אלגוריתם הסתברותי לזיווג בגרף כללי

בדיוננו בזרימה ברשתות ראינו איך ניתן לפתור את בעיית הזיווג המושלם בגרף דו צדדי ע"י שימוש ברשתות זרימה. הערנו על כך שבעיית הזיווג המושלם בגרף כללי מצריכה כלים אלגורתמים אחרים, אך לא הצגנו אלגוריתם כזה. עתה נראה איך לפתור את הבעייה בגרף כללי בעזרת אלגוריתם הסתברותי יעיל. המפתח לפתרון הבעייה הוא המשפט שמופיע להלן. נתחיל בהגדרה הבאה:
מטריצת Tutte של גרף: יהיה G גרף ונתאים לו מטריצה ריבועית אנטי סימטרית A כדלקמן: השורות והעמודות ב A מתאימות לקדקדי G. אם $[i,j] \notin E$ אז $a_{ij} = 0$. אם $[i,j] \in E$ וכן $i < j$ אז $a_{ij} = x_{ij}$ וכן $a_{ji} = -x_{ij}$ כאשר x_{ij} הם משתנים פורמליים.

משפט (Tutte): יהיה G גרף ו A מטריצת Tutte שלו אז יש ב G זיווג מושלם אם ורק אם הפולינום $\det(A)$ איננו זהותית - 0.

הוכחה: החלק הקל להוכחה הוא שאם יש ב G זיווג מושלם אז $\det(A)$ איננו זהותית 0. ואכן במקרה זה נציב ערכי 0 לכל x_{ij} כשהצלע אינה בזיווג וערך 1 כשהיא בזיווג. לאחר סידור מחדש של השורות והעמודות המטריצה שבה כבר הוצבו הערכים הנ"ל נראית כך:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & \text{\Large 0} & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

והדטרמיננט שלה הוא - 1.
עתה נדון במקרה שבו אין ב G זיווג מושלם. נתבונן ב $\det(A)$ כפולינום במשתנים הפורמליים. כזכור, הגדרת הדטרמיננט היא:

$$\det(Z) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{sgn(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} z_{i\sigma(i)}$$

בפיתוח המתאים של $\det(A)$ נתעלם מהמחוברים השווים ל - 0 ונתרכז רק במחוברים שהם מונומים ב x_{ij}. כיצד נראה מונום כזה? עלינו לבחור בדיוק איבר אחד מכל שורה ומכל עמודה ב A ולכפול אותם. לכל בחירה כזו נתאים גם גרף מכוון של G. כך למשל אם $a_{\alpha\beta}$ (אשר שווה ל $x_{\alpha\beta}$ או ל $-x_{\beta\alpha}$) הוא אחד מן האיברים הנבחרים, נבנה צלע מכוונת מהקדקד α ב G לקדקד β בו.
היות שהאיברים השונים מ- 0 במטריצה A מתאימים לצלעות של G, אנו מקבלים אכן תת גרף מכוון של G, שבו מכל קדקד i יוצאת בדיוק צלע אחת (המתאימה לאיבר היחיד שבחרנו בשורה ה i) ונכנסת בדיוק צלע אחת (המתאימה לאיבר הנבחר בעמודה

ה- i). אין מניעה, אגב, שנבחר בצלע כלשהי בשני הכיוונים. כלומר, יש התאמה חח"ע בין המחוברים בפיתוח והאוסף $\mathcal{L}$ של התת-גרפים המכוונים הבאים של G: כל תת גרף ב $\mathcal{L}$ הוא אוסף של מעגלים מכוונים, זרים בקדקדים הפוגשים את כל קדקדי הגרף (וכאמור גם $\{(j\,i),(i\,j)\}$ נחשב לצורך זה כמעגל באורך 2). נתבונן בתת גרף $H\in\mathcal{L}$, ונזכור שאנו מניחים כי אין ב G זיווג מושלם.

שימו לב שבמעגל זוגי יש זיווג מושלם. מכיוון ש H גרף פורש, אילו היו כל המעגלים ב H בעלי אורך זוגי היה ב G זיווג מושלם בניגוד להנחתנו. יוצא אם כן שבכל $H\in\mathcal{L}$ יש מעגלים אי זוגיים. מכאן נרצה להסיק שאכן $\det(A)=0$ כפי שטענו. אנו נראה שבפיתוח של $\det(A)$ ניתן לסדר את האיברים זוגות זוגות כך שאם אחד מהם הוא u אז בן זוגו הוא $-u$ והטענה תנבע.

כאמור המחוברים ב $\det(A)$ הם בהתאמה חח"ע עם משפחת התת גרפים המכוונים $\mathcal{L}$. בכל $H\in\mathcal{L}$ נציין מעגל $C=C_H$ אי זוגי מסויים - נאמר את זה הכולל את הקדקד בעל האינדקס הנמוך ביותר הנמצא במעגל א"ז כלשהו ב H.

בן הזוג של H יהיה הגרף המכוון $H^*\in\mathcal{L}$ המתקבל ע"י היפוך כיווני הצלעות במעגל C_H. מכיוון שהמעגל C_H הוא מאורך אי זוגי, ומכיוון ש A אנטי סימטרית, יוצא שאם u הוא המחובר המתאים לגרף H אז ל H^* מתאים המחובר $-u$. נותר עוד לברר נקודה אחת. בנוסחת הדטרמיננט יש לכפול כל מחובר ב ±1 לפי סימנה של התמורה המתאימה σ. התמורה σ מורכבת ממעגלים $c_1,c_2,\ldots$, ו $\operatorname{sgn}(\sigma)=\prod\operatorname{sgn}(c_i)$, ואם c הוא המעגל שאת כיוונו הפכנו וקיבלנו את המעגל c^*, אז קל לוודא כי $\operatorname{sgn}(c)=\operatorname{sgn}(c^*)$, והסיבה היא שכתמורות c,c^* הן הופכיות, ולתמורות הופכיות יש אותו הסימן:

$$\operatorname{sgn}(\pi)\cdot\operatorname{sgn}(\pi^{-1})=\operatorname{sgn}(\pi\cdot\pi^{-1})=\operatorname{sgn}(id)=1$$

יוצא שבמקרה זה $det(A)\equiv 0$ כדרוש. התרגום של המשפט הנ"ל לאלגוריתם הסתברותי יעיל הוא די פשוט עתה, בהסתמך על הלמה האלגברית הבאה:

למה (Schwartz-Zippel): יהיה Q פולינום במשתנים $x_1,x_2,\ldots x_n$ ממעלה כוללת d, מעל שדה F, ונניח כי Q איננו זהותית 0. תהיה $S\subset F$ קבוצה סופית. נציג למשתנים x_i ערכים אקראיים מתוך הקבוצה S. ההסתברות ש Q יתאפס בהצבה כזו היא $\leq\frac{d}{|S|}$.

הוכחת הלמה: באינדוקציה על מספר המשתנים n. כאשר $n=1$ הטענה היא בפשטות שלפולינום במשתנה יחיד ממעלה d יש $\leq d$ שורשים.

צעד האינדוקציה: נציג

$$Q=Q_0(x_2,...,x_n)+x_1Q_1(x_2,...,x_n)+...+x_1^kQ_k(x_2,...,x_n)$$

כש $k\leq d$ וכן $\text{total}\deg(Q_i)\leq d-i$. את ההסתברות ש Q מתאפס בהצבה מקרית נעריך כך: אם $Q_k(r_2,...,r_n)=0$ (כש $r_i\in S$ הוא הערך המקרי של x_i וזה קורה בהסתברות של $\leq\frac{d-k}{|S|}$) אפילו לא נבדוק אם Q אכן מתאפס, ואילו אם $Q_k(r_2,...,r_n)\neq 0$ אז $Q(x_1,r_2,...,r_n)$ הוא פולינום ממעלה k במשתנה היחיד x_1, וההסתברות שיתאפס $\leq\frac{k}{|S|}$. יוצא

$$\Pr(Q(r_1,...,r_n)=0)\leq\frac{d-k}{|S|}+\frac{k}{|S|}=\frac{d}{|S|}$$

כפי שטענו.

<u>האלגוריתם:</u> הצב ערכים מקריים ל x_{ij} שבמטריצת Tutte מן התחום $\{1,...,2n\}$. אם למטריצה המתקבלת דטרמיננטה שונה מאפס הצהר "ב G יש זיווג מושלם" (בטענה

זו אף פעם אין טעות). אם הדטרמיננטה מתאפסת הצהר "כנראה אין ב G זיווג מושלם". ההסתברות לכך שההצהרה נכונה היא $\leq 1/2$. על מנת לצמצם את הסתברות השגיאה ל $\leq \epsilon$ חוזרים על הנ"ל $\log 1/\epsilon$ פעמים.