

פיבונצ'י נים המוכלל

האסטרטגיה המושלמת למשחק בגפרורים

1. מבוא

יוגדר המשחק: מערימה של N ($N > 2$) גפרורים לוקחים 2 שחקנים לסרוגין גפרורים: לא פחות מ-1 ולא יותר מ- $f(a)$. כאשר n - מספר טבעי קבוע ו- a - מספר הגפרורים שלקח היריב במסעו האחרון. הפונקציה $f(x)$ היא מונוטונית עולה במובן החזק המקסימלית: $f(x) \geq x$ וכן $f(x+1) \geq f(x)$. מסעו הראשון של השחקן הפותח מוגבל מבחינת המכסימום רק בכך שאסורה עליו לקחת כל הגפרורים. השחקן המסיים ראשון, בחורו האחרון, לקחת פחות מ- n גפרורים.

זוכה הלוקח את הגפרור (ים) האחרון (ים).

משחק זה עבור $n=1$; $f(a)=2a$ הוצע ע"י Dr. R.E. Gaskell ונפתר על-ידיו וע"י M.J. Whinihom [Fibonacci Quarterly Dec 63 pp.9-12]. הם נכשלו בניסיונם לפתור עבור $n=1$; $f(a)=ka$ (כלשהו) בצורתו הראשונה כרוך פתרון המשחק בסדרת פיבונצ'י ומכאן שמו.

בעבודה זו אגדיר אסטרטגיה המבטיחה זכייה במשחק בצורתו הכללית כדלעיל.

לנוחיות הקורא אדון בסעיף 2 במקרה $n=1$ ובסעיף 3 במקרה כללי (n - מספר טבעי כלשהו). בסעיף 4 אעיר מספר הערות למשחק זה ואזכיר אפשרויות נוספות להכללה.

הגדרה 1: תהי $B=b_0; b_1; b_2; \dots$ סדרה של מספרים טבעיים כך ש: $b_0=0$ $b_1=1$ וכן: $b_0 < b_1 < b_2 < b_3 < \dots$. נגדיר את הפונקציות הבאות: א' $P_B(x) = \min\{b_i; b_i \geq x\}$ ב' $Q_B(x) = \max\{b_i; b_i \leq x\}$ ג' $R_B(x) = \max\{b_i; b_i < x\}$ (להבא אשמיט את האינדקס B במקום שלא יהיה חשש לאי-בהירות).

הגדרה 2: תהי B סדרה כמוגדר בהגדרה 1. יהי m מספר טבעי כלשהו.

נסמן: $m_1 = m$ ו: $m_2 = m_1 - Q(m_1)$

ובאופן כללי: $m_{i+1} = m_i - Q(m_i)$

מובן כי תהליך זה יסתיים לאחר מספר צעדים סופי ונקבל: $m_A = Q(m_A)$ ואח"כ:

$m_{A+1} = 0$. מכאן ולהבא נסמן את m_A כ: $U(m)$ וכן: $Q(m_i) = b_{k_i}$

הסכום: $m = Q(m_1) + Q(m_2) + \dots + Q(m_A) = b_{k_1} + b_{k_2} + \dots + U(m)$

יקרא סכום אברים מסכימליים של m מבסדרה B .

תהי $g(x)$ הפונקציה ההפוכה ל $f(x)$. מהמונוטוניות החזקה של הפונקציה $f(x)$ נובעת גם מונוטוניות חזקה של הפונקציה $g(x)$.

2. המשחק במקרה $n = 1$

הגדרה 3: נגדיר סדרה $D = d_0; d_1; d_2; \dots$ כדלקמן: $d_0 = 0 \quad d_1 = 1$

$$d_{k+1} = d_k + P(g(d_k)) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

הסדרה D מקיימת את תנאי ההגדרה מס' 1. מכאן שאפשר לפתח כל m טבעי לסכום אבריים מסכימיים בסדרה D .

משפט עזר 1: יהי m מספר טבעי כלשהו ויהיה:

$$m = d_{k_1} + d_{k_2} + \dots + U(m)$$

$$d_{k_r} > f(d_{k_{r+1}}) \quad \text{אזי:}$$

הוכחה: נניח כי יתכן

$$d_{k_r} \geq g(d_{k_r}) \quad f(d_{k_{r+1}}) \geq d_{k_r} \quad \text{לשון אחרת:}$$

$$d_{k_r} + d_{k_{r+1}} > d_{k_r} + P(g(d_{k_r})) = d_{k_{r+1}} \quad \text{מכאן ש:}$$

$$d_{k_r} + d_{k_{r+1}} > d_{k_{r+1}} \quad \text{במקרה כזה היה}$$

משפט עזר 2: יהי m מספר טבעי כלשהו ויהי a מספר טבעי כלשהו כך ש:

$$f(a) \geq U(m-a) = U(U(m)-a) \quad \text{אזי} \quad U(m) > a \geq 1$$

הוכחה: $U(m) = d_j$ ויהי

$$f(a) \geq d_r \quad \text{לשון אחרת:} \quad a \geq g(d_r) \quad \text{או} \quad d_j - g(d_r) \geq d_j - a$$

$$\max(d_j - a) = d_{j-1} + R(g(d_{j-1})) + R(g(R(g(d_{j-1})))) + \dots + k + d_r \quad [k > f(d_r)] \quad \text{הוא: כנראה}$$

$$d_j - g(d_r) \geq \max(d_j - a): \quad \text{ומובן כי אם נוכיח ש:}$$

$$d_j \geq d_{j-1} + R(g(d_{j-1})) + \dots + K + d_r + g(d_r) \quad \text{רוצים אם כן להראות:}$$

$$P(g(R(g(d_{j-1})))) = P(g(d_{j-1})) - R(g(d_{j-1})) \quad \text{אבל הרי:} \quad d_j - d_{j-1} = P(g(d_{j-1}))$$

$$K > f(d_r) \quad \text{וכן הלאה. לבסוף נותר להראות רק:} \quad P(g(k)) \geq d_r + g(d_r) \quad \text{והרי}$$

$$P(g(d_r)) \geq d_{r+1} \quad \text{לשון אחרת:} \quad g(k) > d_r \quad \text{מכאן:}$$

$$P(g(d_r)) = d_{r+1} - d_r \geq g(d_r) \quad \text{או:} \quad d_{r+1} \geq d_r + g(d_r):$$

מתוך הגדרת הפונקציה $P(x)$ מתבררת נכונות אי השוויון.

הגדרת האסטרטגיה: אם בתורנו יש m גפרורים בערימה יהיה צעד טוב: לקחת $U(m)$ גפרורים.

- יש להראות: א' יש מצב שבו מסע טוב הוא מסע הנצחון.
 ב' אחרי בצוע מסע טוב אפשר לבצע רק מסע רע. (= מסע שאינו טוב)
 ג' אחרי בצוע מסע רע תהיה אפשרות לבצע מסע טוב.

הוכחות: א' כאשר $U(m)=m$ המסע הטוב הוא מסע הנצחון.
 ב' לפי משפט עזר 1: $d_k > f(d_{k+1})$ מכאן שאחרי בצוע מסע טוב: לקחת $U(m)=d_k$ יהיה מסעו המכסימלי המותר של היריב בתור הבא: $f(d_{k+1})$ קטן מהמסע הטוב אז: $U(m-U(m))=d_k$
 ג' אם היו m גפרורים בערימה והיריב לקח a כך ש: $U(m) > a$ מסתבר כי אפשר לענות לו במסע טוב לפי משפט עזר 3 בו ראינו כי $U(m-a) \leq f(a)$ אם $a > U(m)$ נתיחס כאלו היו בערימה $a=U(m)$ והיריב לקח $a=U(m)$ במקרה $a=U(m)$ היריב בצע מסע טוב. לעניין זה ראה הערה 1.

3. המקרה הכללי: מספר טבעי כלשהו.

נוכח כי ישנן אנלוגיות רבות בין המקרה $n=1$ למקרה הכללי:

הגדרה 4: נגדיר סדרה $T=t_0; t_1; t_2; \dots$ המורכבת מתת-סדרות סופיות של מספרים טבעיים עוקבים הרשומות בזו אחר זו יהי S_q^n האבר ה- p בתת-סדרה q כך ש: $q=0,1,2,\dots$ ו $n \geq p$ יהי H_q - מספר אברי התת-סדרה q כך: $S_0^n = t_0 = 0$ ו $S_0^2 = t_1 = 1$ $H_0 = n + f(n) + 1$ $H_q^{Hq} \leq f(n + f(n))$ $S_{q+1}^1 = S_q^{Hq} + P(g(S_q^{Hq}))$ $H_{q+1} = n$ ו עבור $S_q^{Hq} > f(n + f(n))$ $P(g(S_q^{Hq})) = S_y^x$ אם $H_{q+1} = H_y - x + 1$ $H_{q+1} = H_y - x + 1$

הסדרה T המתאימה לתנאי הגדרה 1 וע"פ פתח כל טבעי לסכום אברים מכסימליים בסדרה T . קל להוכיח כי פרט לאבר האחרון יהיו כל אברי הסכום מהצורה $D(x) = \max\{S_i^1 : S_i^1 \leq x\}$ נגדיר פה פונקציה נוספת:

משפט עזר 3: יהיה m מספר טבעי כלשהו ויהיה:

פתוח לסכום אברים מכסימליים של m בסדרה T . $m = t_{k_1} + t_{k_2} + \dots + U(m)$

אזי: $t_{k_r} > f(t_{k_{r+1}})$

הוכחה: נניח כי יתכן $f(t_{k_r}) \geq t_{k_r}$ לשון אחרת: $t_{k_{r+1}} \geq g(t_{k_r})$ ומכאן: $t_{k_{r+1}} = P(t_{k_{r+1}}) \geq P(g(t_{k_r}))$ במקרה/יהיה $t_{k_{r+1}}$ או אף אבר גדול ממנו מופיע במקום $t_{k_r} + t_{k_{r+1}} \geq t_{k_r} + P(g(t_{k_r})) \geq t_{k_r} + 1$ קל להוכיח כי משפט זה זהה למשפט 1.

משפט עזר 4: יהי m מספר טבעי כלשהו ויהיה פתוח לסכום אברים מכסימיים של m

בסדרה T .

$$m = t_{k_1} + t_{k_2} + \dots + U(m)$$

$$P(g(t_{k_r})) > t_{k_{r+1}} + t_{k_{r+2}} + \dots + U(m) \text{ אזי}$$

$$t_{k_{r+1}} + t_{k_{r+2}} + \dots + U(m) \geq P(g(t_{k_r})) \quad \text{נניח כי יתכן}$$

אזי:

$$t_{k_r} + t_{k_{r+1}} + \dots + U(m) \geq t_{k_r} + P(g(t_{k_r}))$$

מכאן

$$t_{k_{r+1}} \leq t_{k_r} + t_{k_{r+1}} + \dots + U(m) \geq t_{k_r} \quad \text{במקרה כזה היה}$$

$$t_{k_r} + t_{k_{r+1}} + \dots + U(m) \quad \text{או אף אבר גדול ממנו מופיע במקום}$$

משפט עזר 5: יהי m מספר טבעי כלשהו. יהי $U(m) = S_y^x$ ויהי a מספר טבעי כך ש:

$$f(a) \geq U(m-a) = U(S_y^x - a) \quad \text{אזי} \quad S_y^x > a \geq n$$

$$f(a) \geq S_q^f \quad \text{הוכחה: יהי} \quad U(S_y^x - a) = S_q^f \quad \text{רוצים להראות כי}$$

$$S_y^x - a \leq S_y^x - g(S_q^f) \quad \text{או:} \quad a \geq g(S_q^f) \quad \text{לשון אחרת}$$

$$S_y^x - n \geq S_y^x - a \quad \text{בהסתמך על כך כי: א"}$$

$$U(S_y^x - a) = S_q^f \quad \text{מכסימיים של} \quad S_y^x - a \quad \text{יהיה הקטן באברים}$$

$$\max(S_y^x - a) = D(S_y^x - n - S_q^f) + D(S_y^x - n - S_q^f - D(S_y^x - n - S_q^f)) + \dots + k + S_q^f; \quad (K > f(S_q^f))$$

$$S_y^x - g(S_q^f) \quad \text{לסכום אברים מכסימיים בסדרה} \quad T \quad \text{נפתח את}$$

$$S_y^x - g(S_q^f) = Q(S_y^x - g(S_q^f)) + Q(S_y^x - g(S_q^f) - Q(S_y^x - g(S_q^f))) + \dots + C \quad [1 > C \geq 0]$$

$$Q(S_y^x - g(S_q^f)) = D(S_y^x - n - S_q^f); \quad \text{נניח} \quad Q(S_y^x - g(S_q^f)) \geq D(S_y^x - n - S_q^f) \quad \text{ברור כי:}$$

$$Q(S_y^x - g(S_q^f) - Q(S_y^x - g(S_q^f))) \geq D(S_y^x - n - S_q^f - D(S_y^x - n - S_q^f)) \quad \text{מכאן}$$

$$S_q^f + B \geq S_q^f \quad \text{שוב נניח שויון. נמשיך כך בתהליך זה עד שנקבל לבסוף}$$

$$B \geq 0 \quad \text{באשר}$$

נבדוק מה יקרה אם באחד המקרים שבהם הנחנו שויון יתקיים אי-שויון דוקא.

$$Q(S_y^x - g(S_q^f)) > D(S_y^x - n - S_q^f) \quad \text{למען הנוחות נבדוק זאת במקרה}$$

$$D(S_y^x - n - S_q^f) \leq S_{c-1}^{H_{c-1}} \quad \text{מובן כי} \quad Q(S_y^x - g(S_q^f)) = S_c^b \quad \text{אם}$$

$$S_c^b \geq S_{c-1}^{H_{c-1}} + P(g(S_{c-1}^{H_{c-1}})) \quad \text{והרי כלומר:}$$

$$Q(S_y^x - g(S_q^f)) \geq D(S_y^x - n - S_q^f) + P(g(D(S_y^x - n - S_q^f)))$$

לפי משפט העזר השלישי נובע:

$$P(g(D(S_y^x - n - S_q^n))) \geq D(S_y^x - n - S_q^n - D(S_y^x - n - S_q^n)) + \dots + K + S_q^n$$

$$S_y^x - a \leq S_y^x - g(S_q^n)$$

מכל זה מתברר נכונות המשפט:

ברור כי את השקול האחרון יכולנו לבצע לגבי כל אחד מהאברים בסכום ולאו דוקא לגבי הנ"ל תוך מסקנות זהות.

הגדרת האסטרטגיה: אם יש בערימה m גפרורים יהיה מסע טוב - לקיחת $U(m)$ אך אם $n > U(m)$ יהיה מסע טוב - לקיחת n גפרורים.

$$U(m)+1; U(m)+2, \dots, U(m)+n;$$

הערה: למעשה ישנם מצבים שבהם גם:

או חלק מהם יהיו מסעים טובים, למעשה.

יש להראות: א" יש מצב שבו המסע הטוב זוכה.

ב" אחרי בצוע מסע טוב אפשר לענות רק במסע רע.

ג" אחרי בצוע מסע רע תהיה אפשרות לענות במסע טוב.

א" הוכחות: כאשר $U(m)=m$ יהיה המסע הטוב מסע הנצחון.

ב" ממשפט עזר 3 מסתבר כי אחרי בצוע מסע טוב - לקיחת t_{k_r}

לא יכול היריב לענות במסע טוב: לקיחת $t_{k_{r+1}}$ שכן $f(t_{k_r}) > t_{k_{r+1}}$

במקרה $n > U(m)$ עוקבו של $U(m)$ - בסכום אברים מכסימליים

של m בסדרה T הוא לפחות $n+f(n)$ ולכן גם אז לא יוכל

היריב לענות במסע טוב אחרי לקיחת n גפרורים שהרי $f(n)+n > f(n)$.

ברור כי אם אין היריב יכול לבצע את הקטן במסעים הטובים לא יוכל

גם לבצע מסעים טובים גדולים יותר.

ג" אם היו בערימה m גפרורים והיריב לקח בתורו a גפרורים. אם נראה

כי

$$f(a) \geq U(m-a)$$

כאשר $a < U(m)$ הוכחנו זאת במשפט עזר 5. אם $a \geq U(m)+n$

נתיחס לכך כאילו היו בערימה $m=U(m)$ גפרורים לפני

שהיריב שחק והוא בתורו לקח $a=U(m)$. אם $U(m) \leq a < n+U(m)$

מסעו של היריב היה טוב. מקרה זה נדון בסעיף ב" וכן בהערה 1

בסעיף 4.

הערות:

(1) מסתבר כי השחקן הפותח יזכה אבל אם המצב ההתחלתי הוא אבר בסדרה וגם יריבו מכיר את האסטרטגיה יזכה היריב.

(2) ענין רב מצאתי בסדרות הנותנות את הפתרון עבור $f(a)=ka$; $n=1$ מבעיה זו יצאתי ולכס בדקתי סדרות אלה בצורה יסודית. סדרות אלה הופכות ממקום מסוים והלאה לסדרות נסיגה מהצורה:

$$F_r = F_{r-1} + F_{r-p}$$
 כאשר:

$$\frac{\log k}{\log(\frac{k}{k-1})} < p < \frac{\log(k+1)}{\log(\frac{k+1}{k})}$$

מסתבר כי בסדרות אלה $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{F_{r+1}}{F_r} = x$ כאשר x מקיים את השויון:

$$x^{p+1} = x^p + x$$

קרוב מידי טוב למדי עבור x מחקבל מתוך:

$$\sqrt[p]{x} < x \leq \sqrt[p]{k+1} \quad \frac{k+1}{k} < x < \frac{k}{k-1}$$

מתוך ידיעת k מקבלים את x ואז יש גם קרוב מידי לפתרון המשוואה

$$x^p = x^{p-1} + 1$$

(3) עבור $f(a)=K$ נגדיר סדרה המורכבת מתת-סדרות סופיות (תוך שמוש בסמונים שהופיעו בעבודה גופה); $H_0 = n+T+1$ ועבור $q > 0$; $H_q = n$ ו

$$S_{q+1}^{H_q} = S_q^{H_q} + p+1$$
 האסטרטגיה דומה לזו שתוארה לעיל.

(4) אם המסע המינימלי תלוי במסעו האחרון של היריב ויהיה $F(a)$ כאשר $F(x)$ מונוטונית עולה במובן החזק. אם יש בערימה m גפרורים נקה כמסע טוב a כך שיתקיים לפחות אחד מאי השויונות דלהלן:

$$a+g(a) < m \leq a+F(a)+g(F(a))$$

$$a+F(a)+F(F(a))+g(F(F(a))) < m \leq a+F(a)+F(F(a))+F(F(F(a)))+g(F(F(F(a))))$$

ג

Fibonacci Quaterly Dec.1963 pp.9-12: Fibonacci Nim.

ביבליוגרפיה:

by M.J.Whinihan . ("Generalized Fibonacci Nim"

(במיוחד ההערה:

אני מבקש להודות פה לכל האנשים אשר סייעו לי בעבודה: לפרופ' אביעזר פרנקל ממכון ויצמן אשר הציע לי את הנושא והדריך אותי בהחילת עבודתי. לד"ר דב ירון מירושלים - ממנו קבלתי את הביבליוגרפיה. לאיתן לפידות ולשמעון רייך מהטכניון בחיפה שעברו מדי פעם על המסקנות החלקיות שלי.

לפרופ' חיים חנני שעזר לי בעריכת העבודה.
כלט גלו רצון רב לעזור לי ועל-כך אני מודה להם.