הכללה למשפט של YOUNG - מדור מתקדם

מ ב ו א

בזמנו הציע יונג את הבעיה הבאה: נניח שאנו רוצים לסדר כל המספרים הטבעיים מ-1 עד mn ב- m שורות של n מספרים כל אחת, כך שבכל עמודה (מלמעלה למטה) ובכל שורה (משמאל לימין) תיווצר סדרה מונוטונית עולה. בכמה אפנים אפשר לבצע את המשימה?

יונג פתר את הבעיה והוכיח כי מספר האופנים הוא

$$(mn)!\frac{1!2!3!\ \dots\ (m-1)!}{n!\ (n+1)!\ \dots\ (n+m-1)!} \tag{1}$$

במאמר זה אנו מכלילים את הבעיה. נתונים m מספרים טבעיים $a_1, a_2, \dots, a_m$ כך ש- $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \dots \geqslant a_m$ ו- $\sum_{i=1}^{m} a_i = S$
עכשיו אנו רוצים לסדר את המספרים הטבעיים מ-1 עד S בעמודות, כך שבעמודה הראשונה יופיעו a_1 מספרים, בשניה a_2 מספרים, וכו' ושבכל עמודה ובכל שורה תיווצר סדרה מונוטונית עולה. נסמן ב- $F(a_1, a_2, \dots, a_m)$ את מספר הדרכים שניתןלבצע סידור כזה והבעיה היא לחשב את $F(a_1, a_2, \dots, a_m)$. רואים כי הבעיה של יונג מתיחסת למקרה הפרטי $F(n,n,n,\dots,n)$. נוכיח כי, באופן כללי,

$$F(a_1,a_2,\dots,a_m) = \frac{S!}{\prod_{i=1}^{m}(a_i+m-i)!}\cdot \prod_{j>i}(a_i-a_j+j-i) \tag{2}$$

ולא קשה לראות כי הנוסחה (2) מקבלת את הצורה הפשוטה יחסית (1) כש- $a_1=a_2 \dots =a_m=n$.

<u>הוכחה:</u>

ההוכחה היא ע"י אינדוקציה לגבי כל ה- a_i, ומתבססת על שני משפטי עזר: -

<u>משפט עזר 1:</u>

$$\begin{aligned}F(a_1,a_2,\dots,a_m) &= F(a_1-1, a_2,\dots,a_m) + \\ &+F(a_1,a_2-1,a_3,\dots,a_m)+\dots+F(a_1,a_2,a_3,\dots,a_m-1)\end{aligned} \tag{3}$$

ההוכחה מידית כי הרי בכל סדור של S המספרים מוכרח המספר S בעצמו להופיע בתחתית עמודה ובקצה הימני של שורה. לכן נקבל ע"י מחיקתו מערכת המתאימה למה שיתקבל ע"י קצור אחד העמודות ב-1.

<u>משפט עזר 2:</u>

יהיו $A_1, A_2, \ldots, A_m$ מספרים כלשהם. אזי

$$\sum_{k=1}^{m} A_k \left\{ 1 - \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} \left(1 + \frac{1}{A_j - A_k}\right) \right\} = \frac{m(m-1)}{2} \tag{4}$$

<u>הערות:</u>

מאחר שהוכחת משפט עזר זה מסובכת במקצת, נדחה אותה לסעיף הבא. בינתיים נעיר כי המשפט כשלעצמו מפתיע, מאחר שקשה היה לנחש שערכה של הנוסחה המסורבלת ב-(4) יהיה תלוי ב-m ולא במספרים A_i. כדי לפשט את הטיפול בנוסחאות כאלה נשתמש במונחים הבאים.

יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_m$ מספרים כלשהם, אזי נכתב

$$\sum_i X_i = \sum_{i=1}^{m} X_i$$

$$\sum_i^{(j)} X_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} X_i$$

ז.א., במקרה השני, כשהסכום הוא על כל הערכים של i מ-1 עד m <u>פרט ל- $i=j$</u>.
נשתמש גם בסמונים דומים, $\prod_i$, $\prod_i^{(j)}$ עבור מכפלות. עכשיו נוכל לכתב את המשואה (4) בצורה:-

$$\sum_k A_k \left(1 - \prod_j^{(k)} \left(1 + \frac{1}{A_j - A_k}\right)\right) = \frac{1}{2} m(m-1) \tag{4'}$$

עכשיו ניגש להוכחת המשפט העיקרי. ברור שהוא נכון במקרה $a_1=a_2\ldots=a_m=1$. לכן מספיק להוכיח כי הנוסחה ב-(2) מקיימת גם היא את היחס (3). אבל זה יהיה נכון אם

$$\frac{S!}{\prod(a_i+m-i)!}\prod_{j>i}(a_i-a_j+j-i)$$

$$=\frac{(S-1)!}{\prod_i(a_i+m-i)!}\cdot\prod_{j>i}(a_i-a_j+j-i)\sum_k(a_k+m-k)\prod_j^{(k)}\left[1+\frac{1}{a_j-a_k+k-j}\right] \qquad (5)$$

אנו משאירים לקורא לאשר כי (5) אמנם מבטא בדיוק את העובדה ש-(3) מקיים את היחס (2).

אבל (5) שווה ערך עם

$$S=\sum_k(a_k+m-k)\prod_j^{(k)}\left[1+\frac{1}{a_j-a_k+k-j}\right] \qquad (6)$$

כדי להוכיח את (6) נציב ב-(4) $A_k=a_k+m-k$, ונקבל

$$\sum_k(a_k+m-k)\left\{1-\prod_j^{(k)}\left[1+\frac{1}{a_j-a_k+k-j}\right]\right\}=\frac{1}{2}m(m-1)$$

ולכן

$$\sum_k(a_k+m-k)\prod_j^{(k)}\left[1+\frac{1}{a_j-a_k+k-j}\right]$$

$$=\sum_k(a_k+m-k)-\frac{1}{2}m(m-1)$$

$$=S+\sum_{k=1}^{m}(m-k)-\frac{1}{2}m(m-1)$$

$$=S$$

מ.ש.ל.

נשאר איפוא רק להוכיח את הנוסחה (4), ז.א. משפט עזר 2.

הוכחת משפט עזר 2:

נגדיר

$$f(x) = x \prod_i [1+\frac{1}{A_i-x}]$$

אזי קל לראות כי

$$f(x) = x-m + \frac{Q(x)}{\prod_i (A_i-x)}$$

כש- $Q(x)$ הוא פולינום ממעלה $m-1$. נוכל אם כן להשתמש בעיקרון של שברים חלקיים, ונקבל

$$f(x) = x-m + \sum_k \frac{c_k}{A_k-x} \tag{7}$$

כשיש עוד לקבע את המקדמים c_k . נכפיל את (7) ב- (A_j-x), ונקבל

$$x(A_j-x+1)\prod_i^{(j)} [1+\frac{1}{A_i-x}] = (A_j-x)(x-m)+c_j+(A_j-x)\sum_i^{(j)} \frac{c_i}{A_i-x}$$

נציב כאן $x=A_j$, ו-

$$A_j \prod_i^{(j)} [1+\frac{1}{A_i-A_j}] = c_j$$

ולכן, מ- (7)

$$x \prod_i [1+\frac{1}{A_i-x}] = \tag{8}$$

$$= x-m + \sum_k \frac{A_k}{A_k-x} \prod_i^{(k)} [1+\frac{1}{A_i-A_k}]$$

נפתח את שני אגפי (8) לפי חזקות יורדות של x :-

$$(9)\qquad x \prod_{i} \left[1-\frac{1}{x}-\frac{A_i}{x^2}-\frac{A_i^{\,2}}{x^2}\dots\right] =$$

$$= x-m-\sum_{k}\frac{A_k}{x}\prod_{i}^{(k)}\left[1+\frac{1}{A_i-A_k}\right]\left(1+\frac{A_k}{x}+\frac{A_k^2}{x^2}\dots\right)$$

ז.א.

$$(10)\qquad x\left\{1-\frac{m}{x}+\frac{\frac{1}{2}m(m-1)-\Sigma A_k}{x^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{1}{6}\,m(m-1)(m-2)+\Sigma A_i^{\,2}-(m-1)\,\Sigma A_i}{x^3}\dots\right\}$$

$$= x-m-\sum_{k} A_k\prod_{i}^{(k)}\left[1+\frac{1}{A_i-A_k}\right]\left(\frac{1}{x}+\frac{A_k}{x^2}+\frac{A_k^{\,2}}{x^3}+\dots\right)$$

נשווה את מקדמי $\frac{1}{x}$ משני האגפים:-

$$\frac{1}{2}\,m(m-1)-\Sigma A_k$$

$$=-\sum_{k} A_k\cdot\prod_{i}^{(k)}\left[1+\frac{1}{A_i-A_k}\right]$$

ז.א.

$$(11)\qquad \Sigma A_k\left\{1-\prod_{i}^{(k)}\left[1+\frac{1}{A_i-A_k}\right]\right\}=\frac{1}{2}\,m(m-1)$$

<u>הערות נוספות:</u>

א. אם נוסיף קבוע λ לכל A_i נקבל

$$(11')\qquad \sum_{k}(A_k+\lambda)\left\{1-\prod_{i}^{(k)}\left[1+\frac{\ }{A_i-A_k}\right]\right\}=\frac{1}{2}\,m(m-1)$$

נחסר עכשיו (11) מ-(11') ונחלק ב-λ. נקבל

$$\sum_k \{ 1- \prod_i^{(k)} [1+\frac{1}{A_i-A_k}] \} = 0$$

ז.א.

$$\sum_k \prod_i^{(k)} [1+\frac{1}{A_i-A_k}] = m$$

ב. אם נשווה את מקדמי $\frac{1}{x^2}$ ב- (10) נקבל

$$\sum_k A_k^2 \{1- \prod_i^{(k)}[1+\frac{1}{A_i-A_k}] = (m-1)\sum_i A_i - \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$$

<u>ביבליוגרפיה:</u>

1) עבודת גמר של מר רפאל אליעזר שהוגשה לטכניון.

2) A. YOUNG, on Quant. Substit. Analysis, Proc. London Math. Soc. II, 28 (1928) 255.