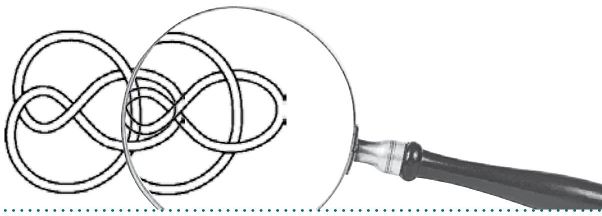
10 אבני דרך
בתולדות המתמטיקה



נתי ליניאל וגיל קלעי*

בניגוד לרוב מדעי הטבע, כמה מהתובנות העיקריות במתמטיקה הושגו עוד בעת העתיקה או בימי הביניים. ההתפתחות במתמטיקה נוטה להיות הדרגתית יותר מאשר במדעים אחרים ואינה מאופיינת במהפכות. כמו כן, קשה לתאר את התגליות החשובות לקהל רחב, וזאת משום שרבים ממושאי המחקר החשובים במתמטיקה הם מופשטים ורחוקים מחיי היומיום. תכונה מופלאה של המחקר המתמטי היא ששרויים בו יחדיו מניעים אסתטיים עם מטרות מעשיות ביותר.

פריצת דרך במדעי הטבע משמעה שנתגלתה תופעה חשובה (למשל מבנה ה-DNA) או שניתן הסבר עיוני לתופעה בסיסית ובלתי מוסברת (כגון האפקט הפוטו-אלקטרי). בניגוד לכך, מניע עיקרי לפיתוח תאוריות מתמטיות מקורו בבעיות קונקרטיות המלהיבות את דמיונם של המתמטיקאים, אף אם חשיבותה העיקרית של הבעיה בהיותה מבחן אובייקטיבי ליכולת המתמטית. נדגים זאת בעזרת שתי בעיות חשובות שפוצחו בזמננו: בעיית ארבעת הצבעים ומשפט פרמה.

משפט ארבעת הצבעים קובע שכל מפה ניתנת לצביעה בארבעה צבעים, כך שמדינות שכנות צבועות בצבעים שונים. טענה זו הוכחה על ידי קנת אפל (Appel) ו-וולפגנג הקן (Haken) ב-1976. בעיית פרמה (Fermat) קובעת שלמשוואה $x^n + y^n = z^n$, כש $n>2$, אין פתרונות במספרים טבעיים חיוביים x, y, z. העיסוק בהשערת פרמה הוליך לכמה מההתפתחויות המרכזיות בתורת המספרים ובאלגברה. אנדרו ויילס (Wiles), שפתר את הבעיה, נעזר בפתרונה של השערה אחרת שעוסקת ב"עקומים אליפטיים". ההוכחה קשורה לתחום מרכזי במתמטיקה מודרנית - "תורת ההצגות" - ולבעיות מרכזיות בתורה זו (השערות Langlands). ההוכחה של בעיית ארבעת הצבעים פשוטה מבחינה מושגית אבל מורכבת וארוכה, והיא מסתמכת על שימוש מסיבי במחשב.

1| מספרים ומערכות של מספרים - האי־רציונליות של שורש 2

אימרה מפורסמת של המתמטיקאי הידוע לאופולד קרונקר (Kronecker) גורסת: "את המספרים הטבעיים (...1,2,3) ברא אלוהים, כל היתר הוא מעשה ידי אדם". ואכן כבר פיתוח מושג האפס מחייב תובנה מופשטת יותר, שלא לדבר על מספרים שליליים. שברים (מספרים רציונליים) כמו $\frac{1}{2}$ או $\frac{3}{7}$ מבטאים גדלים מספריים מסובכים יותר, וגם אלה מקורם בתרבויות עתיקות. כבר היוונים גילו שלא כל גודל ניתן לבטא באמצעות שברים, תגלית שהביאה כמה אסכולות פילוסופיות באותה תקופה למשבר חמור. אין שבר שמתאר את אורך היתר של משולש ישר זווית ששני ניצביו באורך 1. כלומר, השורש הריבועי של 2 אינו מספר רציונלי. זוהי בוודאי אחת התגליות החשובות במתמטיקה, והיא גם מודל לתגליות אחרות במתמטיקה. מצד אחד עומד הצורך להרחיב את מושג המספר ולדון במערכות מספרים שונות, ומצד שני זהו משפט של אי־אפשרות: הוא מתאר משימה מתמטית טבעית – הצגת שורש 2 כשבר – שאיננה ניתנת לביצוע. חלק ניכר מההישגים המזהירים של המתמטיקה מתארים דווקא את מגבלותיה האינהרנטיות!

← **תגלית מס. 1: השורש הריבועי של 2 איננו מספר רציונלי**

2| גאומטריה, הגילוי של הגאומטריה הלא־אוקלידית, וטופולוגיה

הגאומטריה של אוקלידס (Euclid) מבוססת על אקסיומות – הנחות יסוד, ועל משפטים – טענות שניתן להוכיח באמצעות האקסיומות. מבנה לוגי זה הוא אב־טיפוס לכל תורה מתמטית.

← **תגלית מספר 2(א): הגאומטריה של אוקלידס**

התפתחות חשובה מהמאה ה־17 קושרת בין גאומטריה ואלגברה

*תודתנו נתונה לפרופסורים דרור בר־נתן ו־Günter Ziegler על התמונות המעטרות את המאמר.

סימטריה היא מושג מרכזי במתמטיקה ובמדעי הטבע. יש לה מקום מרכזי בפיתוח הגאומטריה. תורת החבורות עוסקת באופן שיטתי בחקר סימטריות.

על ידי תיאור מבנים גאומטריים באמצעות נוסחאות – הגאומטריה האנליטית שסללה דרך חדשה ויעילה לחקר יצירים גאומטריים ותכונותיהם.

כאלפיים שנה ניסו מתמטיקאים להוכיח את אקסיומת המקבילים באמצעות האקסיומות האחרות. לבסוף הצליחו לבנות גאומטריות אחרות, כגון הגאומטריה ההיפרבולית, שבה אקסיומת המקבילים איננה מתקיימת ואילו שאר האקסיומות של אוקלידס מתקיימות.

← תגלית מספר 2(ב): הגאומטריה הלא־אוקלידית.

גילוי הגאומטריה הלא־אוקלידית היווה מהפכה מחשבתית בתפישתם של המתמטיקאים, אם כי לא מדובר בתורה מאוחרת המחליפה תורה מוקדמת וסותרת אותה. התברר שלמרות חשיבותה, אין לגאומטריה האוקלידית מעמד אבסולוטי, ושגם בתיאור העולם הפיזיקלי יש מקום חשוב לגאומטריות לא־אוקלידיות. למושג הסימטריה מקום מרכזי בחקר גאומטריות שונות וממנו נגזר גם המושג של חבורה, שיוזכר בהמשך. ניתן לבסס את הגאומטריה גם על מושג המרחק ("מטריקה").

במאה ה־19 החלו לעסוק בגאומטריות בממדים גבוהים ואף בממד אינסופי, אך גם בגאומטריות סופיות, שבהן יש מספר סופי של נקודות וישרים. בתחום הטופולוגיה רואים שני יצירים גאומטריים כשקולים, אם האחד מתקבל מהאחר על ידי פעולות כלשהן של כיווץ ומתיחה. תחום זה נוסד בסוף המאה ה־19 ונחקר באינטנסיביות במאה ה־20. קשר עמוק בממד שלוש בין גאומטריה וטופולוגיה הוכח על ידי גרגורי פרלמן (Perelman) ב־2002. על עבודתו זו זכה השנה במדליית Fields.

3| אלגברה, משוואות ונוסחאות מתמטיות. תורת גלואה (Galois)

מקובל לחשוב שמתמטיקאים עוסקים במספרים, אבל מחברותיו של המתמטיקאי מלאות כרגיל בנוסחאות: ביטויים אלגבריים ובהם משתנים המיוצגים על ידי אותיות. לעתים אנו עוסקים בנעלמים – משתנים שעלינו למצוא את ערכיהם לפי משוואה, או מערכת של כמה משוואות. תחילת האלגברה בימי הביניים, ולמתמטיקאי הפרסי אל־ח'ואריזמי היה מקום מרכזי ביצירתה. במהלך ימי הביניים נמצאו נוסחאות לפתרון משוואות ריבועיות ואחר כך למשוואות ממעלה שלישית ורביעית[1]. הפתרונות מתקבלים בעזרת פעולות החשבון הבסיסיות, לרבות הוצאת שורשים מסדר כלשהו, כלומר תוך התבססות על פתרון המשוואה הפשוטה:

$x^n = a$

← תגלית 3: משפט אבל (Abel)־גלואה: למשוואה הכללית ממעלה חמש או יותר אין פתרון באמצעות פעולות חשבון והוצאת שורשים מסדר כלשהו.

מסקנה נוספת מתורת גלואה היא שאי אפשר לחלק זווית לשלושה חלקים שווים על ידי סרגל ומחוגה, בעיה שהעסיקה עוד את היוונים. תורת גלואה בישרה את בוא האלגברה המודרנית. מושג בסיסי שנתגלה במאה ה־19 והוא מרכזי בתורת זו הוא מושג החבורה: מעין מערכת של איברים דמויי מספרים שיש בה פעולה של "כפל", אך אין דורשים שיתקיים כלל החילוף. במספרים טבעיים מתקיים כלל החילוף, למשל $2x3 = 3x2$ אבל בחבורות כלל החילוף לאו דווקא תקף.

משוואות ממעלה גבוהה קשורות למערכת המספרים המרוכבים. כידוע יש משוואות ריבועיות ללא פתרונות ממשיים. אך אם מצרפים את המספר הדמיוני i, שהוא הפתרון למשוואה $x^2 = -1$, נוצרת מערכת המספרים המרוכבים ובה תמיד יש פתרון למשוואה. זהו מקרה פרטי של המשפט היסודי של האלגברה, הקובע שלכל משוואה פולינומית קיים פתרון במספרים מרוכבים.

4| אנליזה והקשר עם הפיזיקה

אימרה מפורסמת של גלילאו (האיש, לא העיתון...) קובעת ש"ספר הטבע כתוב בשפת המתמטיקה". אכן, מדהים לראות עד כמה מצליחה המתמטיקה בתיאורן ובניתוחן של תופעות טבעיות. הסבר חלקי לכך ניתן למצוא בעובדה שכמה וכמה פרקים חשובים במתמטיקה פותחו מלכתחילה למטרה זו. המקרה המפורסם ביותר הוא פיתוחו של החשבון הדיפרנציאלי על ידי ניוטון במטרה לנסח

ולהבין את חוקי המכניקה. הנגזרת של פונקציה F היא פונקציה אחרת המבטאת את קצב השינוי של הפונקציה F. למשל, אם אנו נוסעים במכונית מתל־אביב לירושלים, ואם מסמנים ב־$F(t)$ את מרחקנו מתל אביב בזמן t, אז הנגזרת (שאותה מסמנים על ידי $F'(t)$) היא המהירות הרגעית שבה נסענו בזמן t. כך ניתן לבטא ולחקור את אופן ההשתנות של גדלים פיזיקליים, ולמצוא את החוקים השולטים בתהליכים אלה. לכן פיזיקאים ומתמטיקאים רבים חוקרים משוואות דיפרנציאליות המתארות באופן מדויק וכמותי את התנהגותן של מערכות פיזיקליות יסודיות, כמו משוואת הגלים (המתארת תנועת גלים בתווך) ומשוואת החום (התפשטות החום). נקודת שיא בהתפתחות הפיזיקה הקלסית היתה תיאורו של מקסוול (Maxwell) את השדה האלקטרומגנטי בעזרת מערכת של משוואות דיפרנציאליות הקרויות על שמו.

← תגלית מספר 4(א): החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (אייזק ניוטון [Newton], גוטפריד לייבניץ [Leibniz], המאה ה־17)

האנליזה של פונקציות במספרים מרוכבים היא תחום חשוב ומרהיב ביופיו.

← תגלית מספר 4(ב): האנליזה של פונקציות מרוכבות (אוגוסטין קושי [Cauchy], ברנהרד רימן [Riemann], המאה ה־19).

האנליזה של פונקציות ממשיות ושל פונקציות מרוכבות היא נושא מרכזי במתמטיקה. אם באלגברה יש חשיבות רבה למניפולציה של משוואות וזהויות, הרי שבאנליזה יש מקום מרכזי לאי־שוויונים, להערכות ולקירובים. למשל קירוב של פונקציות בעזרת פולינומים ובעזרת פונקציות טריגונומטריות (תורת פוריה [Fourier] – אנליזה הרמונית).

יש עוד תחומים מתמטיים שלידתם בניסיון להבין תופעות פיזיקליות: חקר המכניקה הסטטיסטית עורר שאלות חדשות בהסתברות. חקר הסימטריות בעולם החלקיקים האלמנטריים עודד התפתחויות בתורת החבורות ועוד. מפתיע יותר שישנם

1. וראו: ג'ודי ואריה מלמד־כץ, "דו־קרבות בצהרי יום: משוואות אלגבריות ממעלות גבוהות", "גליליאו" 97.

שטחים מתמטיים שפיתוחם נבע ממוטיבציה אסתטית, ורק אחר כך התברר ערכם לתיאור ולניתוח תופעות טבעיות. מפתיע ומרתק להיווכח שגם שטחים מתמטיים שפותחו במטרה מפורשת לחקור מערכות ממדעי הטבע נוטים בהמשך "לפתח חיים עצמאיים" בתוך המתמטיקה גופא.[2]

5| הוכחות ומגבלותיהן: לוגיקה, תורת הקבוצות, האינסוף, ומשפט אי־השלמות של גדל (Gödel)

מושג ההוכחה: במתמטיקה אנו מדברים על "אקסיומות" – הנחות יסוד, ועל "משפטים" – טענות מתמטיות שניתן לגזור אותן מהאקסיומות באמצעות כללי היסק. המתמטיקה שונה ממדעים אחרים באופי אמיתותיה, היות שהנכונות של משפט מתמטי היא בלתי מעורערת.

מושג חשוב הדרוש לביסוס הכללים הלוגיים של המתמטיקה הוא המושג של "קבוצה" – אוסף של איברים. האפשרות לספור וליחס לקבוצה של איברים את מספר איבריה היא אבן יסוד בתרבות האנושית.

מושג האינסוף היה נושא לספקולציות ולדיונים אין־קץ בתחומי הפילוסופיה, הדתות והמטפיזיקה, ונחשב שנים רבות כעניין שמעבר לתפישה האנושית ובוודאי מחוץ לתחום החקירה המדעית. גאורג קנטור (Cantor) הראה כיצד להבין בעיות אלה במסגרת תורת הקבוצות. תגלית מפתיעה שלו היא שקיימים סוגים שונים של אינסוף. ה"עוצמה" של קבוצה היא המושג המתמטי למספר האיברים בקבוצה המאפשר להשוות בין גדלים של קבוצות (גם אינסופיות).

← תגלית מספר 5(א): קיימים סוגים שונים של אינסוף, למשל, עוצמת המספרים הממשיים גדולה מעוצמת המספרים הטבעיים.

נחזור למשפטים ולהוכחות. האם יש לנו ביטחון שהמתמטיקה היא עקבית? האם אי אפשר להוכיח דבר והיפוכו? האם כל טענה נכונה ניתנת להוכחה? שאלות אלה הטרידו מתמטיקאים וגם פילוסופים. האפשרות והצורך להוכיח שיסודות המתמטיקה איתנים ונקיים מסתירות התגברו בתחילת המאה ה־20. ה"משבר ביסודות המתמטיקה" באותה עת נסב על הקושי הגדול בפתרון שאלות אלה.

← תגלית מספר 5(ב): משפט אי־השלמות של גדל: בכל תורה מתמטית עשירה מספיק, ישנם משפטים נכונים שאינם ניתנים להוכחה.

אמנים לא מעטים הוקסמו מהעושר הצורני של אובייקטים מתמטיים ושילבו אותם בעבודותיהם

משפט גדל שלל את האפשרות להוכיח שהמתמטיקה אינה מביאה לסתירה, ואישר במידה רבה את החששות שהביאו למשבר. בד בבד הוא נקודת הסיום של המשבר ביסודות המתמטיקה. אף ששוב הצביעה המתמטיקה על מגבלותינו הבסיסיות, הפעם לגבי המתמטיקה עצמה, לא הפריע משפט גדל לשגשוגה.

6| אלגברה לינארית, תכנון לינארי ואופטימיזציה

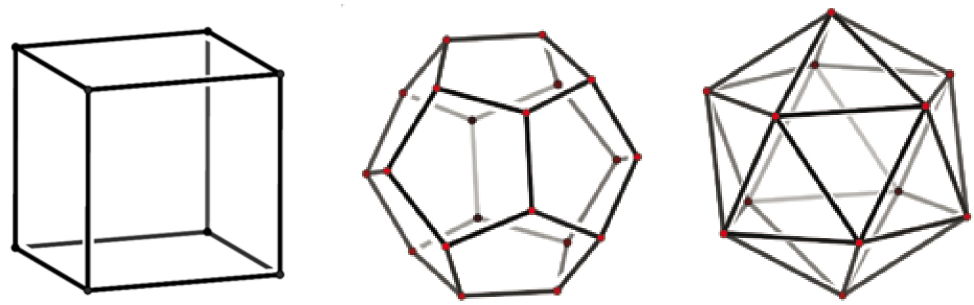
בשיעור האלגברה הראשון בבית הספר לומדים לפתור משוואה לינארית במשתנה יחיד. אחר כך – איך לפתור שתי משוואות בשני נעלמים ולפעמים גם שלוש משוואות בשלושה נעלמים. מה בדבר מערכת של n משוואות לינאריות ב־m נעלמים? לאלגברה הלינארית – תחום יסודי ושימושי ביותר במתמטיקה המודרנית – תשובות מספקות לשאלות אלה. מתברר שאוסף הפתרונות של מערכת כזו הוא תת־מרחב, "כרגיל" בממד n־m, ההפרש בין מספר הנעלמים למספר המשוואות. התורה גם מאפשרת לזהות מתי יש תלות לינארית בין המשוואות, הגורמת לחלק מהמשוואות לנבוע מהאחרות. ידועים אלגוריתמים יעילים לפתרון מערכות משוואות לינאריות ולהם שימוש מעשי רב.

← תגלית מספר 6(א): שיטת האלימינציה של גאוס (Gauss) לפתרון מערכת משוואות לינאריות.

איזה מזון כדאי לרפתן לתת לפרותיו כדי לספק את צורכי התזונה שלהן ולמעט ככל האפשר בהוצאות? זוהי בעיה אופיינית באופטימיזציה: מחפשים את האופטימום של פונקציית מטרה כלשהי (מזעור מחיר המזון) כשהמשתנים (כמה נצרוך מכל סוג מזון) צריכים לקיים אילוצים מסוימים (דרישות המינימום לתזונת הפרות). הבעיה שלפנינו, ורבות אחרות, נפתרות בעזרת תכנון לינארי – בעיות אופטימיזציה שבהן המשתנים צריכים לקיים משוואות לינאריות ואי־שוויונים לינאריים, ופונקציית המטרה היא לינארית. תורה זו מיושמת בתחומים מעשיים רבים, מפני שיש אלגוריתמים יעילים לפתרון בעיית התכנון הלינארי, כגון אלגוריתם הסימפלקס של דנציג

<

2 דוגמה מרשימה במיוחד היא התורה הארגודית (Ergodic theory), שלידתה בבעיות במכניקה סטטיסטית ומשמשת לאחרונה לפתרון בעיות בתורת המספרים ובקומבינטוריקה. המתמטיקאי הישראלי הלל פירסטנברג תרם תרומה עיקרית בכיוון זה.



הפאונים הפלטוניים - גופים תלת ממדיים משוכללים. לבד מהשלושה שבאיור קיימים גם הסימפלקס והאוקטהדר. כבר היוונים הכירו את כל החמישה וידעו שאין בלתם. את הסימפלקס, הקובייה האוקטהדר נמצא בכל ממד. במרחב התלת-ממדי יש גם דודקהדר ואיקוסהדר. נוסף לכך יש עוד שני גופים משוכללים בממד 4 - ה־24 תא וה־600 תא, וזוהי כל הרשימה.

(Dantzig), אלגוריתם האליפסואידים של חצ׳יאן (Khachiyan) ושיטות נקודה פנימית.

היבט חשוב ומפתיע של תורה זו הוא שמשיגים תובנה עמוקה של הבעיות כשדנים בהן במסגרת גאומטריה רב־ממדית.

← תגלית מספר 6(ב): בעיית התכנון הלינארי ואלגוריתם הסימפלקס לפתרונה.

7| תורת ההסתברות ועקומת הפעמון

תורת ההסתברות עוסקת בניתוח תהליכים מקריים ובחקר תכונותיהם. מה הסיכוי שבהטלת מטבע נקבל "ראש" עשר פעמים רצופות? היש אסטרטגיה לנצחון במשחק הרולטה בקזינו, או בהגרלות הלוטו? ואכן המניע הראשון לפיתוח התחום היה הרצון להבין ולנתח משחקי מזל, אך במשך השנים התבררו מרכזיותה של ההסתברות ויישומיה במדעים, בכלכלה ובתחומים רבים נוספים הנשלטים על ידי תהליכים אקראיים. הסטטיסטיקה שצמחה מתורת ההסתברות היא כלי מחקר עיקרי בבחינת השערות בכל תחומי המדע, הרפואה והטכנולוגיה.

ההסתברות של מאורע מקרי הוא מספר בין 0 ל־1, שהוא הסיכוי שהמאורע יתרחש. יש עובדות יסוד בהסתברות הנראות אינטואיטיביות וצפויות (אף כי הוכחותיהן אינן בהכרח קלות) ויש מפתיעות ביותר. חוק המספרים הגדולים קובע שאם דוגמים פעמים רבות את ערכיו של תהליך אקראי החוזר על עצמו, כגון הטלות מטבע, מתכנס הממוצע תמיד לאותו ערך מסוים ("התוחלת"). לשאלה עד כמה צפוי הערך הממוצע לסטות מן התוחלת יש חשיבות רבה בניתוחים סטטיסטיים. למשל, אם נטיל מטבע מספר גדול של פעמים N, אז תוחלת מספר הפעמים שיתקבל "ראש" הוא N/2. עובדה בסיסית בהסתברות היא שצפוי כי הסטייה מערך זה תהיה בערך השורש הריבועי של N. מעניין וחשוב לדעת מהי ההתפלגות של מספר מופעי ה"ראש" שנראה. כלומר מהו הסיכוי לכך שנצפה בדיוק ב־k מופעים של "ראש" לערך נתון k. על פי משפט הגבול המרכזי, ההתפלגות המתאימה היא ההתפלגות הנורמלית (הקרויה גם התפלגות גאוסית, ע"ש גאוס) המתוארת על ידי עקומת הפעמון. העובדה המפתיעה היא שזוהי מסקנה אוניברסלית ומתקיימת (בהתאמות קלות) גם אם נחליף הטלות מטבע במשתנה מקרי אחר כלשהו כגון מטבע מוטה, הטלת קובייה או מספר הקריאות במונה גייגר. משפט הגבול המרכזי, הקובע שתהליכים אקראיים שונים לגמרי מביאים לאותה ההתנהגות המתוארת על ידי עקומת הפעמון, הוא מהתובנות הבסיסיות במתמטיקה.

← תגלית מספר 7: עקומת הפעמון ומשפט הגבול המרכזי.

ואגב, אין, ולא יכולה להיות, שום אסטרטגיה לזכייה בלוטו או ברולטה!

8| מספרים ראשוניים וצפיפותם

מספר ראשוני הוא מספר טבעי (אחד מהמספרים ...1,2,3) המתחלק ללא שארית רק ב־1 ובעצמו. כידוע, ניתן לבטא כל מספר טבעי באופן אחד ויחיד כמכפלה של מספרים ראשוניים. מנקודת מבט זו המספרים הראשוניים הם אבני הבניין היסודיות ("אטומים") בעולם המספרים הטבעיים ומכאן חשיבותם הרבה בתחומים מתמטיים שונים. תגלית בסיסית של היוונים היא שקיימים אינסוף מספרים ראשוניים, אולם קשה לראות חוקיות כלשהי כשמתבוננים בסדרה זו ...2,3,5,7,11,13,17,19. מתעורר הרושם ששכיחותם של המספרים הראשוניים יורדת כשהמספרים גדלים. עם זאת הם עדיין די נפוצים גם אז, ומפעם לפעם נתקלים אפילו בזוג מספרים ראשוניים "תאומים" שהפרשם רק 2.

← תגלית מספר 8: משפט המספרים הראשוניים.

משפט המספרים הראשוניים קובע כי בין המספרים בעלי k ספרות, בממוצע בערך אחד מכל k מספרים הוא ראשוני. המשפט הוכח על ידי ז׳אק אדמר (Hadamard) ושרל דה לה וולה פוסאן

(de la Vallée Poussin) בתחילת המאה ה־20. בניסוח מדויק: אם $\pi(N)$ מציין את המספרים הראשוניים הקטנים מ־N אז $\pi(N)$ שווה בערך $\frac{N}{\ln(N)}$ במובן זה שהמנה בין שני הגדלים שואפת ל־1 כש־N שואף לאינסוף. (כאן $\ln(N)$ מציין את הלוגריתם הטבעי של N). זוהי, אם כן, השכיחות הממוצעת של המספרים הראשוניים, אך מעניין להבין ביתר פירוט את פיזורם. השערת רימן, אחת הבעיות הפתוחות החשובות ביותר במתמטיקה, אומרת שהפער בין שני מספרים ראשוניים עוקבים $x>y$ אינו יכול לעלות בהרבה על השורש הריבועי של y. תגלית חשובה נוספת מהמאה ה־19 של יוהן דיריכלה (Dirichlet) היא שכל סדרה אריתמטית מכילה אינסוף מספרים ראשוניים, למעט אם יש מחלק משותף לכל איבריה. לאחרונה הוכיחו בן גרין (Green) וטרי טאו (Tao) שיש סדרות אריתמטיות מכל אורך שכל איבריהן מספרים ראשוניים. בעיות פתוחות רבות דנות במספרים הראשוניים. למשל משערים שיש אינסוף זוגות של "תאומים ראשוניים" (כגון 107, 109).

9| אלגוריתמים, המחשב הדיגיטלי ומגבלותיו, חישוב וסיבוכיות החישוב

המחשב הדיגיטלי מבטא פריצות דרך במתמטיקה, בפיזיקה ובהנדסה, והמצאתו היא אחת ההתפתחויות הטכנולוגיות והמדעיות החשובות בהיסטוריה האנושית. דווקא הלוגיקה המתמטית היא שבאה לידי ביטוי עיקרי ביצירת המחשב. תחום שנראה תאורטי לגמרי ונושק לפילוסופיה הפך לשימושי בן לילה.

למושג האלגוריתם קוראים כך על שם אל־ח'וארזמי. אלגוריתם הוא שיטה מתמטית לפתרון בעיה: למשל שיטת הכפל הארוך היא אלגוריתם להכפלת מספרים רב־ספרתיים. המחשב הדיגיטלי הביא לפריחה בפיתוח אלגוריתמים חדשים ובמחקרם. למרבה ההפתעה, מתמטיקאים חקרו את יסודות התאוריה של מדעי המחשב עוד בטרם היו בנמצא מחשבים. כבר אז הוגדרו מושגים יסודיים, כגון מהי בעיה חישובית.

תגלית מפתיעה ועמוקה (הקשורה למשפט גדל) היא שיש בעיות חישוב קונקרטיות ומפורשות שאי אפשר לפתרן ("בעיות בלתי כריעות"). דוגמה קונקרטית וחשובה היא "בעיית העצירה": בהינתן לנו תוכנית מחשב וקלט בשבילה, יש להכריע האם התוכנית תיעצר או שתיכנס ללולאה אינסופית. כאמור אין אלגוריתם כלשהו המסוגל לפתור בעיה זו.

← תגלית 9(א): מושגי היסוד בתורת החישוביות. בעיות בלתי כריעות.

תגליות אלה עונות על השאלה "אילו בעיות חישוב ניתן לפתור ואילו אינן פתירות כלל?" ומתוות קו תחום ברור בין שני סוגי הבעיות. חשוב לא פחות להבין מהן הבעיות שניתן לפתור בזמן חישוב סביר. אפילו המושג של "זמן סביר" לפתרון בעיית חישוב מצריך הגדרה. השאלה המרכזית בתחום זה היא אחת הבעיות הפתוחות החשובות ביותר במתמטיקה המודרנית, וקרויה: "האם המחלקות P ו־NP שוות או לא?" מדובר בשאלה אם קשה יותר באופן מהותי להוכיח משפטים מתמטיים מאשר לאמת הוכחות נתונות. מקובל לשער שאכן יש פער מהותי בקושיין של שתי המשימות. אם השערה זו נכונה, נובע שיש הפרדה ברורה בין עולם הבעיות שמחיר פתרונן הוא סביר לבעיות שמחירן לא קביל.

← תגלית 9(ב): תורת הסיבוכיות. התורה של בעיות NP־שלמות.

תורת הצפנים – הקריפטוגרפיה – זכתה לפריחה עם התפתחות המחשב, והיא קשורה באופן עמוק לתורת הסיבוכיות של חישובים ולתורה מתמטית חשובה נוספת – תורת האינפורמציה.

10| מתמטיקה שימושית

ההיסטוריה של המתמטיקה כמדע שימושי תחילתה בראשית התרבות האנושית, כפי שראינו. שימושי המתמטיקה, בעיקר לפיזיקה ולטכנולוגיה, עיצבו במידה רבה את דרכה. תפנית מסוימת חלה באמצע המאה ה־20. ג'ון פון־נוימן (von Neumann), הבין ששיטות אנליטיות אין בהן די לפתרון בעיות מתמטיות במדעים ובהנדסה. לשיטות נומריות, סטטיסטיות, סימולציות ולאמפיריקה יהיה משקל מכריע בחקר בעיות כאלה, ובמיוחד במשוואות דיפרנציאליות חלקיות, שמקורן במדע ובהנדסה. כלומר, הפרדיגמה המתמטית הבסיסית של משפטים והוכחות אינה מספקת לצרכים שימושיים.

בניית מודלים מתמטיים וסטטיסטיים לבעיות מדעיות, ושילוב שיטות אנליטיות וחישוביות המצריך יכולת מתמטית אנליטית גבוהה וכן התמצאות בטכניקות אחרות הם המפתח להתקדמות בבעיות רבות במדע, בהנדסה ובטכנולוגיה. מפתח זה נתון בעיקר בידי המתמטיקאים השימושיים.

← תגלית מספר 10: פרדיגמות נוספות למחקר מתמטי מעבר לפרדיגמה של משפט/הוכחה. שיטות נומריות, סימולציות, חישוב מדעי, ופיתוח מודלים מתמטיים. ■

נתי ליניאל > פרופסור בביה"ס להנדסה ומדעי המחשב באוניברסיטה העברית. מחקריו עוסקים בעיקר בקשרים שבין מתמטיקה ומדעי המחשב.
גיל קלעי > פרופסור למתמטיקה באוניברסיטה העברית. תחומי העניין העיקריים שלו הם קומבינטוריקה, גאומטריה ושימושיה.