$$x = .\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\ \ldots\ldots$$
$$y = .\ \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\ \ldots\ldots$$

ונגדיר
$$u = .\ \alpha_1\beta_2\alpha_1\beta_2\alpha_1\beta_2\ \ldots\ldots$$

ברור כי $0 \leqslant u \leqslant 1$ ולכן התאמנו לנקודה P נקודה מוגדרת של AB.
אבל אם מאידך נצא מכל נקודה של AB, נגיד $v = .\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\ldots$
נוכל להתאים לה נקודה של הרבוע ע"י

$$x = .\ \gamma_1\gamma_3\gamma_5\gamma_7\ \ldots\ldots$$
$$y = .\ \gamma_2\gamma_4\gamma_6\gamma_8\ \ldots\ldots$$

יצרנו איפוא התאמה חד-חד ערכית בין נקודות הרבוע לנקודות הצלע AB.

בעיה בקומבינטוריקה

נתן ליניאל, חיפה

א. נציג תחילה את העקרון הידוע בשם Inclusion - Exclusion (הכללה והוצאה מהכלל).

נניח שנתון צבור של N אברים כאשר ל- $N(a_1)$ מהם התכונה a_1, ל $N(a_2)$ התכונה a_2 וכדו'. כמו כן נסמן ב $N(a_1a_2)$ את מספר האברים בעלי התכונה a_1 ו a_2 גם יחד. ובאופן כללי יותר ב $N(a_i, a_j, a_u, \ldots a_m)$ את מספר האברים בעלי התכונות $a_i, a_j, a_u, \ldots a_m$.
יהי $N(\bar{a}_1)$ מספר האברים שאינם בעלי התכונה a_1 ובאופן כללי $N(\bar{a}_i, \bar{a}_j, \ldots \bar{a}_m)$ מספר האברים שאינם בעלי אף אחת מהתכונות $a_i, a_j, \ldots a_m$. אזי קיים

$$N(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \ldots \bar{a}_n) = N - \sum_{i=1}^{n} N(a_i) + \sum_{i,j=1}^{n} N(a_ia_j)$$
$$- \sum_{i,j,u=1}^{n} N(a_ia_ja_u) + \ldots$$

משואה זו ידועה בשם עקרון ה-
Inclusion and Excludion

לדוגמה אם בכתה 30 ילדים, מהם 18 בעלי עינים כחולות, 20 בעלי שערות בלונדיניות ו 12 בעלי שתי התכונות גם יחד אזי מספר הילדים שאין להם לא עינים כחולות ולא שערות בלונדיניות הוא $4 = 12 + (20 + 18) - 30$. הוכחת העקרון הנ"ל נובעת מחשבון פשוט.

מספר האברים הוא N. $N - \sum_{i=1}^{n} N(a_i)$ יתן לנו את מספר האיברים שאינם בעלי אף אחת המתכונות a_i, אולם אלה שהם בעלי שתי מהתכונות גם יחד הוסרו פעמים ולכן נצטרך להוסיפם. אולם בכך הוספנו פעמים את אלה שהם בעלי שלוש מהתכונות בעת ובעונה אחת ולכן נצטרך לחסרם, וכך הלאה.

ב. עתה נפתור בעזרת העקרון שהצגנו בעיה מענינת: מהו מספר האפשרויות שבהן ניתן לשים n מכתבים בתוך n מעטפות כך שאף מכתב לא יושם במעטפה המיועדת לו. נסמן מספר זה ב F_n.

פתרון ראשון: תהי a_i תכונה של סדור שבו המכתב ה i נמצא במעטפה הנכונה. סה"כ הסדורים האפשריים הוא $N = n!$. קל לראות ש $N(a_1) = (n-1)!$ ובאופן כללי $N(a_i) = (n-1)!$ כמו כן $N(a_i a_j) = (n-2)!$ $N(a_i a_j a_u) = (n-3)!$ וכד'.

$$F_n = N(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n) = N - \sum_{i=1}^{n} N(a_i) + \sum_{i,j=1}^{n} N(a_i a_j)$$

$$- \sum_{i,j,u=1}^{n} N(a_i a_j a_u) + \ldots$$

$$= N - \binom{n}{1} N(a_i) + \binom{n}{2} N(a_i a_j) - \binom{n}{3} N(a_i a_j a_n) + \ldots$$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)!$$

$$= n! \left[1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \right] = n!\, E_n$$

כש- E_n קרוב מאד (עבור n גדול) ל-e^{-1}.

<u>פתרון שני</u>: נניח שאת המכתב ה 1 הכנסנו למעטפה ה- k. אזי קיימות האפשרויות הבאות: המכתב ה- k מושם במעטפה ה-1 ושאר המכתבים מסודרים כך שאף מכתב אינו נמצא במעטפה הנכונה. מאחר שמלבד מכתב 1 ומכתב k (והמעטפות המתאימות) נותרו n-2 מכתבים ומעטפות הממלאים את תנאי הבעיה המקורית מספר הסדורים מסוג זה יהיה F_{n-2} (עבור k מסוים).

האפשרות האחרת היא שמכתב 1 נמצא במעטפה k ומכתב k אינו נמצא במעטפה ה-1. מהו מספר הסדורים מסוג זה?

לצורך חשוב מספר זה נסתכל בקבוצת המכתבים n,..u,..2,3
וקבוצת המעטפות u..,u-1,u+1, 1,2 . נוכל לראות את המעטפה 1
כאילו היא המעטפה המתאימה של מכתב u ואנחנו רוצים את אותם
הסדורים בהם אף מכתב מאלה אינו נמצא במעטפה המתאימה (ובכלל
זה מכתב u אינו נמצא במעטפה 1) . ברור שוב שמספר הסדורים
האלה יהיה F_{n-1}.

לכן עבור K מסוים, מספר הסדורים בהם מכתב 1 מושם במעטפה
ה-u הוא $F_{n-2} + F_{n-1}$. אולם u יכול לקבל n-1 ערכים שונים.
מכאן $F_n = (n - 1)\,(F_{n-2} + F_{n-1})$
אפשר לראות מיד כי $F_1=0$ $F_2=1$
וניתן לחשב את F_n עבור כל n . מאחר שקיבלנו עבור F_n (בפתרון
הראשון) את התוצאה $F_n = n!\,E_n$ נוכל ע"י השואת שתי
הנוסחאות לקבל קרובים רציונליים ל e . נדגים זאת בטבלה הבאה:

n	F_n	n!	$\frac{n!}{F_n}$	$\lvert\frac{n!}{F_n} - e\rvert$
1	0	1	-	--
2	1	2	2	7.10^{-1}
3	2	6	3	3.10^{-1}
4	9	24	2.66	6.10^{-2}
5	44	120	2.7272	1.10^{-2}
6	265	720	2.7169	$1.3.10^{-3}$
7	1854	5040	2.7184	$1.6.10^{-4}$
8	14833	40320	2.71826	$1.7.10^{-5}$
9	133496	362880	2.718282	2.10^{-7}