של קבוצה A אם"ם:

- c חסם מלעיל של A.
- לכל $w < c$ קיים $a \in A$ כך ש־ $a > w$.

הוכחה:

כיוון ראשון: נניח ש c חסם עליון של A.

אם c הוא החסם העליון של A אז הוא בוודאי חסם מלעיל.

אם $w < c$ אז מכיוון ש־c הוא החסם מלעיל המינימלי, w אינו חסם מלעיל של A.

זה אומר שקיים $a \in A$ שגדול ממנו.

כיוון שני: נניח שמתקיימים שני התנאים הנ"ל.

אם c הוא חסם מלעיל של A המקיים שלכל $w < c$ קיים $a \in A$ כך ש־$a > w$,

אז w כזה אינו חסם מלעיל של A. ולכן, c הוא החסם מלעיל המינימלי, והוא החסם העליון.

אותו דבר לגבי החסם התחתון:

b הוא החסם התחתון של קב' A אם"ם:

- b חסם מלרע של A.
- לכל $w > b$ קיים $a \in A$ כך ש־$a < w$.

2.5 החזקה הממשית (סיכום חלקי ביותר!)

לא סיכמתי את כל המשפטים על חזקות רציונליות\טבעיות.

2.5.1 הגדרת החזקה הממשית

עבור $w \in \mathbb{R} \backslash \{\mathbb{Q}\}$ ו־$a > 1$ נגדיר:

$a^w = sup\{a^r | r \in \mathbb{Q}, r < w\} = inf\{a^r | r \in \mathbb{Q}, r > w\}$.

עבור $0 < a < 1$ נגדיר:

$a^w = inf\{a^r | r \in \mathbb{Q}, r < w\} = sup\{a^r | r \in \mathbb{Q}, r > w\}$

או: $a^w = \frac{1}{(\frac{1}{a})^w}$

הוכחת שיוויון ה־sup, inf הנ"ל לא בסיכום זה.

־־נותר עוד חומר לסכם כאן־־

2.5.2 **לכל** $a \geq 0$ **ו־**$n \geq 2$ **קיים** $b > 0$ **כך ש־** $b^n = a$

נראה יחידות:

יהיו $b, c > 0$, $b^n = c^n = a$. אם $b \neq c$ אזי נניח $b < c$,

ואז $b^n < c^n$ (לפי משפט... כלשהו) ולכן סתירה.

נראה קיום:

ראשית נתבונן בקבוצה: $W = \{x \in \mathbb{R} |\ 0 \leq x,\ x^n < a\}$.

ונראה שהיא חסומה מלעיל:

$W \neq \emptyset$ כי $0 \in W$.

אם $0 < a < 1$: אז לכל $b \geq 1$ קיים $b^n \geq 1$ ולכן $b \notin W$.

ולכן 1 הוא חסם מלעיל של W במקרה זה.

אם $a \geq 1$**:** נראה כי a הוא חסם מלעיל של W:

יהי $x \in W$ ואז $x^n < a \leq a^n$ ולכן, $x < a$.

(כי אם $x \geq a$ אז $x^n \geq a^n$ ־ סתירה).

ולכן קיים חסם מלעיל בכל מקרה. ולכן קיים גם $sup(W)$.

יהי $b = sup(W) = sup\{x \in \mathbb{R} |\ 0 \leq x,\ x^n < a\}$.

נראה כי $b^n = a$ **ונסיים:**

־־תחילה **נשלול את האפשרות** $b^n < a$:

נמצא $r > 1$ כך ש־$(rb)^n < a$ וזאת תהיה סתירה, כי

$rb > b$ ומצד שני, $rb \in W$ ו־b חסם מלעיל של W.

מה אנו רוצים מ־r?

$(rb)^n < a$ כלומר $r^n b^n < a$ כלומר $r^n < \frac{a}{b^n}$.

היות ואנו מטפלים במקרה בו $b^n < a$ אזי $\frac{a}{b^n} > 1$.

למה: יהי $u > 1$ אז קיים $r > 1$ כך ש־$r^n < u$. **(יוכח בסוף).**

לפי הלמה הנ"ל קיים r כזה והגענו לסתירה.

־־נשלול את האפשרות $b^n > a$:

נמצא $c < b$ כך שעדיין $c^n > a$. אבל b הוא החסם העליון של W,

ולכן מכיוון ש־$c < b$ אז הקבוצה W מכילה איבר d הגדול מ־c.

ואז $d^n < a$ ומכיוון ש־$c < d$ אזי $c^n < d^n < a$ וזאת סתירה.

נמצא אותו:

הנחנו $b^n > a$ ואנו מחפשים $r > 1$ כך ש־ $(\frac{b}{r})^n > a$.

כלומר $\frac{b^n}{r^n} > a$ כלומר $\frac{b^n}{a} > r^n$.

לפי הלמה קיים r כזה וניקח $c = \frac{b}{r} < b$,
וקיבלנו $c^n > a$.
ולכן סתרנו את שתי האפשרויות האחרות ובהכרח $b^n = a$.
הוכחת הלמה:
הלמה: **יהי** $u > 1$ **ו־**$n \geq 2$. **אזי קיים** $r > 1$ **כך ש־**$r^n < u$.
נוכיח באינדוקציה על n:
ל־$n = 2$: **יהי** $q > 0$. **ניקח** $r = 1 + q > 1$ **ואנו רוצים ש־** $r^2 = 1 + 2q + q^2 < u$.
אם נבחר $q \leq 1$ **אז** $1 + 2q + q^2 \leq 1 + 3q$,
ודי לנו לקבל $1 + 3q < u$. **לשם כך ניקח** $q \leq \frac{u-1}{4}$,
ואז $1 + 3q < u$.
לבסוף ניקח $q = min(\frac{u-1}{4}, 1)$ **ויתקיים** $r^2 = (1+q)^2 < u$.
נניח נכונות ל־n ונוכיח ל־$n+1$:
יהי $u > 1$. **לפי הנחת האינדוקציה, קיים** $s > 1$ **כך ש־**$s^n < u$.
לפי מה שהוכחנו קיים $t > 1$ **כך ש־**$t^2 < s$.
ואז, $t^{n+1} < t^{2n} = (t^2)^n < s^n < u$.

3 סדרות

3.1 הגדרות בסיסיות

3.1.1 שאיפה\התכנסות של סדרות

- הסדרה (a_n) שואפת למספר L אם:
  לכל $\epsilon > 0$ קיים N טבעי כך שלכל $n \geq N$ $|a_n - L| < \epsilon$.
- $lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ אם:
  לכל M קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_n \geq M$. (כלומר כל מספר M הוא כמעט חסם מלרע של (a_n)).

  באופן דומה ההגדרה ל $-\infty$.

3.1.2 סדרה עולה\יורדת

- סדרה (a_n) נקראת **עולה** (עולה ממש) אם לכל n מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} > a_n$).
- סדרה (a_n) נקראת **יורדת** (יורדת ממש) אם לכל n מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$ ($a_{n+1} < a_n$).
- סדרה נקראת **מונוטונית** אם היא עולה או שהיא יורדת.

3.1.3 זנב של סדרה, סדרות חלקיות

- הסדרה (b_n) נקראת זנב של הסדרה (a_n) אם קיים k טבעי או 0, כך שלכל n, $b_n = a_{k+n}$.
- הסדרה (b_n) נקראת **סדרה חלקית****תת־סדרה** של הסדרה (a_n) אם קיימת סדרה **עולה ממש** (k_n)של מספרים טבעיים

  כך שלכל n קיים: $b_n = a_{k_n}$.
- **גבול חלקי** של (a_n) הוא גבול של תת־סדרה של (a_n).

3.1.4 סדרת קושי - הגדרה

הגדרה: סדרה נקראת סדרת קושי אם לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m, n \geq N$, $|a_n - a_m| < \epsilon$.

ראו משפט: כל סדרה היא מתכנסת אם"ם היא סדרת קושי.

3.1.5 תכונות של מספרים טבעיים וסדרות

- נאמר שהתכונה p מתקיימת ל**כמעט כל** n, או שהיא מתקיימת **כמעט תמיד**, אם קיים Nכל שכל $n \geq N$ הוא בעל התכונה p.
- נאמר שתכונה p של טבעיים היא **שכיחה** אם לכל Nקיים $n \geq N$ כך ש־n הוא בעל התכונה p.
- **למה:** זה לא נכון שתכונה p מתקיימת כמעט תמיד, אם"ם שלילתה מתקיימת באופן שכיח.
- תכונה p של סדרות תיקרא **אסימפטוטית** אם היא כזאת שלכל סדרה (a_n) ולכל זנב שלה (b_n),

  מתקיים ש־(a_n) היא בעלת התכונה p אם"ם (b_n) היא בעלת התכונה p.

3.1.6 גבול עליון, גבול תחתון ($limsup, liminf$)

הגדרה: תהי (a_n) סדרה, ותהי S קבוצת הגבולות החלקיים שלה.

נסמן:

- $u = sup\{S\}$ **הגבול העליון** של (a_n) ונסמנו: $limsup(a_n) = u$.
- $l = inf\{S\}$ **הגבול התחתון** של (a_n) ונסמנו: $liminf(a_n) = l$.

ניסוח נוסף:

הגבול העליון הוא החסם התחתון של קבוצת הכמעט חסמים מלעיל של (a_n):

$$limsup(a_n) = inf\{M : \text{ from a certain place, } a_n \leq M\} =$$
$$= inf\{\{sup(a_n)|\ n \geq k\}|\ k \in \mathbb{N}\}$$

הגבול התחתון הוא החסם העליון של קבוצת הכמעט חסמים מלרע של (a_n):

$$liminf(a_n) = sup\{M : \text{ from a certain place, } a_n \geq M\} =$$
$$= sup\{\{inf(a_n)|\ n \geq k\}|\ k \in \mathbb{N}\}$$

הסבר לכתיבה ה"מסובכת יותר" (זאת שיש בה גם inf וגם sup):

בכל פעם אנו מסתכלים על החסם העליון\תחתון של **זנב** של הסדרה.

הזנב הזה רץ יחד עם k. מכיוון ש־k רץ על כל $\mathbb{N}$, אזי אנחנו מקבלים בדיוק את הערך הנדרש.

3.2 משפטים בתפזורת

3.2.1 אם $(a_n) \to a$ ו־ $(b_n) \to b$ אזי $(a_n + b_n) \to a + b$

הוכחה: קיים $a - \frac{\epsilon}{2} < a_n < a + \frac{\epsilon}{2}$ כמעט תמיד,

ובנוסף קיים $b - \frac{\epsilon}{2} < b_n < b + \frac{\epsilon}{2}$ כמעט תמיד,

ולכן שני אי השוויונות קיימים כמעט תמיד, וחיבורם ייתן

$a + b - \epsilon < a_n + b_n < a + b + \epsilon$.

3.2.2 כל סדרה מתכנסת היא חסומה

הוכחה: תהי $(a_n) \to a$. אז קיים N כך שלכל $n \geq N$, $a - 1 < a_n < a + 1$. (בחרנו $\epsilon = 1$).

נסתכל על $max(a + 1, a_1, ..., a_{N-1})$, הוא חסם מלעיל לסדרה (בגלל שיש מספר סופי של איברים שלא בסביבת ההתכנסות ולכן הם חסומים):

לכל n, אם $n < N$ אז $a_n \leq max(a + 1, a_1, ..., a_{N-1})$ כי a_n מופיע בביטוי זה.

ואם $n > N$ אז $a_n < a + 1 \leq max(a + 1, a_1, ..., a_{N-1})$.

חסם מלרע לסדרה הוא $min(a - 1, a_1, ..., a_{N-1})$.

3.2.3 אותו המשפט, בהרחבה ל־$\overline{\mathbb{R}}$

- אם $lim_{n\to\infty}a_n = \infty$ אז a_n חסומה מלרע.
- אם $lim_{n\to\infty}a_n = -\infty$ אז a_n חסומה מלעיל.

3.2.4 אם $(a_n) \to a$ ו־ $(b_n) \to b$ אזי $(a_nb_n) \to ab$

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. וכעת,

$$|a_nb_n - ab| = |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| \leq |(a_n - a)b_n| + |(b_n - b)a| =$$
$$|a_n - a||b_n| + |b_n - b||a|$$

וכעת, יהי $V > 0$ כך שלכל n, $|b_n| \leq V$ (קיים כזה כי כל סדרה מתכנסת היא חסומה).

ולכן, נחזור לקודם:

$$|a_n - a||b_n| + |b_n - b||a| < |a_n - a| \cdot V + |b_n - b|(|a| + 1)$$

וכעת, ניקח N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים:

$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2V}$ וגם, שלכל n כזה יתקיים: $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2(|a|+1)}$ (קיים כזה כי הסדרות מתכנסות).

ואז קיבלנו,

$$|a_n - a| \cdot V + |b_n - b|(|a| + 1) < \frac{\epsilon}{2V} \cdot V + \frac{\epsilon}{2(|a|+1)}(|a| + 1) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ .}$$

3.2.5 אם $(a_n) \to 0$ וגם (b_n) חסומה אזי $(a_nb_n) \to 0$.

הוכחה: מכיוון ש (b_n) חסומה, אזי קיים $w > 0$ כך שלכל n, $|b_n| \leq w$.

אז כדי לקבל ש: $|a_nb_n - 0| = |a_nb_n| < \epsilon$, ניקח N כזה כך שלכל $n \geq N$:

$|a_n| < \frac{\epsilon}{w}$ ואז לכל $n \geq N$ קיים: $|a_nb_n| < |a_n|w < \frac{\epsilon}{w}w = \epsilon$.

3.2.6 משפט הסנדויץ' לסדרות

אם $(a_n) \to L$ ו־ $(b_n) \to L$, ו־(c_n) סדרה כך שלכל n, $a_n \leq c_n \leq b_n$ אז גם $(c_n) \to L$.

כמובן שמשפט זה עובד גם ב־$\overline{\mathbb{R}}$ (אפשר גם "סנדויץ' בפרוסה אחת"...).

הוכחה: יהי נתון $\epsilon > 0$ כלשהוא.

יהי N_1 כך שלכל $n \geq N_1$:

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$

יהי N_2 כך שלכל $n \geq N_2$:

$$L - \epsilon < b_n < L + \epsilon$$

יהי $N = max(N_1, N_2)$ ואז קיים לכל $n \geq N$:

$L - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \epsilon$ (c_n מופיע פה לפי הנתון)

כלומר, $L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$ ולכן $(c_n) \to L$.

3.2.7 לכל סדרה מונוטונית וחסומה יש גבול

אם הסדרה עולה, אז הגבול הוא החסם העליון של קבוצת איבריה. אם הסדרה יורדת, אז גבולה הוא החסם התחתון של קבוצת איבריה.

הוכחה: תהי (a_n) סדרה עולה וחסומה, מלעיל. אז גם קבוצת איבריה חסומה מלעיל ע"י אותם חסמים מלעיל. לכן יש לקבוצת איברי הסדרה חסם עליון L.
נוכיח כי: $(a_n) \to L$: נראה כי לכל $\epsilon > 0$ מתקיים כמעט תמיד $a_n \in]L-\epsilon, L]$.

מכיוון ש־L חסם מלעיל של קבוצת איברי הסדרה, קיים $a_n < L$ לכל n.

ומכיוון ש־$L - \epsilon < L$, אז לכן קיים איבר בקבוצה a_N כך ש־ $a_N > L - \epsilon$.

ואז, לכל $n \geq N$ מתקיים: $a_n \geq a_N > L - \epsilon$, וגמרנו.

3.2.8 כל סדרה היא מתכנסת אם"ם היא סדרת קושי

(תזכורת: סדרה נקראת סדרת קושי אם לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m, n \geq N$, $|a_n - a_m| < \epsilon$).

הוכחה: תהי $(a_n) \to a$. אז לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n \geq N$ $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$.

ואז, לכל $m, n \geq N$ קיים:

$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

בכיוון השני:

ראשית משום שהסדרה היא סדרת קושי, אז הסדרה היא חסומה,

כי קיים N כך שלכל $m, n \geq N$, $|a_n - a_m| < 1$ ובמיוחד, $|a_n - a_N| < 1$.

כלומר $a_n < a_N + 1$.

ולכן, $max(a_1, ..., a_N, a_N + 1)$ הוא כמעט חסם מלעיל של a_n.

אותו הדבר אפשר להראות חסימות מלרע.

ולכן, יש לסדרה (a_n) גבול חלקי a, כלומר, קיימת ל־(a_n) תת סדרה $a \to (a_{n_k})$.

(בגלל **בולצאנו־ויירשטרס**).

נוכיח כי a זה הוא הגבול של (a_n).

נוכיח כי לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - a| < \epsilon$.

יהי N_1 כך שלכל $n, m > N_1$, $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$.

יהי $k \geq N_1$ כך ש: $|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$.

(כי קיים $N_2 \geq N_1$ כך שלכל $k \geq N_2$, $|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$, ואנחנו מסתפקים באחד מהם).

כעת, עבור $n \geq N_1$ מתקיים:

$|a_n - a| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + \frac{\epsilon}{2}$

וכעת, גם מתקיים $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2}$, מכיוון ש $n_k \geq k \geq N_1$ וגם $n \geq N_1$.

ולכן, נחזור לאי השיויון וקיבלנו: $|a_n - a_{n_k}| + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

3.2.9 הלמה של קנטור

תהי $([a_n,b_n])$ סדרה של קטעים סגורים, כך שלכל n קיים $[a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n]$.

אז קיים מספר c שהוא משותף לכל הקטעים.

אם לכל $\epsilon > 0$ אחד הקטעים $[a_n,b_n]$ אורכו קטן מ־ϵ אז c הוא יחיד.

נוסח שני:

תהי (a_n) סדרה עולה ו־(b_n) סדרה יורדת, כך שלכל n, $a_n \leq b_n$. אז קיים c כך שלכל n, $a_n \leq c \leq b_n$.

אם לכל $\epsilon > 0$ קיים n כך ש־$b_n - a_n < \epsilon$ אז c זה הוא יחיד.

הוכחה:

תחילה, נוכיח שמתקיים $\{a_n|n \in \mathbb{N}\} \leq \{b_n|n \in \mathbb{N}\}$. לשם כך נראה שלכל k,l מתקיים $a_k \leq b_l$.

מתקיים: $a_k \leq a_{max(k,l)} \leq b_{max(k,l)} \leq b_l$ כאשר אי השוויון האמצעי נובע מהנתון.

ולכן לכל k, b_l חסם מלעיל של a_k ולכן של כל הסדרה a_n.

וגם לכל l, a_k חסם מלרע של b_l ולכן של כל הסדרה b_n.

וכעת לפי משפט החסם העליון\תחתון,

מכיוון שאלו שתי קבוצות לא ריקות וחסומות (מלרע\מלעיל) של ממשיים,

אזי קיים ל־a_n חסם עליון a, וקיים ל־b_n חסם תחתון b.

ומהנתון, מתקיים $a \leq b$.

וכעת, לכל $a \leq c \leq b$ יתקיים $a_n \leq a \leq c \leq b_n$, כנדרש.

־־כמו כן, אם לכל $\epsilon > 0$ קיים n כך ש $b_n - a_n < \epsilon$,

אזי נניח בשלילה שלכל n: $a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$ אזי עבור $\epsilon = c_2 - c_1$

תמיד יתקיים $b_n - a_n \geq \epsilon$, **בסתירה** לנתון.

(כי $b_n - a_n \geq c_2 - c_1$).

3.2.10 משפט צ'זארו

תהי (a_n) סדרה מתכנסת, ו־$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ סדרת הממוצעים האריתמטיים שלה.

אזי, אם $(a_n) \to a$ אזי גם $(b_n) \to a$.

הוכחה:

תחילה נניח ש־ $a=0$. יהי $\epsilon>0$, אזי מהתכנסות a_n, קיים $M\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>M$ מתקיים $|a_n|<\frac{\epsilon}{2}$.

נתבונן:

$$|b_n|=|\frac{a_1+...+a_M+a_{M+1}+...+a_n}{n}|=\frac{|a_1+...+a_M|}{n}+\frac{|a_{M+1}+...+a_n|}{n}$$
$$\le\frac{|a_1|+...+|a_M|}{n}+\frac{(n-M)\frac{\epsilon}{2}}{n}$$

וכעת, מכיוון ש־ a_n מתכנסת, אזי היא חסומה. ולכן לכל $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|<C$ כלשהוא.

ולכן, $\frac{|a_1|+...+|a_M|}{n}+\frac{(n-M)\epsilon}{n}<\frac{M\cdot C}{n}+\frac{(n-M)\frac{\epsilon}{2}}{n}$

$$=\frac{M(C-\frac{\epsilon}{2})+n\frac{\epsilon}{2}}{n}=\frac{MC-M\frac{\epsilon}{2}}{n}+\frac{\epsilon}{2}\le\frac{MC}{n}+\frac{\epsilon}{2}$$

וכעת, כמובן $lim_{n\to\infty}\frac{MC}{n}=0$ ולכן קיים $K\ge M$ כך שלכל $n>k$ $|\frac{MC}{n}|<\frac{\epsilon}{2}$

ולכן נחזור לאי השיויון הקודם: $\frac{MC}{n}+\frac{\epsilon}{2}<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$ עבור $n>K$. ולכן $b_n\to 0$.

שלב שני: נוכיח לכל a.

נסמן: $c_n=a_n-a$ וגם את סדרת הממוצעים שלה: $m_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k$.

כעת, כמובן ש־$c_n\to 0$ ולכן מהחלק הקודם ידוע ש $m_{n\to 0}$.

אבל, $m_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)=$

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a=b_n-\frac{na}{n}=b_n-a$

ולכן $b_n-a\to 0$ כלומר $b_n\to a$ כנדרש.

3.2.11 משפט הירושה

התכונות הבאות עוברות מן הסדרה (a_n) לכל תת־סדרה שלה:

- חסימות מלעיל, מלרע ודו־צדדית.
- עליה, ירידה, עליה ממש, ירידה ממש.
- התכנסות למספר L.

הוכחה:

א) ברור.

ב) נוכיח למקרה של עליה: אם $m<n$ אז $k_m<k_n$ (כי k מוגדרת כסדרה עולה ממש)

ואז מכיוון ש a_n עולה, אז $a_{k_m}\le a_{k_n}$.

ג) נתון ש $(a_n)\to L$, צ"ל ש־ $(a_{k_n})\to L$.

כלומר נוכיח שלכל $\epsilon>0$ קיים N כל שלכל $n\ge N$: $|a_{k_n}-L|<\epsilon$.

מכיוון $(a_n) \to L$, קיים N כך שלכל $n \geq N$: $|a_n - L| < \epsilon$.

נראה ש־N זה עובד גם ל־a_{k_n}:

יהי $n \geq N$, אזי $k_n \geq n \geq N$ ((*)כי k עולה ממש, יוכח בסוף.).

ולכן, $|a_{k_n} - L| < \epsilon$ כנדרש.

(*) הוכחת טענת העזר: לכל סדרה עולה ממש k_n של טבעיים, לכל n, $k_n \geq n$.

באינדוקציה: $k_1 \geq 1$. ונניח ש־ $k_n \geq n$.

כעת, $k_{n+1} \geq k_n$ כי הסדרה עולה. ואז, $k_{n+1} \geq k_n + 1 \geq n + 1$ (לפי ההנחה).

3.2.12 משפט בולצאנו ויירשטראס (והלמה להוכחתו)

לכל סדרה חסומה (מלעיל+מלרע) יש תת סדרה מתכנסת.

למת עזר:

לכל סדרה יש תת־סדרה עולה ממש או תת סדרה יורדת. (הוכחה בהמשך).

הוכחת משפט בולצאנו־ויירשטראס לפי הלמה הנ"ל:

תהי (a_n) סדרה חסומה. לפי הלמה, יש לה תת־סדרה מונוטונית. לפי משפט הירושה, גם תת־הסדרה חסומה. ומכיוון שהיא מונוטונית וחסומה אז יש לה גבול.

הוכחת הלמה:

תהי נתונה סדרה (a_n). **הגדרה**: מספר m נקרא **פסגה** אם $a_m \geq a_n$ לכל $n > m$.

אפשרות א': קבוצת הפסגות של (a_n) אינה חסומה. (=יש אינסוף פסגות).

נגדיר ברקורסיה סדרה עולה ממש של טבעיים k_n כך:

k_1 תהיה הפסגה המינימלית. (=האינדקס המינימלי של איבר בסדרה כך ש:כל איבר אחריו קטן ממנו).

k_{n+1} תהיה אינדקס הפסגה המינימלית הגדולה מ־k_n (=האינדקס שלה גדול ממנו). יש כזאת כי קבוצת הפסגות אינה חסומה.

נתבונן בתת הסדרה (a_{k_n}):

$k_{n+1} > k_n$ לפי בניית k_{n+1}. מכיוון ש־k_n פסגה, אזי $a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}}$ ולכן (a_{k_n}) יורדת.

אפשרות ב': קבוצת הפסגות חסומה. (=היא סופית).

נגדיר את הסדרה k_n ברקורסיה:

k_1 יהיה חסם מלעיל ממש של קבוצת הפסגות.

במקביל להגדרה, נוכיח באינדוקציה כי $k_1 \leq k_n$ ולכן k_n אינו פסגה.

בהינתן k_n, לפי הנחת האינדוקציה, $k_1 \leq k_n$ ולכן אינו פסגה, ולכן קיים $l > k_n$ כך ש $a_l > a_{k_n}$.

אז נסמן את ה־l המינימלי הזה ב־k_{n+1}. (כלומר $a_{l_{minimal}} = a_{k_{n+1}} > a_{k_n}$)

ואז, $k_{n+1} > k_n \geq k_1$, $a_{k_{n+1}} > a_{k_n}$ ולכן הסדרה (a_{k_n}) עולה ממש.

3.2.13 תנאי לגבול חלקי של סדרה

L הוא גבול חלקי של הסדרה (a_n) אם"ם לכל $\epsilon > 0$, a_n נמצא בקטע $]L-\epsilon, L+\epsilon[$ באופן שכיח.

הוכחה: כיוון 1: אם L גבול חלקי, אז קיימת תת־סדרה $(a_{k_n}) \to L$.

יהי $\epsilon > 0$. נראה כי $|a_n - L| < \epsilon$ באופן שכיח: בהינתן M טבעי כלשהו, עלינו למצוא $n \geq M$ כך ש־ $|a_n - L| < \epsilon$.

מכיוון ש $(a_{k_n}) \to L$, קיים N כך שלכל $m \geq N$, $|a_{k_m} - L| < \epsilon$.

ניקח $l = max(N, M)$ ונתבונן ב־k_l:

$k_l \geq l \geq M$, אז $|a_{k_l} - L| < \epsilon$ כי $l \geq N$.

כיוון 2: נתון שלכל $\epsilon > 0$ הסדרה (a_n) נמצאת בקטע $]L-\epsilon, L+\epsilon[$ באופן שכיח.

נגדיר ברקורסיה סדרה עולה k_n של טבעיים: k_1 יהיה טבעי כך ש־ $|a_{k_1} - L| < 1$. קיים כזה כי $a_n \in]L-1, L+1[$ באופן שכיח.

בהינתן k_n, יהי k_{n+1} כך ש:

$k_{n+1} > k_n$ ו־ $|a_{k_{n+1}} - L| < \frac{1}{n+1}$.

קיים כזה כי אחרת, היה k_n חסם מלעיל על ה־m־ים כך ש $|a_m - L| < \epsilon$, וקבוצה זאת אינה חסומה.

באינדוקציה, קיים: $L - \frac{1}{n} < a_{k_n} < L + \frac{1}{n+1}$, ולפי משפט הסנדויץ', קיים הגבול: $lim_{n\to\infty} a_{k_n} = L$. (דרושה הבהרה לאי שויון האחרון..??)

3.2.14 תנאים שקולים לכך ש $limsup(a_n) = liminf(a_n)$

התנאים הבאים שקולים:

1. (a_n) חסומה ויש לה גבול חלקי יחיד.
2. (a_n) מתכנסת.
3. $limsup(a_n) = liminf(a_n)$

הוכחה:

$1 \Leftarrow 3$ ברור.

$2 \Leftarrow 1$ ידוע שאם סדרה מתכנסת אז יש לה גבול (יחיד), וגם הוכחנו שכל סדרה מתכנסת היא חסומה.

$3 \Leftarrow 2$ יהי $L = limsup(a_n) = liminf(a_n)$ ויהי $\epsilon > 0$.

מכיוון ש $L = limsup(a_n)$, אזי לכמעט כל n, $a_n \leq L + \epsilon$.

מכיוון ש $L = liminf(a_n)$, אזי לכמעט כל n, $a_n \geq L - \epsilon$.

ולכן לכמעט כל n, $L - \epsilon \leq a_n \leq L + \epsilon$.

3.3 הסדרה $(1+\frac{x}{n})^n$

3.3.1 טענה: הסדרה $(1+\frac{x}{n})^n$ מתכנסת ־ מונוטונית עולה וחסומה

תחילה נראה שהיא חסומה מלעיל:

עבור $x > 0$:

$$(1+\frac{x}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{x}{n})^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

כעת נשים לב שגם במונה וגם במכנה ישנם k איברים:

$$= \sum_{k=0}^{n} [\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}] \cdot \frac{x^k}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

וכעת, יהי $N > 2x$. אז:

$$(1+\frac{x}{n})^n \leq 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{x^k}{k!} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^N}{N!} \sum_{k=N+1}^{n} (\frac{x^{k-N}}{(N+1)(N+2)\cdot \ldots \cdot k}) \qquad \bigstar$$

וכעת נתבונן ב־

$$\sum_{k=N+1}^{n} (\frac{x^{k-N}}{(N+1)(N+2)\cdot \ldots \cdot k}) = \sum_{k=N+1}^{n} (\frac{x}{N+1} \cdot \frac{x}{N+2} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{k})$$

ומכיוון ש־$N > 2x$:

$$\leq \sum_{k=N+1}^{n} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2})$$ (יש $k-N$ פעמים $\frac{1}{2}$).

$$= \sum_{k=N+1}^{n} (\frac{1}{2})^{k-N}$$

נשתמש בנוסחא לחישוב סכום סדרה הנדסית:

(הערה: בהרצאה פסחנו על זה, תיתכן כאן טעות).

$$S_{n-N} = \frac{a_1(q^{n-N}-1)}{q-1} = \frac{\frac{1}{2}([\frac{1}{2}]^{n-N}-1)}{-\frac{1}{2}} = -((\frac{1}{2})^{n-N} - 1) = 1 - (\frac{1}{2})^{n-N} < 1$$

ולכן, חזרה ל־$\bigstar$:

$$< 1 + [\sum_{k=1}^{N} \frac{x^l}{k!}] + \frac{x^N}{N!} \cdot 1$$

ומכיוון ש־x, N הם **קבועים**, כלומר לא תלויים ב־n, אזי זהו חסם מלעיל.

עבור $x < 0$:

$(1+\frac{x}{n})^n \leq |(1+\frac{x}{n})^n| = |1+\frac{x}{n}|^n \leq (1+\frac{|x|}{n})^n$

ו־$|x|$ חיובי, ולכן קיים חסם מלעיל.

(השתמשנו באי שיוון המשולש במעבר האחרון).

כעת נראה מונוטוניות עולה:

נניח $x > 0$ או $0 < |x| < n$ (תמיד ניתן לבחור n גדול מספיק):

ונטען ש:

$(1+\frac{x}{n})^n < (1+\frac{x}{n+1})^{n+1}$

נחלק ב־$(1+\frac{x}{n})^{n+1}$:

$\frac{1}{1+\frac{x}{n}} < (\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}})^{n+1}$

ואחרי קצת אלגברה מקבלים:

$1+(n+1)\cdot\frac{-x}{(n+1)(n+x)} < (1+\frac{-x}{(n+1)(n+x)})^{n+1}$

ואם נסמן $a = \frac{-x}{(n+1)(n+x)}$ אז קיבלנו:

$1+(n+1)a < (1+a)^{n+1}$ וזהו אי שיוון ברנולי!

ולכן הטענה נכונה.

(נשים לב שאכן $a > -1$).

ראינו שהסדרה עולה וחסומה, ולכן גם מתכנסת.

ידוע שגבולה הוא e^x.

4 פונקציות

4.1 הגדרות טכניות של פונקציות

סביר להניח שקטע זה לא ממש רלוונטי להתכוננות לבחינה, אבל הוא קיים בכל אופן.

4.1.1 אסוציאטיביות ההרכבה

תהינה $h: C \to D$, $g: B \to C$, $f: A \to B$.

אזי, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

ההוכחה מושארת לקורא השקדן. (בטח...)

4.1.2 פונקציה על

תהי $f: A \to B$. פונקציה זו תיקרא **על** B אם לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש $f(x) = y$.

כלומר, אם B הוא התמונה של f: $B = Im(f)$.

4.1.3 פונקציה חד־חד־ערכית

פונקציה f תיקרא **חד־חד־ערכית** (להלן חח"ע) אם:

לכל $x, y \in Dom(f)$, אם $x \neq y$ אז $f(x) \neq f(y)$.

4.1.4 עליה, ירידה של פונקציה

ההגדרה לפונקציה עולה, עולה ממש, יורדת, יורדת ממש זהה לזו של סדרות.

מיני־משפטים:

- כל **פונקציה מונוטונית ממש היא חח"ע**.
- **אם פונקציה היא עולה** (יורדת) **וחח"ע, אזי היא עולה ממש** (יורדת ממש).
- **אם f עולה ממש, אז גם f^{-1} עולה ממש**.

  כי אם $y_1 < y_2$ אז: $(f(f^{-1}))(y_1) = y_1 < y_2 = (f(f^{-1}))(y_2)$
  והיות ו־f עולה, אזי $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

4.2 הגדרות בסיסיות

4.2.1 התכנסות בנקודה

נאמר ש $f(x)$ **שואפת\מתכנסת** ל־L **בנקודה** x_0 אם:

- לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל x, אם $0 < |x - x_0| < \delta$ אז מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$

  נשים לב: הדרישה ש $0 < |x - x_0|$ גוררת $x \neq x_0$.

- או לפי **היינה**: לכל סדרה (x_n) כך ש $x_n \neq x_0$ לכל n ו־ $(x_n)_{n\to\infty} \to x_0$ מתקיים $lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$

  (ראו "משפט היינה" להוכחה)

הסימון להנ"ל הוא $lim_{x\to x_0} f(x) = L$

4.2.2 תנאי קושי להתכנסות פונקציות

תהי a נקודה כך ש־f מוגדרת בסביבה המנוקבת של a. אז קיים הגבול ב־$\mathbb{R}$: $lim_{x\to a}f(x)$ אם"ם:

לכל $\epsilon > 0$ **קיים** $\delta > 0$ **כך שלכל** x_1, x_2 **כך ש** $0 < |x_1 - a|, |x_2 - a| < \delta$ **אז** $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$

נשים לב שתנאי זה לא מפרט מהו הגבול.

(ראו משפט: **קריטריון קושי** להוכחה).

4.2.3 קריטריון קושי לאינסוף

תהי f פונקציה מוגדרת בקטע אינסופי מימין (או משמאל).

אז קיים $lim_{x\to\infty}f(x)$ **(או** $lim_{x\to-\infty}f(x)$**) ב־**$\mathbb{R}$ **אם"ם**

לכל $\epsilon > 0$ **קיים** M **בתחום** f **כך שלכל** $x_1, x_2 > M$ **(או** $x_1, x_2 < M$ **):**

$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$

4.2.4 רציפות בנקודה

נאמר ש $f(x)$ **רציפה ב־** x_0 אם:

- $lim_{x\to x_0}f(x) = f(x_0)$

  כלומר, אם לכל $\epsilon > 0$ **קיימת** $\delta > 0$ **כך שלכל** $|x - x_0| < \delta$ **קיים** $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$f(x)$ תיקרא רציפה אם היא רציפה בכל נקודה שבה היא מוגדרת.

4.2.5 תנאים להתכנסות, כולל חד צדדית, בכמתים

- תנאי לגבול:

  אם: $(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)\forall x : (0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$ **אזי** $L = lim_{x\to x_0}f(x)$

- תנאי לגבול מימין:

  אם: $(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)\forall x : (x_0 < x < x_0 + \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$ **אזי** $L = lim_{x\to x_0+}f(x)$

- תנאי לגבול משמאל:

  אם: $(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)\forall x : (x_0 - \delta < x < x_0 \to |f(x) - L| < \epsilon$ **אזי** $L = lim_{x\to x_0-}f(x)$

4.2.6 התכנסות עם אינסוף

- נאמר ש $L \in \mathbb{R}$הוא הגבול של $f(x)$ ב־∞אם
לכל $\epsilon > 0$ קיימת $M > 0$ כך שאם $x > M$ אז $|f(x) - L| < \epsilon$
- באופן דומה מוגדר הגבול ב־$-\infty$.
- נאמר ש־$f(x)$ מתכנסת ב־∞ ל־∞ אם:
לכל $M > 0$ קיים $N > 0$ כך ש $x > N \leftarrow f(x) > M$
- נאמר ש־$f(x)$ שואפת ל־∞ בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ אם:
לכל $M > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x - x_0| < \delta$ אז $f(x) > M$.

4.3 משפטים

4.3.1 משפט החסימות

(נא לשים לב, אין להתבלבל בין משפט זה לבין משפט ויירשטראס I, יש הקוראים לו באותו שם).

אם קיים $lim_{x \to x_0} f(x) = L$ אזי יש ל־x_0 סביבה $]b, c[$ בה f חסומה.

הוכחה: ניקח $\epsilon = 1$ ואז ישנה ל־x_0 סביבה **מנוקבת** $]b, c[$ כך שלכל x בסביבה זו, $L - 1 < f(x) < L + 1$. ולכן, לכל $x \in]b, c[$:

$min(L - 1, f(x_0)) \leq f(x) \leq max(L + 1, f(x_0))$

4.3.2 משפט ההשוואה

אם קיימים $lim_{x \to x_0} f(x) = u$ וגם $lim_{x \to x_0} g(x) = v$ וגם $u < v$

אז קיימת סביבה מנוקבת של x_0 כך שלכל x בסביבה זאת, $f(x) < g(x)$.

הערה: זה עובד גם באינסוף,

כאשר "$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$" אז קיימת סביבה מנוקבת B של x_0 כך שלכל $x \in B$, $f(x) < g(x)$

הוכחה:

יהי $\epsilon = \frac{1}{2}(v - u) > 0$. (כי אמרנו ש $v > u$. שימו לב להגדרת ϵ, בהמשך זה קריטי).

יהי $\delta_1 > 0$ כך שלכל $x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1$ השונה מ־x_0 קיים $|f(x) - u| < \epsilon$.

ולכן, $f(x) < u + \epsilon$.

יהי $\delta_2 > 0$ כך שלכל $x_0 - \delta_2 < x < x_0 + \delta_2$ השונה מ־x_0 קיים $|g(x) - v| < \epsilon$.

ולכן, $g(x) > v - \epsilon$.

יהי $\delta = min(\delta_1, \delta_2) > 0$.

ואז, לכל $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ השונה מ־x_0 קיים:

$f(x) < u + \epsilon = v - \epsilon < g(x)$

(כאשר השיוון נובע מבחירת ϵ כ"אמצע הדרך" בין u, v:

$u + \epsilon = u + (\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}u) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v = v - (\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}u) = v - \epsilon$)

4.3.3 מסקנה: יחידות הגבול

ל־$f(x)$ יש גבול יחיד כאשר $x \to x_0$,

כי אם היו לה גבולות $u < v$ אז בסביבה מנוקבת של x_0 היה קיים $f(x) < f(x)$ - סתירה!

4.3.4 "החיקוי למשפט הזנב"

(השם מתייחס למשפט דומה על סדרות...)

תהינה f, g פונקציות כך שקיים $lim_{x \to x_0} f(x) = u$,

וקיימת סביבה מנוקבת $]x_0 - \gamma, x_o + \gamma[$ של x_0 בה לכל x, $g(x) = f(x)$.

אזי, קיים גם $lim_{x \to x_0} g(x)$ והוא שווה ל: $lim_{x \to x_0} f(x)$. (הגבולות שווים).

הוכחה:

יהי $\epsilon > 0$. עלינו למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$ קיים $|g(x) - u| < \epsilon$.

ידוע ש־$lim_{x \to x_0} f(x) = u$, ולכן קיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta_1$ קיים $|f(x) - u| < \epsilon$.

ניקח $\delta = min(\delta_1, \gamma) > 0$ ואז, לכל $0 < |x - x_0| < \delta$ קיים $|f(x) - u| < \epsilon$ כי $0 < |x - x_0| < \delta_1$,

וקיים גם $g(x) = f(x)$ כי $\delta \leq \gamma$ ולכן, $|g(x) - u| < \epsilon$.

4.3.5 משפט היינה - הוכחה

לפונקציה f קיים $lim_{x \to a} f(x) = u$ אם"ם

לכל סדרה $(a_n) \to a$ של מספרים בתחום f השונים מ־a קיים:

$lim_{n \to \infty} f(a_n) = u$.

הערה: זה עובד גם באינסוף, אם נגדיר $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

הוכחה:

⇐<u>כיוון</u> <u>ראשון</u>: יהי $u = lim_{x \to a} f(x)$, ותהי $(a_n) \to a$ סדרה של מספרים מתחום f, כך ש־ $a_n \neq a$.

עלינו להוכיח כי לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n \geq N$, $|f(a_n) - u| < \epsilon$.

ל־ϵ הנתון, קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x-a| < \delta$ קיים $|f(x) - u| < \epsilon$.

ומכיוון ש־ $lim_{n\to\infty} a_n = a$ אז קיים N כך שלכל $n \geq N$ $|a_n - a| < \delta$.

(בחרנו "$\delta = \hat{\epsilon}$" בתנאי להתכנסות הסדרה).

קיים גם ש־ $0 < |a_n - a|$ כי דרשנו ש־$a_n \neq a$.

לכן, קיים לכל $n \geq N$: $|f(a_n) - u| < \epsilon$.

$\Leftarrow$ <u>כיוון שני</u>: (בדרך השלילה).

נזכור שאנו מניחים שלכל סדרה $a \leftarrow (a_n)$ של מספרים בתחום f השונים מ־a קיים:

$lim_{n\to\infty} f(a_n) = u$.

כעת,

נניח שקיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים $0 < |x-a| < \delta$ וגם $|f(x) - u| \geq \epsilon$.

(נשים לב: "**גדול** שווה מ־", זוהי השלילה של קיום גבול!).

כעת, תהי a_n כך שלכל $n \in \mathbb{N}$: **(א)** $0 < |a_n - a| < \frac{1}{n}$ וגם **(ב)** $|f(a_n) - u| \geq \epsilon$.

אזי: מכיוון ש־ **(א)**: $0 < |a_n - a| < \frac{1}{n}$ וגם $n \geq 1$ כי הוא טבעי, קיבלנו:

$a - 0 < a_n < a + \frac{1}{n}$

כלומר, $lim_{n\to\infty} a_n = a$, לפי סנדויץ'.

(וכעת לפי ההנחה אמור להתקיים $lim_{n\to\infty} f(a_n) = u$)

אבל אמרנו ש־(ב): $|f(a_n) - u| \geq \epsilon$, כלומר:

$lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq u$ אבל זה בניגוד להנחתינו, ולכן קיבלנו סתירה.

4.3.6 משפט הסנדויץ' לפונקציות

אם קיימת סביבה של a בה לכל x:

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

וקיים: $lim_{x\to a} f(x) = lim_{x\to a} h(x)$

אזי קיים גם $lim_{x\to a} g(x)$ והוא שווה לגבולות האחרים.

הוכחה:

תהי $a \leftarrow (a_n)$, $a_n \neq a$ לכל n.

אז קיים N כך שלכל $n \geq N$, a_n נמצא בסביבה הנ"ל.

ואז לפי הנתון, לכל $n \geq N$:

$f(a_n) \leq g(a_n) \leq h(a_n)$.

וכעת, $lim_{n\to\infty} h(a_n)$, $lim_{n\to\infty} f(a_n)$ שניהם קיימים ושווים לפי משפט היינה,

ולכן לפי משפט הסנדויץ' לסדרות, קיים $lim_{n\to\infty} g(a_n)$ והוא מקיים:

$lim_{n\to\infty} g(a_n) = lim_{n\to\infty} f(a_n) = lim_{n\to\infty} h(a_n)$.

וכיוון שזה קיים בכל סדרה a_n כנ"ל, אזי גבול זה הוא הגבול $lim_{x\to a} g(x)$.

4.3.7 משפט ערך הביניים

תהי f פונקציה רציפה המוגדרת בקטע $[a,b]$, ויהי קיים $f(a) \neq f(b)$, ו־t מספר בין $f(a)$ ל־ $f(b)$,

אז קיים $a \leq c \leq b$ כך ש־ $f(c) = t$.

הוכחה:

נניח כי $f(a) < f(b)$.

יהי $f(a) < t < f(b)$.

ותהי $W = \{a \leq x \leq b | f(x) \geq t\}$.

נסמן: $c = inf\{w\}$.

קיים c כזה כי b בוודאי שייך ל־W וגם W חסומה מלרע ע"י a.

כעת,

אם $a \leq x < c$ אז $f(x) < t$, כי אחרת היה $x \in W$, כלומר $x \geq c$.

אם $c < x \leq b$ אז קיים $c \leq z < x$ כך ש־ $f(z) > t$.

כעת נראה ש־ $f(c) = t$ ע"י שלילת האפשרויות האחרות:

<u>אפשרות א': $f(c) < t$</u>.

אז בוודאי $c < b$. ולכן, לפי תכונת הסביבה,

קיימת סביבה של c שהיא או $]d,e[$ (אם $a < c$), או $[a,e[$ (אם $c = a$),

כך שלכל x בסביבה הזאת, $f(x) < t$.

ואם ניקח r כך ש $c < r < e$, נקבל שלכל $c \leq z \leq r$, מתקיים $f(z) < t$ **בסתירה** להגדרת c.

<u>אפשרות ב': $f(c) > t$</u>.

ואז $c > a$. ואז, יש ל־c סביבה,

שהיא $]d,e[$ (אם $c < b$) או $]d,b]$ (אם $c = b$),

כך שלכל x בה, $f(x) \geq t$ לפי תכונת הסביבה.

ואז, אם $d < x < c$ אז, $f(x) \geq t$ **בסתירה** להגדרת c.

סתרנו את שתי האופציות האחרות,

<u>**ולכן בהכרח** $f(c) = t$</u>.

4.3.8 משפט ווירשטראס I

תהי f **רציפה** בקטע הסגור $[a,b]$. אזי, f **חסומה** בקטע זה.

הוכחה:

יהי $c = sup\{a \le z \le b|$ f is bounded at [a,z]$\}$.

כלומר c הוא האיבר z המקסימלי בקטע שעבורו f חסומה בקטע $[a,z]$.

(חסם עליון, לא בהכרח "מקסימום").

קיים c כזה, שכן הקבוצה הנ"ל לא ריקה, כי a שייך אליה

(לפי משפט החסימות יש ל־a סביבה שבה f חסומה).

וכמו כן היא חסומה מלעיל ע"י b.

נראה ש־ $c = b$.

כעת, נניח בשלילה ש־ $c < b$.

לפי **משפט החסימות**, קיים $\delta > 0$ כך ש־f חסומה בקטע $(c-\delta, c+\delta)$. נבחר את δ כך שיתקיים:

$a < c-\delta < c < c+\delta < b$.

כעת, יהיו d, e כך ש: $a < c-\delta < d < c < e < c+\delta < b$.

f חסומה ב־$[a,d]$ כי זהו תחום שבו f חסומה לפי הגדרת c.

(כלומר f חסומה ב־$[a,c] \subseteq [a,d]$).

וגם, f חסומה ב־$[d,e]$ כי $[d,e] \subseteq (c-\delta, c+\delta)$.

ולכן, קיבלנו ש־f חסומה ב־$[a,e]$, אבל הרי $c < e$, **בסתירה** לכך ש־$c = sup\{...\}$.

ולכן $c = b$. (לפי הגדרתו, $z \approx c \le b$ ושללנו אי שויון חזק).

וכעת, לפי משפט החסימות עוד פעם, ל־b יש סביבה $]u,b]$ שבה f חסומה.

יהי $u < s < b$. אז מכיוון ש־ $b = c$, f חסומה ב־ $[a,s]$.

לכן f חסומה ב־ $[a,b] = [a,s] \cup]u,b]$ וגמרנו. (כי $a < u < s < b$).

הערה: נשים לב שגם אם $c = a$ עדיין היינו מקבלים את הסתירה שקיבלנו.

(פשוט בסביבה מימין של δ במקום דו צדדית).

4.3.9 משפט ויירשטראס II

לכל פונקציה f רציפה <u>בקטע סגור</u> $[a,b]$ יש מינימום ומקסימום בקטע.

(נשים לב: בקטע פתוח זה לא נכון,

למשל ל־ $f(x) = x$ בקטע $]0,1[$ אין מינימום\מקסימום! רק חסם עליון\תחתון).

הוכחה:

לפי משפט ויירשטראס I ידוע לנו ש־f חסומה בקטע זה.

יהי $M = sup\{f(x)|a \le x \le b\}$.

עלינו למצוא x כך ש־ $f(x) = M$, והוא יהיה המקסימום.

נניח שאין x כזה, כלומר שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) < M$.

כעת, נתבונן בפונקציה $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ בקטע $[a,b]$.

נשים לב שלפי ההנחה, $g(x)$ מוגדרת, כי הנחנו ש־ $M \neq f(x)$.

כמו כן, $g(x)$ רציפה כהרכבה וחיבור של פונקציות רציפות.

כעת, מכיוון ש־M הוא $M = sup\{f(x)|a \leq x \leq b\}$, אזי מתקיים,

שלכל $\epsilon > 0$ קיים $x \in [a,b]$ כך ש: $M - \epsilon < f(x) < M$.

אם נחסר את M ונכפיל ב־(-1), נקבל ישירות: $\epsilon > M - f(x) > 0$.

ולכן, $g(x) = \frac{1}{M-f(x)} > \frac{1}{\epsilon}$.

וכמובן, $lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} = \infty$ ולכן ע"פ סנדויץ' קיבלנו,

ש־$g(x)$ אינה חסומה מלעיל בקטע $[a,b]$,

בסתירה למשפט ויירשטראס I, שהרי $g(x)$ רציפה שם.

ולכן בהכרח קיים x כך ש־ $f(x) = M$.

ההוכחה למקרה המינימום מתבצעת באופן דומה,

ע"י התבוננות בפונק' $h(x) = \frac{1}{f(x)-m}$ כאשר m הוא ה־inf.

הוכחה שניה:

בדומה לקודם, נתבונן ב־ $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ ונניח ש $f(x) < M$.

לפי משפט החסימות, $g(x)$ חסומה מלעיל ע"י מספר k. (נבחר $k > 0$).

(כי אמרנו כבר, היא רציפה כהרכבה\חיבור של רציפות).

$\frac{1}{M-f(x)} \leq k$ ונשים לב שהמכנה תמיד חיובי.

$1 \leq kM - kf(x)$

$kf(x) \leq kM - 1$

$f(x) \leq M - \frac{1}{k}$ וזו **סתירה** משום ש־ M הוא ה־sup.

ההוכחה למינימום נעשית באופן דומה.

4.3.10 קריטריון קושי - הוכחה (גם לאינסוף)

תהי a נקודה כך ש־f מוגדרת בסביבה המנוקבת של a. אז קיים הגבול ב־$\mathbb{R}$: $lim_{x \to a} f(x)$ אם"ם:

לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x_1, x_2 כך ש $0 < |x_1 - a|, |x_2 - a| < \delta$ אז $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$

נשים לב שתנאי זה לא מפרט מהו הגבול.

הוכחה:

<u>כיוון</u> <u>ראשון</u>:

נניח שקיים $lim_{x\to a}f(x)=w$,

אזי קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-a|<\delta$ קיים $|f(x)-w|<\frac{\epsilon}{2}$.

ואז, לכל $0<|x_1-a|,|x_2-a|<\delta$ קיים ש:

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|(f(x_1)-w)-(f(x_2)-w)|\le|f(x_1)-w|+|f(x_2)-w|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

<u>כיוון</u> <u>שני</u>:

נניח שלכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$,

כך שלכל x_1,x_2 כך ש $0<|x_1-a|,|x_2-a|<\delta$, מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$.

ההוכחה תתבצע לפי תנאי קושי להתכנסות סדרות.

תהי $(a_n)\to a$ סדרה בתחום f כך ש־ $a_n\neq a$ לכל n.

סדרה כזאת אכן קיימת, כי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a.

וכעת נראה ש $f(a_n)$ היא סדרת קושי:

יהי $\epsilon>0$, ויהי $\delta>0$ המתאים לו, בהתאם להנחה. מכיוון שמתקיים $(a_n)\to a$, אזי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $0<|a_n-a|<\delta$.

וכעת ניקח $m,n>N$, אזי יתקיים $0<|a_m-a|,|a_n-a|<\delta$ ולכן לפי ההנחה מתקיים $|f(a_n)-f(a_m)|<\epsilon$. ולכן, $f(a_n)$ היא סדרת קושי, וככזאת היא גם מתכנסת.

נסמן: $lim_{n\to\infty}f(a_n)=w$, ונראה שגם $lim_{x\to a}f(x)=w$:

יהי $\epsilon>0$, ולכן קיים $M\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge M$ קיים:

(*) $|f(a_n)-w|<\frac{\epsilon}{2}$. (מהתכנסות $f(a_n)$).

ויהי $\delta>0$ המתאים ל־ϵ הזה לפי קריטריון קושי (הוא קיים לפי ההנחה).

כעת, עקב קיום הגבול $(a_n)\to a$, קיים $K\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>K$ מתקיים $0<|a_n-a|<\delta$,

ואזי, לפי הקריטריון מתקיים עבור x כלשהו מתאים מהתחום המבוקש:

(כלומר $0<|x-a|<\delta$):

(*)(*) $|f(x)-f(a_n)|<\frac{\epsilon}{2}$.

יהי $\tilde{N}=max(K,M)$. אזי ניקח $n>\tilde{N}$ קבוע, ואז, יהי x בתחום של f כך ש־ $0<|x-a|<\delta$.

קיבלנו:

$$|f(x)-w|=|(f(x)-f(a_n))+(f(a_n)-w)|\le|f(x)-f(a_n)|+|f(a_n)-w|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

נשים לב שהשתמשנו עכשיו ב־(*) וב־(*)(*).

הוכחה לקריטריון באינסוף:

תהי f פונקציה מוגדרת בקטע אינסופי מימין (או משמאל).

אז קיים $lim_{x\to\infty}f(x)$ (או $lim_{x\to-\infty}f(x)$) ב־$\mathbb{R}$ אם"ם

לכל $\epsilon>0$ קיים M בתחום f כך שלכל $x_1,x_2>M$ (או $x_1,x_2<M$):

$|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$

הוכחה:

אם קיים $lim_{x\to\infty}f(x)=L$ אזי לכל $\epsilon>0$ קיים K כך שלכל $x>K$ מתקיים $|f(x)-L|<\frac{\epsilon}{2}$.

ניקח $x_1,x_2>K$ ואז:

$|f(x_1)-f(x_2)|=|(f(x_1)-L)+(L-f(x_2))|<|f(x_1)-L|+|L-f(x_2)|<2\cdot\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$

מצד שני, אם לכל $\epsilon>0$ קיים M בתחום f כך שלכל $x_1,x_2>M$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$,

תהי $x_n\to\infty$, $y_n\to\infty$ סדרות בתחום f .

נתבונן ב: $|f(x_n)-f(y_n)|$.

לפי בניית הסדרות, קיים K כך שלכל $n>K$ מתקיים $x_n,y_n>M$

ולכן $|f(x_n)-f(y_n)|<\epsilon$.

ובפרט, הדבר מתקיים עבור $y_n=x_{n+s}$ עבור כל $s\in\mathbb{N}$.

כלומר $|f(x_n)-f(x_{n+s})|<\epsilon$.

ולכן נגדיר סדרה $t_n=f(x_n)$ אזי קיבלנו שסדרה זו היא **סדרת קושי**.

(כי לכל $\epsilon>0$ קיים K כך שלכל $n,(n+s)>K$ מתקיים $|f(x_n)-f(x_{n+s})|<\epsilon$

ולכן הסדרה $t_n=f(x_n)$ מתכנסת. ומכיוון שזה עובד ל$x_n\to\infty$ כללית, אזי,

לפי משפט היינה לאינסוף, פונקציה מתכנסת באינסוף

אם לכל סדרה x_n של מספרים ששואפת לאינסוף מתקיים

ש־$f(x_n)$ גם מתכנסת. ולכן גם f מתכנסת.

(הערה: ההוכחה לכיוון זה היא שלי, תיתכן טעות כמו תמיד...)

5 רציפות במידה שווה

5.1 הגדרות

5.1.1 הגדרה לרציפות במ"ש, רגיל ולפי סדרות

תהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על קטע I. הפונקציה f תיקרא **רציפה במידה שווה** אם:

לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך **שלכל** $x_1, x_2 \in I$,

אם $|x_1 - x_2| < \delta$ **אז** $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

שימו לב: הרעיון כאן הוא ש־δ בהגדרת הרציפות לא תלויה ב־x_1, x_2!

ההגדרה לרציפות במידה שווה ע"פ **סדרות**:

תהי f פונקציה מוגדרת על קטע I. נאמר ש־f רציפה במ"ש $\iff$

לכל שתי סדרות $(x_n), (y_n)$ ב־I *, המקיימות $lim_{n\to\infty}|x_n - y_n| = 0$, מתקיים $lim_{n\to\infty}|f(x_n) - f(y_n)| = 0$

(*הכוונה היא שכל איברי הסדרות נמצאים ב־I.)

5.1.2 פונקציית K־ליפשיץ

פונקציה תיקרא **K־ליפשיץ** אם לכל $x \neq y \in I$ מתקיים: $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} < K$ עבור $K > 0$ קבוע.

כלומר, $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$. (כדאי לשים לב שזה בעצם אומר ששיפוע הפונקציה לא יהיה תלול מידי)

5.2 משפטים נבחרים

5.2.1 רציפות במידה שווה $\Leftarrow$ רציפות. ההיפך כמובן לא בהכרח נכון.

הוכחה:

ניזכר בתנאי לרציפות פונקציה בנקודה x_0:

"לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כל שלכל x בתחום, **אם** $0 < |x - x_0| < \delta$ אז מתקיים $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$."

כעת נניח שמתקיים התנאי לרציפות במ"ש, כלומר:

"לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך **שלכל** x_0 ולכל x בתחום,

אם $|x - x_0| < \delta$ **אז** $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$."

- ובפרט, זה כולל את המקרה הנ"ל של רציפות רגילה. זה פשוט תנאי חזק יותר.

5.2.2 משפט (קנטור): פונקציה שרציפה על קטע חסום היא רציפה בו במ"ש

הוכחה: (באדיבות ויקיפדיה)

תהי פונקציה f רציפה על $[a, b]$.

נניח בשלילה שהיא לא רציפה במ"ש, ונגיע לסתירה.

השלילה של רציפות במ"ש היא שקיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$,
קיימות $x_1, x_2 \in [a,b]$ **כך ש־** $|x_1 - x_2| < \delta$ **אבל** $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon$.
ובפרט, לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימות שתי נקודות $x_n, y_n \in [a,b]$
כך ש־ $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ **אבל** $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$.
(בחרנו $\delta = \frac{1}{n}$ כי הנחנו שהנ"ל מתקיים לכל δ).
נניח שהנ"ל מתקיים.
נתבונן בסדרה (x_n). לפי הגדרתה, כל איבריה שייכים ל־$[a,b]$ ולכן היא חסומה.
ולכן, לפי משפט **בולצאנו־ויירשטראס**, לכל סדרה חסומה יש תת־סדרה מתכנסת.
מכיוון ש־$[a,b]$ קטע סגור, אזי הגבול של תת סדרה זו מוכל בקטע גם כן.
כלומר, $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$.
ועכשיו נראה שמתקיים $y_{n_k} \to x_0$ גם כן: (לפי תנאי רגיל להתכנסות סדרות)
יהי $\epsilon > 0$. נמצא $K > 0$ כך שלכל $k > K$ יתקיים $|y_{n_k} - x_0| < \epsilon$.
ניגש להוכחת הנדרש:
עקב התכנסות x_{n_k} קיים K_1 כך שלכל $k > K_1$ מתקיים $|x_{n_k} - x_0| < \frac{\epsilon}{2}$.
כמו כן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ (כי $\frac{1}{n} \to 0$).
וגם קיים K_2 כך שלכל $k > K_2$ מתקיים ש־ $n_k > N$,
(כלומר החל ממקום מסויים בתת הסדרה,
האינדקסים של מיקום איברי תת־הסדרה בתוך הסדרה המקורית עוברים את N).
אז נבחר $K = max(K_1, K_2)$ ואז לכל $k > K$ מתקיים:

$$|y_{n_k} - x_0| = |(y_{n_k} - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x_0)|$$

$$\leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

כאשר החלק עם $\frac{1}{n_k}$ הוא בעקבות הגדרת x_n, y_n.
ולכן $y_{n_k} \to x_0$.
וכעת, עקב רציפות f, אז לפי **משפט היינה**,
ידוע ש $lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x_0)$.
ולכן, $lim_{k\to\infty}[f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})] = 0$,
בסתירה להנחה שמתקיים $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ לכל איבר בסדרות.

5.2.3 טענה: פונקציה K־ליפשיץ היא רציפה במ"ש.

(ההיפך לא בהכרח נכון!)

הוכחה: נניח ש־f מקיימת תנאי ליפשיץ, אזי לכל $x_1 \neq x_2$ בתחומה, מתקיים $\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|} < K$.

כלומר $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|K$. **(*)**

כעת, נרצה לקיים רציפות במ"ש,

כלומר נראה שלכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל x_1, x_2 בתחום מתקיים:

$|x_1 - x_2| < \delta$ **גורר** $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{K}$ ואז, אם $|x_1 - x_2| < \delta$ אז נקבל:

$|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|K < \frac{\epsilon}{K}K = \epsilon$ **(*)**

וגמרנו.

דוגמא לפונק' לא ליפשיצית שהיא רציפה במ"ש:

למשל, $f(x) = \sqrt{x}$ בקטע $[0, 1]$.

5.2.4 אם f רציפה במ"ש על $]a, b[$ או על $]a, \infty[$ אז אפשר להמשיך אותה לפונקציה שגם a בתחומה.

הוכחה:

נראה ש־f ממלאת את קריטריון קושי לקיום $lim_{x\to a+}f(x)$.

אנו צריכים להראות שלכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$

כך שאם־$a < x_1 < x_2 < a + \delta$ אז $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

ומכיוון ש־f רציפה במ"ש, אזי לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$

כך שלכל $|x_1 - x_2| < \delta$, $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

וזה בדיוק מקיים את הנדרש!

ולכן קיים $lim_{x\to a+}f(x) = \hat{a}$ ונשלים את הפונקציה כך ש־$f(a) = \hat{a}$.

ואז f רציפה גם ב־a.

5.3 שלוש טענות חשובות מהתרגיל בנוגע לרציפות במ"ש

ההוכחות בהשראת הפתרון הרשמי של התרגיל שפורסם.

- אם $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ ומקיימת $lim_{x\to\infty}f(x) = L \in \mathbb{R}$ אז f רציפה במ"ש על $[a, \infty)$.

הוכחה:

יהי $\epsilon > 0$ כלשהו. נתון ש־ $lim_{x\to\infty}f(x) = L \in \mathbb{R}$,

ולכן מתקיים תנאי קושי באינסוף:

קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2 > M$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$.

בנוסף לזה, בקטע הסגור $[a, M]$ הפונקציה רציפה (נתון), ולפי משפט קנטור, גם רציפה במ"ש.

ולכן קיים $\delta > 0$ כל שלכל $x_1, x_2 \in [a, M]$,

אם $|x_1 - x_2| < \delta$ אז $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$.

כעת, נטען ש־δ זה מתאים **לכל תחום ההגדרה** בעבור התנאי לרציפות במ"ש:

עבור $x_1,x_2 > M$ ברור שזה מתאים, כי בכלל לא צריך δ.

עבור $x_1, x_2 \in [a, M]$ ראינו שזה נכון. נותר לטפל בתחום ה"מעורב".

יהיו $x_2 > M$, $x_1 \in [a, M]$, כך שמתקיים $|x_1 - x_2| < \delta$.

נדרוש גם שיתקיים $|x_1 - M| < \delta$ וכמובן שמתקיים $M \in [a, M]$.

אזי:

$$\begin{aligned}|f(x_1) - f(x_2)| &= |(f(x_1) - f(M)) + (f(M) - f(x_2))| \\ &\leq |f(x_1) - f(M)| + |f(x_2) - f(M)| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

- יהי $a \in \mathbb{R}$. אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה, ו־ f רציפה במ"ש על $[a, \infty[$ ועל $]-\infty, a]$ אזי f רציפה במ"ש על $\mathbb{R}$.

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$.

כעת, מכיוון ש־f רציפה במ"ש בקטעים הנ"ל,

אזי קיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in]-\infty, a]$,

מתקיים שאם $|x_1 - x_2| < \delta_1$ אז $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$.

וגם, קיים $\delta_2 > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in [a, \infty[$

מתקיים שאם $|x_1 - x_2| < \delta_2$ אז $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$.

כעת נבחר $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ ונטען ש־δ זה מתאים לכל $\mathbb{R}$:

ראינו שמתקיימת רציפות במ"ש בשני הקטעים בנפרד,

ונותר המקרה שבו $x_2 \in [a, \infty[$, $x_1 \in]-\infty, a]$ כך ש־$|x_1 - x_2| < \delta$.

מתקיים גם ש־a נמצא בשני התחומים כמובן, ולכן קיימים x־ים כאלה שגם מקיימים:

$|x_1 - a| < \delta$ וגם $|x_2 - a| < \delta$. ולכן:

$$\begin{aligned}|f(x_1) - f(x_2)| &= |(f(x_1) - f(a)) + (f(a) - f(x_2))| \\ &\leq |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(a)| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

- אם $lim_{x\to+\infty}f(x) = L \in \mathbb{R}$ ו־ $lim_{x\to-\infty}f(x) = L' \in \mathbb{R}$ ו־f רציפה, אזי משני המשפטים הקודמים נובע ש־f רציפה במ"ש על כל $\mathbb{R}$.

הוכחה:

מסקנה ישירה משני המשפטים הקודמים.

6 פונקציות קמורות

6.1 הגדרות

- פונקציה $f : I \to \mathbb{R}$ תיקרא **קמורה** אם לכל $x_1 < x_2$ בתחום ההגדרה ולכל $0 \leq \lambda \leq 1$ מתקיים:

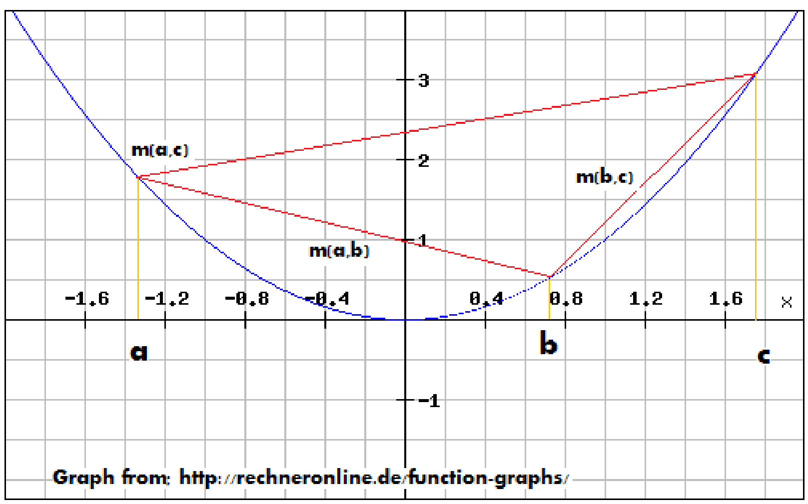
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

- **אי שוויון השיפועים**

יהיו $a < b < c \in I$ בתחום ההגדרה של f. אזי f קמורה בתחום זה אם"ם לכל a, b, c כאלה מתקיים:

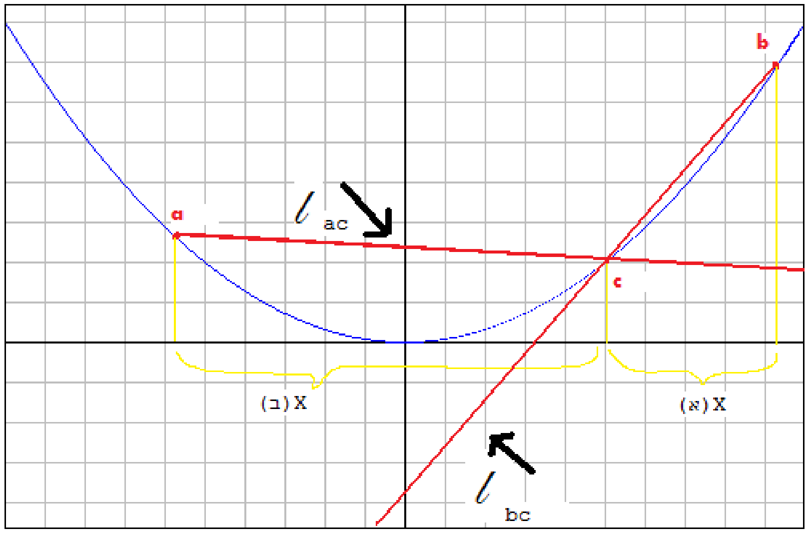
$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq \frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$ כלומר, אם נסמן ב־$m(t,s)$ את שיפוע המיתר המחבר את $f(t), f(s)$ אז זה זהה ל:

$m(a,b) \leq m(a,c) \leq m(b,c)$. (ראו איור)



6.2 טענות ומשפטים

6.2.1 פונקציה קמורה בקטע היא רציפה בכל נקודה פנימית בקטע



הוכחה: יהיו $a < c < b$ בקטע שבו נתון ש־f קמורה.

נתבונן בישר בין a, c ובישר בין b, c:

$l_{ac}(x) = f(c) + m_{ac}(x - c)$

$l_{bc}(x) = f(c) + m_{bc}(x - c)$

(כאשר m_{ac}/m_{bc} השיפועים המתאימים).

נניח שהוכחנו שמתקיים: (יוכח בהמשך)(*)

עבור $c < x < b$: מתקיים $l_{ac}(x) \leq f(x) \leq l_{bc}(x)$ **(א)**

עבור $a < x < c$: מתקיים $l_{bc}(x) \leq f(x) \leq l_{ac}(x)$ **(ב)**

אזי נחשב את $lim_{x \to c^+} f(x)$.

קיים $lim_{x \to c} l_{ac}(x) = lim_{x \to c} l_{bc}(x) = f(c)$

ולכן לפי משפט הסנדויץ' (בעקבות ההנחה (א)):

$lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

ואותו דבר מהנחה (ב):

$lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$

ולכן $lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ ו־f רציפה ב־c.

כעת **נוכיח את הנחות (א),(ב):**

- (א):

יהי $c < x < b$ **ונוכיח:** $f(x) \leq l_{bc}(x)$**: כלומר** $f(x) \leq f(c) + m_{bc}(x-c)$.

זה שקול ל־ $m_{cx} = \frac{f(x)-f(c)}{(x-c)} \leq m_{bc}$.

וזה נכון, בעקבות אי שויון השיפועים למקרה $c < x < b$.

אותו דבר עבור: $l_{ac}(x) \leq f(x)$**: כלומר** $f(c) + m_{ac}(x-c) \leq f(x)$.

זה שקול ל־ $m_{ac} \leq \frac{f(x)-f(c)}{(x-c)} = m_{cx}$. **ונכון מאותה סיבה.**

- **(ב):**

יהי $a < x < c$. **נוכיח שמתקיים** $l_{bc}(x) \leq f(x)$,

כלומר, $f(c) + m_{bc}(x-c) \leq f(x)$.

נשים לב: $(x-c) < 0$ **ולכן חילוק בו הופך את אי השיויון.**

לכן זה שקול ל־ $m_{bc} \geq \frac{f(x)-f(c)}{(x-c)} = m_{cx}$.

אי השיויון האחרון מושאר לקורא החרוץ.

6.2.2 אי שיויון ינסן

תהי $f : I \to \mathbb{R}$ **פונקציה קמורה. אזי, לכל בחירה של** $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ **כך ש־** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,

ולכל בחירה של $x_1, ..., x_n \in I$ **מתקיים** $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

הוכחה: **באינדוקציה על** n.

עבור $n = 1$ **זה ברור, וכמו כן, עבור** $n = 2$,

מתקיים $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \lambda_2 = 1 - \lambda_1$ **ואז,**

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(זה בגלל הנתון ש־ f **קמורה).**

כעת נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$,

כלומר שעבור $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ **כך ש־** $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1$ **מתקיים:**

$$f(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i)$$

וכעת, נתבונן: עבור $\lambda_1, ..., \lambda_n$ **כך ש־** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ **מתקיים:**

$$\bigstar \; \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j} = \frac{\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}}{\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}} = 1$$

אבל מכיוון שאמרנו ש־ $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ **מתקיים:**

$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j = 1 - \lambda_n$ **(נשים לב שזהו הסכום במכנה של ★).**

ולכן נציב זאת ב־$\bigstar$:

$$\bigstar\ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} = 1$$

כעת, לפי הגדרת הפונקציה הקמורה:

$$\blacklozenge\ f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = f(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n) = f((1-\lambda_n)\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i + \lambda_n x_n)$$

$$\leq (1-\lambda_n) f(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i) + \lambda_n f(x_n)$$

אבל לפי הנחת האינדוקציה, מכיוון ש$\bigstar$, מתקיים:

$$f(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} f(x_i)$$

ולכן חזרה ל־$\blacklozenge$:

$$\leq (1-\lambda_n)\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} f(x_i) + \lambda_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

ובזאת הוכחנו את הנדרש לכל n.

6.2.3 תהי $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ **פונקציה קמורה ונניח ש** $lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ **אזי** $f(x)$ **מונוטונית יורדת**

דרושה הוכחה.

7 הנגזרת

7.1 הגדרות בסיסיות

- תהי $f: I \to \mathbb{R}$. נאמר ש־f **גזירה** ב־$x \in I$ אם:
  קיים הגבול $lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = L \in \mathbb{R}$ **(כאשר** $x+h \in I$**)**.
  במקרה זה, **נסמן:** $f'(x) = L$.
- הערה: פונקציה שגזירה ב־x_0 היא רציפה ב־x_0.

7.2 כללי גזירה בסיסיים

כאשר f,g גזירות ב־x_0 מתקיימים החוקים הבסיסיים:

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = (f' \cdot g)(x_0) + (f \cdot g')(x_0)$
- $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{(f'\cdot g)(x_0) - (f \cdot g')(x_0)}{(g(x_0))^2}$

- כלל השרשרת:
$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$ **כאשר** g **גזירה ב־**x_0 **ו־**f **גזירה ב־**$g(x_0)$.
- נגזרת של **פונקציה הופכית**:
$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

הוכחות לכללים הנ"ל:

7.2.1 נגזרת של חיבור\חיסור פונקציות

אם f **ו־** g **גזירות ב־**a **אזי** $f\pm g$ **גזירה וקיים:**

$$(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$$

הוכחה:

יהי $a+h$ **בסביבת** a **בה** f,g **מוגדרות.**

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+hw_1(h)$$

$$g(a+h)=g(a)+hg'(a)+hw_2(h)$$

כאשר $lim_{h\to 0}w_1(h)=0,\ lim_{h\to 0}w_2(h)=0$.

אזי, $(f\pm g)(a+h)=f(a+h)\pm g(a+h)=$

$$=(f(a)\pm g(a))+h(f'(a)\pm g'(a))+h(w_1(h)\pm w_2(h))=$$

$$=(f\pm g)(a)+h(f'(a)\pm g'(a))+h(w_1(h)\pm w_2(h))$$

וכמובן,

$$lim_{h\to 0}(w_1(h)\pm w_2(h))=lim_{h\to 0}w_1(h)\pm lim_{h\to 0}w_2(h)=0\pm 0=0$$

ולכן $f\pm g$ **גזירה ב־**a **וקיים:**

$$(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$$

7.2.2 נגזרת של מכפלה

אם f,g **גזירות ב־**a **אז** $f\cdot g$ **גזירה ב־**a **וקיים:**

$$(f\cdot g)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

הוכחה:

יהי $a+h$ **בסביבת** a **בה** f,g **מוגדרות.**

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+hw_1(h)$$

$$g(a+h)=g(a)+hg'(a)+hw_2(h)$$

כאשר $lim_{h\to 0}w_1(h)=0,\ lim_{h\to 0}w_2(h)=0$.

אזי, $(f\cdot g)(a+h)=f(a+h)\cdot g(a+h)=$

$$=f(a)g(a)+h(f'(a)g(a)+f(a)g'(a))+$$

$$+h\cdot h\cdot(f'(a)g'(a)+f'(a)w_2(h)+g'(a)w_1(h)+w_1(h)w_2(h)$$

וכמובן, כל הביטוי הימני ביותר הוא פונק' אפסית,

ולכן $f\cdot g$ גזירה ב־a וקיים:

$$(f\cdot g)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

7.2.3 נגזרת של $\frac{1}{f}$

אם $f(x)$ גזירה ב־a ו־$f(a)\neq 0$ אזי גם $\frac{1}{f}$ גזירה ב־a וקיים $(\frac{1}{f})'(a)=\frac{-f'(a)}{f(a)^2}$.

הוכחה:

עקב גזירות f ב־a אזי היא גם רציפה ב־a. ולכן $f(x)\neq 0$ בסביבה קטנה מספיק של a.

נסתכל על:

$$\frac{\frac{1}{f}(a+h)-\frac{1}{f}(a)}{h}=\frac{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}}{h}=\frac{f(a)-f(a+h)}{h\cdot f(a+h)\cdot f(a)}=-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{f(a+h)f(a)}$$

ולכן כעת נתבונן ב $lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f}(a+h)-\frac{1}{f}(a)}{h}$: הוא שווה ל־

$$lim_{h\to 0}-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{f(a+h)f(a)}=$$

$$=-(lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h})\cdot(\frac{1}{lim_{h\to 0}f(a+h)})\cdot\frac{1}{f(a)}=$$

$$=-f'(a)\cdot\frac{1}{f(a)}\cdot\frac{1}{f(a)}=\frac{-f'(a)}{f(a)^2}$$

(כאשר הגבול האחרון במכנה נכון עקב רציפות f ב־a).

7.2.4 נגזרת של מנת פונקציות

לפי מכפלה והמשפט הקודם בנוגע ל־$\frac{1}{f}$:

$$(\frac{f(x)}{g(x)})'=(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)})'=f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)(\frac{1}{g(x)})'=$$

$$=\frac{f'(x)}{g(x)}+f(x)(\frac{-g'(x)}{g(x)^2}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

7.2.5 כלל השרשרת

בינתיים לא מצאתי הוכחה שתהיה פשוטה להבנה.

7.2.6 נגזרת של פונקציה הפוכה

מתקיים: $f^{-1}(f(x)) = x$ ולכן חיש מהר נגזור את הממזר:

$f'(x)\cdot(f^{-1})'(f(x)) = 1$ ונחלק ב־$f'(x)$:

$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

כעת **נסמן** $f(x) = y$ וקיבלנו: (נזכור ש־$x = f^{-1}(y)$)

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

7.3 המשפטים היסודיים של החשבון הדיפרנציאלי (+עוד כמה)

7.3.1 למה: סימן הנגזרת גורר עליה, ירידה

נוכיח: אם $f'(a) > 0$ אז f עולה בנקודה a. (אותו דבר ליורדת, רק הפוך).

הוכחה:

נניח שמתקיים $f'(a) > 0$. אזי $lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$.

כלומר קיימת סביבה של a שבה **המנה** הנ"ל **חיובית**.

בסביבה זאת,

אם $x > a$ אזי המכנה חיובי ולכן גם המונה **צריך להיות חיובי**,

ולכן $f(x) - f(a) > 0 \;\Leftarrow\; f(x) > f(a)$.

אם $x < a$ אזי המכנה שלילי ולכן גם המונה **צריך להיות שלילי**,

ולכן $f(x) - f(a) < 0 \;\Leftarrow\; f(x) < f(a)$.

ובכל מקרה הפונקציה עולה. ההוכחה זהה עבור נגזרת שלילית.

7.3.2 משפט פרמה

אם f גזירה בנקודה a, ואם ל־f יש מקסימום או מינימום בנקודה a בפנים תחום ההגדרה,

אז $f'(a) = 0$.

הוכחה: (בהתבסס על הלמה הקודמת) אם $f'(a) > 0$ הפונקציה עולה ממש ב־a. ומכיוון ש־a בפנים תחום ההגדרה (כלומר לא בקצוות), זאת לא נקודת מקסימום או מינימום במקרה זה.

וכן גם אם $f'(a) < 0$, הפונקציה יורדת ממש ב־a. ואז זו לא נקודת מקסימום או מינימום במקרה זה גם.

ולכן $f'(a) = 0$.

7.3.3 משפט רול

אם פונקציה f רציפה ב־ $[a,b]$ וגזירה ב־ $]a,b[$ ואם $f(a)=f(b)$,
אז קיים $a<c<b$ כך ש־ $f'(c)=0$.

הוכחה: אם קיים $a<x<b$ כך ש $f(x)>f(a)=f(b)$, אז מכיוון ש f רציפה ב־$[a,b]$, יש לה מקסימום בקטע,

ומכיוון ש־$f(x)$ גדול מהערכים בקצוות, מקסימום זה אינו באף קצה.

ולכן נסמן נקודת מקסימום זו ב־c ולפי משפט פרמה, $f'(c)=0$.

כמו כן אם קיים $a<x<b$ כך ש־ $f(x)<f(a)=f(b)$ אזי יש ל־f מינימום c בפנים הקטע ו־ $f'(c)=0$.

נותר המקרה בו לכל $a<x<b$ מתקיים $f(a)=f(x)=f(b)$ ואז f קבועה, ו־ $f'(x)=0$ לכל $a<x<b$.

7.3.4 משפט הערך הממוצע של לגראנז'

תהי fפונקציה רציפה ב־ $[a,b]$ וגזירה ב־ $]a,b[$
אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש־ $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הוכחה: כדאי לשים לב שההוכחה לערך הממוצע של קושי לא מסתמכת על הוכחה זאת,

וכמו כן משפט זה הוא מקרה פרטי שלה, אז חבל ללמוד את ההוכחה הזאת...

תהי $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. $g(x)$ רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־$]a,b[$.

וכעת,

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a=\frac{1}{b-a}(bf(a)-af(a)-af(b)+af(a))=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b=\frac{1}{b-a}(bf(b)-af(b)-bf(b)+bf(a))=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

כלומר $g(a)=g(b)$.

לכן, לפי משפט רול, קיימת $a<c<b$ כך ש $g'(c)=0$. ולכן, $g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

$\Leftarrow$ $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

7.3.5 משפט דרבו

תהי f פונקציה גזירה בקטע $[a,b]$ ויהי t מספר בין $f'(a)$ ל־ $f'(b)$ (ממש, כלומר אי שוויון חזק).

אז קיים $a<c<b$ כך ש־ $f'(c)=t$.

הוכחה: בה"כ נניח ש $f'(a) < f'(b)$, כי אם נוכיח את המשפט למקרה זה, אז במקרה ש־ $f'(a) > f'(b)$ אז:

$$(-f)'(a) = -f'(a) < -t < -f'(b) = (-f)'(b)$$

ולפי המקרה שנוכיח, קיים $a < c < b$ כך ש $(-f)'(c) = -t$ ולכן $f'(c) = t$.

כמו כן, די לנו לטפל במקרה בו $t = 0$, כי אם הוכחנו מקרה זה, נתבונן בפונקציה $g(x) = f(x) - tx$

ואז $g'(a) = f'(a) - t < f'(b) - t = g'(b)$ ולפי המקרה שנוכיח, קיים $a < c < b$ כך ש $g'(c) = 0 = t \iff f'(c) - t = 0$ ואז:$\Leftarrow f'(c) = t$.

ניגש **להוכחה**:

מכיוון ש $f'(a) < 0 = t$, f יורדת ממש ב־a ולכן קיימת נקודה $a < a* < b$ כך ש $f(a*) < f(a)$.

$f'(b) > 0 = t$ ולכן f עולה ממש ב־b ולכן קיימת $a < b* < b$ כך ש $f(b*) < f(b)$.

מכיוון שf רציפה ב־$[a, b]$ יש לה נקודת מינימום c.

c לא יכולה להיות a כי $f(a*) < f(a)$, ואינה יכולה להיות b כי $f(b*) < f(b)$.

ולכן c בפנים הקטע $[a, b]$ ולכן, לפי משפט פרמה, $f'(c) = 0$.

7.3.6 "משפט שתי המכוניות" ־ שם לא רשמי (וריאציה של משפט רול)

תהיינה f, g פונקציות רציפות ב־$[a, b]$, וגזירות ב־$]a, b[$, כך ש $f(a) = g(a)$ ו־ $f(b) = g(b)$.

אז קיים $a < c < b$ כך ש $f'(c) = g'(c)$.

הוכחה: שימוש במשפט רול לפונקציה $f(x) - g(x)$:

בנקודות a, b מתקבל $f(x) - g(x) = 0$ ולפי רול, יש נקודה שבה $(f(x) - g(x))' = 0$ ולכן, שם $f'(x) = g'(x)$.

7.3.7 משפט הערך הממוצע של קושי

תהיינה f, g פונקציות רציפות ב$[a, b]$ וגזירות ב$]a, b[$.

אז קיימת $a < c < b$ כך ש: $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$.

ולכן אם $g'(x) \neq 0$ לכל $a < x < b$ אזי: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

נשים לב שעבור $g(x) = x$ זהו משפט הערך הממוצע של לגראנז'.

הוכחה: נגדיר שתי פונקציות:

$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a))$ ו־ $w(x) = (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$.

(דרך קלה לזכור אותן: $x - a$ משמאל, $b - a$ מימין. f, g מתחלפות).

(...ניתן לחשוב שקושי: 1857-1789 כל כך זקן שהוא וודאי כבר סבא: $xaba$).

עבור $x = a$ **מתקבל** $h(a) = w(a) = 0$.

עבור $x = b$ **מתקבל** $h(b) = w(b) = (g(b) - g(a))(f(b) - f(a))$.

ולכן לפי משפט "שתי המכוניות" הנ"ל, קיבלנו שישנה $a < c < b$ **כך ש** $h'(c) = w'(c)$.

(אם גוזרים עד הסוף מתקבלת התוצאה המבוקשת).

7.3.8 כלל לופיטל

יהי a **אחד מ־** $s, s^+, s^-, \infty, -\infty$**, ויהי נתון קטע שהוא סביבה של** a**,**

ותהינה f, g **פונקציות מוגדרות וגזירות בקטע זה. ויהי** $g'(x) \neq 0$ **בקטע זה.**

יהי קיים $lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ **כאשר** $-\infty \leq L \leq \infty$.

ואם קיים אחת משתי האופציות:

- $lim_{x \to a} f(x) = lim_{x \to a} g(x) = 0$
- $lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

אז מתקיים: $lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

עוד גרסא של המשפט היא כאשר $lim_{x \to a} f(x) = lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, כנראה. (ראו ניסוח המשפט בתר' 12).

הוכחה:

נוכיח רק את הגבול מימין. ההוכחה משמאל מקבילה.

כלומר נתבונן בסביבה $]a, b[$ של a, ונחשב מהו הגבול $lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(נזכור שיכול להיות ש־$a = \pm\infty$ גם).

תחילה נוכיח טענת עזר שתסדר לנו את ההוכחה לחלוטין:

טענת עזר:

אם $-\infty \leq L < \infty$, אז לכל $L < Q$

קיים $a < c_1 < b$ כך **שלכל** $a < x < c_1$ מתקיים $\frac{f(x)}{g(x)} < Q$.

ואם $-\infty < L \leq \infty$, אז לכל $K < L$

קיים $a < c_2 < b$ כך **שלכל** $a < x < c_2$ מתקיים $K < \frac{f(x)}{g(x)}$.

הוכחת הטענה: נוכיח למקרה הראשון בלבד. המקרה השני מוכח בצורה דומה מאוד.

כלומר אנו מניחים ש $-\infty \leq L < \infty$.

יהי $L<Q$, ונבחר $L<R<Q$ כרצוננו. נזכור שנתון: $lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$,

ולכן נבחר c כך שיתקיים $\frac{f'(x)}{g'(x)}<R$ לכל $a<x<c$. (אפשר בגלל קיום הגבול).

כעת אנו מתבוננים בסביבה של $]a,c[$:

יהיו s,t בסביבה זו, כלומר $a<s<t<c<b$.

לפי משפט הערך הממוצע של קושי, קיים $u\in]s,t[$ כך ש:

$$\frac{f(s)-f(t)}{g(s)-g(t)}=\frac{f'(u)}{g'(u)}<R \quad \bigstar$$

(קטן מ־R כי אנחנו בסביבת $]a,c[$, כמובן!)

וכעת:

- אם $lim_{x\to a^+}f(x)=lim_{x\to a^+}g(x)=0$, אזי, **נקבע את** t ואז:

  $lim_{s\to a^+}\frac{f(s)-f(t)}{g(s)-g(t)}=\frac{0-f(t)}{0-g(t)}=\frac{f(t)}{g(t)}$

  כלומר הזזנו את $s\to a$ כך ש:

  "$a<s<u<t<c$" $\Leftarrow$שאף ל־"$a=s<u<t<c$".

  אבל יכלנו לבחור **כל** $a<t<c$ (כל עוד $s<t$ כמובן),

  ולכן הטענה נכונה. (עקב $\bigstar$).

- במקרה של $lim_{x\to a^+}g(x)=\pm\infty$:

נשים לב שלפי ההנחה $g'(x)\neq 0$ ב־$]a,b[$ ולכן, או ש־$g'(x)>0$ או $g'(x)<0$.
אבל לא ייתכן שמתחלף הסימן, כי אחרת לפי **משפט ערך הביניים של דרבו,**
היה קיים $x\in]a,b[$ כך ש־$g'(x)=0$, בניגוד להנחה.
אז אם נסתכל בסביבה מספיק קטנה (ע"י הזזת b שמאלה), אזי נקבל ש־$g'(x)$
לא משנה סימן.
נניח בה"כ ש־$g'(x)<0$, לכל $x\in]a,b[$.
(ההבדל יפורט בהמשך בין בחירה זו לשניה).

עקב ההנחה ש־$g'(x)<0$, מתקיים ש־$g(x)$ יורדת.

(אם היינו מניחים הפוך היא היתה עולה).

מכיוון שאנו מתעסקים בגבול מימין, פירושו ש־$lim_{x\to a^+}=\infty$.

עקב כך ניקח סביבה מצומצמת מספיק כך ש־$g(x)$ חיובית בה.

(אם היינו מניחים $g'(x)>0$ אזי היינו בוחרים סביבה שבה $g(x)$ שלילית).

כעת נחזור ל־$\bigstar$:

$\frac{f(s)-f(t)}{g(s)-g(t)}<R$ ונשחק קצת:

(הערה לגבי מה היה קורה כאן לו היינו בוחרים $g'(x)>0$ בהמשך)

$$f(s)-f(t)<Rg(s)-Rg(t)$$

$$f(s)<Rg(s)+f(t)-Rg(t)$$

$$\frac{f(s)}{g(s)}<R+\frac{f(t)-Rg(t)}{g(s)}\leq R+|\frac{f(t)-Rg(t)}{g(s)}| \quad \blacklozenge$$

(מותר לחלק ב־$g(s)$ כי הנחנו ש־$g(x) > 0$).

מה היה קורה בקטע האחרון אם היינו בוחרים $g'(x) > 0$?
אזי, המכנה בביטוי $\frac{f(s)-f(t)}{g(s)-g(t)}$ היה שלילי כי $g(x)$ עולה ושלילית במקרה זה,
ובכפל בו הפכנו את אי־השיוויון. אבל אח"כ חילקנו ב־$g(t) < 0$ אז הוא התהפך חזרה!
ולכן הכל טוב ויפה ואפשר לישון טוב בלילה.

כעת, מכיוון ש־$lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$,

אזי קיים ערך s מספיק קטן שעבורו לכל $a < x < s$, מתקיים

$$|\frac{f(t)-Rg(t)}{g(s)}| < Q - R$$

(כי המכנה שואף לאינסוף אז כל העניין שואף ל־0).

ולכן, חזרה ל־♦:

$Q = R + (Q-R) > |\frac{f(t)-Rg(t)}{g(s)}| + R > \frac{f(s)}{g(s)}$ כנדרש.

בכך הוכחנו את טענת העזר.

כעת, ניגש ל**הוכחת המשפט עצמו:**

יש 3 אופציות:

- אם $L \in \mathbb{R}$, כלומר מדובר בגבול ממשי,
אזי לכל $\epsilon > 0$ נבחר $Q = L + \epsilon$, $K = L - \epsilon$. ואז לפי טענת העזר,
נבחר $c = min(c_1, c_2)$ ואז לכל $a < x < c$ מתקיים:
$$L - \epsilon = K < \frac{f(x)}{g(x)} < Q = L + \epsilon$$
כלומר $lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
- אם $L = -\infty$ אזי לפי הלמה, לכל $-\infty < Q$ כלומר לכל Q שהוא,
נוכל לבחור $a < c < b$ קטן מספיק כך ש־$\frac{f(x)}{g(x)} < Q$ לכל $a < x < c$,
כלומר $lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.
- אם $L = \infty$ אזי לפי הלמה, לכל $K < \infty$ כלומר לכל K שהוא,
נוכל לבחור $a < c < b$ קטן מספיק כך ש־$K < \frac{f(x)}{g(x)}$ לכל $a < x < c$,
כלומר $lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

7.3.9 לופיטל $\frac{0}{0}$ - הגבול בנקודה ממשית $a \in \mathbb{R}$ - הוכחה אחרת

לא ממש נחוץ כי ההוכחה הקודמת מכסה את זה,

אבל זה שונה ומעניין ועשינו את זה בהרצאה:

הוכחה: נניח שf, g גזירות בסביבת a ומתקיים $g'(x) \neq 0$ וגם

$lim_{x\to a}f(x) = lim_{x\to a}g(x) = 0$.

אזי נראה ש: $lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

במידה וגבול הנגזרות קיים. (גם במובן הרחב).

ניגש להוכחה:

נסמן: $lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ונראה ש־$lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

נגדיר גם: (נשים לב שרציפות הפונק' לא תיפגע,

כי לכל היותר אנו מסלקים אי רציפות סליקה ב־a):

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if x}\neq\text{a} \\ 0 & \text{if x=a} \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if x}\neq\text{a} \\ 0 & \text{if x=a} \end{cases}$$

ואז כמו שאמרנו אין אי רציפות ב־$x = a$ לפונ' החדשות:

$$lim_{x\to a}F(x) = lim_{x\to a}f(x) = 0 = F(a)$$

$$lim_{x\to a}G(x) = lim_{x\to a}g(x) = 0 = G(a)$$

כעת נתבונן בקטע $[a, x]$ כלומר כאשר x בסביבת a

ומקיים $x > a$. ומכיוון ש־F, G רציפות בקטע $[a, x]$,

גזירות ב־$]a, x[$ ו־$G' \neq 0$ אזי לפי **משפט הערך הממוצע של קושי,**

קיים $a < c < x$ כך ש־

$\frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$ (נזכור שהן שוות 0 ב־a).

וכעת, מכיוון ש־$a < c < x$, אזי כאשר $x \to a$ כך גם $c \to a$.

(עקב כלל הסנדויץ') ומתקיים:

$$lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a^+}\frac{F(x)}{G(x)} = lim_{c\to a^+}\frac{F'(c)}{G'(c)} = lim_{c\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

<u>באופן</u> <u>דומה</u> לגבול <u>משמאל</u>:

נתבונן בקטע $[x, a]$ כלומר כאשר x בסביבת a ומתקיים $x < a$.

לפי הערך הממוצע של קושי קיים $x < c < a$ כך ש־

$\frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$ (נזכור שהן שוות 0 ב־a).

ומכיוון ש־$x < c < a$ אזי כאשר $x \to a$ כך גם $c \to a$ מסנדויץ',

ומתקיים:

$$lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a^-}\frac{F(x)}{G(x)} = lim_{c\to a^-}\frac{F'(c)}{G'(c)} = lim_{c\to a^-}\frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

ולכן הראינו שהגבול שווה משני ולכן $lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

8 קירובים ממעלה n לפונקציות

8.1 הנגזרת כקירוב ליניארי

8.1.1 הגדרה: גזירות של פונקציה

הפונקציה f גזירה בנקודה a אם"ם קיים הגבול $lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ וגבול זה נקרא הנגזרת של f בנקודה a. נסמנו $f'(a)$.

נשים לב שאם $h=x-a$ אזי זה שקול ל:

הפונקציה f גזירה בנקודה a אם"ם קיים הגבול $lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ וגבול זה נקרא הנגזרת של f בנקודה a. נסמנו $f'(a)$.

8.1.2 הגדרה: פונקציה אפסית

נאמר שפונקציה w היא אפסית, אם מתקיים $w(x)=x\cdot w^*(x)$ עבור פונקציה w^* שהיא רציפה ב־0 וגם $w^*(0)=0$.

למה: $w(x)$ היא אפסית אם"ם מתקיים $w(0)=0$ וגם $lim_{x\to 0}\frac{w(x)}{x}=0$.

הוכחה: לפי ההגדרה הנ"ל, מקבלים:

$$lim_{x\to 0}\frac{w(x)}{x}=lim_{x\to 0}\frac{x\cdot w^*(x)}{x}=lim_{x\to 0}w^*(x)=w^*(0)=0$$

8.1.3 הנגזרת כקירוב ליניארי

תהי f פונקציה ממשית, אזי f גזירה ב־a והנגזרת שלה בנקודה זו שווה ל־$f'(a)$ אם"ם מתקיים:

$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+w(h)$ כאשר $w(h)$ פונקציה אפסית.

או: $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+w(x-a)$ כאשר $h=x-a$.

(נשים לב שזה פולינום טיילור ממעלה 1!)

הוכחה: נחלק ב־h ונעביר אגפים, ונקבל: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)+\frac{w(h)}{h}$.

וכעת, כאשר $h\to 0$, מקבלים לפי הלמה של הפונקציות האפסיות: $lim_{h\to 0}\frac{w(h)}{h}=0$,

ואז קיבלנו $f'(a)=lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ וזוהי הגדרת הנגזרת המפורשת.

בכיוון שני: נניח שמתקיים ש־f גזירה ב־a ונסמן נגזרת זו ב־ $f'(a)$.

כעת נגדיר פונקציה אפסית שתקיים את התנאי הרצוי:

$$w(h)=f(a+h)-f(a)-f'(a)h$$

ואכן, בהצבת $h=0$ מתקבל $w(0)=0$ כנדרש מפונקציה אפסית, וגם,

בדומה לכיוון השני, ניתן לחלק ולהעביר אגף ונקבל $\frac{w(h)}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)$.

וכעת בהשאפת $h\to 0$ נקבל בצד ימין, עקב ההנחה ש־$f'(a)$ היא הנגזרת, ששני האיברים באגף ימין מתאפסים,

ואז $lim_{h\to 0}\frac{w(h)}{h}=0$ ולכן לפי הלמה מקודם, $w(h)$ אפסית.

8.2 קירובים מסדר n ־ הגדרות

8.2.1 הגדרה: קירוב מסדר n

<u>מינוח "h":</u>

פולינום $a_0+a_1h+...+a_nh^n$ נקרא קירוב ממעלה n ל־f ב־x_0 אם קיימת פונקציה $w_n(h)$ כל שלכל h בסביבת 0:

$f(x_0+h)=a_0+a_1h+...+a_nh^n+h^nw_n(h)$ וגם $lim_{h\to 0}w_n(h)=0$.

דרך אחרת לכתוב זאת, אם נעביר את הפולינום אגף ונחלק ב־h^n, וכמו כן נשאיף $h\to 0$ נקבל:

$lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-(a_0+a_1h+...+a_nh^n)}{h^n}=lim_{h\to 0}w_n(h)=0$.

נשים לב שקירוב ליניארי הוא פשוט קירוב ממעלה 1 ל־f ב־x_0.

נשים לב גם ש־$w_n(h)$ היא השארית ־ יש לה נוסחאות מפורשות (ראה\י סוף הפרק).

<u>או</u> <u>במינוח</u> <u>של</u> $h=(x-x_0)$: (ייתכנו טעויות, זה לא מההרצאה):

פולינום $a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n$ נקרא קירוב ממעלה n ל־f ב־x_0,

אם קיימת פונקציה $w_n(x-x_0)$ כל שלכל x בסביבת x_0:

$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^nw_n(x-x_0)$

וגם $lim_{x\to x_0}w_n(x-x_0)=0$.

דרך אחרת לכתוב זאת, אם נעביר את הפולינום אגף ונחלק ב־$(x-x_0)^n$, וכמו כן נשאיף $x\to x_0$ נקבל:

$lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}=lim_{x\to x_0}w_n(x-x_0)=0$.

שימו לב: זה שקול להשקה מסדר n!

8.2.2 הגדרה: השקה מסדר n

תהיינה f,g מוגדרות בסביבת נקודה a. נאמר ש־f,g משיקות מסדר n ב־a,

אם $lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-g(a+h)}{h^n}=0$. זה שקול לתנאי:

אם לכל $a+h$ בסביבה קיים $f(a+h)=g(a+h)+h^nw(h)$ כאשר $w(h)$ רציפה ב־0 ו־$w(0)=0$.

נסמן יחס זה: $f \sim_{n,a} g$. זהו **יחס שקילות** (ראה משפט בהמשך).

ובנוסח $h = x - a$:

תהיינה f, g מוגדרות בסביבת נקודה a. נאמר ש־f, g משיקות מסדר n ב־a,

אם $lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n} = 0$. זה שקול לתנאי:

אם לכל x בסביבה קיים $f(x) = g(x) + (x-a)^n w(x-a)$

כאשר $w(x-a)$ רציפה ב־0 ו־$w(a) = w(a-a) = w(0) = 0$.

8.2.3 פולינום טיילור

יהי $p(x) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n$ פולינום המשיק ל־f ב־a מסדר n.

(כלומר, המקיים לכל $a + h$ בסביבת a: $f(a+h) = p(a+h) + h^n w(h)$, כאשר $w(h)$ רציפה ב־0 ו־$w(0) = 0$.)

אם יש לפונקציה $w(h)$ נגזרת n־ית ב־0 אזי p הוא הפולינום שערכו וערך n נגזרותיו הראשונות ב־a שווים לאלו של f,

כלומר לכל $0 \le k \le n$: $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

פולינום זה ייקרא פולינום טיילור מסדר n לפונקציה.

ובניסוח $h = (x-a)$

יהי $p(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n$ פולינום המשיק ל־f ב־a מסדר n.

(כלומר, המקיים לכל $a + h$ בסביבת a:

$f(x) = p(x) + (x-a)^n w(x-a)$, כאשר $w(x-a)$ רציפה ב־0

ו־$w(a) = w(a-a) = w(0) = 0$.)

אם יש לפונקציה $w(x-a)$ נגזרת n־ית ב־a אזי p הוא הפולינום שערכו וערך n נגזרותיו הראשונות ב־a שווים לאלו של f,

כלומר לכל $0 \le k \le n$: $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

פולינום זה ייקרא פולינום טיילור מסדר n לפונקציה.

הוכחה:

$$f(a+h) = p(a+h) + h^n w(h)$$

כעת, כדי להשוות את הנגזרות של p ו־f, תחילה עלינו לברר

מה הן הנגזרות של $h^n w(h)$. אפשר לעשות זאת עם נוסחת לייבניץ, אבל היא לא חלק מחומר הקורס, ולכן די לנו לדעת שהנגזרת ה־k של $h^n w(h)$ היא סכום של מכפלות של נגזרות מסדר $\le n$ של w בחזקות טבעיות של h, חוץ מהנגזרת ה־n של $h^n w(h)$, שהיא מכפלה של $w(h)$ במספר.

כעת, אנו מסתכלים על המקרה $h = 0$ (או $x = a$ בנוסח השני). ולכן, כל איבר שבו מופיע h בחזקה טבעית מתאפס, וכמו כן האיבר שבו יש מכפלה של $w(h)$

במספר גם כן מתאפס כי $w(0)=0$ (או: $w(a)=0$ אין שארית בנקודת ההשקה). ולכן בכל מקרה כל n הנגזרות של $h^n w(h)$ מתאפסות וגם $h^n w(h)$ מתאפס בנקודה $h=0$.

ומכיוון שמתקיים שלכל h בסביבת a:

$f(a+h)=p(a+h)+h^n w(h)$ אז הערכים של f ו־p, וגם של n הנגזרות הראשונות שלהם, ב־a, **שווים** ־ כלומר:

$f^{(k)}(a)=p^{(k)}(a)$ לכל $0\le k\le n$. ★

(כי אמרנו שכל ה־$w(0)$־ים מתאפסים).

נזכור ש־$p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x-a)^i$

נתבונן בנגזרת ה־k של p:

$$p^{(k)}(x)=(\sum_{i=0}^{n}a_i(x-a)^i)^{(k)}=\sum_{i=k}^{n}a_i\frac{i!}{(i-k)!}(x-a)^{i-k}$$

$$=\sum_{i=k}^{n}a_i[i\cdot(i-1)\cdot...\cdot(i-k+1)]\cdot(x-a)^{i-k}$$

נשים לב שהסכום רץ מ־$i=k$ מכיוון שכל איבר בעל מעלה נמוכה יותר מ־k הושמד בגזירה.

כעת, כמו כן, לכל $i>k$, המחובר המתאים מתאפס בנק' a, כי הוא מהטיפוס:

$$a_i[...](a-a)^{i-k}=a_i[...]\cdot 0=0$$

והאיבר היחיד שלא מתאפס הוא כאשר $i=k$, ואז מקבלים:

$$a_k\cdot\frac{k!}{(k-k)!}(a-a)^{k-k}=a_k\cdot k!\cdot 1$$

ובסה"כ,

$p^{(k)}(a)=a_k k!$ ונציב זאת ב־★:

$$f^{(k)}(a)=p^{(k)}(a)=a_k k!$$

$\Leftarrow$ $a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ וזהו בדיוק המקדם של פולינום טיילור!

8.3 קירובים מסדר n ־ משפטים

8.3.1 קיים לכל היותר פולינום אחד שהוא קירוב ממעלה n ל־f ב־a

הוכחה: נניח שקיימים שני פולינומים כאלה: אזי

$$f(a+h)=a_0+a_1h+...+a_nh^n+h^n w_{n1}(h)$$

וגם: $f(a+h)=b_0+b_1h+...+b_nh^n+h^n w_{n2}(h)$

כאשר $lim_{h\to 0}w_{n1}(h)=lim_{h\to 0}w_{n2}(h)=0$.

ואז, נחסיר את שני הביטויים:

$$0=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)h+...+(a_n-b_n)h^n+h^n w_{n1}(h)-h^n w_{n2}(h)$$

ונסמן כל איבר כזה ב־c_k וכמו כן את חיסור שתי הפ' האפסיות ב־$w(h)$. נקבל:
$0 = c_0 + c_1h + ... + c_nh^n + h^nw(h)$

נוכיח שלכל $k \leq n$ מתקיים $c_k = 0$ ואז נקבל ששני הפולינומים בהכרח שווים.

נניח תחילה שקיים $k < n$ כך ש־$c_k \neq 0$ ויהי k המזערי מביניהם. אזי:

$0 = c_kh^k + ... + c_nh^n + h^nw(h)$. נעביר אגף ונחלק ב־$h^k$:

$c_k = -c_{k+1}h - ... - c_nh^{n-k} - h^{n-k}w(h)$.

מכיוון ש$k < n$, כל חזקות h באגף ימין הן חיוביות.

ולכן, בגבול כאשר $h \to 0$ נקבל $c_k = 0$, **בסתירה** לכך שהנחנו $c_k \neq 0$.

ולכן קיבלנו, $0 = c_nh^n + h^nw(h)$ (טיפלנו קודם רק ב־$k < n$).

נחלק ב־h^n ונקבל $0 = c_n + w(h)$ וכאשר $h \to 0$ נקבל $0 = c_n + 0$ ולכן $c_n = 0$.

8.3.2 יחס ההשקה מסדר n ($f \sim_{n,a} g$) הוא יחס שקילות. (רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי)

הוכחה: <u>רפלקסיביות:</u> כל פונקציה משיקה לעצמה.

כי: $lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a+h)}{h^n} = lim_{h\to 0}\frac{0}{h^n} = 0$

<u>סימטריות:</u> נתון ש $g \sim_{n,a} f$ אזי: $lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-g(a+h)}{h^n} = 0$ ואז:

$lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-f(a+h)}{h^n} = -lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-g(a+h)}{h^n} = 0$

<u>טרנזיטיביות:</u> נתון ש $g \sim_{n,a} f$ וגם $j \sim_{n,a} g$. נוכיח שמתקיים $j \sim_{n,a} f$.

נתון: $g(a+h) = f(a+h) + h^nw_1(h)$

וגם: $j(a+h) = g(a+h) + h^nw_2(h)$

נחבר: $j(a+h) = f(a+h) + h^n(w_1(h) + w_2(h)$

ונשים לב: $lim_{h\to 0}(w_1(h) + w_2(h)) = lim_{h\to 0}w_1(h) + lim_{h\to 0}w_2(h) = 0 + 0 = 0$
ולכן מתקיים התנאי הנדרש.

8.3.3 למה: אם $g \sim_{n,a} f$ ו־$0 \leq k < n$ אזי גם $g \sim_{k,a} f$. (פונקציות משיקות ממעלה n משיקות גם בכל מעלה אי שלילית קטנה מ n).

הוכחה:

נתון: $g(a+h) = f(a+h) + h^nw(h)$ כאשר $lim_{h\to 0}w(h) = 0$.

אבל אז גם: $g(a+h) = f(a+h) + h^k(h^{n-k}w(h))$.

ומכיוון ש־ $lim_{h\to 0}h^{n-k}w(h) = 0$ **אזי מתקיים לפי הגדרת ההשקה:**

$g \sim_{k,a} f$ וכמובן גם הפוך ־ זהו יחס סימטרי.

8.3.4 משפט: שני פולינומים p,q ממעלה $\geq n$ משיקים ב־a אם"ם הם שווים.

הוכחה:

נניח שהם משיקים, אזי,

יהי $p(a+h)=a_0+a_1h+...+a_nh^n$

ו־ $q(a+h)=b_0+b_1h+...+b_nh^n$.

נשים לב שלפי ההנחה ש־ $p\sim_{n,a}q$ אזי מתקיים $p(a+h)=q(a+h)+h^nw(h)$ (ישירות מן ההגדרה).

ולכן, $p(a+h)-q(a+h)=h^nw(h)$. (*)

נחסר את הפולינומים: $p(a+h)-q(a+h)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)h+...+(a_n-b_n)h^n$ ונסמן כל איבר כזה ב־c_k.

כלומר: $p(a+h)-q(a+h)=c_0+c_1h+...+c_nh^n$

ונראה שלכל $0\leq k\leq n$ מתקיים $c_k=0$.

נניח שלא, אזי יהי k המזערי כך ש $c_k\neq 0$ ואז לפי (*):

$c_kh^k+c_{k+1}h^{k+1}+...+c_nh^n=h^nw(h)$

נחלק ב־h^k ונקבל: $c_k+c_{k+1}h+...+c_nh^{n-k}=h^{n-k}w(h)$

כאשר $h\to 0$ יוצא: $c_k+0c_{k+1}+...+0c_n=0$ כלומר $c_k=0$, סתירה!

בכיוון השני, ברור שאם שני פולינומים שווים אז הם משיקים...

8.3.5 שארית לגראנז' (הוכחה ספציפית)

הערה: עדיף ללמוד את ההוכחה המשולבת של לגראנג'+קושי בהמשך.

תהי f גזירה n פעמים עם נגזרת n־ית רציפה ב־ a, וגזירה $n+1$ פעמים בסביבת a.

אז, לכל h בסביבה מתאימה של a, $f(a+h)=T_{n,a}(a+h)+R_{n,a}(h)$,

כאשר $T_{n,a}(a+h)$ הוא פולינום טיילור ממעלה n סביב a,

וגם: $R_{n,a}(h)=\frac{f^{(n+1)}(a+t)}{(n+1)!}h^{n+1}$ =שארית לגראנז', עבור $0<t<h$ (או $0>t>h$) מסויים.

<u>בניסוח $h=x-a$:</u>

תהי f גזירה n פעמים עם נגזרת n־ית רציפה ב־ a, וגזירה $n+1$ פעמים בסביבת a.

אז, לכל x בסביבה מתאימה של a, $f(x)=T_{n,a}(x)+R_{n,a}(x-a)$,

(לא בטוח לגבי ה־$R_{n,a}(x-a)$, אולי זה רק $R_{n,a}(x)$)

כאשר $T_{n,a}(x)$ הוא פולינום טיילור ממעלה n סביב a,

וגם: $R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ =שארית לגראנז', עבור t בין a ל־x מסויים.

__הוכחה:__

כדאי לשים לב: יש הוכחה משולבת של שארית זו והשארית של קושי בהמשך...!

נטען שהשארית היא $R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ כאשר t בין a ל־ x.

נניח ש־ $R_{n,a}(x)=M(x-a)^{n+1}$, ונחזיק את x **כקבוע. ו־**M **הוא מספר.**

נרצה להראות ש: $M=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$.

נסתכל ב $q(t)$ ־ בייצוג שלו ע"י פולינום טיילור והשארית:

$$q(t)=p(t)+M(t-a)^{n+1}$$

נראה מה זה אומר ביחס ל־$f(t)$. נשים לב:

כשמציבים $t=a$ מקבלים $q(a)=p(a)+M\cdot 0=f(a)$

(כי הפונקציות זהות בנקודה a).

כשמציבים $t=x$ (נזכור ש־x קבוע) מקבלים:

$q(x)=p(x)+M(x-a)^{n+1}=f(x)$.

ולכן נשתמש **במשפט שתי המכוניות:**

הוא אומר שקיים t_1 בין a ו־x כך ש־ $q'(t_1)=f'(t_1)$.

וכמו כן, מתקיים $q'(a)=f'(a)$ (כי השארית מתאפסת ב־a).

ולכן, באינדוקציה מוכיחים שניתן לעשות זאת n פעמים.

אז קיים $a<t_n<...<t_2<t_1<x$ **או** $x<t_1<t_2<...<t_n<a$.

ונקבל (ממשפט שתי המכוניות ומהתאפסות השארית ב־a):

$q^{(n)}(t_n)=f^{(n)}(t_n)$ **וגם** $q^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$.

ולכן פעם אחרונה לפי משפט שתי המכוניות: קיים t_{n+1} כך ש:

$$f^{(n+1)}(t_{n+1})=q^{(n+1)}(t_{n+1})$$

אבל, מכיוון ש־$p(x)$ היה פולינום ממעלה n, אזי בגזירה ה־$n+1$ של q הוא **הושמד,**

ולכן: $f^{(n+1)}(t_{n+1})=q^{(n+1)}(t_{n+1})=M\cdot(n+1)!$

נחלק ונקבל: $\frac{f^{(n+1)}(t_{n+1})}{(n+1)!}=M$ כנדרש.

8.3.6 שאריות: לגראנג', קושי

הוכחה זו מתוך מסמך פידיאף ללא בעלים מוצהרים, אבל אומר תודה בכל מקרה.

תהי f גזירה n פעמים עם נגזרת n־ית רציפה ב־ x_0, וגזירה $n+1$ פעמים בסביבת x_0.

ותהי $R_n(x)$ השארית מסדר n של פולינום טיילור מסדר n, כלומר

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

אזי, **השארית לפי קושי** היא:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n \cdot (x-x_0)}{n!}$$

כך ש־$x_0 < c < x$.

השארית לפי לגראנג' היא:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

(זהו לא בהכרח אותו c בשתי השאריות כמובן).

הוכחה:

נוכיח עבור סביבה שמאלית של x_0. לסביבה ימנית ההוכחה דומה.

נקבע את x כקבוע, ונסמנו $x = b$.

נגדיר פונקציה במשתנה t, המוגדרת ב־$[x_0, b]$:

$$\varphi(t) = f(b) - f(t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(b-t)^i$$

אם נציב $t = b$ נקבל $\varphi(b) = 0$,

ואם נציב $t = x_0$ נקבל $\varphi(x_0) = R_n(b)$ (כי הסכימה פה היא מ־1 ולא מ־0).

כעת, מכיוון ש־φ גזירה ב־$]x_0, b[$, נגזור אותה:

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(b-t)^i + \frac{f^{(i)}(t)}{i!} \cdot i \cdot (-1) \cdot (b-t)^{i-1}\right)$$

נפשט:

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \left(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(b-t)^i - \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \frac{f^{(i)}(t)}{(\mathbf{i-1})!}(b-t)^{i-1}\right)$$

ונשנה את הסכימה בביטוי הימני ונעלה את i ב־1 בהתאם:

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(b-t)^i - \sum_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{n-1}} \frac{f^{(i+1)}(t)}{\mathbf{i!}}(b-t)^i\right)$$

ונשארנו עם:

$\varphi'(t) = -f'(t) - \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n - \frac{f^{(1)}(t)}{0!}(b-t)^0\right)$ כלומר

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n + f'(t)$$

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \quad (*)$$

כעת, נגדיר פונקציה $\psi(t) = (b-t)^p$, $p > 0$.

$\psi(t)$ רציפה בקטע $[x_0, b]$, גזירה ב־$]x_0, b[$,

והנגזרת $\psi'(t) = -p(b-t)^{p-1}$ לא מתאפסת שם.

וגם: $\psi(b) = 0$, ו־ $\psi(x_0) = (b-x_0)^p$.

כעת נשתמש ב**משפט הערך הממוצע של קושי:**

קיים $x_0 < c < b$ **כך ש:**

$\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\varphi(b)-\varphi(x_0)}{\psi(b)-\psi(x_0)}$ **כלומר,**

$\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{-R_n(b)}{-(b-x_0)^p} = \frac{0-\varphi(x_0)}{0-\psi(x_0)}$**, ונציב את הנגזרות:**

$\frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n}{-p(b-c)^{p-1}} = \frac{R_n(b)}{(b-x_0)^p}$ **(השתמשנו ב־(*)). כלומר:**

$$R_n(b) = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n}{-p(b-c)^{p-1}} \cdot (b-x_0)^p$$

נפשט: $R_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)(b-c)^{n-p+1} \cdot (b-x_0)^p}{p \cdot n!}$

כעת נחזיר את $x = b$**, ונקבל את הנוסחה שממנה מסיקים את השאריות:**

(**) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^{n-p+1} \cdot (x-x_0)^p}{p \cdot n!}$ **, עבור** $x_0 < c < x$.

כעת, כדי לקבל את **השארית של לגראנג':**

נציב $p = n+1$ **ב־(**), וקיבלנו:**

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

כדי לקבל את **השארית של קושי:**

נציב $p = 1$ **ב־(**) וקיבלנו:**

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n \cdot (x-x_0)}{n!}}$$